



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

2 2015
Số 452

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

2015
Xuân
Ất Mùi



Chúc Mừng Năm Mới

HÃY ĐẶT MUA TC THPT TẠI BƯU CỤC GẦN NHẤT!



Tính thông minh, lập trình chính xác

Công ty TNHH Catel

NHẬP KHẨU VÀ PHÂN PHỐI MÁY TÍNH CASIO, KIM TỬ ĐIỆN, TÂN TỬ ĐIỆN CÁC LOẠI

• Địa chỉ: 48 Hàng Vải, quận Hoàn Kiếm, thành phố Hà Nội; • Điện thoại: (04) 6267 3838; • Fax: (04) 6276 3838; • Website: www.catel.vn.



Thay thế trùng lặp, bùng sáng tạo



Dùng hàng thật, nổi bật phong cách

MÁY TÍNH CASIO



Fx-9860GII SD



Fx-570ES Plus



Fx-95ES Plus



Fx-570MS



JS-20TS



DR-140T

MÁY TÍNH CANON



F-789SGA



F-788dx



F-715SG



HS-20TG



TX-1210i III

KIM TỬ ĐIỆN



TÂN TỬ ĐIỆN



USB Transcend



USB Kingston



Chuột máy tính



Bàn phím máy tính



Bạn đọc của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ được tặng đến 10% khi mua hàng tại Website: www.catel.vn

HÃY ĐẶT MUA TC THTT TẠI BƯU CỤC GẦN NHẤT !



TRUNG HỌC CƠ SỞ

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP XÉT GIÁ TRỊ RIÊNG

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Một đa thức nhiều biến mà các biến có thể hoán vị vòng quanh hoặc các biến có vai trò như nhau thì một phương pháp hiệu quả khi phân tích đa thức đó thành nhân tử là phương pháp xét giá trị riêng.

Phương pháp xét giá trị riêng như sau:

- Xác định dạng nhân tử thường là tổng hoặc hiệu của hai biến.

- Xác định dạng của đa thức (dựa theo bậc và tích các nhân tử tìm được).

- Chọn các giá trị riêng tùy ý của các biến (vì đa thức đó đúng với mọi giá trị của các biến) sao cho các nhân tử khác 0 để tìm các hệ số.

Thí dụ 1. Phân tích đa thức

$A = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$ thành nhân tử.

Lời giải. - Thay $x = y$ thì

$$A = y^2(y-z) + y^2(z-y) = 0 \text{ nên } A: (x-y).$$

- Hoán vị vòng quanh $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ thì A không đổi nên $A: (y-z)$ và $A: (z-x)$.

- Do A và $(x-y)(y-z)(z-x)$ có cùng bậc 3 đối với các biến nên $A = k(x-y)(y-z)(z-x)$ (với k là hằng số).

- Chọn $x = 0, y = 1, z = 2$ ta được

$$0 + 1.2 + 4(-1) = k(-1)(-1).2 \Rightarrow k = -1.$$

Vậy $A = -(x-y)(y-z)(z-x)$.

Thí dụ 2. Phân tích đa thức

$B = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ thành nhân tử.

Lời giải. - Thay $x = -y$ thì $B = 0$ nên $B: (x+y)$.

- Các biến x, y, z có vai trò như nhau nên $B: (y+z)$ và $B: (z+x)$.

- Do B và $(x+y)(y+z)(z+x)$ có cùng bậc 3 nên $B = k(x+y)(y+z)(z+x)$ (với k là hằng số).

- Chọn $x = 0, y = z = 1$ ta được $8 - 1 - 1 = k.1.2.1 \Rightarrow k = 3$. Vậy $B = 3(x+y)(y+z)(z+x)$.

Thí dụ 3. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$C = x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 - x^3 - y^3 - z^3 + 4xyz$$

Lời giải. - Thay $x = y + z$ thì $C = 0$ nên

$$C: (x - y - z).$$

- Các biến x, y, z có vai trò như nhau nên $C: (y - z - x)$ và $C: (z - x - y)$.

- Do C và $(x-y-z)(y-z-x)(z-x-y)$ có cùng bậc 3 nên $C = k(x-y-z)(y-z-x)(z-x-y)$ (với k là hằng số).

- Chọn $x = 0, y = 1, z = 2$ ta được

$$4 + 2 - 1 - 8 = k(-3)(-1).1 \Rightarrow k = -1.$$

$$\text{Vậy } C = -(x-y-z)(y-z-x)(z-x-y).$$

Thí dụ 4. Phân tích đa thức

$D = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ thành nhân tử.

Lời giải. - Thay $x = y$ thì $D = 0$ nên $D: (x-y)$.

- Hoán vị vòng quanh $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ thì D không đổi nên $D: (y-z)$ và $D: (z-x)$.

- Do D là đa thức bậc 5 và đẳng cấp đối với các biến nên $D = (x-y)(y-z)(z-x)[a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + yz + zx)]$ (với a, b là hằng số).

- Chọn $x = 2, y = 1, z = 0$ ta được

$$1 + 1 - 32 = 1.1.(-2)(5a + 2b) \Rightarrow 5a + 2b = 15 \quad (1)$$

Chọn $x = 1, y = -1, z = 0$ ta được

$$32 - 1 - 1 = 2(-1)(-1)(2a - b) \Rightarrow 2a - b = 15 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 5, b = -5$. Vậy

$$D = 5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Thí dụ 5. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$E = x^3 + y^3 + z^3 - xy(x+y) - yz(y+z) - zx(z+x) - 6xyz$$

Lời giải. - Thay $x = -y - z$ thì $E = 0$ nên

$$E: (x + y + z).$$

(Xem tiếp trang 4)

DIỄN ĐÀN

DAY HỌC TOÁN



TỪ Ý TƯỞNG CỦA EULER

NGÔ ĐỨC MINH

(GV THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, Hải Phòng)

★ Bài toán 1. Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp $(O; R)$ và đường tròn nội tiếp $(I; r)$. Gọi $OI = d$, chứng minh rằng:

$$d^2 = R^2 - 2Rr. \quad (*)$$

Lời giải. Kéo dài AI cắt đường tròn $(O; R)$ tại M ; kẻ đường kính MN ; AB tiếp xúc với $(I; r)$ tại K . Thế thì

$\triangle AKI \sim \triangle NCM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IA}{MN} = \frac{IK}{MC}$$

$$\Rightarrow IA \cdot MC = IK \cdot MN = 2Rr.$$

Mặt khác, $\widehat{CIM} = \widehat{ICM} \left(= \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ACB}}{2} \right)$ nên

$\triangle CMI$ cân tại M và $MI = MC \Rightarrow IA \cdot IM = 2Rr$.

Vì I nằm trong đường tròn $(O; R)$ nên theo phương tích của đường tròn ta có $IA \cdot IM = R^2 - d^2$. Từ đó suy ra $R^2 - d^2 = 2Rr$ hay $d^2 = R^2 - 2Rr$. $\square$

Lời bình:

- Hệ thức $(*)$ được gọi là hệ thức Euler trong tam giác.

- Hệ thức Euler xác định mối quan hệ giữa khoảng cách của hai tâm với hai bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp trong một tam giác.

- Một câu hỏi rất tự nhiên là: “Liệu có một hệ thức Euler thứ hai xác định mối quan hệ giữa khoảng cách của hai tâm với hai bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn bàng tiếp trong một tam giác hay không?”

Từ câu hỏi này ta đi tới Bài toán 2.

★ Bài toán 2. Cho tam giác ABC , gọi $(O; R)$, $(I; r)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp, đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác và $OI = d$. Chứng minh rằng: $d^2 = R^2 + 2Rr$.

Hướng dẫn. Tương tự như cách gọi các điểm và cách chứng minh Bài toán 1, ta được

$\triangle AKI \sim \triangle NCM$ (g.g) $\Rightarrow IA \cdot MC = 2Rr$;

$$\widehat{ICM} = \widehat{MIC} = \frac{180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C})}{2}$$

nên $\triangle CMI$ cân tại M

và $MI = MC$

$$\Rightarrow IA \cdot IM = 2Rr.$$

Do I nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ nên theo phương tích của đường tròn ta có $IA \cdot IM = d^2 - R^2$.

Từ đó suy ra $d^2 - R^2 = 2Rr$

$$\text{hay } d^2 = R^2 + 2Rr. \quad \square$$

Lời bình:

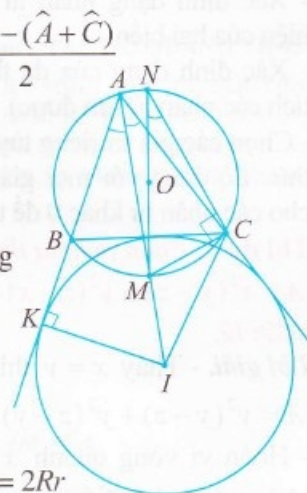
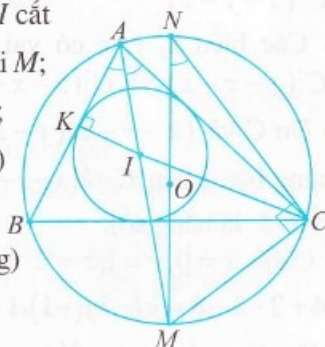
Từ ý tưởng của Euler, phải chăng có một hệ thức xác định mối quan hệ giữa khoảng cách của hai tâm và hai bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp hay đường tròn bàng tiếp trong một tứ giác. Ta đi tới Bài toán 3.

★ Bài toán 3. Cho tứ giác $ABCD$ vừa nội tiếp đường tròn $(O; R)$, vừa ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$ và $OI = d$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}. \quad (**)$$

Lời giải.

• Trước hết ta cần nhận biết được dấu hiệu của một tứ giác vừa có đường tròn ngoại tiếp, vừa có đường tròn nội tiếp.



Một tứ giác vừa nội tiếp được một đường tròn vừa ngoại tiếp được một đường tròn khác khi và chỉ khi tứ giác đó có tổng hai góc đối diện bằng 180° và tổng hai cặp cạnh đối bằng nhau. Đây là dấu hiệu quen thuộc, việc chứng minh xin dành cho bạn đọc.

• Trở lại bài toán.

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AI và CI với đường tròn $(O; R)$. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ nên E, F là điểm chính giữa của hai cung $\widehat{BD}$ bù nhau. Bởi vậy, EF là đường kính của $(O; R)$. Áp dụng tính chất đường trung tuyến vào $\triangle IEF$, ta có:

$$\begin{aligned} IE^2 + IF^2 &= 2OI^2 + \frac{1}{2}EF^2 \\ &= 2d^2 + \frac{1}{2}(2R)^2 \\ &= 2(d^2 + R^2). \end{aligned}$$

Do I nằm trong đường tròn $(O; R)$ nên

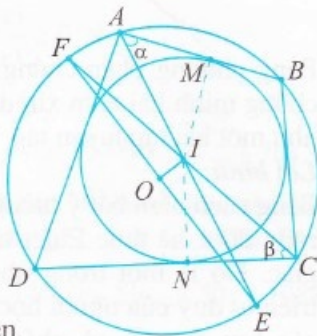
$$IA \cdot IE = IC \cdot IF = R^2 - d^2 \quad (\text{phương tích của đường tròn}).$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} &= \frac{2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} \\ &= \frac{IE^2}{(IA \cdot IE)^2} + \frac{IF^2}{(IC \cdot IF)^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IC^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Gọi M, N lần lượt là các tiếp điểm của AB và CD với đường tròn $(I; r)$. Đặt $\widehat{BAD} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{IAM} = \alpha$; $\widehat{BCD} = 2\beta \Rightarrow \widehat{ICN} = \beta$ và

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90^\circ. \text{ Thế thì } \sin \alpha = \frac{IM}{IA} = \frac{r}{IA} \\ \Rightarrow \sin^2 \alpha &= \frac{r^2}{IA^2}; \sin \beta = \frac{IN}{IC} = \frac{r}{IC} \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{r^2}{IC^2} \\ \Rightarrow \cos^2 \alpha &= \frac{r^2}{IC^2} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{r^2}{IA^2} + \frac{r^2}{IC^2} = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IC^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}. \quad \square$$



Lời bình:

Như vậy, mối quan hệ giữa “ d, R, r ” được mở rộng thành công từ một tam giác cho một tứ giác. Không chỉ như vậy, công thức (**) vẫn còn đúng khi mở rộng cho “đường tròn bàng tiếp của tứ giác”. (Ta hiểu đường tròn “bàng tiếp” trong góc A của tứ giác lồi $ABCD$ là đường tròn nằm trong góc A và tiếp xúc với tất cả các cạnh kéo dài của tứ giác.)

❖ **Bài toán 4.** Cho tứ giác $ABCD$ vừa nội tiếp đường tròn $(O; R)$, vừa bàng tiếp đường tròn $(I; r)$

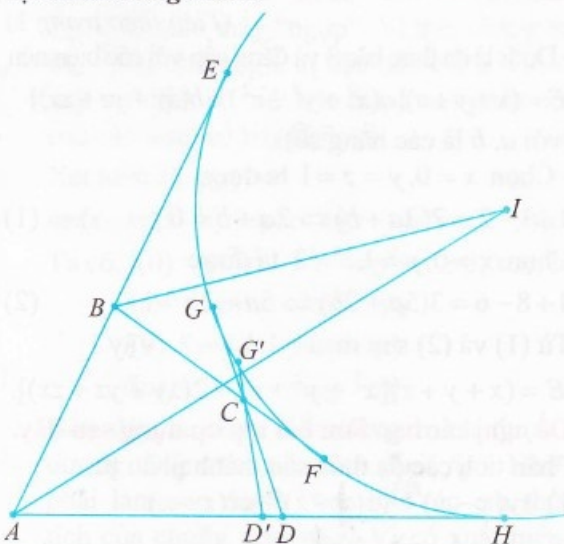
và $OI = d$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{(d+R)^2} + \frac{1}{(d-R)^2} = \frac{1}{r^2}$.

Hướng dẫn.

• Trước hết ta cần nhận biết được dấu hiệu của một tứ giác vừa có đường tròn ngoại tiếp, vừa có đường tròn bàng tiếp.

Một tứ giác vừa có đường tròn ngoại tiếp, vừa có đường tròn bàng tiếp khi và chỉ khi tứ giác đó có tổng hai góc đối diện bằng 180° và hiệu hai cặp cạnh đối bằng nhau.

Ta sẽ chứng minh dấu hiệu tứ giác có đường tròn bàng tiếp khi và chỉ khi hiệu hai cặp cạnh đối bằng nhau.



• Giả sử $(I; r)$ là đường tròn bàng tiếp của tứ giác $ABCD$, tiếp xúc với các cạnh kéo dài của tứ giác $ABCD$ tại E, F, G, H như hình vẽ. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

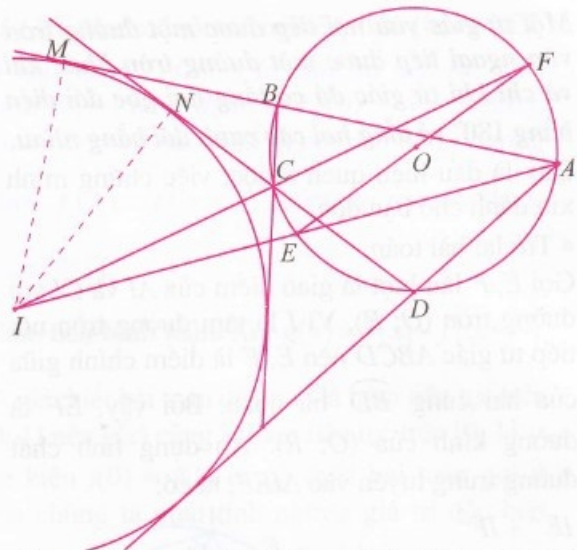
$$AB + BC = AB + BF - CF = AB + BE - CF = AE - CF; \quad \square$$

🔗 $AD+DC=AD+DG-CG=AD+DH-CG=AH-CG$
 $\Rightarrow AB+BC=AD+DC \Rightarrow AB-CD=AD-BC$.
 • Ngược lại, giả sử $AB-CD=AD-BC$. Gọi I là giao điểm của phân giác trong của góc A và phân giác ngoài của góc B của tứ giác $ABCD$ (hai phân giác này cắt nhau khi và chỉ khi $\widehat{EAI} \neq \widehat{EBI} \Leftrightarrow \widehat{BAD} \neq \widehat{EBC} \Leftrightarrow AD, BC$ không song song). Khi đó: $IE=IF=IH=r$ (E, F, H lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ I tới AB, BC, AD).

Như vậy đường tròn $(I; r)$ tiếp xúc với AB, BC, DA lần lượt tại E, F, H . Dựng đường thẳng qua C tiếp xúc $(I; r)$ tại G' và cắt AD tại D' . Khi đó $(I; r)$ là đường tròn bàng tiếp tứ giác $ABCD'$ nên:
 $AB-CD'=AD'-BC \Leftrightarrow AB+BC=AD'+D'C$
 $\Leftrightarrow AD+DC=AD'+D'C$
 $\Leftrightarrow AD'+D'D+DC=AD'+D'C$ (như hình vẽ)
 $\Leftrightarrow D'D+DC=D'C \Leftrightarrow D \equiv D'$.

Vậy $(I; r)$ là đường tròn bàng tiếp tứ giác $ABCD$.

• Trở lại Bài toán.



Bằng phương pháp chứng minh tương tự, việc chứng minh bài toán xin dành cho bạn đọc, coi như một bài tập luyện tập.

Lời bình:

Bằng cách nắm bắt ý tưởng của Euler, ta đã mở rộng được hệ thức Euler trong tam giác cho tứ giác. Đó là một trong những con đường phát triển tư duy của người học toán. Mong các bạn các bạn tìm tòi và phát triển cho những bài toán khác. Chúc các bạn thành công.

PHÂN TÍCH ĐA THỨC...

(Tiếp theo trang 1)

- Do E là đa thức bậc 3 và đẳng cấp với các biến nên
 $E=(x+y+z)[a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)]$
 (với a, b là các hằng số).

- Chọn $x=0, y=z=1$ ta được

$$1+1-2=2(2a+b) \Rightarrow 2a+b=0 \quad (1)$$

Chọn $x=0, y=1, z=2$ ta được

$$1+8-6=3(5a+2b) \Rightarrow 5a+2b=1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a=1, b=-2$. Vậy

$$E=(x+y+z)[x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)].$$

Đề nghị các bạn làm bài tập áp dụng sau đây.

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$

2) $x^3+y^3+z^3-3xyz$

3) $x(x+2y)^3-y(y+2x)^3$

4) $(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$

5) $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

6) $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

7) $x^4+y^4+z^4-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

8) $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$

9) $x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+2xyz$

10) $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$

11) $(x+y+z)^3-4(x^3+y^3+z^3)-12xyz$

12) $x(y^2+z^2+yz)+y(z^2+x^2+zx)+z(x^2+y^2+xy)$

13) $(x+y)(x+z)(y-z)+(y+z)(y+x)(z-x)$
 $+(z+x)(z+y)(x-y)$

14) $xy(z+t)(x-y)+yz(x+t)(y-z)+zx(y+t)(z-x)$

15) $(x+y)(x^2-y^2)+(y+z)(y^2-z^2)+(z+x)(z^2-x^2)$

16) $x^3(z-y^2)+y^3(x-z^2)+z^3(y-x^2)+xyz(xy-z-1)$

17) $x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)^2$
 $+(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

18) $x(y+z)^2(y-z)+y(z+x)^2(z-x)+z(x+y)^2(x-y)$

19) $x^2y^2(x-y)+y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)$

20) $x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)-2xyz-x^3-y^3-z^3$

21) $(x+y+z)^3-(x+y-z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3$

Hướng dẫn giải ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9 TP. HÀ NỘI

NĂM HỌC 2013 - 2014

(Đề thi đăng trên TH&TT số 451, tháng 1 năm 2015)

Bài 1. 1) Từ giả thiết ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0; c=2014 \\ b+c=0; a=2014. \text{ Vậy } M = \frac{1}{2014^{2013}}. \\ c+a=0; b=2014 \end{cases}$$

2) Ta có $2n^2 - 6n + 2 = 2[n(n-3) + 1]$. Vì $n(n-3)$ chẵn nên $n(n-3) + 1 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Suy ra $5^{2n^2-6n+2} - 12 = 25^{2k+1} + 1 - 13 \vdots 13$. Vì vậy $5^{2n^2-6n+2} - 12$ nguyên tố $\Leftrightarrow 5^{2n^2-6n+2} - 12 = 13$
 $\Leftrightarrow n(n-3) + 1 = 1 \Leftrightarrow n = 0$ hoặc $n = 3$.

Bài 2. 1) ĐK: $x \geq -\frac{1}{2}$. Đặt $t-1 = \sqrt{2x+1}, t \geq 1$

ta có $x^2 - 2x = 2t; t^2 - 2t = 2x$

$$\Rightarrow (x-t)(x+t) = 0 \Leftrightarrow x = t \text{ (vì } x+t > 0 \text{)}.$$

$$\text{Suy ra } x-1 = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

2) Từ PT thứ nhất suy ra $4z - 5 = (x-y)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow z \geq \frac{5}{4}; \text{ Từ PT thứ hai suy ra } (4z-5)(z-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 \leq z \leq \frac{5}{4}. \text{ Do đó } z = \frac{5}{4}, \text{ suy ra } x = y = 0.$$

Bài 3. Do vai trò của a, b, c như nhau, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, khi đó $2 \leq a \leq 4$. Ta có

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 36}{2}.$$

Mặt khác, vì $bc \geq 0$ nên

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b+c)^2 - 2bc \leq a^2 + (6-a)^2 = 2a^2 - 12a + 36 = 2[(a-2)(a-4) + 10] \leq 20.$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng 20

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq b; a \geq c; bc = 0 \\ (a-2)(a-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4; b = 2; c = 0 \\ a = 4; b = 0; c = 2 \end{cases}$$

Khi đó P đạt giá trị lớn nhất bằng 28.

Đẳng thức xảy ra khi $(a; b; c) = (4; 2; 0)$ và các hoán vị của nó.

Bài 4. a) Ta có $\widehat{IBM} = \widehat{IBC} + \widehat{CBM}$

$$= \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2};$$

$$\widehat{BIM} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$$

$$= \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{IBM} = \widehat{BIM}$$

$\Rightarrow \triangle IMB$ cân tại M . Tương tự, $\triangle IMC$ cân tại M .

$$\text{b) Ta có } \sin \frac{\widehat{BAC}}{2} = \sin \widehat{BCM} = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MI} \quad (1)$$

(do $MP \perp BC$ và $MI = MC$);

$\triangle MBN$ vuông tại B , có $MP \cdot MN = MB^2 = MI^2$

$$\Rightarrow \frac{MP}{MI} = \frac{MI}{MN} \quad (2) \Rightarrow \triangle MPI \sim \triangle MIN \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \frac{MI}{MN} = \frac{IP}{IN} \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } \sin \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{IP}{IN}.$$

c) Ta có $AB + AC = 3BC$

$$\Leftrightarrow \frac{AB + AC - BC}{2} = BC$$

$$\Leftrightarrow AE = BC;$$

$$\triangle IAE \sim \triangle MCP \text{ (g.g)}$$

$$\text{suy ra } \frac{MP}{IE} = \frac{CP}{AE} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow IE = 2MP.$$

Gọi F là trung điểm của IK ,

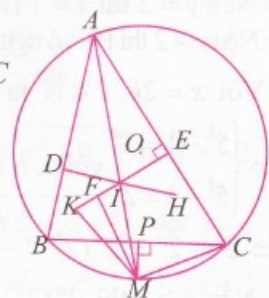
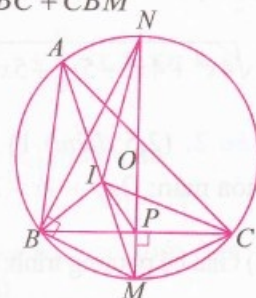
$\triangle MCP = \triangle MIF$ (c.g.c) do

$$MC = MI; \widehat{PMC} = \widehat{EIA} = \widehat{MIF}; MP = IF = \frac{1}{2}IE$$

$$\Rightarrow \widehat{IFM} = \widehat{MPC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle IMK \text{ cân tại } M$$

$\Rightarrow MK = MI$. Tương tự, $MH = MI$. Suy ra $MB = MC = MH = MK = MI$.

Vậy B, C, H, K cùng thuộc một đường tròn. 



ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH HƯNG YÊN

NĂM HỌC 2013 - 2014

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (1,5 điểm) Cho $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = (4x^5 + 4x^4 - x^3 + 1)^{19} + (\sqrt{4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x + 3})^3 + \left(\frac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+2x}}\right)^{2014}$

Câu 2. (2,5 điểm) 1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2xy + 4x + 2y + 1 > 5x^2 + 2y^2$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^3 - y^3 = x + 2y \\ 52x^2 - 82xy + 21y^2 = -9 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm) 1) Cho parabol $(P): y = -2x^2$ và đường thẳng $(d): y = ax + a - 2$. Tìm số nguyên a sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB = \sqrt{5}$.

2) Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + 2b + 3c \geq 10 \end{cases}$, chứng minh rằng:

$$a + b + c + \frac{3}{4a} + \frac{9}{8b} + \frac{1}{c} \geq \frac{13}{2}.$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc cạnh AC , E thuộc cạnh AB). Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Các đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI và tam giác CDI cắt nhau tại K (K khác I). Gọi M là giao điểm của DE và BC . Chứng minh rằng:

- 1) Các điểm A, E, H, K, D thuộc một đường tròn.
- 2) A, K, I thẳng hàng.
- 3) $\widehat{MEC} = \widehat{MKC}$.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho 19 điểm nằm trong hay nằm trên cạnh của một lục giác đều có cạnh bằng 4cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai trong số 19 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên) giới thiệu

Bài 5. 1) Ta có $5^x - 2^y = 1 \Leftrightarrow 2^y = 5^x - 1$.

• Với $x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ ta có:

$$2^y = 4(5^{2k} + 5^{2k-1} + \dots + 5 + 1).$$

+ Nếu $y < 2$ thì PT vô nghiệm.

+ Nếu $y = 2$ thì $x = 1$ (thỏa mãn).

+ Nếu $y > 2$ thì PT vô nghiệm vì VT: 8 còn VP $\not\equiv 8$.

• Với $x = 2k, k \in \mathbb{N}$ ta có $2^y = (5^k - 1)(5^k + 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^k - 1 = 2^a \\ 5^k + 1 = 2^b \end{cases} \text{ với } a, b \in \mathbb{N}; 0 \leq a < b; a + b = y$$

$$\Rightarrow 2^b - 2^a = 2^a(2^{b-a} - 1) = 2.$$

+ Nếu $a \geq 2$ thì $2^a(2^{b-a} - 1) : 4$, vô lí.

+ Nếu $a = 1; a = 0$ thì $5^k = 3; 5^k = 2$, vô lí.

• Vậy $(x; y) = (1; 2)$.

2) • **Nhận xét:** Trong nhiều trường hợp, $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ suy biến không còn là lục giác nên sau đây ta thống nhất gọi là đa giác $M_1 \dots M_6$.

• Gọi O là tâm của lục giác đều $ABCDEF$ (kí hiệu là $\mathcal{L}$). Nếu $P \equiv O$ thì đa giác $M_1 \dots M_6 \equiv \mathcal{L}$, ta có đpcm.

• Nếu P thuộc một trong ba đường chéo lớn của $\mathcal{L}$, $P \neq O$ thì P thuộc một trong sáu đoạn OA, OB, OC, OD, OE, OF . Giả sử $P \in OD$, khi đó hai tia AP, DP lần lượt đi qua đỉnh D , đỉnh A của $\mathcal{L}$ và ta có $M_1 \equiv D, M_4 \equiv A$. Còn lại 4 tia, cắt nhiều nhất 4 cạnh của $\mathcal{L}$. Như vậy tồn tại ít nhất hai cạnh AB, AF của $\mathcal{L}$ không chứa các điểm $M_1, \dots, M_6$. Xét tam giác có một cạnh là AB và một cạnh là M_4M_i của đa giác $M_1 \dots M_6$ gần AB nhất ($M_4 \equiv A$), ta luôn có $\widehat{M_4BM_i} > 90^\circ \Rightarrow M_4M_i > AB = 1$.

• Nếu P không thuộc ba đường chéo lớn của $\mathcal{L}$ thì P nằm trong một trong sáu tam giác đều của $\mathcal{L}$ mà ba đường chéo lớn chia ra. Giả sử P nằm trong $\triangle ODE$. Như vậy, tồn tại ít nhất cạnh AB của $\mathcal{L}$ không chứa các điểm $M_1, \dots, M_6$. Khi đó M_4M_5 luôn là một cạnh của đa giác $M_1 \dots M_6$ và $\widehat{ABM_5M_4}$ là tứ giác luôn có $\widehat{ABM_5} > 90^\circ$;

$$\widehat{BAM_4} > 90^\circ \Rightarrow M_4M_5 > AB = 1.$$

ĐƯƠNG TÚ (Hà Nội) giới thiệu



PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT

ĐÀO VĂN CHÁNH

(GV THPT Trần Quốc Tuấn, Phú Yên)

Phương trình thuần nhất bậc hai đối với các ẩn x, y là phương trình (PT) có dạng $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ là các hằng số.

Cách giải: Ta xét trường hợp $y = 0$ có phải là nghiệm hay không. Nếu $y \neq 0$, chia cả hai vế PT cho y^2 ta có PT (có bậc tối đa là 2) đối với $t = \frac{x}{y}$: $at^2 + bt + c = 0$. Giải PT này, ta tính được

thương số $\frac{x}{y}$. Cũng có thể làm tương tự với x .

Phương trình thuần nhất bậc ba đối với các ẩn x, y là PT có dạng $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ là các hằng số.

Cách giải: Ta xét trường hợp $y = 0$ có phải là nghiệm hay không. Nếu $y \neq 0$, chia cả hai vế PT cho y^3 ta có PT (có bậc tối đa là 3) đối với $t = \frac{x}{y}$: $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$. Giải PT này, ta tính

được thương số $\frac{x}{y}$. Cũng có thể làm tương tự với x .

Bất phương trình (BPT) có định nghĩa và cách giải tương tự.

Điều đáng lưu ý là các PT và BPT dạng này không đề cập cụ thể trong Sách giáo khoa, nhất là PT, BPT thuần nhất bậc 3, cho nên đa số học sinh sẽ rất lúng túng khi gặp các dạng này. Bài viết này nhằm giúp đỡ học sinh bớt lúng túng khi gặp các dạng đó trong các kỳ thi tuyển sinh vào Đại học, Cao Đẳng.

★**Thí dụ 1.** (Khối A-2011). Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 & (1) \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Từ PT (2), bằng cách đưa về

$(xy - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0$ dễ dàng suy ra $xy = 1$

hoặc $x^2 + y^2 = 2$. Nếu $xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$, thay vào

(1), ta dễ thấy $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

(Nhưng đến đây nếu $x^2 + y^2 = 2$, học sinh nào không thấy được rằng khi thay số 2 trong PT (1) bởi $x^2 + y^2$, ta được **phương trình thuần nhất bậc 3** thì sẽ rất khó khăn cho việc giải tiếp theo).

Với $x^2 + y^2 = 2$, ta có

$(1) \Leftrightarrow 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - (x^2 + y^2)(x + y) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 2y^3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 - 4\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 5\frac{x}{y} - 2 = 0$

(do $y = 0 \Rightarrow x = 0$, không thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$)

hay $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$ (với $t = \frac{x}{y}$) $\Leftrightarrow t = 1$

hoặc $t = 2$.

(Thường thì ta hy vọng sẽ giải được PT bậc 3 bằng máy tính, có nghiệm tương đối đẹp).

Nếu $t = 1 \Leftrightarrow x = y$, thay vào (1) ta có

$4y^3 - 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0; y = \pm 1$.

Nếu $t = 2 \Leftrightarrow x = 2y$, thay vào PT (1) ta có

$15y^3 - 6y = 0 \Leftrightarrow y = 0; y = \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Việc kết luận nghiệm xin dành cho bạn đọc.

★**Thí dụ 2.** (Khối B-2012). Giải bất phương trình $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}$.

Lời giải.

ĐK: $x \geq 0, x^2 - 4x + 1 \geq 0$.

Đặt $a = x + 1, b = \sqrt{x^2 - 4x + 1} \Rightarrow a^2 - b^2 = 6x$

$\Rightarrow 3\sqrt{x} = \sqrt{\frac{9}{6}(a^2 - b^2)}, (a \geq b \geq 0)$.

Lúc đó BPT trở thành

$$a+b \geq \sqrt{\frac{9}{6}(a^2-b^2)} \Leftrightarrow a^2-4ab-5b^2 \leq 0 (*)$$

Nếu $b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow x=-1$ (không thỏa mãn).

Nếu $b \neq 0$ thì BPT (*) trở thành

$$t^2-4t-5 \leq 0 \text{ (với } t = \frac{a}{b} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}} > 0)$$

$$\Leftrightarrow 0 < t \leq 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-4x+1} \geq \frac{1}{5}(x+1) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty).$$

Kết hợp với ĐK ta có đáp số

$$S = \left[0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty). \quad \square$$

★ **Thí dụ 3.** (Khối A-2010). *Giải bất phương trình*

$$\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \geq 1.$$

Lời giải. ĐK: $x \geq 0$.

Nhận xét rằng $2(x^2-x+1)-1=2x^2-2x+1 > 0$

$\Rightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên mẫu số âm.

Vậy BPT đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} x-\sqrt{x} &\leq 1-\sqrt{2(x^2-x+1)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)} &\leq 1-x+\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Đặt $a=1-x, b=\sqrt{x} \Rightarrow a^2+b^2=x^2-x+1$.

Vậy BPT trên trở thành

$$\sqrt{2(a^2+b^2)} \leq a+b \Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a=b$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=1-x \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn BPT).}$$

★ **Thí dụ 4.** (Khối D-2013). *Giải phương trình*

$$2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1-\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x-2\sqrt{x}+2).$$

Lời giải. ĐK: $x \in (0;1)$. BPT tương đương với

$$x^2 = (x-2\sqrt{x}+2)(1-\sqrt{x}) \Leftrightarrow x^2 = x(1-\sqrt{x}) + 2(1-\sqrt{x})^2.$$

Nếu đặt $a=1-\sqrt{x} > 0$ thì ta có PT thuần nhất

$$x^2 = ax + 2a^2 \Leftrightarrow (x-2a)(x+a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=2a \Leftrightarrow x=2(1-\sqrt{x}) \Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}.$$

★ **Thí dụ 5.** (Cao đẳng 2011). *Giải phương trình*

$$4^x - 3.2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4^{1+\sqrt{x^2-2x-3}} < 0.$$

Hướng dẫn. ĐK: $x^2-2x-3 \geq 0$. BPT tương

đương với $4^x - 3.2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4.4^{\sqrt{x^2-2x-3}} < 0$.

Đặt $a=2^x, b=2^{\sqrt{x^2-2x-3}}$ thì $a > 0, b > 0$ và BPT trở thành

$$a^2 - 3ab - 4b^2 < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < 4 \Leftrightarrow x < 2 + \sqrt{x^2-2x-3}.$$

Đây là BPT cơ bản của chương trình lớp 10, bạn đọc tự giải tiếp.

★ **Thí dụ 6.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + 5y^2 - 2x + 10y = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) \\ (x-1)^2 + 5(y+1)^2 = 6 \end{cases}$$

Đặt $a=x-1, b=y+1$ thì hệ trên trở thành

$$\begin{cases} a^3 - 12a = b^3 - 12b \\ a^2 + 5b^2 = 6 \end{cases}$$

Ta có $a^3 - b^3 - 12(a-b) = 0$

$$\Rightarrow a^3 - b^3 - 2(a^2 + 5b^2)(a-b) = 0 \quad (\text{PT thuần nhất bậc 3}) \Rightarrow a^3 - 2a^2b + 10ab^2 - 9b^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 10t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (với } t = \frac{a}{b}).$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 10t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (với } t = \frac{a}{b}).$$

Suy ra $a=b$. Việc giải còn lại dành cho bạn đọc.

★ **Thí dụ 7.** *Giải phương trình*

$$\sqrt{x-5}(\sqrt{x}-\sqrt{x-5})^3 = 2.$$

Lời giải. ĐK: $x \geq 5$.

Đặt $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{x-5}, (a > b \geq 0)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} b(a-b)^3 = 2 \\ a^2 - b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(a-b)^3 = 2 \\ (a-b)^2(a+b)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b(a-b)}{(a+b)^2} = \frac{2}{25} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 9 \text{ hoặc } \frac{a}{b} = \frac{3}{2}.$$

Từ đó tìm được các nghiệm của PT đã cho là

$$x=9, x=\frac{81}{16}. \quad \square$$

(Xem tiếp trang 27)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

b) Ta có $y' = mx^2 + 2(m-2)x + m-1$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-2)x + m-1 = 0 \quad (*)$$

Để $x_{CD} < x_{CT}$ thì $m > 0$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT(*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = (m-2)^2 - m(m-1) > 0$

$$\Leftrightarrow 4 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}. \text{ Khi đó}$$

$$x_1 = x_{CD} = \frac{2-m-\sqrt{4-3m}}{m}; x_2 = x_{CT} = \frac{2-m+\sqrt{4-3m}}{m}.$$

$$\text{Ta có } x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2-m+\sqrt{4-3m}}{m} < 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-3m} < 2m-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-2 > 0 \\ 4-3m < (2m-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 4m^2 - 5m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{5}{4}.$$

$$\text{Đáp số: } \frac{5}{4} < m < \frac{4}{3}.$$

Câu 2. PT $\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0.$$

$$\text{Đáp số: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 3. Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ và

$$\text{có } f'(x) = \frac{2-m\sqrt{x}}{2(1+x)\sqrt{x}\sqrt{x+1}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{m} \Leftrightarrow x = \frac{4}{m^2} \in (0;4) \quad (\text{do } m > 1).$$

Từ bảng biến thiên suy ra

$$\max_{[0;4]} f(x) = f\left(\frac{4}{m^2}\right) = \sqrt{m^2 + 4}.$$

$$\text{Theo giả thiết } \sqrt{m^2 + 4} < 3 \Rightarrow m < \sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } 1 < m < \sqrt{5}.$$

Câu 4. a) Ta có $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^8$

$$= \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot (x^2)^{8-k} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot (-2)^k \cdot x^{16-3k}$$

Hệ số của x^4 tương ứng với $16-3k=4 \Leftrightarrow k=4$.

Do đó hệ số cần tìm là $C_8^4 \cdot (-2)^4 = 1120$.

b) TH1: $1 \leq a < b < c < d$: Mỗi cách chọn ra 4 chữ số từ tập $\{1,2,\dots,9\}$ cho ta đúng một số thỏa mãn. Trong trường hợp này có C_9^4 số.

TH2: $1 \leq a < b < c = d$: Mỗi cách chọn ra 3 chữ số từ tập $\{1,2,\dots,9\}$ cho ta đúng một số thỏa mãn. Trong trường hợp này có C_9^3 số.

Vậy có tất cả $C_9^4 + C_9^3 = 210$ số thỏa mãn.

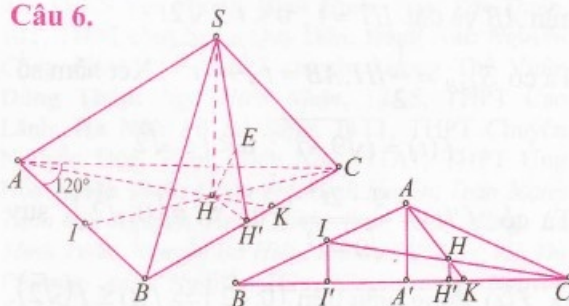
Câu 5. PT mặt phẳng $(ABC): x+y+z-6=0$.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC , ta có

$$\begin{cases} I \in (ABC) \\ IA=IB \\ IA=IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z-6=0 \\ IA=IB \\ IA=IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z-6=0 \\ y=z \\ x=z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=2. \text{ Vậy } I(2;2;2).$$

Câu 6.



Theo định lý cosin trong tam giác ABC thì $AB = AC = a$. Ta có

$$CI^2 = AI^2 + AC^2 - 2AI \cdot AC \cdot \cos 120^\circ = \frac{7a^2}{4}$$

$$\Rightarrow CI = \frac{a\sqrt{7}}{2}. \text{ Do đó}$$

$$AH^2 = \frac{2(AI^2 + AC^2) - CI^2}{4} = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{suy ra } SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}.$$

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $V_{S,ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$.

Giả sử AH cắt BC tại K . Gọi A', H', I' lần lượt là hình chiếu của A, H, I trên BC . Ta có

$$\frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AK}{HK} = \frac{AA'}{HH'} = 4$$

$$\Rightarrow d(A; (SBC)) = 4d(H; (SBC)).$$

Gọi E là hình chiếu của H trên SH' thì $HE \perp (SBC) \Rightarrow d(H; (SBC)) = HE$.

$$HH' = \frac{1}{4} AA' = \frac{a}{8} \text{ và từ } \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HH'^2},$$

$$\text{suy ra } HE = \frac{3a}{4\sqrt{37}}.$$

$$\text{Vậy } d(A; (SBC)) = 4HE = \frac{3a\sqrt{37}}{37}.$$

Câu 7. (C) có tâm $I(1;2)$,

bán kính $R = 3$.

Ta có $IM = \sqrt{2} < R$ nên

M nằm trong đường tròn (C).

Gọi H là hình chiếu của I

trên AB và đặt $IH = t, 0 < t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB = t\sqrt{9-t^2}$. Xét hàm số

$$f(t) = t\sqrt{9-t^2}; 0 < t \leq \sqrt{2}.$$

Ta có $f'(t) = \frac{9-2t^2}{\sqrt{9-t^2}} > 0, \forall t \in (0; \sqrt{2}]$, suy

ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; \sqrt{2}] \Rightarrow f(t) \leq f(\sqrt{2})$.

Vậy S_{IAB} lớn nhất khi $d(I; \Delta) = t = \sqrt{2}$, lúc

đó $H \equiv M$. Khi đó Δ nhận $\overline{IM}$ là VTPT, suy ra $\Delta: x+y-5=0$.

Câu 8. Nếu x, y cùng dương thì

$$\frac{x^2+1}{y} + \frac{y^2+1}{x} \geq \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} \geq 4 > \frac{10}{3}.$$

Từ PT(2) thì x, y không thể cùng âm. Do đó x, y

trái dấu. PT(1) $\Leftrightarrow (x+y+1)(2x^2+y^2-4xy)=0$

Vì x, y trái dấu nên $2x^2+y^2-4xy > 0$, suy ra

$$x+y+1=0. \text{ Khi đó } (2) \Leftrightarrow \frac{x^3+y^3-1}{xy} = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^3+y^3)-3=10xy \Leftrightarrow xy=-6.$$

Hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(2; -3); (-3; 2)$.

Câu 9. Không mất tính tổng quát, giả sử $0 \leq a < b < c$. Đặt $x = b-a; y = c-b$ thì $x > 0, y > 0$.

Ta có

$$P = \left[a^2 + (a+x)^2 + (a+x+y)^2 \right] \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right]$$

$$\geq \left[x^2 + (x+y)^2 \right] \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right]$$

$$= (2x^2 + 2xy + y^2) \frac{(x^2 + xy + y^2)^2}{x^2 y^2 (x+y)^2} \quad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$.

$$\text{Ta có } (2x^2 + 2xy + y^2) \frac{(x^2 + xy + y^2)^2}{x^2 y^2 (x+y)^2}$$

$$= \frac{\left[2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} + 1 \right] \left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1 \right]^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(\frac{x}{y} + 1\right)^2}.$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y}, t > 0 \text{ ta thấy } P \geq \frac{(2t+1)(t+1)^2}{t^2}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{(2t+1)(t+1)^2}{t^2}, t \in (0; +\infty).$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Lập bảng biến thiên ta được

$$f(t) \geq f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}. \text{ Do đó } P \geq \frac{11+5\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \text{ Suy ra}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}. \text{ Vậy } \min P = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}.$$

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

THỦ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1 (2 điểm). Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$.

- 1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
- 2) Tìm m để hàm số có ba cực trị đồng thời ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Câu 2 (1 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$.

Câu 3 (1 điểm). Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = 5, |z_1 - z_2| = 4$. Hãy tính $|z_1 + z_2|$.

Câu 4 (1 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; 0)$, $B(-1; 1; -1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 2y - z + 2 = 0$. Hãy viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa AB , vuông góc với (P) và viết phương trình mặt cầu (S) có tâm B tiếp xúc với (P) .

Câu 5 (1 điểm). Giải phương trình:

$$3\sqrt{3^x - 5} + \sqrt{3^x + 5} = 2\sqrt{3^4 9^x - 25} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Câu 6 (1 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông

góc của S lên mặt đáy là điểm I thuộc AB sao cho $BI = 2AI$. Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC theo a .

Câu 7 (1 điểm). Trong mặt tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh BC có phương trình $x + 3y - 3 = 0$. Các điểm $I(3; 1), J(4; 3)$ lần lượt nằm trên các đường thẳng AB và AC . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đỉnh A có hoành độ nhỏ hơn 3.

Câu 8 (1 điểm). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8x^3 + 2y = \sqrt{y + 5x + 2} \\ \left((3x + \sqrt{1 + 9x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) \right) = 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 9 (1 điểm). Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz \geq 1$ và $z \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức } M = \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} + \frac{4-z^3}{3(1+xy)}.$$

NGUYỄN QUANG THI

(GV THPT Bảo Lộc, Lâm Đồng)

CHÀO XUÂN ẤT MÙI

(Bài xướng)

Đón Ất Mùi sang, rước lộc về
Sướng vui nào sánh khỏe bằng Dê
Tài năng hiện hữu nhờ lao động
Trí tuệ - tương lai bởi luyện nghề

Nhiều bạn, chan hoà ai cũng quý
Lắm tiền, dị biệt khối người chê
Niềm tin khối phổ mừng xuân mới
Sống đẹp, sống vui giữ đúng lễ

ĐÀO TAM

(Khoa Toán, ĐH Vinh)

Chú thích:

- (1) Tác giả quê ở huyện Hương Sơn, tỉnh Hà Tĩnh, địa phương có món đặc sản thịt dê vào loại ngon bậc nhất cả nước.
- (2) Rút từ câu tục ngữ "Đất có lễ, quê có thời".

ĐẶC SẢN 2 VUE HƯƠNG

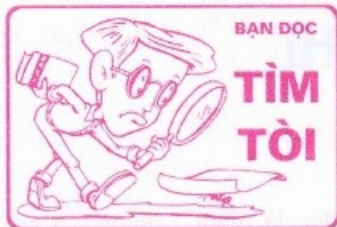
(Bài họa)

Đặc sản quê tôi⁽¹⁾, bạn có về
Đừng quên các món nấu từ dê.
Khách hàng tứ xứ ắt sành sỏi
Đầu bếp nơi đây quả thạo nghề.

Xào - nướng, thơm lừng không kể ngàn
Lẩu - hầm, ngọt lịm chẳng ai chê.
Chén say tới ngưỡng, xin đừng bước
Hãy nhớ câu ca "đất có lễ"⁽²⁾.

NGUYỄN KHẮC PHI

(NXBGD Việt Nam)



GIỚI HẠN CỦA MỘT DÃY SỐ DẠNG TRUNG BÌNH VÀ ỨNG DỤNG

VÕ QUỐC BÁ CẨN (Hà Nội)

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ trình bày kết quả tổng quát cho một bài toán giới hạn của dãy số dạng trung bình và các ứng dụng của nó trong các bài toán tính giới hạn dãy số.

1. Lời dẫn

Trong quá trình tự học và rèn luyện, chắc hẳn nhiều bạn đã được làm quen với bài toán sau:

Bài 1. Cho dãy số (u_n) bị chặn dưới và thỏa

$$\text{mãn } u_{n+2} \leq \frac{u_{n+1} + u_n}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) hội tụ.

Đây là một bài toán thú vị đặc trưng cho phương pháp sử dụng dãy phụ (dãy số max-min) để tìm giới hạn dãy số. Tuy nhiên, nếu chỉ dừng lại ở đây thì ta chưa thể thấy hết được nét đặc sắc của nó.

Một bài toán hay sẽ càng hay hơn nếu ta ứng dụng được nó cho các bài toán khác. Nhưng vì bài toán 1 quá cụ thể (giống như một trường hợp riêng) nên muốn làm được điều này, ta cần mở rộng bài toán hơn nữa. Cụ thể, ta hãy thử thêm nhiều số hạng hơn thay vì chỉ có u_{n+1}

và u_n đồng thời hãy thử thay các hệ số $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ bằng các số khác xem sao?

Kết quả thu được thật bất ngờ! Sử dụng phương pháp dãy phụ max-min, ta chứng minh được kết quả tổng quát cho bài toán 1 như sau:

Bài 2 (Tổng quát hoá của bài 1). Cho k là một số nguyên dương và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là các số thực dương có tổng bằng 1. Xét dãy số (u_n) bị chặn dưới thỏa mãn tính chất:

$$u_{n+k} \leq \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n+1} + \dots + \alpha_k u_{n+k-1}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng (u_n) hội tụ.

2. Lời giải bài toán tổng quát

Đặt $A_n = \max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}\}$.

Khi đó, dễ thấy dãy (A_n) cũng bị chặn dưới và:

$$A_n \geq \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n+1} + \dots + \alpha_k u_{n+k-1} \geq u_{n+k} (*)$$

với mọi $n = 1, 2, \dots$. Do vậy

$$A_n = \max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}, u_{n+k}\} \\ \geq \max\{u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}, u_{n+k}\} = A_{n+1}.$$

Kết quả này cho thấy (A_n) là dãy giảm và bị chặn dưới. Và như thế, nó hội tụ về một hằng số A nào đó. Theo tính chất giới hạn của dãy số, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số tự nhiên n_0 đủ lớn để: $A - \varepsilon < A_n < A + \varepsilon, \forall n \geq n_0$. (1)

Ta sẽ chứng minh dãy (u_n) cũng hội tụ về A . Từ (1), suy ra $u_n \leq A_n < A + \varepsilon, \forall n \geq n_0$.

Đặt $K = \max\left\{\frac{2 - \alpha_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{2 - \alpha_k}{\alpha_k}\right\}$. Ta chứng

minh $u_n > A - K\varepsilon, \forall n \geq n_0 + k - 1$. (2)

Nếu $u_n \geq A - \varepsilon$ thì BĐT (2) hiển nhiên đúng do $K > 1$. Giả sử có số $n \geq n_0 + k - 1$ mà $u_n < A - \varepsilon$.

Khi đó, trong các số $u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}$ phải có ít nhất một số lớn hơn $A - \varepsilon$ (do (1)). Gọi số đó là u_{n+m} . Khi đó, với chú ý rằng $n + m - k \geq n_0$, ta có $u_{n+m-k}, \dots, u_{n+m-1} < A + \varepsilon$. Suy ra

$$u_{n+m} \leq \sum_{i=1, i \neq k+1-m}^k \alpha_i u_{n+m-k+i-1} + \alpha_{k+1-m} u_n$$

$$< (1 - \alpha_{k+1-m})(A + \varepsilon) + \alpha_{k+1-m} u_n. \text{ Từ đó}$$

$$u_n > \frac{u_{n+m} - (1 - \alpha_{k+1-m})(A + \varepsilon)}{\alpha_{k+1-m}}$$

$$> \frac{A - \varepsilon - (1 - \alpha_{k+1-m})(A + \varepsilon)}{\alpha_{k+1-m}}$$

$$= A - \frac{2 - \alpha_{k+1-m}}{\alpha_{k+1-m}} \varepsilon \geq A - K\varepsilon.$$

Như vậy, BĐT (2) luôn được thỏa mãn với mọi $n \geq n_1 = n_0 + k - 1$. Suy ra

$$A - K\varepsilon < u_n < A + \varepsilon < A + K\varepsilon, \forall n \geq n_1.$$

Đặt $\varepsilon' = K\varepsilon$, BĐT trên có thể được viết lại thành $A - \varepsilon' < u_n < A + \varepsilon'$, hay $|u_n - A| < \varepsilon'$, $\forall n \geq n_1$. Sử dụng định nghĩa giới hạn, suy ra dãy (u_n) cũng hội tụ về A . Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Một trong những mấu chốt của bài toán là đánh giá BĐT (*). Có thể thấy rằng nếu dãy (u_n) bị chặn dưới bởi 0 thì ta có thể thay đổi giả thiết thành $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k < 1$. Lúc này, BĐT (*) vẫn đúng. Do đó, các lý luận vẫn được đảm bảo. Kết quả bài toán và lời giải trên vẫn giữ được tính đúng đắn. Ngoài ra, dễ thấy rằng lúc này $\lim u_n = 0$.

Đây là một chú ý quan trọng để ta có thể ứng dụng kết quả bài toán tổng quát cho các bài toán phía sau.

Ngoài ra, cũng cần chú ý rằng kết quả bài toán sẽ không còn đúng nếu thay giả thiết α_i dương thành không âm. Thật vậy, chẳng hạn ta có thể xét trường hợp $k = 2$ và $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$. Khi đó, (u_n) thỏa mãn $u_{n+2} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lúc này, nếu chọn $u_{2n} = 1$ và $u_{2n-1} = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy này phân kỳ.

3. Một số bài toán ứng dụng

Bài 3. Xét dãy (u_n) được xác định bởi $u_1 = u_2 = 1$ và $u_{n+2} = \frac{2u_{n+1} + u_n}{5}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó, sử dụng kết quả bài toán tổng quát 2 trong trường hợp: dãy bị chặn dưới bởi 0, $k = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = \frac{2}{5}$ và $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, ta thu được

$\lim u_n = 0$ (theo nhận xét trên). $\square$

Bài 4. Cho dãy (u_n) thỏa mãn $u_1, u_2, u_3 \in (0, 1)$ và $u_{n+3} = \frac{u_{n+2}^2 + u_n^2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Sử dụng kết quả này, ta thu được

$$u_{n+3} < \frac{u_{n+2} + u_n}{3} < \frac{u_{n+2} + u_{n+1} + u_n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đến đây, sử dụng kết quả bài toán 2 trong trường hợp: dãy bị chặn dưới, $k = 3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$

và $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, ta dễ thấy u_n hội tụ. Đặt $\lim u_n = A$, thì $0 \leq A \leq 1$. Chuyển phương trình sai phân ở đề bài sang giới hạn, ta được $A = \frac{2}{3}A^2$. Từ đó $A = 0$ (do $A \leq 1$)

$\Rightarrow \lim u_n = 0$. $\square$

Bài 5. Cho dãy số dương (u_n) thỏa mãn

$$u_{n+3} = \sqrt{u_n + u_{n+2}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n_0 để $u_{n_0} \geq 1$. Thật vậy, giả sử $u_n < 1$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, từ công thức của dãy,

ta có $\sqrt{u_n + u_{n+2}} = u_{n+3} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra

$$u_{n+3} = \sqrt{u_n + u_{n+2}} > u_n + u_{n+2} > u_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Điều này chứng tỏ (u_n) là dãy tăng kể từ số hạng thứ ba trở đi. Dãy (u_n) tăng và bị chặn trên bởi 1 nên tồn tại $\lim u_n = A$ với $0 < A \leq 1$. Tuy nhiên, khi chuyển phương trình ở đề bài sang giới hạn, ta lại thu được $A = 0$ hoặc $A = 2$ đều không thỏa mãn $0 < A \leq 1$.

Như vậy, phải tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_{n_0} \geq 1$.

Khi đó, dễ thấy $u_{n_0+3}, u_{n_0+4}, u_{n_0+5} > 1$. Do ta cần tìm giới hạn của dãy (u_n) nên không mất tính tổng quát, có thể xem như dãy được bắt đầu từ ba số hạng này trở đi. Nghĩa là có thể giả sử $u_1, u_2, u_3 > 1$.

Đến đây, lại sử dụng công thức truy hồi của dãy, suy ra $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó, ta có

$$|u_{n+3} - 2| = \left| \sqrt{u_n + u_{n+2}} - 2 \right| = \frac{|u_n + u_{n+2} - 4|}{\sqrt{u_n + u_{n+2}} + 2}$$

$$\leq \frac{|u_n - 2| + |u_{n+2} - 2|}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $v_n = |u_n - 2|$. Khi đó, ta có $v_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{và } v_{n+3} \leq \frac{v_n + v_{n+2}}{3} \leq \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}v_{n+1} + \frac{1}{3}v_{n+2}.$$

Sử dụng kết quả bài toán tổng quát 2 trong trường hợp: dãy bị chặn dưới bởi 0, $k = 3$,

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{6}, \alpha_3 = \frac{1}{3} \text{ và } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 1,$$

ta thu được $\lim v_n = 0$. Từ đó $\lim u_n = 2$. $\square$

Bài 6 (Chọn Đội tuyển TP. Hà Nội, 2013).

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1, u_2 \in (0, 1)$ và

$$u_{n+2} = \frac{1}{5}u_{n+1}^3 + \frac{4}{5}\sqrt[3]{u_n}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Từ công thức truy hồi của dãy (u_n) , dễ dàng suy ra $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Sử dụng BĐT AM-GM, ta có

$$\frac{1}{5}u_{n+1}^3 + \frac{4}{5}\sqrt[3]{u_n} \geq \sqrt[5]{u_{n+1}^3 \cdot (\sqrt[3]{u_n})^4} = u_{n+1}^{\frac{3}{5}} u_n^{\frac{4}{15}}.$$

$$\text{Từ đó } u_{n+2} \geq u_{n+1}^{\frac{3}{5}} u_n^{\frac{4}{15}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lấy logarithm nepe hai vế và đặt $v_n = -\ln u_n$, ta

$$\text{có } v_{n+2} \leq \frac{3}{5}v_{n+1} + \frac{4}{15}v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do $0 < u_n < 1$ nên $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đây,

sử dụng kết quả bài toán tổng quát 2 trong trường hợp: dãy bị chặn dưới bởi 0, $k = 2$,

$$\alpha_1 = \frac{3}{5}, \alpha_2 = \frac{4}{15} \text{ và } \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{13}{15} < 1, \text{ có}$$

$$\lim v_n = 0 \Rightarrow \lim u_n = 1. \square$$

Bài 7 (Trường Đông TH miền Nam, 2013).

Cho dãy số thực (a_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{7} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_n}{3} + \frac{a_{n-1}^2}{6}, \forall n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy $0 < a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $v_n = 1 - a_n$, ta có

$$1 - a_{n+2} = \frac{1 - a_{n+1}}{3} + \frac{1 - a_n^2}{6}, \text{ suy ra}$$

$$v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{1 + a_n}{6}v_n < \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{1}{3}v_n.$$

Do $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1$ và (v_n) bị chặn dưới bởi 0 nên theo

kết quả bài toán tổng quát 2, ta chứng minh được $\lim v_n = 0$. Từ đó suy ra $\lim a_n = 1$. $\square$

Bài 8 (Chọn Đội tuyển TP. Hồ Chí Minh, 2014). Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 = 1, x_2 = 2014$

$$\text{và } x_{n+2} = \sqrt[3]{x_{n+1}^2 x_n}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Từ giả thiết, ta dễ thấy $x_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Lấy logarithm nepe hai vế PT sai

phân ở đề bài rồi đặt $v_n = \ln x_n$, ta có $v_1 = 0$,

$$v_2 = \ln 2014 \text{ và } v_{n+2} \leq \frac{2}{3}v_{n+1} + \frac{1}{3}v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Sử dụng kết quả bài toán tổng quát 2 trong

trường hợp: dãy bị chặn dưới, $k = 2, \alpha_1 = \frac{2}{3}$,

$$\alpha_2 = \frac{1}{3} \text{ và } \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \text{ ta có } (v_n) \text{ hội tụ. Mặt}$$

khác, ta dễ thấy

$$3v_{n+2} + v_{n+1} = 3v_{n+1} + v_n = \dots = 3v_2 + v_1.$$

$$\text{Do đó } \lim v_n = \frac{3v_2 + v_1}{4} = \frac{3}{4} \ln 2014. \text{ Với kết}$$

$$\text{quả này, ta tìm được } \lim x_n = 2014^{\frac{3}{4}}. \square$$

Bài 9 (Romanian TST, 2004). Tìm tất cả các đơn ánh $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n) + n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Cố định n và đặt

$$u_0 = n, u_m = f_m(n) = f(\dots f(n) \dots) \text{ (} m \text{ lần } f \text{)}.$$

Từ giả thiết, ta chứng minh bằng quy nạp được rằng: $u_{m+2} \leq \frac{u_{m+1} + u_m}{2}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Ngoài ra, dễ thấy dãy (u_m) bị chặn dưới bởi 1 nên theo kết quả bài toán 2, dãy này hội tụ và có giới hạn là A . Từ đó, theo định nghĩa giới hạn, với mỗi $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, tồn tại $m_0 \in \mathbb{N}^*$ đủ

lớn sao cho $|u_m - A| < \varepsilon, \forall m \in \mathbb{N}^*, m \geq m_0$.

Từ đó $|u_{m_0+1} - u_{m_0}| \leq |u_{m_0+1} - A| + |u_{m_0} - A| < 2\varepsilon < 1$.

Vì $|u_{m_0+1} - u_{m_0}|$ là số tự nhiên nên từ BĐT trên, ta suy ra $|u_{m_0+1} - u_{m_0}| = 0$, tức là $u_{m_0} = u_{m_0+1} \Leftrightarrow f_{m_0}(n) = f_{m_0}(f(n))$.

Mặt khác, do f đơn ánh nên dễ thấy $f_{m_0}(n)$ cũng là đơn ánh. Từ đây kết hợp với đẳng thức trên, ta suy ra $f(n) = n$ với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$.

Thử lại, ta dễ thấy hàm số $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

Bài 10 (Chọn Đội tuyển Bắc Ninh, 2014). Dãy (x_n) được xác định bởi $x_1 = \frac{4}{5}, x_2 = \frac{9}{10}$ và

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt[3]{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Tìm } \lim x_n.$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta dễ dàng chứng minh được $x_n > 1, \forall n \geq 3$. Gọi $a > 1$ là nghiệm dương duy nhất của PT $a^4 = a + 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - a^6| &= |\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt[3]{x_n} - a^6| \text{ (do } a^6 = a^3 + a^2 \text{)} \\ &= |(\sqrt{x_{n+1}} - a^3) + (\sqrt[3]{x_n} - a^2)| \leq |\sqrt{x_{n+1}} - a^3| + |\sqrt[3]{x_n} - a^2| \\ &= \frac{|x_{n+1} - a^6|}{\sqrt{x_{n+1}} + a^3} + \frac{|x_n - a^6|}{\sqrt[3]{x_n^2} + a^2 \sqrt[3]{x_n} + a^4} \\ &\leq \frac{1}{2} |x_{n+1} - a^6| + \frac{1}{3} |x_n - a^6|, \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

Đặt $v_n = |x_n - a^6|$, ta có $v_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$v_{n+2} \leq \frac{1}{2} v_{n+1} + \frac{1}{3} v_n, \forall n \geq 3.$$

Sử dụng kết quả bài toán 2 trong trường hợp: dãy bị chặn dưới bởi 0, $k = 2, \alpha_1 = \frac{1}{2},$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3}, \alpha_1 + \alpha_2 < 1, \text{ ta có } \lim v_n = 0. \text{ Từ đó}$$

suy ra $\lim x_n = a^6$. $\square$

Bài 11 (Việt Nam TST, 1990). Cho bốn số thực dương a, b, A, B . Xét dãy số thực (x_n) được xác định bởi $x_1 = a, x_2 = b$ và: $x_{n+2} = A\sqrt[3]{x_{n+1}^2} + B\sqrt[3]{x_n^2}, \forall n = 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Để cho các lý luận và biến đổi được thuận tiện, ta đặt $x_n = (A + B)^3 u_n$ và $\alpha = \frac{A}{A+B}, \beta = \frac{B}{A+B}$. Khi đó ta có $\alpha + \beta = 1$

$$\text{và } u_{n+2} = \alpha\sqrt[3]{u_{n+1}^2} + \beta\sqrt[3]{u_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $M = \min\{u_1, u_2, 1\}$. Ta sẽ chứng minh $x_n \geq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Dễ thấy khẳng định đúng với $n = 1, 2$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k (k \geq 2)$. Khi đó, theo giả thiết quy nạp, ta có $u_{n+2} = \alpha\sqrt[3]{u_{n+1}^2} + \beta\sqrt[3]{u_n^2}$

$$\geq \alpha\sqrt[3]{M^2} + \beta\sqrt[3]{M^2} = \sqrt[3]{M^2} \geq M.$$

Do đó, khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi n . Bây giờ, đặt $v_n = |u_n - 1|$, ta có

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - 1| &= \alpha|\sqrt[3]{u_{n+1}^2} - 1| + \beta|\sqrt[3]{u_n^2} - 1| \\ &= \frac{\alpha(u_{n+1} + 1)|u_{n+1} - 1|}{\frac{4}{u_{n+1}^3} + u_{n+1}^3 + 1} + \frac{\beta(u_n + 1)|u_n - 1|}{\frac{4}{u_n^3} + u_n^3 + 1} \\ &\leq \frac{\alpha(u_{n+1} + 1)|u_{n+1} - 1|}{2u_{n+1} + 1} + \frac{\beta(u_n + 1)|u_n - 1|}{2u_n + 1}. \end{aligned}$$

Do $f(t) = \frac{t+1}{2t+1}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}^+$ nên ta dễ

$$\text{thấy: } \frac{u_{n+1} + 1}{2u_{n+1} + 1}, \frac{u_n + 1}{2u_n + 1} \leq \frac{M + 1}{2M + 1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(Xem tiếp trang 27)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/452 (Lớp 6). Cho x, y là các số tự nhiên khác 0, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = |36^x - 5^y|.$$

HÀ VĂN NHÂN

(GV THCS Hoàng Xuân, Hoàng Hóa, Thanh Hóa)

Bài T2/452 (Lớp 7). Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ hai tia Ox, Oy vuông góc với nhau. Trên Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm M, N không trùng với O . Chứng minh rằng: $AM + BN \geq MN$.

CAO NGỌC TOÀN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên – Huế)

Bài T3/452. Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2 - xy + y^2} \leq (x + y)^2 \\ \sqrt{1 - (x + y)^2} = 1 - x \end{cases}$$

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài T4/452. Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) , AK là đường kính, I là điểm bất kì trên cung nhỏ AB (I khác A, B). KI cắt cạnh BC tại M . Đường trung trực của MI cắt các cạnh AB, AC thứ tự tại D, E . N là trung điểm của DE . Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/452. Tìm số nguyên m để phương trình $x^3 + (m+1)x^2 - (2m-1)x - (2m^2 + m + 4) = 0$ có nghiệm nguyên.

BÙI HẢI QUANG

(GV THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/452. Cho ba số không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a+bc)^2 + (b+ca)^2 + (c+ab)^2 \geq \sqrt{2}(a+b)(b+c)(c+a).$$

LÊ VIỆT AN

(SV Lớp Toán 2B, ĐHSP Huế)

Bài T7/452. Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) . D là trung điểm AB , tia CD cắt đường tròn (O) tại E . Kẻ $CF \parallel AE$ với F thuộc (O) , tia EF cắt AC tại G . Chứng minh rằng BG là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

PHAN VĂN NAM

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T8/452. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{\sin x + \tan x} + \sqrt{\cos x + \cot x}.$$

PHẠM VĂN THUẬN (Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/452. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , xét tập hợp M các điểm có tọa độ (x, y) với $x, y \in \mathbb{N}^*$ và $x \leq 12, y \leq 12$. Mỗi điểm trong M được tô bởi một trong ba màu: màu đỏ, màu trắng hoặc màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ mà tất cả các đỉnh của nó thuộc M và được tô cùng màu.

TRƯƠNG QUANG AN

(GV THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T10/452. Xác định số nguyên dương t nhỏ nhất sao cho tồn tại t số nguyên $x_1, x_2, \dots, x_t$ thỏa mãn

$$x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 - \dots + (-1)^{t+1} x_t^3 = 2065^{2014}.$$

TRẦN VĂN MINH CHIẾN

(GV THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội)

Bài T11/452. Cho a là số nguyên dương và dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$ và

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 2ax_n + 2a + 1} - \sqrt{x_n^2 - 2ax_n + 2a + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Xác định a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn.

NGUYỄN LÁI
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh,
Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T12/452. Cho tam giác ABC . Đường thẳng Δ không đi qua A, B, C cắt BC, CA, AB thứ tự tại A_1, B_1, C_1 . A_b, A_c theo thứ tự là điểm đối xứng của A_1 qua AB, AC . A_a là trung điểm của A_b, A_c . Các điểm B_b, C_c được xác định tương tự như điểm A_a . Chứng minh rằng các điểm A_a, B_b, C_c thẳng hàng.

ĐÀO THANH OAI
(THPT Nguyễn Du, Thái Bình)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/452. Một xylanh đặt thẳng đứng, đầu dưới chìm trong nước, đầu trên thông với khí quyển. Trong xylanh có một pittông đặt nằm trên mặt nước. Kéo chậm pittông lên độ cao $H = 15\text{m}$. Tìm công kéo pittông. Cho diện tích pittông là $S = 1\text{dm}^2$, áp suất khí quyển $p_0 = 10^5\text{Pa}$. Bỏ qua khối lượng pittông.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài L2/452. Cho đoạn mạch điện xoay chiều gồm điện trở thuần R , cuộn cảm thuần có độ tự cảm L và tụ điện có điện dung C mắc nối tiếp. Trong đó các đại lượng (R, C, ω) không đổi còn L thay đổi được. Biết rằng khi $L = L_1$ và $L = L_2$ thì thấy điện áp giữa hai đầu cuộn cảm thuần U_L đều như nhau. Xác định L theo L_1 và L_2 để điện áp hai đầu cuộn cảm đạt cực đại.

VIỆT CƯỜNG (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/452 (For 6th grade). Let x, y be positive natural numbers, Find the minimum value of the expression $A = |36^x - 5^y|$.

Problem T2/452 (For 7th grade). Let O be the midpoint of the interval AB . On a half plane determined by the lines through AB , draw two rays Ox, Oy which are perpendicular to each other. On Ox, Oy , respectively choose two points M, N which are different from O . Prove that $AM + BN \geq MN$.

Problem T3/452. Solve the following system of inequalities

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2 - xy + y^2} \leq (x + y)^2 \\ \sqrt{1 - (x + y)^2} = 1 - x \end{cases}.$$

Problem T4/452. Given a triangle ABC which is isosceles at A and is inscribed in a circle (O) . Let AK be a diameter. Let I be any point on the minor arc AB (I is different from A and B). KI intersects BC at M . The perpendicular bisector of MI intersects the sides AB, AC respectively at D, E . Let N be the midpoint of DE . Prove that A, M and N are collinear.

Problem T5/452. Find integers m so that the following equation

$$x^3 + (m+1)x^2 - (2m-1)x - (2m^2 + m + 4) = 0$$

has integral solutions.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/452. Suppose that a, b, c are three non-negative numbers. Prove that

$$(a+bc)^2 + (b+ca)^2 + (c+ab)^2 \geq \sqrt{2}(a+b)(b+c)(c+a).$$

(Xem tiếp trang 26)



Bài T1/448 (Lớp 6). Cho m, n là hai số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $3^m + 5^n$ chia hết cho 8. Chứng minh rằng $3^n + 5^m$ cũng chia hết cho 8.

Lời giải. Nhận xét. • Với u, v là các số nguyên tùy ý thì tích hai số $(8u + 1)(8v + 1)$
 $= 8(8uv + u + v) + 1$ là số chia cho 8 dư 1.

• Với $s = 2r$ là số nguyên chẵn thì 3^s chia cho 8 dư 1 và 5^s chia cho 8 dư 1.

Thực vậy, $3^s = 3^{2r} = 9^r = (8.1 + 1)^r = 8k + 1$ và $5^s = 5^{2r} = 25^r = (8.3 + 1)^r = 8h + 1$, trong đó k, h là các số nguyên.

• Với $t = 2r + 1$ là số nguyên lẻ thì 3^t chia cho 8 dư 3 và 5^t chia cho 8 dư 5.

Thực vậy, $3^t = 3^{2r+1} = 3.3^{2r} = 3(8k + 1) = 8.3k + 3 = 8p + 3$ và $5^t = 5^{2r+1} = 5.5^{2r} = 5(8h + 1) = 8.5h + 5 = 8q + 5$, trong đó k, h, p, q là các số nguyên.

Trở lại bài toán. Áp dụng Nhận xét trên vào bốn trường hợp sau.

1) Nếu m là số chẵn và n là số chẵn thì $3^m + 5^n = (8k + 1) + (8h + 1) = 8(k + h) + 2$

không chia hết cho 8.

2) Nếu m là số chẵn và n là số lẻ thì $3^m + 5^n = (8k + 1) + (8q + 5) = 8(k + q) + 6$

không chia hết cho 8.

3) Nếu m là số lẻ và n là số chẵn thì $3^m + 5^n = (8p + 3) + (8h + 1) = 8(p + h) + 4$

không chia hết cho 8.

4) Nếu m là số lẻ và n là số lẻ thì $3^m + 5^n = (8p + 3) + (8q + 5) = 8(p + q + 1)$

chia hết cho 8.

Theo giả thiết $3^m + 5^n$ chia hết cho 8 nên chỉ có thể xảy ra m, n đều là số lẻ, lúc đó $3^n + 5^m$ cũng chia hết cho 8. $\square$

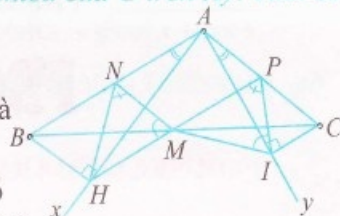
► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng và trình bày rõ ràng: **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Khánh Ly, Tạ Kim Thanh Hiền, Phạm Thành Tú, 6A4, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** Lê Đình Linh, 6E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Minh Anh, Phạm Phương Chi, Phạm Yến Nhi, Thái Thị Thu Sang, Trần Thị Kim Oanh, Hoàng Tuấn Tài, Phạm Ánh Nguyệt, Nguyễn Hải Ly, Bùi Thị Minh Thư, Trần Như Quỳnh, 6A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Kon Tum:** Lê Viết Lưu Duy, THCS Lý Tự Trọng, TP. Kon Tum; **Quảng Ngãi:** Lê Tuấn Kiệt, Huỳnh Hoàng Huy, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; Mai Thị Thu Thảo, 6C, THCS TTr. Sông Vệ, Huỳnh Đặng Diệu Huyền, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

Bài T2/448 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có góc A tù. Gọi M là trung điểm BC. Bên trong $\widehat{BAC}$ vẽ hai tia Ax và Ay sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{CAy} = 22^\circ$. Gọi H là hình chiếu của B trên Ax, I là hình chiếu của C trên Ay. Tính số đo góc HMI.

Lời giải.

Gọi N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC, ta có $MP \parallel AB, MN \parallel AC$



và $MP = \frac{1}{2} AB, MN = \frac{1}{2} AC$ (đây là kết quả quen thuộc, bạn đọc tự chứng minh).

Theo tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ta có $HN = \frac{1}{2} AB, IP = \frac{1}{2} AC$,

suy ra $HN = MP, IP = MN$ (1).

Mặt khác, $\widehat{BNM} = \widehat{BAC} = \widehat{MPC}$ (đồng vị) và $\widehat{BNH} = \widehat{IPC} = 44^\circ$ (góc ngoài của tam giác), suy ra $\widehat{HNM} = \widehat{MPI}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\triangle HNM = \triangle MPI$ (c.g.c),

suy ra $\widehat{HMN} = \widehat{MIP}$. Ta có $\widehat{HMI} = 360^\circ - \widehat{HMN} - \widehat{IMP} - \widehat{NMP} = 360^\circ - \widehat{MIP} - \widehat{IMP} - \widehat{MPC} = 360^\circ - \widehat{MIP} - \widehat{IMP} - \widehat{MPI} - 44^\circ = 360^\circ - 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$. Vậy $\widehat{HMI} = 136^\circ$. $\square$

► Nhận xét

- 1) Đây là bài toán tương đối khó đối với lớp 7, vì phải sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác.
- 2) Ta có kết quả tổng quát: Nếu thay giả thiết $\widehat{B\hat{A}x} = \widehat{C\hat{A}y} = 22^\circ$ bởi $\widehat{B\hat{A}x} = \widehat{C\hat{A}y} = \alpha$ ($\alpha \leq 45^\circ$) ta có kết quả $\widehat{H\hat{M}I} = 180^\circ - 2\alpha$.
- 3) Chỉ có ba bạn tham gia giải bài này và có kết quả đúng: **Nghệ An:** Thái Thị Hoài Phương, Hoàng Thị Bảo Ngọc, Nguyễn Đình Tuấn, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN XUÂN BÌNH**Bài T3/448. Giải phương trình**

$$\sqrt[3]{x^2 + 3x + 3} + \sqrt[3]{2x^2 + 3x + 2} = 6x^2 + 12x + 8$$

Lời giải. Với mọi x , ta có:

$$x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0;$$

$$2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0.$$

Do đó $\sqrt[3]{x^2 + 3x + 3} > 0$; $\sqrt[3]{2x^2 + 3x + 2} > 0$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^2 + 3x + 3} &= \sqrt[3]{(x^2 + 3x + 3) \cdot 1 \cdot 1} \\ &\leq \frac{x^2 + 3x + 3 + 1 + 1}{3} = \frac{x^2 + 3x + 5}{3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2x^2 + 3x + 2} &= \sqrt[3]{(2x^2 + 3x + 2) \cdot 1 \cdot 1} \\ &\leq \frac{2x^2 + 3x + 2 + 1 + 1}{3} = \frac{2x^2 + 3x + 4}{3}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}6x^2 + 12x + 8 &= \sqrt[3]{x^2 + 3x + 3} + \sqrt[3]{2x^2 + 3x + 2} \\ &\leq \frac{x^2 + 3x + 5}{3} + \frac{2x^2 + 3x + 4}{3} = x^2 + 2x + 3 \\ \Rightarrow 5x^2 + 10x + 5 &\leq 0 \Rightarrow 5(x+1)^2 \leq 0 \Rightarrow x = -1.\end{aligned}$$

Ta có $x = -1$ thỏa mãn PT đã cho.Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$. $\square$ **► Nhận xét**

- 1) Các bạn tham gia giải bài này đều tìm được nghiệm đúng, hầu hết các bạn đều có lời giải như trên. Một số bạn mới tham gia giải bài trên tạp chí, chưa biết cách làm nên đã viết gộp lời giải của nhiều bài. Do mỗi thầy chỉ chấm một bài nên mỗi bài giải phải viết trên một tờ riêng, ghi đầy đủ họ và tên; địa chỉ

lớp, trường, huyện, tỉnh; tên bài. Các bài gửi về tạp chí chỉ cần gửi chung trong một phong bì.

- 2) Sau đây là một cách giải khác, không sử dụng BDT Cauchy cho ba số: Ta có $x^2 + 3x + 3 > 0$; $2x^2 + 3x + 2 > 0$.

$$\text{Đặt } a = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 3} > 0; b = \sqrt[3]{2x^2 + 3x + 2} > 0.$$

$$\text{PT trở thành } a + b = 2a^3 + 2b^3 - 2. \quad (1)$$

Ta lại có $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$ với mọi số dương a, b

$$\Rightarrow 2a^3 + 2b^3 \geq \frac{1}{2}(a+b)^3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a+b \geq \frac{1}{2}(a+b)^3 - 2$

$$\Leftrightarrow (a+b-2)[(a+b)^2 + 2(a+b) + 2] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a+b-2 \leq 0 \Leftrightarrow a+b \leq 2. \quad (3)$$

$$\text{Từ PT ban đầu, ta còn có } a+b = 6(x+1)^2 + 2 \geq 2. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $a+b=2 \Rightarrow x=-1$.

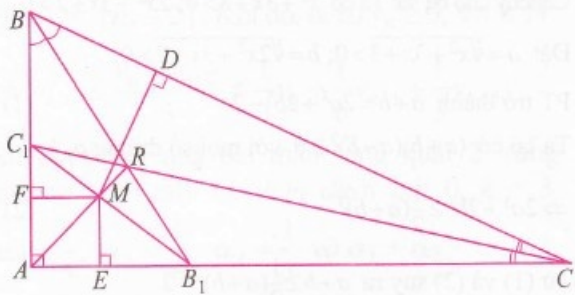
3) Các bạn có lời giải tốt nhất là:

Quảng Bình: Tống Ngọc Chung, Phan Trần Hương, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Hoàn Lão, Bố Trạch;
Nam Định: Nguyễn Hoàng Huy, 9A2, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Thừa Thiên - Huế:** Huỳnh Hữu Nhật, 9⁷, THCS Nguyễn Tri Phương, TP. Huế; **Kon Tum:** Lê Viết Lưu Thanh, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Phú Yên:** Nguyễn Huỳnh Huy, 9H, THCS Nguyễn Chí Thanh, Đông Hòa; **TP. Hồ Chí Minh:** Lê Nguyễn Khôi Nguyên, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Đại Dương, 9B, THCS Nguyễn Kim Vang, Võ Thành Hy, 9A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Hà Nội:** Nguyễn Thành Long, Đặng Thanh Tùng, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Viên, Ngô Thị Huệ, 9A, THCS Yên Phong; **Phú Thọ:** Nguyễn Thảo Chi, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Tĩnh:** Trần Thị Tường Vy, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Hoàng, 8E, Nguyễn Như Quỳnh B, 8A, Nguyễn Đăng Huy, 9A, Phạm Trần Anh, 9E, Hoàng Văn Nam, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thanh Mai, 9A, THCS Tuấn Chính, Vĩnh Tường, Nguyễn Lê Sơn, 9A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, Phùng Văn Nam, 9E, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, Đàm Tuấn Minh, 9A1, THCS Yên Lạc.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/448. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = a$, $AC = b$. Hai phân giác BB_1 và CC_1 cắt nhau ở R, AR cắt B_1C_1 ở M. Tính khoảng cách từ M đến BC theo a và b.

Lời giải. Gọi chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Dễ thấy $AEMF$ là hình vuông. Đặt $ME = MF = AE = AF = x$.



• Theo tính chất đường phân giác, ta có

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AB_1}{AC} = \frac{AB}{AB+BC}$$

$$\text{Suy ra } AB_1 = \frac{AB \cdot AC}{AB+BC} = \frac{ab}{a+\sqrt{a^2+b^2}} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có } AC_1 = \frac{ab}{b+\sqrt{a^2+b^2}} \quad (2)$$

Mặt khác, do $MF \parallel AB_1$, ta có

$$\frac{C_1F}{AC_1} = \frac{MF}{AB_1} \Leftrightarrow \frac{AC_1-x}{AC_1} = \frac{x}{AB_1} \Leftrightarrow x \left(\frac{1}{AB_1} + \frac{1}{AC_1} \right) = 1.$$

$$\text{Kết hợp với (1), (2) ta có } x = \frac{ab}{a+b+2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

• Vì M nằm trong tam giác ABC nên

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABM} + S_{ACM} + S_{BCM} \\ \Leftrightarrow \frac{ab}{2} &= \frac{MF \cdot AB}{2} + \frac{ME \cdot AC}{2} + \frac{MD \cdot BC}{2} \\ \Leftrightarrow ab \left(1 - \frac{a+b}{a+b+2\sqrt{a^2+b^2}} \right) &= MD \cdot \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Vậy khoảng cách từ M đến BC là

$$MD = \frac{2ab}{a+b+2\sqrt{a^2+b^2}}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Bài toán không khó nhưng không có nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau cho lời giải đúng và gọn: **Hà Tĩnh:** Nguyễn Trần Khang, 9B, THCS Nguyễn Du; **Phú Thọ:** Tạ Anh Dũng, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Hiếu, 9D, THCS Vĩnh Yên; **Quảng Ngãi:** Võ Thành Huy, 9A, THCS Hành Trung; **Nguyễn Đại Dương,** 9B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; **Thanh Hoá:** Đặng Quang Anh, 8A, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn;

Phú Yên: Nguyễn Huỳnh Huy, 9H, THCS Nguyễn Chí Thanh, Đông Hoà.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/448. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{ab(a+b)^3} + \frac{b^2+c^2}{bc(b+c)^3} + \frac{c^2+a^2}{ca(c+a)^3} \geq \frac{9}{4}. \quad (*)$$

Lời giải. Trước hết nhận xét rằng: Với a, b, c là các số dương ta luôn có $ab(a+b) \leq a^3 + b^3$ (1);

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \quad (2); \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad (3)$$

Đẳng thức ở (1) và (2) xảy ra khi $a = b$; ở (3) xảy ra khi $a = b = c$.

Thật vậy, với a, b, c là các số dương, ta có

$$* (a^3 + b^3) - (a+b)ab = (a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

$$* 2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2 \geq 0$$

$$* (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right)$$

$$\text{Lại có } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} = 2. \text{ Tương tự}$$

$$\text{có } \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2; \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2. \text{ Do đó}$$

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9.$$

Suy ra các BĐT (1), (2), (3) được chứng minh.

Áp dụng BĐT (1) và (2), với a, b, c dương ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2}{ab(a+b)^3} &= \frac{a^2+b^2}{ab(a+b)(a+b)^2} \\ &\geq \frac{a^2+b^2}{(a^3+b^3) \cdot 2(a^2+b^2)} = \frac{1}{2(a^3+b^3)}. \end{aligned} \text{ Tương tự}$$

$$\frac{b^2+c^2}{bc(b+c)^3} \geq \frac{1}{2(b^3+c^3)}; \quad \frac{c^2+a^2}{ca(c+a)^3} \geq \frac{1}{2(c^3+a^3)}.$$

Đặt vế trái của BĐT (*) cần chứng minh là A , áp dụng BĐT (3) và giả thiết $a^3 + b^3 + c^3 = 1$

$$\text{suy ra } A \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{b^3+c^3} + \frac{1}{c^3+a^3} \right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2(a^3+b^3+c^3)} = \frac{9}{4}.$$

Vậy BĐT (*) đã được chứng minh. Đẳng thức xảy

$$\text{ra khi } \begin{cases} a = b = c \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}. \quad \square$$

► Nhận xét

1) Các bạn tham gia giải bài này đã phát hiện được để đánh máy thiếu điều kiện các số a, b, c dương (Toà soạn đã đính chính ở số 443, tr. 26) và đã bổ sung thêm điều kiện này vào bài toán. Một số bạn đã giải bài này bằng cách vận dụng BĐT Cauchy cho ba số không âm, hoặc BĐT Bunyakovsky cho hai bộ ba số.

2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Phạm Thiên Long, 9A0, PTDL Lương Thế Vinh, Nguyễn Duy Khương, 9A9, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Phú Thọ:** Phan Phú Dũng, 8A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Bùi Thị Liễu Dương, 8A4, Nguyễn Đình Nghĩa, 9A1, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** Nguyễn Khải Hưng, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hoá; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Hằng, Nguyễn Văn Quán, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Võ Thị Hồng Liên, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Thừa Thiên Huế:** Huỳnh Hữu Nhật, 9/7, THCS Nguyễn Tri Phương, TP. Huế; **Phú Yên:** Nguyễn Huỳnh Huy, 9H, THCS Nguyễn Chí Thanh, Đông Hòa; **Kon Tum:** Lê Viết Lưu Thanh, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Hoàng Tùng, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/448. Hãy biểu thị số 2015 thành tổng các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ lớn hơn 1

sao cho $\sum_{i=1}^n \sqrt[n]{a_i}$ lớn nhất.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh rằng nếu a là số tự nhiên lớn hơn 3 thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[3]{3}$ (1).

Ta có $4^3 < 3^4 \Rightarrow \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$, BĐT (1) đúng với $a = 4$. Giả sử $\sqrt[n]{a} < \sqrt[3]{3}$ với $a > 4$, suy ra $a^3 < 3^a$. Đề ý rằng với $a > 4$ có $3a^2 < a^3$; $3a + 1 < a^3$ suy ra $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 < 3a^3 < 3 \cdot 3^a = 3^{a+1} \Rightarrow \sqrt[a+1]{a+1} < \sqrt[3]{3}$.

BĐT (1) đúng với $a+1$. Theo nguyên lý quy nạp, BĐT (1) đúng với mọi số tự nhiên $a > 3$.

Như vậy để $\sum_{i=1}^n \sqrt[n]{a_i}$ lớn nhất thì $a_i \in \{2; 3\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Lại thấy rằng $2 + 2 + 2 = 3 + 3$

và $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} > \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}$ nên trong các số a_i không thể có nhiều hơn hai số 3, vì khi đó ta có thể thay hai số 3 bởi ba số 2 để được tổng cần tìm lớn hơn. Như vậy trong các số a_i chỉ có không quá một số bằng 3, các số còn lại

bằng 2. Vậy $\max \left(\sum_{i=1}^n \sqrt[n]{a_i} \right) = 1006\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$

khi $2015 = 1006 \cdot 2 + 3$. $\square$

► Nhận xét

1) Có thể chứng minh BĐT (1) bằng cách sử dụng đạo hàm như sau: Xét hàm số $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$; $f(x) > 0$ khi $x > 0$;

$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x$. Lấy đạo hàm hai vế theo biến số x , ta có

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}. \text{ Do đó } f'(x) = f(x) \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \text{ khi}$$

$x > 3$, hàm số $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ nghịch biến và liên tục khi $x \geq 3$.

Vậy nếu a là số tự nhiên lớn hơn 3 thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[3]{3}$. BĐT (1) được chứng minh.

2) Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Hà Tĩnh:** Phan Nhật Duy, Lê Minh Tuấn, Nguyễn Quang Dũng, Trần Quang Minh, Ngô Việt Hoàng, Nguyễn Đình Hùng, Nguyễn Ánh Triều, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Thuận, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Bình Định:** Nguyễn Trọng Khiêm, 10A1, THPT Quang Trung, Tây Sơn; **Hưng Yên:** Dương Hồng Sơn, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Bắc Giang:** Nghiêm Văn Nghĩa, 10A1, THPT Lạng Giang số 3.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/448. Cho tứ giác ABCD. a, b, c, d theo thứ tự là phân giác ngoài của các góc $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$. Kí hiệu $K = a \cap b$, $L = b \cap c$, $M = c \cap d$, $N = d \cap a$. Chứng minh rằng tứ giác KLMN nội tiếp một đường tròn và đường tròn đó có bán kính bằng

$$\frac{KM \cdot LN}{AB + BC + CD + DA}.$$

Lời giải. Ta bỏ qua trường hợp đơn giản $AD \parallel BC$. Gọi S là giao điểm của AD và BC . Không mất tính tổng quát, giả sử S thuộc các tia DA, CB . Ta có $\widehat{NKL} + \widehat{LMN} =$

$$180^\circ - \widehat{KAB} - \widehat{KBA} + 180^\circ - \widehat{MCD} - \widehat{MDC}$$

$$\begin{aligned}
 &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\widehat{BAD}}{2} \right) - \left(90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2} \right) \\
 &+ 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\widehat{BCD}}{2} \right) - \left(90^\circ - \frac{\widehat{CDA}}{2} \right) \\
 &= 180^\circ. \text{ Suy ra } S \\
 &\text{tứ giác } KLMN \\
 &\text{nội tiếp. Gọi } E, F \\
 &\text{theo thứ tự là hình} \\
 &\text{chiếu của } K, M \text{ lên đường} \\
 &\text{thẳng } AD. \text{ Rõ ràng } K \text{ là} \\
 &\text{tâm đường tròn nội tiếp} \\
 &\Delta SAB; M \text{ là tâm đường tròn bàng tiếp góc } S \\
 &\text{của } \Delta SCD. \text{ Từ đó } EA = \frac{AS + AB - SB}{2}; \\
 &DF = \frac{CS + CD - SD}{2}. \text{ Suy ra } EF = EA + AD + DF \\
 &= AD + \frac{AS + AB - SB}{2} + \frac{CS + CD - SD}{2} \\
 &= AD + \frac{AB + BC + CD - AD}{2} = \frac{AB + BC + CD + AD}{2}. \\
 &\text{Áp dụng định lý sin cho } \Delta LKN \text{ ta được } R_{(KLMN)} \\
 &= \frac{LN}{2\sin \widehat{NKL}} = \frac{LN}{2\sin \left(90^\circ + \frac{\widehat{ASB}}{2} \right)} = \frac{LN}{2\cos \frac{\widehat{ASB}}{2}} = \frac{LN}{2\left(\frac{SE}{SK} \right)} \\
 &= \frac{LN}{2\left(\frac{EF}{KM} \right)} = \frac{KM \cdot LN}{AB + BC + CD + DA} \text{ (đpcm). } \square
 \end{aligned}$$

► **Nhận xét.** Tất cả các lời giải gửi về Toà soạn đều đúng và tương tự như cách giải trên. Các bạn sau có lời giải đúng và gọn hơn cả: **Hà Nội:** Hoàng Lê Nhật Tung, 11A₂ Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên:** Dương Hồng Sơn, 10A₉, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nam Định:** Đoàn Thị Nhài, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Trần Quang Minh, 10A₁, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hoá:** Nguyễn Hương Giang, 10A₁, THPT Hoàng Hoá IV, Hoàng Hoá; **Nghe An:** Đậu Thị Khánh Linh, 10T₁, THPT Đô Lương I, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Ngô Việt Hoàng, Nguyễn Ánh Triều, Nguyễn Bá Hiếu, Trần Đình Hùng, Bùi Huyền Trang, 10 Toán 1, Nguyễn Văn Thế, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** Trần Văn Thiên, Trần Hữu Trí, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/448. Giả sử đa thức

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

có ba nghiệm thực không âm. Tìm số thực a lớn nhất thỏa mãn: $f(x) \geq \alpha(x-a)^3, \forall x \geq 0$.

Lời giải. Gọi $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$ là ba nghiệm không âm của $f(x)$. Ta có: $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ và $x-a = x+x_1+x_2+x_3$. Xét các trường hợp:

TH1: $0 \leq x \leq x_1$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{aligned}
 -f(x) &= (x_1-x)(x_2-x)(x_3-x) \\
 &\leq \frac{1}{27}(x_1+x_2+x_3-3x)^3 \leq \frac{1}{27}(x_1+x_2+x_3+x)^3 \\
 &= \frac{1}{27}(x-a)^3 \Rightarrow f(x) \geq -\frac{1}{27}(x-a)^3.
 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=0, x_1=x_2=x_3$.

TH2: $x_1 < x < x_2$ hoặc $x > x_3$. Ta có:

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) > 0 \geq -\frac{1}{27}(x-a)^3 \quad (\text{do } x-a \geq 0).$$

TH3: $x_2 \leq x \leq x_3$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $-f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x_3-x)$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{27}(x-x_1-x_2+x_3)^3 \leq \frac{1}{27}(x_1+x_2+x_3+x)^3 \\
 &= \frac{1}{27}(x-a)^3 \Rightarrow f(x) \geq -\frac{1}{27}(x-a)^3.
 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=0, x=\frac{1}{2}x_3$.

Tóm lại: $f(x) \geq -\frac{1}{27}(x-a)^3, \forall x \geq 0$.

Vậy $\alpha = -\frac{1}{27}$ là số thực cần tìm. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** Vũ Bá Long, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, Trần Bảo Trung, 11T1, Trần Mạnh Tuấn Vũ, Phan Nhật Duy, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Sóc Trăng:** Vương Hoài Thanh, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

TRẦN HỮU NAM

Bài T9/448. Gọi $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , $\{x\} = x - [x]$ là phần lẻ của x .

Hãy tìm $\left\{ \frac{p^{2012} + q^{2016}}{120} \right\}$ biết rằng p, q là các số nguyên tố lớn hơn 5.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Công Phúc, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hoà, Đồng Nai)

Vì p, q lẻ nên $p^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow p^{2012} \equiv 1 \pmod{8}$;
 $q^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow q^{2016} \equiv 1 \pmod{8}$.

Vậy $p^{2012} + q^{2016} \equiv 2 \pmod{8}$. (1)

Theo định lý Fermat $p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Do đó $p^{2012} \equiv 1 \pmod{3}$, $q^{2016} \equiv 1 \pmod{3}$.

Suy ra $p^{2012} + q^{2016} \equiv 2 \pmod{3}$. (2)

Cũng theo định lý Fermat $p^4 \equiv q^4 \equiv 1 \pmod{5}$
 $\Rightarrow p^{2012} \equiv q^{2016} \equiv 1 \pmod{5}$

$\Rightarrow p^{2012} + q^{2016} \equiv 2 \pmod{5}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $p^{2012} + q^{2016} \equiv 2 \pmod{120}$,
 tức là $p^{2012} + q^{2016} = 120k + 2, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $\left\{ \frac{p^{2012} + q^{2016}}{120} \right\} = \left\{ k + \frac{1}{60} \right\} = \frac{1}{60}$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là một bài toán dễ nên có nhiều bạn tham gia giải và tất cả các lời giải đều đúng. Các bạn có lời giải tốt: **Thanh Hóa:** Nguyễn Hoài Thu, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** Phan Nhật Huy, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nam Định:** Nguyễn Hoàng Huy, 9A2, THCS Trần Đăng Ninh; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Quốc Khánh, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Phú Yên:** Lê Vũ Minh Huy, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Thuận, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Hữu Huy, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/448. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^2 + z = 2\sqrt{3} + 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^3}. \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Ta có $P + \frac{2\sqrt{3}+1}{3} = \left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3}x^3 \right) + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{3} \right) + \left(\frac{1}{z^3} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} \right)$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3}x^3 \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot \frac{x^3}{3}} = \frac{4}{3}. \quad (2)$$

$$\frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{3} \geq 2\sqrt{\frac{1}{y^2} \cdot \frac{y^2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad (3)$$

$$\frac{1}{z^3} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{z^3}\right)^3 \cdot \frac{z}{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}. \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4) suy ra

$$P + \frac{2\sqrt{3}+1}{3} \geq \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \text{ hay } P \geq \frac{4\sqrt{3}+9}{9}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1}{3x} = \frac{x^3}{3} \\ \frac{1}{y^2} = \frac{y^2}{3} \\ \frac{1}{z^3} = \frac{z}{9} \\ x^3 + y^2 + z = 2\sqrt{3} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt[4]{3} \\ z = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Vậy $\min P = \frac{4\sqrt{3}+9}{9}$ khi $(x, y, z) = (1, \sqrt[4]{3}, \sqrt{3})$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là dạng toán cơ bản thuộc loại dễ nên có nhiều bạn tham gia giải bài này. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Giang:** Nguyễn Văn Nghĩa, 10A1, THPT Lạng Giang; **Bắc Ninh:** Lê Quang Bảo, 9A, THCS Yên Phong; **Bình Định:** Trần Văn Thiên, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** Nguyễn Công Phúc, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Đồng Tháp:** Ngô Hiếu Nhân, 12A5, THPT Cao Lãnh; **Hà Nội:** Vũ Bá Sang, 11T1, THPT Chuyên Nguyễn Huệ, Trần Thiện Nam, 11A1, THPT Ứng Hòa A; **Hà Tĩnh:** Đoàn Thị Minh Huyền, Trần Mạnh Tuấn Vũ, Nguyễn Tuấn Minh, Trần Đình Hùng, Lê Minh Tuấn, Nguyễn Bá Hiếu, Phan Nhật Huy, Hà Thị Phương Anh, Nguyễn Hữu Khánh Duy, Nguyễn Khánh Huyền, Nguyễn Ánh Triều, Ngô Việt Hoàng, Lê Hoàng Minh Hằng, Nguyễn Khánh Hưng, 10T1-2, Nguyễn Văn Thế, Trần Bảo Trung, Võ Duy Khánh, Nguyễn Duy Tuấn, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Hương Giang, 12A9, Triệu Ninh Ngân, Dương Hồng Sơn, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm; **Long An:** Phạm Quốc Thắng, 10T1, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** Trịnh Tuấn Giang, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Quốc Khánh, Phan Đức Tiến, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Dương Đức Mạnh, Phạm Việt Anh, 11A1, THPT Quỳnh Lưu 1, Phan Văn Khải, 11A1, THPT Cửa Lò; **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Thuận, 10T, THPT Chuyên Hùng

Vương; **Phú Yên:** Nguyễn Chí Lương, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Tiền Giang:** Nguyễn Minh Thành, 12T, THPT chuyên Tiền Giang; **Vĩnh Long:** Đoàn Hoàng Gia Bảo, 10T1, Trần Duy Quân, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Hiếu, 9D, Phùng Văn Nam, 9E THCS Vĩnh Yên, Nguyễn Thanh Mai, 9A, THCS Vĩnh Tường; **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/448. Cho dãy số (a_n) có tất cả các số hạng lớn hơn 1 và thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln a_n)}{n} = \frac{1}{2014}$.

Chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ tồn tại và hữu hạn, với

$$b_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Lời giải. Ta có $b_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}}$

$$< b_{n+1} = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n+1}}}}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

tức là $b_1 < b_2 < b_3 < \dots$. Suy ra tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Để chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n < +\infty$ ta sẽ chứng

minh dãy số $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn trên. Thật vậy,

theo giả thiết $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln a_n)}{n} = \frac{1}{2014}$. Chú ý

$\frac{1}{2014} < \ln 2$ (vì $e < 2^{2014}$). Do đó $\exists m \in \mathbb{N}^*$

thỏa mãn $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq m, \frac{\ln(\ln a_n)}{n} < \ln 2$

$$\Rightarrow \ln a_n < 2^n \Rightarrow a_n < e^{2^n}$$

$$\Rightarrow b_n = \sqrt{a_1 + \dots + \sqrt{a_{m-1} + \sqrt{a_m + \dots + \sqrt{a_n}}}}$$

$$< \sqrt{a_1 + \dots + \sqrt{a_{m-1} + \sqrt{e^{2^m} + \dots + \sqrt{e^{2^n}}}}} \\ = \sqrt{a_1 + \dots + \sqrt{a_{m-1} + e^{2^{m-1}} \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}}. \quad (1)$$

Nhận xét: PT $x = \sqrt{1+x}$ có nghiệm

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1. \text{ Do đó } \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}}_{n \text{ số } 1} < \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1+a}}}}_{n-1 \text{ số } 1} \\ = \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1+a}}}}_{n-2 \text{ số } 1} = \dots = a \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$b_n < \sqrt{a_1 + \dots + \sqrt{a_{m-1} + a \cdot e^{2^{m-1}}}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy dãy số $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn trên. Do đó tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$. $\square$

► Nhận xét. Đây là bài toán giới hạn của dãy số dạng cơ bản. Có ba bạn gửi lời giải tới Toà soạn, tất cả các bạn có lời giải tốt: **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hà Nội:** Vũ Bá Sang, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Gia Lai:** Phan Thành Nhân, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Pleiku.

NGUYỄN MINH ĐỨC

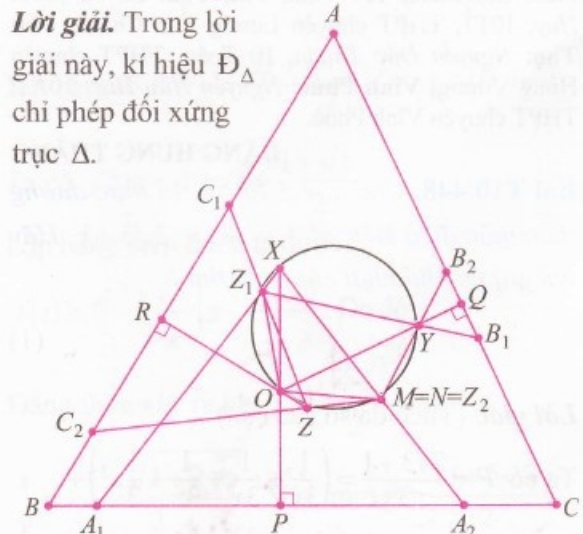
Bài T12/448. Cho tam giác ABC. O là điểm bất kì trong tam giác. P, Q, R thứ tự là hình chiếu của O trên BC, CA, AB. A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm bất kì trên các đường thẳng BC, CA, AB (A_1, B_1, C_1 phân biệt với A, B, C). A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua P, Q, R. Đặt

$$Z_1 = (AB_1C_1) \cap (BC_1A_1) \cap (CA_1B_1);$$

$$Z_2 = (AB_2C_2) \cap (BC_2A_2) \cap (CA_2B_2).$$

Chứng minh rằng O cách đều Z_1 và Z_2 .

Lời giải. Trong lời giải này, kí hiệu $\mathcal{D}_\Delta$ chỉ phép đối xứng trục Δ .



Gọi $X = OP \cap A_1Z_1; Y = OQ \cap B_1Z_1;$

$$Z = OR \cap C_1 Z_1; M = XA_2 \cap YB_2; N = YB_2 \cap ZC_2.$$

$$\text{Bỏ qua trường hợp đơn giản: } \begin{cases} M = Y \\ N = Y \end{cases}$$

Để thấy (XZ_1, XO)

$$\begin{aligned} &= (XZ_1, YZ_1) + (YZ_1, YO) + (YO, XO) \pmod{\pi} \\ &= (A_1 Z_1, B_1 Z_1) + (YZ_1, YO) + (AC, BC) \pmod{\pi} \\ &\quad (\text{vì } YO \perp AC; XO \perp BC) \\ &= (A_1 C, B_1 C) + (YZ_1, YO) + (AC, BC) \pmod{\pi} \\ &\quad (\text{vì } Z_1 \in (CA_1 B_1)) \\ &= (BC, AC) + (YZ_1, YO) + (AC, BC) \pmod{\pi} \\ &= (YZ_1, YO) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Do đó X, Y, Z_1, O cùng thuộc một đường tròn.

Tương tự X, Z, Z_1, O cùng thuộc một đường tròn. Vậy X, Y, Z, Z_1, O cùng thuộc một đường tròn (1). Để thấy

$$\begin{aligned} (XM, XO) &= (XA_2, XO) = (XO, XZ_1) \pmod{\pi} \\ &\quad (\text{vì } XZ_1 = XA_1 = \mathcal{D}(XA_2)) \\ &= (YO, YZ_1) \pmod{\pi} \quad (\text{vì (1)}) \\ &= (YB_2, YO) \pmod{\pi} \quad (\text{vì } YZ_1 = YB_1 = \mathcal{D}(YB_2)) \\ &= (YM, YO) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Do đó X, Y, O, M cùng thuộc một đường tròn (2). Tương tự Y, Z, O, N cùng thuộc một đường tròn (3).

Từ (1), (2) và (3), chú ý rằng $M \neq Y; N \neq Y$, suy ra $M = N$.

Điều đó có nghĩa là XA_2, YB_2, ZC_2 đồng quy tại $M = N$ và $X, Y, Z, O, M = N$ cùng thuộc một đường tròn. Vậy (MB_2, MC_2)

$$\begin{aligned} &= (MY, MZ) = (OY, OZ) \pmod{\pi} \quad (\text{vì } M \in (OYZ)) \\ &= (AB_2, AC_2) \pmod{\pi} \quad (\text{vì } OY \perp AB_2; OZ \perp AC_2). \end{aligned}$$

Do đó M thuộc đường tròn $(AB_2 C_2)$. Tương tự M thuộc các đường tròn $(BC_2 A_2)$ và $(CA_2 B_2)$. Vậy $M = Z_2$. Do đó

$$(XO, XZ_1) = (XZ_2, XO) \pmod{\pi} \quad (\text{vì } XZ_1 = \mathcal{D}(XZ_2)).$$

Từ đó, chú ý rằng X, O, Z_1, Z_2 cùng thuộc một đường tròn, suy ra $OZ_1 = OZ_2$. $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán này khó. Toà soạn không nhận được lời giải nào gửi về.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/448. Trong một xi lanh cao, cách nhiệt, đặt thẳng đứng, ở dưới pittông có một lượng khí hêli ở nhiệt độ $T_1 = 240K$. Ở trên pittông, người ta đặt một vật nặng có khối lượng bằng một nửa khối lượng pittông. Sau đó người ta đột ngột lấy vật nặng đi và đợi cho hệ trở về trạng thái cân bằng. Xác định nhiệt độ của khí. Biết rằng bên trên pittông không có khí. Bỏ qua mọi ma sát và trao đổi nhiệt.

Lời giải. Điều kiện cân bằng cơ học của pittông

$$\text{ở trạng thái đầu và cuối: } p_1 S = \left(m + \frac{m}{2}\right)g;$$

$$p_2 S = mg, \text{ trong đó } m \text{ là khối lượng của pittông.}$$

Sau khi đặt các hệ thức trên vào các phương trình Clapeyron-Mendeleev tương ứng, ta

$$\text{được: } \frac{3}{2} mgh_1 = \nu RT_1; mgh_2 = \nu RT_2.$$

Sử dụng các hệ thức này và định luật bảo toàn năng

$$\text{lượng, ta có: } mgh_1 + \frac{3}{2} \nu RT_1 = mgh_2 + \frac{3}{2} \nu RT_2.$$

$$\text{Suy ra: } T_2 = \frac{13}{15} T_1 = 208K. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Đây là bài L1.446 đã đăng trên THPT số 446. Các bạn có lời giải đúng: **Thái Bình:** Ngô Văn Khoa, 11A2, THPT Bắc Đông Quan; **Nghệ An:** Phan Văn Khải, 11A1, THPT Cửa Lò; **Hà Tĩnh:** Trần Bảo Trung, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nam Định:** Phạm Ngọc Nam, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/448. Đặt điện áp xoay $\omega = U_0 \cos \omega t$ (V),

với ω thay đổi được vào một đoạn mạch gồm điện trở thuần R , cuộn cảm thuần có độ tự cảm

$$L = \frac{4}{5\pi} \text{ (H)} \text{ và tụ điện có điện dung } C \text{ mắc nối}$$

tiếp.

Khi $\omega = \omega_0$ thì cường độ dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch đạt giá trị cực đại I_m .

Khi $\omega = \omega_1$ hoặc $\omega = \omega_2$ thì cường độ dòng điện cực đại qua đoạn mạch đều có giá trị bằng I_m . Biết $\omega_1 = \omega_2 = 200\pi$ rad/s.

1) Tính R .

2) Cho biết $I_m = 1A$ và $\omega_0 = 100\pi$ rad/s, hãy tính U_0 , ω_1 và C .

Lời giải. 1) - Khi $\omega = \omega_0$ thì có cộng hưởng điện nên $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ và $I_m = I_{\max} = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{\sqrt{2}R}$. (1)

- Khi $\omega = \omega_1$ hoặc $\omega = \omega_2$ thì $I_m =$

$$\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_1 - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_2 - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$R = L\omega_1 - \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{\omega_2 C} - L\omega_2. \quad (3)$$

Từ (3) suy ra $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$.

Từ (1), (2), (3); $\omega_1 - \omega_2 = 200\pi$ rad/s và

$$L = \frac{4}{5\pi} \text{ (H)} \text{ (đề bài) ta tìm được } R = 160 \text{ } (\Omega).$$

2) Từ dữ kiện của đề bài và $R = 160 \text{ } (\Omega)$ ta tìm được $U_0 = 160\sqrt{2} \text{ (V)}$; $\omega_1 = (\sqrt{2} + 1)100\pi \text{ (rad/s)}$

$$\text{và } C = \frac{10^{-3}}{8\pi} \text{ (F)}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng: **Bắc Giang:** Lương Văn Hưng, 12A6, THPT Tân Yên số 1; **Nam Định:** Đỗ Thùy Trang, Phạm Ngọc Nam, 11Li, THPT chuyên Lê Hồng phong; **Nghệ An:** Hồ Thanh Tùng, 12C1, THPT Kim Liên, Nam Đàn, Phan Xuân Sang, 12A1, THPT Phan Đăng Lưu, Yên Thành; **Thái Bình:** Ngô Văn Khoa, 11A2, THPT Bắc Đông Quan, Đông Hưng; **TP. Cần Thơ:** Huỳnh Hữu Hạng, 12A1, THPT Nguyễn Việt Hồng, Ninh Kiều.

ĐINH THÁI QUỲNH

PROBLEMS ...

(Tiếp theo trang 17)

Problem T7/452. Given a triangle ABC which is isosceles at A and is inscribed in a circle (O) . Let D be the midpoint of AB . The ray CD intersects (O) at E . Let F be the point on (O) so that $CF \parallel AE$. The ray EF intersects AC at G . Prove that BG is tangent to the circle (O) .

Problem T8/452. Determine the minimum value of the function

$$f(x) = \sqrt{\sin x + \tan x} + \sqrt{\cos x + \cot x}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/452. On the plane Oxy , consider the set M consisting of the points $(x; y)$ such that $x, y \in \mathbb{N}^*$ and $x \leq 12, y \leq 12$. Each point in M is colored by red, white or blue. Prove that there exists a rectangle satisfying the following properties: its sides are parallel to the coordinate axes and its vertices are in M and are colored by the same color.

Problem T10/452. Find the minimum positive integer t so that there exist t integers $x_1, x_2, \dots, x_t$ satisfying

$$x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 - \dots + (-1)^{t+1} x_t^3 = 2065^{2014}.$$

Problem T11/452. Let a be a positive integer and (x_n) a sequence given by $x_1 = 1$ and

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 2ax_n + 2a + 1}$$

$$-\sqrt{x_n^2 - 2ax_n + 2a + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Find a so that the sequence (x_n) has a finite limit.

Problem T12/452. Given a triangle ABC . A line Δ which does not contain A, B, C intersects BC, CA, AB respectively at A_1, B_1, C_1 . Let A_b, A_c respectively be the symmetric points of A_1 through AB, AC . Let A_a be the midpoint of $A_b A_c$. The points B_b, C_c are determined similarly to the way we construct the point A_a . Prove that the points A_a, B_b, C_c are collinear.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

GIỚI HẠN ...

(Tiếp theo trang 15)

Do đó $v_{n+2} \leq \alpha_1 v_n + \alpha_2 v_{n+1}, \forall n = 1, 2, \dots$ trong đó $\alpha_1 = \frac{\beta(M+1)}{2M+1}, \alpha_2 = \frac{\alpha(M+1)}{2M+1}$.Đến đây, sử dụng kết quả bài toán tổng quát 2 trong trường hợp: dãy bị chặn dưới bởi 0, $k = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{3}, \alpha_1 + \alpha_2 < 1$, ta thu được $\lim$ $v_n = 0$. Từ đó suy ra $\lim x_n = (A+B)^6$. $\square$ **Bài tập tự luyện****1.** (Việt Nam TST, 1991) Dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = x_4 = 1, x_2 = x_3 = 9$ và:

$$x_{n+4} = \sqrt[4]{x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.**2.** (TH&TT, 2010) Cho $a, b \in (0, 1)$. Dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_0 = a, u_1 = b$ và

$$u_{n+2} = \frac{1}{2010} u_{n+1}^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{u_n}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.**3.** Cho dãy (x_n) thỏa mãn $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$ và:

$$x_{n+3} = \frac{1}{18} x_{n+2}^3 + \frac{1}{18} x_{n+1}^2 + \frac{8}{9} \sqrt[3]{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim x_n$.**4.** Cho dãy số dương (u_n) thỏa mãn

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.**5.** Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 > 0, x_2 > 0$ và:

$$x_{n+2} = \frac{2}{x_{n+1} + x_{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Tìm } \lim x_n.$$

PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ ...

(Tiếp theo trang 8)

BÀI TẬP

Giải các phương trình, hệ phương trình, bất phương trình sau:

1) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^5 = 1.$

2) $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3(2x + 1)}.$

3) $\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + x + 6} = \sqrt[3]{3(2x^2 + 7)}.$

4)
$$\begin{cases} x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3 = -2 \\ 2x^3 - 7y^3 = -5 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} x^3 - 2y^3 + 2x - y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 5x + 6 = 2y^3 - 6y^2 + 7y \\ x^2 + 2x = 4y - 2y^2 \end{cases}$$

7) $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}. \text{ ĐK } x \geq -1.$

HD: Phân tích $\sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)}$,đặt $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{x^2 - x + 1}$, ta có PT $2(a^2 + b^2) = 5ab.$

8) $x^2 + 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^4 + x^2 + 1}.$

HD: Phân tích $\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = \sqrt{(x^2 + 1)^2 - x^2}$ $= \sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$ rồi đặt $a = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $b = \sqrt{x^2 - x + 1} \Rightarrow 2a^2 - b^2 = x^2 + 3x + 1$, tacó PT $2a^2 - b^2 = \frac{-\sqrt{3}}{3} ab.$

9) $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}. \text{ ĐK } x \geq -2.$

HD: $\sqrt{x^3 + 8} = \sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$, đặt $a = \sqrt{x+2}$, $b = \sqrt{x^2 - 2x + 4} \Rightarrow b^2 - a^2 = x^2 - 3x + 2.$

10) $\frac{\sqrt{1+x^3}}{x^2+2} = \frac{2}{5}.$

HD: $\sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)}$, đặt $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{x^2 - x + 1} \Rightarrow b^2 + a^2 = x^2 + 2.$ Ta có PT

$$ab = \frac{2}{5}(a^2 + b^2).$$

DIỄN ĐÀN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



ỨNG DỤNG CỦA HÀM LIÊN TỤC TRONG BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH

VĂN PHÚ QUỐC

(GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Quảng Nam)

Hàm liên tục mang một cái đẹp đa chiều trong toán học bởi tính ứng dụng rộng rãi. Những kết quả của nó hết sức ngắn gọn nhưng lại là công cụ giúp ta giải quyết một cách tối ưu nhiều bài toán khó. Trong phạm vi một bài báo ngắn, tôi chỉ xin giới thiệu vài bài toán điển hình về phương trình có sử dụng những ứng dụng của hàm liên tục.

I. Những ý tưởng

Sử dụng tính chất: “Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x \in (a; b)$ ”, để chứng minh một phương trình có nghiệm hoặc có nghiệm trên một đoạn (khoảng, nửa khoảng, ...) cho trước, ta thực hiện như sau:

- Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng $f(x) = 0$.
- Bước 2: Tìm hai số a, b thích hợp sao cho $f(a)f(b) < 0$.
- Bước 3: Nếu bài toán không cho sẵn hàm số f liên tục trên $[a; b]$ thì phải đi chứng minh điều này. Từ đó suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.

Để ý rằng :

- Nếu $f(a)f(b) \leq 0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $[a; b]$.
- Nếu hàm số f liên tục trên $[a; +\infty)$ và có $f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(a; +\infty)$.
- Nếu hàm số f liên tục trên $(-\infty; a]$ và có $f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-\infty; a)$.
- Một phương trình bậc ba (tổng quát: phương trình bậc lẻ) luôn có ít nhất một nghiệm thực.

II. Phân tích, bình luận một số bài toán điển hình

★ **Bài toán 1.** Chứng minh rằng phương trình $x \cdot 2015^x = 1$ có nghiệm duy nhất nằm trong khoảng $(0; 1)$.

Phân tích-bình luận. Đầu tiên, chúng ta cùng cố kiến thức về hàm liên tục bằng một bài toán tương đối đơn giản. Tuy nhiên cần đọc kỹ yêu cầu đề bài và để ý đến hai chữ “*duy nhất*” một chút bởi vì sự xuất hiện của nó mang một ý nghĩa rất riêng.

Ta phân chia lời giải bài toán thành hai phần:

Phần 1: Chứng minh sự tồn tại nghiệm.

Xét hàm số $f(x) = x \cdot 2015^x - 1$. Rõ ràng $f(x)$ xác định và liên tục trên tập $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = -1; f(1) = 2014$. Suy ra $f(0) \cdot f(1) < 0$. Điều này nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (0; 1)$.

Phần 2: Chứng minh tính duy nhất.

Giả sử rằng phương trình đã cho có nghiệm $x_1 \in (0; 1)$ và $x_1 \neq x_0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $0 < x_0 < x_1 < 1 \Rightarrow 0 = x_0 \cdot 2015^{x_0} - 1 < x_1 \cdot 2015^{x_1} - 1 = 0$.

Đây là điều vô lý. Do đó $x_0 \in (0; 1)$ là nghiệm duy nhất. □

Chúng ta sẽ khám phá được nhiều điều hay và mới mẻ trong những bài toán tiếp theo.

★ **Bài toán 2 (IMO 1988).** Chứng minh tập nghiệm của bất phương trình:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \dots + \frac{70}{x-70} \geq \frac{5}{4}$$

là hợp các khoảng rời nhau và có tổng độ dài 1988.

Phân tích-bình luận. Đây là một bài toán tương đối khó. Đầu tiên, chúng ta cần để ý đến những biến đổi sau đây:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \dots + \frac{70}{x-70} - \frac{5}{4} = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{\sum_{j \neq k} k \prod (x-j)}{\prod (x-j)} \cdot \frac{5}{4} = \frac{4 \sum_{j \neq k} k \prod (x-j) - 5 \prod (x-j)}{4 \prod (x-j)}$$

$$= \frac{f(x)}{g(x)} \text{ với } k, j = \overline{1, 70}.$$

Rõ ràng $g(x) = 0$ có 70 nghiệm $x \in \{1; 2; \dots; 70\}$.
Và f liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(k), f(k+1) < 0$ với $k = \overline{1, 69}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$, $f(70) > 0$ nên cũng có đủ 70 nghiệm xen kẽ là:

$$1 < x_1 < 2 < x_2 < \dots < x_{69} < 70 < x_{70}.$$

Tổng độ dài các khoảng nghiệm của bất phương trình $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ là:

$$S = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \dots + (x_{70} - 70)$$

$$= (x_1 + x_2 + \dots + x_{70}) - (1 + 2 + \dots + 70).$$

Đề ý đa thức f có bậc 70, hệ số cao nhất là -5 và hệ số của x^{69} là: $9(1 + 2 + \dots + 70)$. Do đó:

$$S = \frac{-9(1 + 2 + \dots + 70)}{-5} - (1 + 2 + \dots + 70) = 1988. \square$$

★ **Bài toán 3 (Olympic 30/4).** Cho phương trình: $x^{12} + 1 = 4x^4 \sqrt{x^n} - 1$. (1)

Tìm số n nguyên dương bé nhất để phương trình có nghiệm.

Phân tích-bình luận. Cái hay của bài toán này là đi tìm giá trị bé nhất của n bởi vì nó yêu cầu người làm toán phải biết “khôn khéo” trong quá trình biện luận để loại bỏ những giá trị không cần thiết và sử dụng linh hoạt phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức.

Điều kiện: $x^n - 1 \geq 0$.

- $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình (1).
- Với n chẵn thì nếu x_0 là một nghiệm của (1) thì $-x_0$ cũng là một nghiệm của (1).

- Với n lẻ thì $x \geq 1$. Khi đó phương trình (1) xác định và ta chỉ cần xét $x > 1$.

Từ $x > 1$ ta có: $x^4 + 1 > 2x^2$ và

$$x^8 - x^4 + 1 = x^4(x^4 - 1) + 1 > 2x^2 \sqrt{x^4 - 1}.$$

Nhân vế theo vế của hai bất đẳng thức này ta được: $(x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1) > 4x^4 \sqrt{x^4 - 1}$

$$\Leftrightarrow x^{12} + 1 > 4x^4 \sqrt{x^4 - 1} \quad (2)$$

Từ (2) ta thấy với $n = 4$, phương trình (1) vô nghiệm và do $x > 1$ nên với $n < 4$ thì phương trình (1) cũng vô nghiệm.

- Với $n = 5$. Xét hàm số $f(x) = x^{12} + 1 - 4x^4 \sqrt{x^5 - 1}$ liên tục và xác định trên $[1; +\infty)$. Ta có:

$$f(1) = 2 > 0; f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{6}{5}\right)^{12} + 1 - 4\left(\frac{6}{5}\right)^4 \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^5 - 1} < 0.$$

Như vậy, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm

$$x_0 \in \left(0; \frac{6}{5}\right).$$

- Với $n > 5$ lại xét hàm số $g(x) = x^{12} + 1 - 4x^4 \sqrt{x^n - 1}$ liên tục trên $[1; +\infty)$. Lập luận hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in \left(1; \frac{6}{5}\right)$. Do đó phương trình có

nghiệm với mọi $n \geq 5$ và số tự nhiên bé nhất cần tìm là $n = 5$.

★ **Bài toán 4.** Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi tham số:

$$mn(x-m)(x-n) + np(x-n)(x-p) + pm(x-p)(x-m) = 0.$$

Phân tích-bình luận. Hơi khó khăn ở bài toán này đây! Có lẽ sự “đồ sộ” của nó làm các em học sinh cảm thấy “ngợp”. Vì thế, chúng ta bắt đầu bằng những giá trị đặc biệt của x như 0, m , n , p xem thử có triệt tiêu được một phần nào đó của các tham số hay không?

Xét hàm số: $f(x) =$

$$mn(x-m)(x-n) + np(x-n)(x-p) + pm(x-p)(x-m)$$

Ta có: $f(0) = m^2n^2 + n^2p^2 + p^2m^2 \geq 0, \forall m, n, p$.

$$f(m) = np(m-n)(m-p)$$

$$f(n) = pm(n-p)(n-m)$$

$$f(p) = mn(p-m)(p-n)$$

Đến đây ta chưa thể chứng minh được tính dương và âm của các $f(m), f(n), f(p)$. Như vậy phải làm sao đây? Theo tôi, các em thử lấy tích của chúng xem nào? Vì có xuất hiện các cặp đối nhau như: $m - n$ và $n - m$; $m - p$ và $p - m$; $n - p$ và $p - n$ nên ta có:

$$f(m)f(n)f(p) = -m^2n^2p^2(m-n)^2(m-p)^2(n-p)^2 \leq 0.$$

Điều này dẫn dắt ta đến: $\exists q \in \{m, n, p\}$ sao cho $f(q) \leq 0$. Do đó: $f(0)f(q) \leq 0. \square$

❖ **Bài toán 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ mà $f(a) \neq f(b)$. Chứng minh rằng phương trình $cf(a) + df(b) - (c + d)f(x) = 0$ có nghiệm với hai số c, d bất kì có tích $cd > 0$.

Phân tích-bình luận. Tương tự cách xét hàm số phụ như ở bài toán trên, ta xét hàm số:

$$g(x) = cf(a) + df(b) - (c + d)f(x).$$

Vì $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ nên $g(x)$ cũng liên tục trên $[a; b]$. Có vẻ giả thiết bài toán đang quan tâm đến hai số a, b nên ta thử tính $g(a), g(b)$ rồi sau đó lấy tích của chúng xem có gì đặc biệt không nhé. Ta có:

$$g(a) = d[f(b) - f(a)]; g(b) = c[f(a) - f(b)].$$

$$\text{Suy ra: } g(a)g(b) = -cd[f(a) - f(b)]^2.$$

Để ý giả thiết bài toán còn cho $cd > 0$ và $f(a) \neq f(b)$ nên dẫn dắt ta đến $g(a)g(b) < 0$.

Như vậy, phương trình đã cho có nghiệm. □

❖ **Bài toán 6.** Giả sử hàm số f liên tục trên $[0; +\infty)$, $f(x) \geq 0 \forall x \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2014}{2015}$.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm trên $[0; +\infty)$.

Phân tích-bình luận. Bài toán đang bàn luận đến chuyện phương trình có nghiệm trên $[0; +\infty)$ chứ không phải là trên $(0; +\infty)$ nên chúng ta nhận thấy số 0 cũng mang đến những điều đặc biệt sau đây:

- Nếu $f(0) = 0$ thì hoàn toàn yên tâm khi kết luận phương trình $f(x) = x$ có nghiệm.
- Nếu $f(0) > 0$ thì ta giải quyết như sau:

Đặt $g(x) = f(x) - x$. Vì f liên tục trên $[0; +\infty)$ nên g cũng liên tục trên $[0; +\infty)$.

Ta có: $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0, \forall x \geq 0$. Vấn đề đặt ra là phải tìm được số b nào đó sao cho $g(b) < 0$. Bây giờ để ý đến một giả thiết nữa

của bài toán là $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2014}{2015}$ xem có gì

đặc biệt? Ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2014}{2015} < 1$. Suy

ra $\exists b > 0: \frac{f(b)}{b} < 1$ hay $\exists b > 0: f(b) < b$. Có

nghĩa là $g(b) = f(b) - b < 0$. Suy ra: $g(0)g(b) < 0$

$\Rightarrow \exists c \in (0; b) \subset [0; +\infty): g(c) = 0$

$\Leftrightarrow \exists c \geq 0: f(c) = c$.

Vậy PT đã cho luôn có nghiệm trên $[0; +\infty)$. □

❖ **Bài toán 7.** Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa điều kiện $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng với bất kì số tự nhiên n nào phương trình $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ cũng có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$.

Phân tích-bình luận. Xét $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

Vì giả thiết bài toán đã cho f là hàm liên tục trên $[0; 1]$ nên $g(x)$ cũng là hàm liên tục trên $[0; 1]$.

Sự kiện $f(0) = f(1)$ ở giả thiết bài toán gợi ý cho chúng ta phải tính những giá trị đặc biệt của hàm số như $g(0), g\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Ta thấy

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right); g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1).$$

Việc tính các $g(0), g\left(\frac{n-1}{n}\right)$ lại gợi ý cho

chúng ta tiếp tục tính các $g\left(\frac{k}{n}\right)$ với

$k = \overline{0, n-1}$ với mục đích là sau khi lấy tổng của các $g\left(\frac{k}{n}\right)$ sẽ triệt tiêu rất nhiều đại lượng

đối nhau. Ta tiếp tục giải quyết bài toán này như sau: $g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) =$

$$\left[f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right)\right] + \dots + \left[f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1)\right] = f(0) - f(1) = 0 \text{ (do giả thiết cho } f(0) = f(1)).$$

Nghĩa là tồn tại $\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \in \left\{0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots; \frac{n-1}{n}\right\} \text{ (} i < j \text{)}$

sao cho: $g\left(\frac{i}{n}\right) \leq 0; g\left(\frac{j}{n}\right) \geq 0$. Suy ra PT có

nghiệm trên đoạn $\left[\frac{i}{n}; \frac{j}{n}\right] \text{ (} i < j \text{)}$. Rõ ràng là

$\left[\frac{i}{n}; \frac{j}{n}\right] \subset [0; 1]$ nên PT đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$. □

Bài toán 8. Giả sử $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nhận giá trị khác dấu. Chứng minh rằng tồn tại cấp số cộng a, b, c ($a < b < c$) sao cho $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

Phân tích-bình luận. Đối với bài này đòi hỏi một tư duy toán học sắc bén mới có thể phát hiện và giải quyết được vấn đề.

Do f liên tục trên $\mathbb{R}$ và nhận giá trị khác dấu nên chúng ta hãy tưởng tượng rằng sẽ có một số $\delta > 0$ đủ bé và hai số x_1, x_2 sao cho:

$$f(x) < 0 \text{ khi } x = x_1 - \delta, x = x_1, x = x_1 + \delta$$

$$f(x) > 0 \text{ khi } x = x_2 - \delta, x = x_2, x = x_2 + \delta.$$

Những bài toán trên chúng ta gặp thuận lợi ở việc có sẵn một hàm số liên tục để áp dụng **định lý giá trị trung gian**. Nhưng bài toán này thì không hề đơn giản! Bởi vì giả thiết bài toán đã quá “tiết kiệm lời nói” khiến chúng ta cứ mãi loay hoay tìm kiếm một hướng đi trong việc thiết lập một hàm số trung gian.

Nếu chúng tôi đi xét thử một hàm số (tất nhiên vẫn có ý đồ nghệ thuật), chẳng hạn là hàm

$$g(t) = f(x_1 - \delta + t(x_2 - x_1)) + f(x_1 + t(x_2 - x_1)) + f(x_1 + \delta + t(x_2 - x_1))$$

thì các em xem thử có gì đáng lưu ý không nào. Tất nhiên là có phải không? Sự thật là vậy vì khi cho $t = 0, t = 1$ thì hàm số đã xuất hiện vài hình ảnh quen thuộc đã nêu ở trên. Đó là:

$$g(0) = f(x_1 - \delta) + f(x_1) + f(x_1 + \delta) < 0,$$

$$g(1) = f(x_2 - \delta) + f(x_2) + f(x_2 + \delta) > 0,$$

Điều này kéo theo: $\exists x_0 \in (0; 1): g(x_0) = 0$.

Hay là: $\exists x_0 \in (0; 1): f(x_1 - \delta + x_0(x_2 - x_1)) +$

$$f(x_1 + x_0(x_2 - x_1)) + f(x_1 + \delta + x_0(x_2 - x_1)) = 0.$$

Đặt $a = x_1 - \delta + x_0(x_2 - x_1)$, $b = x_1 + x_0(x_2 - x_1)$, $c = x_1 + \delta + x_0(x_2 - x_1)$. Dễ thấy $a < b < c$ và $b - a = c - b$. Vậy bài toán đã chứng minh xong. $\square$

Tóm lại, từ những bài toán trên chúng ta đã khám phá một ứng dụng đẹp đẽ của hàm số liên tục. Hy vọng điều đó sẽ giúp chúng ta có cái nhìn sâu sắc hơn khi tiếp cận với những bài toán phương trình mà khó giải quyết bằng những phương pháp thông thường. Sau đây là một số bài tập để các bạn tự luyện.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng các phương trình sau có nghiệm:

a) $x^5 + 7x^4 - 3x^2 + x + 2 = 0$;

b) $2^x + 3^x + 4^x + 5^x = 7^x$;

c) $x + \ln x = 0$.

2. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi tham số m :

a) $m \sin 2x + 2(\sin x - \cos x) = 0$;

b) $(m^6 - m^3 + 1)x^4 + 2x = 1$; c) $\frac{1}{\sin x} + \frac{3}{\cos x} = m$.

3. Chứng minh rằng:

a) Phương trình $x^5 - x - 2 = 0$ có nghiệm $x_0 \in (\sqrt[3]{2}; 2)$;

b) Phương trình $\cos^2 x = \sqrt{|x|}$ có nghiệm $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

c) Phương trình $2x + \tan x = 1$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

d) Phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+27} + 3\sqrt{x-16} = 0$ luôn có nghiệm $x_0 \in [0; 8]$.

4. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm $x_0 \in (0; 1)$ với điều kiện $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 0$ và $m < n > p; n^2 \geq mp$.

5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Chứng minh rằng với mọi $x_1, x_2 \in [a; b]$, với mọi $m, n > 0$ phương trình $f(x) = \frac{mf(x_1) + nf(x_2)}{m+n}$ có nghiệm thuộc đoạn $[a; b]$.

6. Tồn tại hay không hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho khi x vô tỉ, $f(x)$ nhận giá trị hữu tỉ còn khi x hữu tỉ, $f(x)$ nhận giá trị vô tỉ.

7. Cho hàm $f: [a; b] \rightarrow [a; b]$ thỏa mãn điều kiện $|f(x) - f(y)| < |x - y|, \forall x, y \in [a; b]$ và $x \neq y$. Chứng minh phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trên $[a; b]$.



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 452 (2.2015)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: toanhocvotruvietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Thái Nhật Phương – Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp xét giá trị riêng.
- 2 **Diễn đàn dạy học Toán**
Ngô Đức Minh – Từ ý tưởng của Euler.
- 5 **Hướng dẫn giải Đề thi Học sinh giỏi Toán lớp 9 TP. Hà Nội, năm học 2013-2014.**
- 6 **Đề thi Học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Hưng Yên, năm học 2013 – 2014.**
- 7 **Chuẩn bị thi vào đại học**
University Entrance Preparation
Đào Văn Chánh – Phương pháp đưa về phương trình, bất phương trình thuần nhất.
- 9 **Hướng dẫn giải - Đề số 4.**
- 11 **Thử sức trước kì thi - Đề số 5.**
- 12 **Bạn đọc tìm tòi**
Võ Quốc Bá Cẩn – Giới hạn của một dãy số dạng trung bình và ứng dụng.
- 16 **Đề ra kì này**
Problems in This Issue
T1/452, ..., T12/452, L1/452, L2/452.
- 18 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
Giải các bài của Số 448.
- 28 **Diễn đàn Phương pháp giải Toán**
Văn Phú Quốc – Ứng dụng của hàm liên tục trong bài toán phương trình.

Trưởng ban biên tập: ThS. NGUYỄN ANH QUÂN

Trĩ sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỂM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: KHÁNH LINH

HÃY ĐẶT MUA TC THPT TẠI BƯU CỤC GẦN NHẤT !



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu

Bộ Từ điển Bách khoa Britannica

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam vừa cho ra mắt phiên bản tiếng Việt của cuốn Từ điển Bách khoa Britannica của Mỹ.

Từ điển Bách khoa Britannica gồm 25.000 mục từ, 2.500 hình minh họa và bản đồ, 51 lĩnh vực khoa học và đời sống, gần 300 mục từ về Việt Nam do các tác giả Việt Nam biên soạn theo thỏa thuận với phía Mỹ, Công ty Bách khoa thư Britannica Mỹ xét duyệt.

Việc chuyển dịch sang tiếng Việt được thực hiện rất công phu, do 54 dịch giả, 62 chuyên gia (trong đó có các chuyên gia từ điển) hiệu đính, thẩm định, biên tập dưới sự chỉ đạo của Hội đồng biên soạn - biên dịch, do ông Ngô Trần Ái - Chủ tịch Hội đồng thành viên - Tổng giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - làm chủ tịch.

Bộ sách gồm hai tập, tổng cộng 3.056 trang. Hình thức trình bày công phu, trang trọng: in bốn màu toàn bộ, đóng bìa cứng chữ dập chìm, ép nhũ vàng, có bìa áo cho từng cuốn, đặt trong hộp cứng, được phát hành từ ngày 20/11/2014.

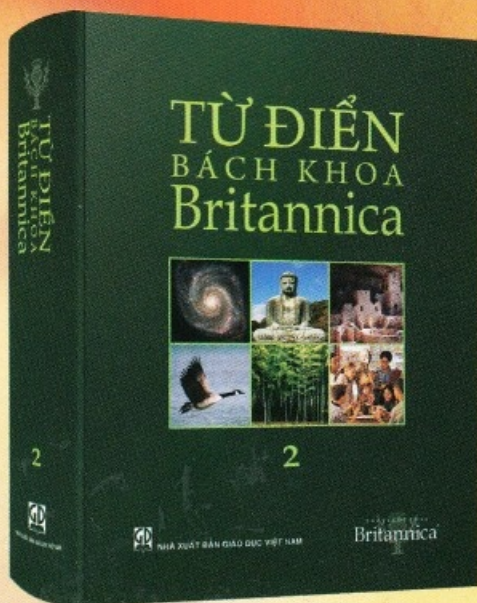
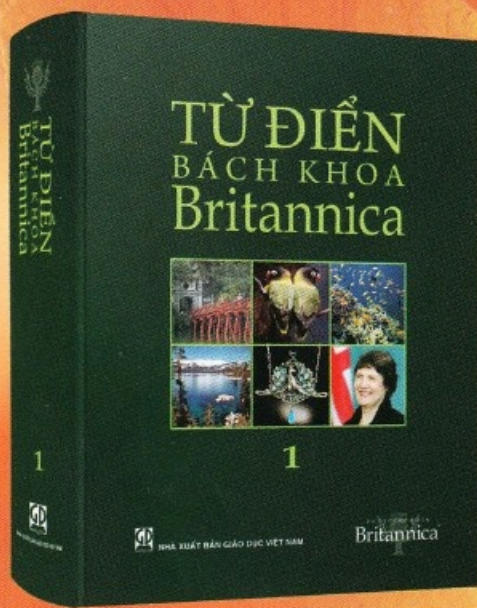
Giáo sư, Viện sĩ Phạm Minh Hạc, Nguyên Bộ trưởng Bộ Giáo dục - Đào tạo, đánh giá bộ sách đạt ba tiêu chí: Khách quan, Chính xác, "Quyền uy" và việc phát hành Từ điển Bách khoa Britannica tại Việt Nam có thể được coi là một sự kiện lớn trong đời sống văn hoá - giáo dục nước nhà. Theo Giáo sư, mỗi trường nên có một cuốn để các nhà giáo và các em học sinh tham khảo.

Theo Nguyên Bộ trưởng: "Nhu *Lời nhà xuất bản* viết: công việc hết sức khó khăn, các dịch giả, người hiệu đính và biên tập viên đã làm việc cật lực trong nhiều năm, tuy thế cũng 'khó tránh khỏi sai sót'.

Bạn đọc có nhu cầu xin liên hệ:

Công ty CP Sách dịch và Từ điển Giáo dục. Tel: 04.38266359 - 0904608096.

**Hoặc tìm thêm thông tin tại www.facebook.com/pages/Từ-diện-Bách-khoa-Britannica/
Bộ sách có giá 3 triệu đồng. Giao sách tận nơi, miễn phí.**



HÃY ĐẶT MUA TC THPT TẠI BƯU CỤC GẦN NHẤT !

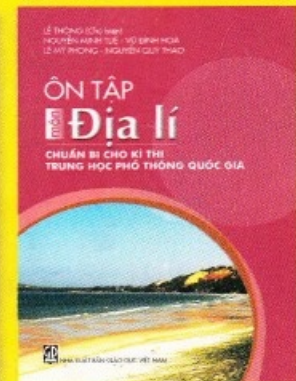
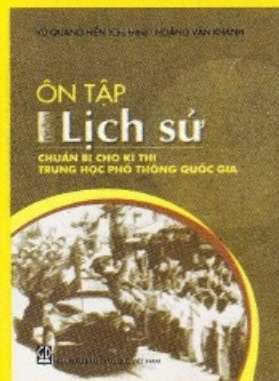
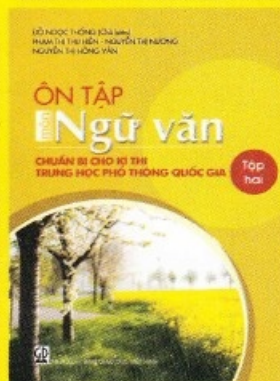
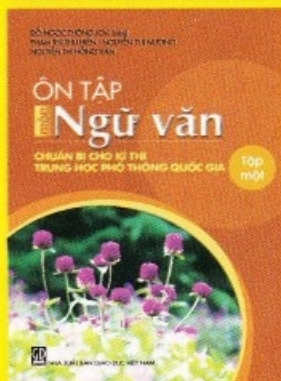
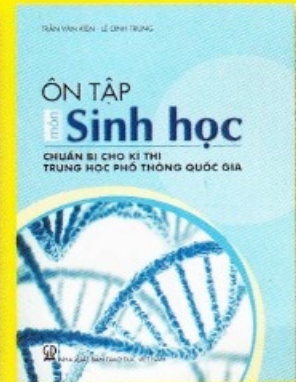
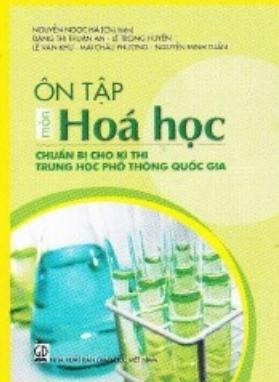
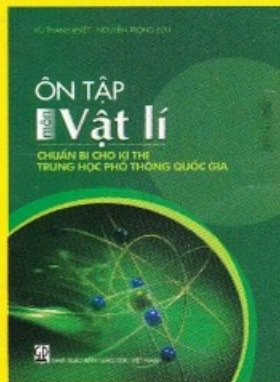
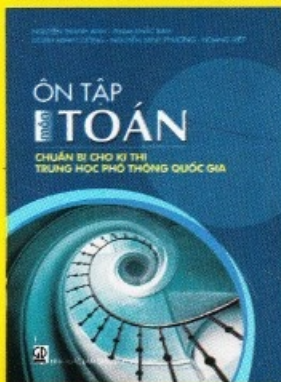
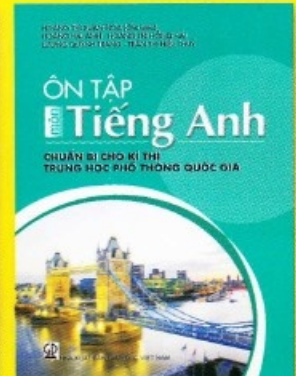


NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc bộ sách
ÔN TẬP CHUẨN BỊ CHO KÌ THI
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

Để giúp các em học sinh Trung học phổ thông, đặc biệt là học sinh lớp 12, ôn tập và thi đạt kết quả tốt trong kì thi Trung học phổ thông quốc gia năm học 2014 - 2015, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tổ chức biên soạn, xuất bản bộ sách **Ôn tập chuẩn bị cho kì thi Trung học phổ thông quốc gia**.

Bộ sách tập trung biên soạn, lựa chọn những câu hỏi, bài tập điển hình, tiêu biểu theo hướng đổi mới kiểm tra, đánh giá và thi tốt nghiệp Trung học phổ thông quốc gia do Bộ Giáo dục và Đào tạo chỉ đạo.



Bạn đọc có nhu cầu mua sách xin liên hệ: **CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI**
187B Giảng Võ - Hà Nội. ĐT: 04.35121974. Fax: 04.35121973

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT2M5

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2015

Giá: **10.000 đồng**
Mười nghìn đồng

nxbgdvn.com

HÃY ĐẶT MUA TC THPT TẠI BƯU CỤC GẦN NHẤT!