



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
10 2014
Số 448

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 51

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



**KỶ NIỆM 40 NĂM VIỆT NAM THAM DỰ
OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ (IMO)**

MÁY TRỢ GIẢNG TỐT NHẤT HÀ QUỐC

UNIZONE



UNIZONE 9088

- Kiểu dáng đẹp, thiết kế nhỏ gọn.
- Âm thanh to, trung thực, rõ ràng trong phạm vi rộng
- Nút bật tắt, điều khiển volume tiện lợi.
- Kết nối các thiết bị âm thanh khác
- Công nghệ chống cộng hưởng âm, chống hú.
- Pin lithium sạc 5h sử dụng (8h-20h).



UNIZONE 9088 EMS

- Công nghệ chống cộng hưởng âm, chống hú.
- Tính năng ghi âm và hiệu ứng vang(echo).
- Hỗ trợ thẻ nhớ Micro SD.
- Pin lithium sạc 5h sử dụng (8h-20h).
- Nghe nhạc, FM.
- Công suất 15w phù hợp với phòng học dưới 40 hs.



UNIZONE 9288

- Công nghệ chống cộng hưởng, chống hú.
- Âm thanh to, trung thực, rõ ràng.
- Hỗ trợ thẻ nhớ Micro SD.
- Pin sạc 3h có thời gian sử dụng (10h-30h).
- Nghe nhạc, thu âm, radio FM.
- Công suất 20W phù hợp cho phòng học dưới 60hs
- Màn hình hiển thị LCD.

TẶNG

- . Bút laze
- . Đốc sạc
- . Pin dự phòng



UNIZONE 9580 F2

- Kết nối không dây giữa micro & loa.
- Âm thanh to, trung thực, rõ ràng.
- Hỗ trợ thẻ nhớ Micro SD.
- Pin sạc 3h có thời gian sử dụng (10h-30h).
- Nghe nhạc, thu âm, radio FM.
- Công suất 30W phù hợp cho phòng học dưới 100hs
- Màn hình hiển thị LCD.

TẶNG

- . Bút laze
- . Đốc sạc
- . Pin dự phòng
- . 12 tháng BH



CÔNG TY TNHH MCRIO

132 Chùa Láng, Đống đa, Hà Nội
www.mcrio.vn | Điện thoại: 0462 82 82 88 | Hotline: 0934 683 968



MỐI LIÊN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ CỦA HAI TAM GIÁC "LỒNG NHAU"

NGUYỄN ANH TUYẾN

(SV K56, Viện CNTT&TT ĐHBK Hà Nội)

TRUNG HỌC CƠ SỞ

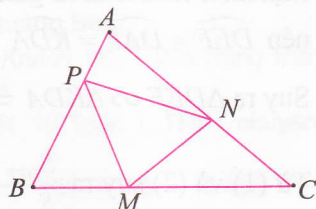
Nếu lấy ba điểm bất kì trên ba cạnh của một tam giác và nối chúng với nhau, ta được tam giác mới có các đỉnh nằm trên các cạnh của tam giác ban đầu, tạm gọi hai tam giác trên là *lồng nhau*. Mối liên hệ giữa các yếu tố của hai tam giác này sẽ là vấn đề được đề cập tới trong bài viết này thông qua các bài toán.

★ **Bài toán 1.** Giả sử các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho $S_{MNP} = S_{BPM} = S_{CMN} = 1$. Chứng minh rằng $S_{ANP} \leq 1$.

Lời giải (h.1)

Đặt:

$$x = \frac{MB}{BC}, y = \frac{NC}{CA}, z = \frac{PA}{AB}; S = S_{ABC}.$$



Hình 1

Ta có:

$$\begin{aligned} 1 &= S_{MNP} = S - S_{ANP} - S_{BPM} - S_{CMN} \\ &= S - Sz(1-y) - Sx(1-z) - Sy(1-x) \\ &= S(1-x-y-z+xy+yz+zx) \\ &= S((1-x)(1-y)(1-z) + xyz) \\ &\geq 2S \cdot \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)xyz} \end{aligned}$$

(sử dụng BĐT Cauchy cho hai số)

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{Sz(1-y) \cdot Sx(1-z) \cdot Sy(1-x)}{S}} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{S_{ANP} \cdot S_{BPM} \cdot S_{CMN}}{S}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{S_{ANP}}{S}}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } S \geq 4S_{ANP} \Leftrightarrow 3 + S_{ANP} \geq 4S_{ANP} \Rightarrow S_{ANP} \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB .

★ **Bài toán 2.** (IMO 1966) Gọi K, L, M lần lượt là các điểm tùy ý trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC . Chứng minh rằng trong các tam giác AML, BKM, CLK tồn tại ít nhất một tam giác có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{4}S_{ABC}$.

Lời giải

Cách 1 (h.2)

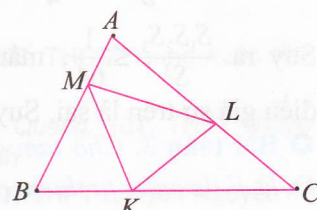
Giả sử diện tích

các tam giác

$AML, BKM,$

CLK đều lớn

hơn $\frac{1}{4}S_{ABC}$.



Hình 2

Khi đó xét $\triangle AML$, ta có: $4S_{AML} > S_{ABC}$

$$\Leftrightarrow 4AM \cdot AL \cdot \sin A > AB \cdot AC \cdot \sin A$$

$$\Leftrightarrow 4AM \cdot AL > AB \cdot AC$$

$$\Leftrightarrow 4AM \cdot AL > (AM + MB)(AL + LC)$$

$$\Leftrightarrow 3AM \cdot AL > AM \cdot LC + MB \cdot AL + MB \cdot LC.$$

$$\text{Đặt } k = \frac{BK}{CK}, l = \frac{CL}{AL}, m = \frac{AM}{BM}.$$

$$\text{BĐT trở thành } 3 > l + \frac{1}{m} + \frac{l}{m}.$$

$$\text{Tương tự } 3 > k + \frac{1}{l} + \frac{k}{l}, \quad 3 > m + \frac{1}{k} + \frac{m}{k}.$$

$$\text{Suy ra } 9 > m + k + l + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{l}{m} + \frac{m}{k} + \frac{k}{l} \quad (*)$$

Mặt khác, theo BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} &m + k + l + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{l}{m} + \frac{m}{k} + \frac{k}{l} \\ &= \left(m + \frac{1}{m}\right) + \left(k + \frac{1}{k}\right) + \left(l + \frac{1}{l}\right) + \left(\frac{l}{m} + \frac{m}{k} + \frac{k}{l}\right) \\ &\geq 2 + 2 + 2 + 3 = 9, \text{ mâu thuẫn với } (*) \text{ nên điều} \\ &\text{giả sử trên là sai. Suy ra đpcm.} \end{aligned}$$

Cách 2

Đặt $S_{AML} = S_1, S_{BKM} = S_2, S_{CLK} = S_3, S_{ABC} = S$.

Giả sử diện tích các tam giác AML, BKM, CLK đều lớn hơn $\frac{1}{4}S_{ABC}$ thì $\frac{S_1 S_2 S_3}{S^3} > \frac{1}{64}$.

Theo công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$, ta có:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{z(b-y)}{bc}, \frac{S_2}{S} = \frac{x(c-z)}{ca}, \frac{S_3}{S} = \frac{y(a-x)}{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 S_2 S_3}{S^3} = \frac{x(a-x)}{a^2} \cdot \frac{y(b-y)}{b^2} \cdot \frac{z(c-z)}{c^2}. \text{ Ta có:}$$

$$(a-2x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq 4x(a-x) \Leftrightarrow \frac{x(a-x)}{a^2} \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{y(b-y)}{b^2} \leq \frac{1}{4}, \frac{z(c-z)}{c^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Suy ra $\frac{S_1 S_2 S_3}{S^3} \leq \frac{1}{64}$, mâu thuẫn với (*) nên điều giả sử trên là sai. Suy ra đpcm.

★ **Bài toán 3.** Cho tam giác ABC . Các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $AFDE$ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh rằng: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \leq \frac{EF^2}{4AD^2}$.

Lời giải

Cách 1 (h.3) Kéo dài

AD , cắt đường tròn

ngoại tiếp $\triangle ABC$

tại điểm thứ hai

là P . Khi đó $AFDE$

và $ABPC$ đều là

tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{DEF} = \widehat{DAF} = \widehat{PCB}$$

$$\text{và } \widehat{DFE} = \widehat{DAE} = \widehat{PBC}.$$

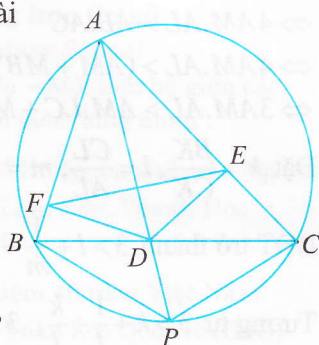
$$\text{Suy ra } \triangle DEF \sim \triangle PCB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{PCB}} = \frac{EF^2}{BC^2}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{S_{PCB}}{S_{ABC}} = \frac{PD}{AD} \text{ nên } \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{EF^2}{BC^2} \cdot \frac{PD}{AD}.$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{BC^2} = \frac{1}{(BD+CD)^2} \leq \frac{1}{4BD \cdot DC}.$$

Mà tứ giác $ABPC$ nội tiếp $\Rightarrow BD \cdot CD = AD \cdot PD$.



Hình 3

$$\text{Do đó } \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4AD \cdot PD}. \text{ Suy ra } \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \leq \frac{EF^2}{4AD^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi D là trung điểm của BC .

Cách 2. (h.4)

Trên AB, AC

lấy các điểm

H, K sao cho

$AHDK$ là

hình bình

hành. Vì

$\triangle BHD \sim \triangle BAC$,

$$\triangle DKC \sim \triangle BAC \text{ nên } \frac{S_{BHD}}{S_{BAC}} = \frac{BD^2}{BC^2}, \frac{S_{DKC}}{S_{BAC}} = \frac{DC^2}{BC^2}$$

do đó

$$\frac{S_{BHD} + S_{DKC}}{S_{BAC}} = \frac{BD^2 + DC^2}{BC^2} \geq \frac{(BD+DC)^2}{2BC^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AHDK}}{S_{BAC}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{KDA}}{S_{BAC}} \leq \frac{1}{4} \quad (1)$$

Mặt khác $AFDE$ là tứ giác nội tiếp và $DK \parallel AB$ nên $\widehat{DEF} = \widehat{DAF} = \widehat{KDA}$ và $\widehat{DFE} = \widehat{KAD}$.

$$\text{Suy ra } \triangle DEF \sim \triangle KDA \Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{KDA}} = \frac{EF^2}{AD^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \leq \frac{EF^2}{4AD^2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi D là trung điểm BC .

★ **Bài toán 4.** Cho tam giác đều ABC . Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB thỏa mãn $S_{ANP} = S_{BMP} = S_{CMN}$.

Chứng minh rằng: $\triangle ANP = \triangle BPM = \triangle CMN$.

Lời giải (h.5) Đặt

$$BC = CA = AB = a;$$

$$BM = x, CN = y,$$

$$AP = z. \text{ Không}$$

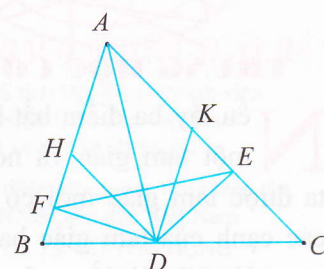
mất tính tổng

quát, giả sử

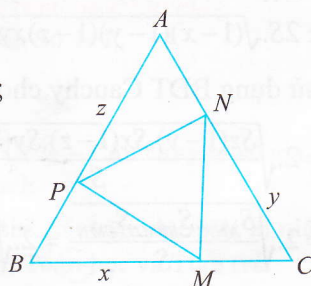
$$x \geq y \geq z.$$

$$\text{Suy ra } x - y \geq 0, y - z \geq 0. \quad (1)$$

Từ giả thiết $S_{BMP} = S_{CMN}$



Hình 4



Hình 5

$$\Leftrightarrow \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} \Leftrightarrow \frac{BP \cdot BM}{BA \cdot BC} = \frac{CM \cdot CN}{CB \cdot CA}$$

$$(\text{vì } S_{XYZ} = \frac{1}{2} XY \cdot XZ \cdot \sin \widehat{YXZ})$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-z)x}{a^2} = \frac{(a-x)y}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow x(y-z) + a(x-y) = 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x = y = z \Rightarrow BM = CN = AP$.

Do đó $\triangle ANP = \triangle BMP = \triangle CMN$ (đpcm).

★ **Bài toán 5.** (Cuộc thi liên Quốc gia Kürschak năm 1952) Cho tam giác ABC . Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt trên BC, CA, AB sao cho $\frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB} = k \left(\frac{1}{2} < k < 1 \right)$. Chứng minh chu vi $\triangle A_1B_1C_1$ bé hơn k lần chu vi $\triangle ABC$.

Lời giải (h.6) Đặt $\frac{CA_1}{BC} =$

$$\frac{AB_1}{CA} = \frac{BC_1}{AB} = k' \text{ với}$$

$$k' = 1 - k \text{ và}$$

$$0 < k' < \frac{1}{2}.$$

Lấy các điểm

A_2, B_2, C_2

lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $A_1B_2 \parallel AB, B_1C_2 \parallel BC, C_1A_2 \parallel CA$. Ta có $A_1B_1 < A_1B_2 + B_1B_2$ và tương tự với các cạnh khác. Mà $\triangle A_1B_2C \sim \triangle BAC$ nên $A_1B_2 = k'AB$ và $CB_2 = k'CA$. Suy ra $B_1B_2 = (1 - 2k')CA$. Do đó $A_1B_1 < k'AB + (1 - 2k')CA$. Tương tự:

$$B_1C_1 < k'BC + (1 - 2k')AB;$$

$$C_1A_1 < k'CA + (1 - 2k')BC.$$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên ta có đpcm:

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 < (1 - k')(AB + BC + CA) = k(AB + BC + CA).$$

★ **Bài toán 6.** (IMO 1983) Cho tam giác đều ABC . Gọi S là tập hợp tất cả các điểm trên các cạnh AB, BC, CA (gồm cả ba đỉnh A, B, C). Hãy xác định điều này có đúng không: “Với mọi phân hoạch S thành hai tập con rời nhau thì ít nhất một trong hai tập hợp đó sẽ chứa ba đỉnh của một tam giác vuông”.

Lời giải (Bạn đọc tự vẽ hình).

Giả sử ngược lại, tồn tại S là một phân hoạch thành hai tập con mà không có tập nào chứa ba đỉnh của một tam giác vuông. Tô màu tất cả các phần tử của hai tập được phân ra với hai màu đỏ, xanh tương ứng. Giả sử mỗi tam giác vuông đều có hai màu.

Xét ba điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho

$$\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CA} = \frac{AF}{AB} = \frac{2}{3}.$$

Dễ thấy các tam giác DEC, EAF, FBD tương ứng vuông tại D, E, F .

Không mất tính tổng quát, giả sử E và F có màu đỏ. Khi đó toàn bộ cạnh AC , trừ điểm E có màu xanh. Suy ra D có màu đỏ. Lí luận tương tự ta cũng có cả ba điểm D, E, F có màu xanh (mâu thuẫn).

Từ đây ta có kết luận của bài toán.

★ **Bài toán 7.** (Bài T9/364, TH&TT Số 364, tháng 10 năm 2007) Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P theo thứ tự sao cho $AM + BN + CP = MB + NC + PA$.

Chứng minh rằng: $S_{MNP} \leq \frac{1}{4} S_{ABC}$.

★ **Bài toán 8.** (Bài T10/THCS, TH&TT Số 385, tháng 7 năm 2009) Các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho $BX = CY = AZ$. Chứng minh rằng tam giác XYZ đều khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Mời bạn đọc tham khảo lời giải hai bài toán trên trong Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ Số 368 (tháng 2 năm 2008) và Số 389 (tháng 11 năm 2009). Cuối bài viết xin dành cho bạn đọc một bài toán nhỏ.

★ **Bài toán 9.** Cho tam giác ABC . Các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $a'b' + b'c' + c'a'$ trong đó a', b', c' là độ dài các cạnh của tam giác $A'B'C'$.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HOÁ NĂM HỌC 2014-2015

(Đề thi đăng trên TH&TT Số 447, tháng 9 năm 2014)

VÒNG 1

Câu 1. 1) $C = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}}$.

2) $a = 9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 2)^2 \Rightarrow C = 9 - 4\sqrt{5}$.

Câu 2. 1) $m = 2$ hệ có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.

2) Ta có $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ y = -m^2 + 2m+1 \end{cases}$.

Vậy với mọi m , hệ có nghiệm duy nhất. Khi đó:

$P = 2x + y = -m^2 + 4m - 1 = 3 - (m-2)^2 \leq 3$.

Câu 3. 1) PT hoành độ giao điểm của (d)

với (P) : $2x^2 - mx + m - 2 = 0$ (*)

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 8m + 16 > 0 \\ P = \frac{m-2}{2} > 0 \\ S = \frac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \neq 4.$$

2) Viết PT đầu dưới dạng:

$(\sqrt{x+2y})^2 + 3\sqrt{x+2y} - 4 = 0 \Rightarrow x + 2y = 1$.

Thay $x + 2y = 1$ vào PT thứ hai ta được:

$\sqrt[3]{2x+6} + \sqrt{1-x} = 2$.

Đặt $a = \sqrt[3]{2x+6}$, $b = \sqrt{1-x}$ ($b \geq 0$), ta được hệ

$\begin{cases} a + b = 2 \\ a^3 + 2b^2 = 8 \end{cases}$. Tìm được $a = 0$; $a = -4$; $a = 2$.

Suy ra tập nghiệm của hệ là

$S = \{(-3; 2); (-35; 18); (1; 0)\}$.

Câu 4. (Bạn đọc tự vẽ hình)

1) Tứ giác $ADHE$ có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{D} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{DHE} = 90^\circ$. Ta có $\triangle AED \sim \triangle ABC$ (g.g)

$\Rightarrow AB \cdot AD = AC \cdot AE$.

2) Từ $GI \perp HD \Rightarrow GI \parallel AB$.

Tương tự $FI \parallel AC \Rightarrow \widehat{GIF} = \widehat{BAC} = 90^\circ$.

3) Vì $GI \parallel AB$ và I là trung điểm AH nên G là trung điểm BH . Tương tự, F là trung điểm CH .

Suy ra $DG = \frac{1}{2}BH$; $EF = \frac{1}{2}CH$.

Tứ giác $DEFG$ là hình thang vuông nên

$S = \frac{1}{2}DE \cdot (DG + EF) = \frac{1}{2}DE \left(\frac{1}{2}BH + \frac{1}{2}CH \right)$

$= \frac{1}{4}AH \cdot BC$

Do BC không đổi nên S_{DEFG} lớn nhất $\Leftrightarrow AH$ lớn nhất hay A là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$.

Câu 5. Với các số thực dương x, y, z thì

$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2$

$\Rightarrow x+y+z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Do đó $S \leq \frac{xyz(1+\sqrt{3})\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)}$

$= \frac{xyz(1+\sqrt{3})}{(xy + yz + zx)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ (1)

Ta có $xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}$ (2)

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{xyz}$ (3)

Từ (2) và (3) ta được:

$\frac{1}{(xy + yz + zx)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}xyz}$ (4)

Do (4) nên từ (1) suy ra: $S \leq \frac{xyz(1+\sqrt{3})}{3\sqrt{3}xyz} = \frac{3+\sqrt{3}}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Vậy $\max S = \frac{3+\sqrt{3}}{9}$ khi $x = y = z$.

VÒNG 2

Câu 1. $1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2(n+1)^2 + 2n^2 + 2n + 1}{n^2(n+1)^2}$

$= \left[\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} \right]^2 = \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)^2$. Từ đó ta

tìm được $S = \frac{2013 \cdot 2015}{2014}$.

Câu 2. 1) ĐK: $x^2 - x \geq 0$. PT đã cho tương đương với

$2x^2 - 2x - (x+1)\sqrt{2x^2 - 2x - x - 2} = 0$ (1)

Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 2x}$, ($t \geq 0$). PT (1) trở thành:
 $t^2 - (x+1)t - x - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (loại), $t = x + 2$.
 Với $t = x + 2 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}$ (thỏa mãn).

2) Đưa hệ về dạng $\begin{cases} (x-2y)(xy+2y) = -6 \\ (xy+2y) + (x-2y) = -1 \end{cases}$.
 Đặt $a = x - 2y$; $b = xy + 2y$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} ab = -6 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Tìm được nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(\frac{-5 - \sqrt{17}}{2}; \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \right); \left(\frac{-5 + \sqrt{17}}{2}; \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right).$$

Câu 3. 1) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, không chia hết cho 3.

• $p = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}, k > 1$) suy ra

$$A = (p-1)(p+1) = 4k(k+1) : 8.$$

• $p = 3m \pm 1$ ($m \in \mathbb{Z}, m > 1$), suy ra $A : 3$.

Vậy $A : 24$.

2) PT $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$ (*)

$$\Leftrightarrow (x+y+1) \frac{(x-y)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2}{2} = 4$$

Đặt $A = \frac{(x-y)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2}{2}$ thì $A > 0$
 $\Rightarrow A$ là ước dương của 4. Khi đó:

$$(x+y+1; A) \in \{(4;1); (2;2); (1;4)\},$$

suy ra: $(x-y)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2 \in \{2; 4; 8\}$.

NX: Tổng của ba số chính phương này:

Bảng 2 nếu ba số là: 1, 1, 0; Bảng 4 nếu ba số là: 4, 0, 0; Bảng 8 nếu ba số là: 4, 4, 0;

Như vậy, trong trường hợp nào cũng có một số bằng 0, tức là:

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ x=y \end{cases}$$

Xét các khả năng:

a) $x+y+1=4 \Leftrightarrow x+y=3$.

Nếu $x=1$ thì $y=2$ thỏa mãn (*).

Nếu $y=1$ thì $x=2$ thỏa mãn (*).

Không có khả năng $x=y$.

b) $x+y+1=2 \Leftrightarrow x+y=1$

Nếu $x=1$ thì $y=0$, không thỏa mãn (*).

Nếu $y=1$ thì $x=0$, không thỏa mãn (*).

Không có khả năng $x=y$.

c) $x+y+1=1 \Leftrightarrow x+y=0$

Nếu $x=1$ thì $y=-1$ thỏa mãn (*).

Nếu $y=1$ thì $x=-1$ thỏa mãn (*).

Nếu $x=y$ thì $x=y=0$, không thỏa mãn (*).

Đáp số: (2; 1); (1; 2); (1; -1); (-1; 1).

Câu 4. (Bạn đọc tự vẽ hình)

1) Gọi K là giao điểm của BO với DF thì $\triangle IKF$ vuông tại K .

$$\text{Từ } \widehat{DFE} = \frac{1}{2} \widehat{DOE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BIF} = 45^\circ.$$

2) Khi $AM = AB$ thì $\triangle ABM$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{DBH} = 45^\circ$. Mà $\widehat{DFH} = 45^\circ$ nên tứ giác $BDHF$ nội tiếp. Suy ra 5 điểm B, D, O, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính BO .

Từ đó $\widehat{BFO} = \widehat{BHO} = 90^\circ \Rightarrow OH \perp BM$, mà $OA \perp BM \Rightarrow A, O, H$ thẳng hàng

$\widehat{BAH} = \widehat{BIH} = 45^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

3) $\widehat{QPN} = \widehat{QDN} = \widehat{FEN}$, $\widehat{NQP} = \widehat{NDP} = \widehat{EFN}$

$$\Rightarrow \triangle NEF \sim \triangle NPQ \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF} \leq 1 \Rightarrow PQ \leq EF.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow P \equiv E$; $Q \equiv F \Rightarrow DN$ là đường kính của $(O) \Rightarrow PQ$ lớn nhất bằng EF .

Cách xác định điểm M : Kẻ đường kính DN của (O) , BN cắt AC tại M thì PQ lớn nhất.

Câu 5. Gọi a_i ($i = 1; 2014$; $a_i \in \{1; 2; \dots; 2014\}$)

là các số được viết lên bảng. Khi các số chưa bị xoá, xét

$$T = (a_1 - 2)(a_2 - 2)(a_3 - 2) \dots (a_{2014} - 2) \Rightarrow T = 0.$$

Đặt T_k là tích sau lần biến đổi thứ k .

$$\text{Có } \left(a + b - \frac{1}{2}ab \right) - 2 = -\frac{1}{2}(a-2)(b-2)$$

Lần thứ nhất, xóa đi hai số a, b (chẳng hạn là hai số a_{2013} và a_{2014}) thì trên bảng còn lại 2012 số $a_1; a_2; \dots; a_{2012}$ ta được tích (khi chưa viết thêm) là $P = (a_1 - 2)(a_2 - 2) \dots (a_{2012} - 2)$;

sau đó viết thêm vào $a + b - \frac{1}{2}ab$ thì tích sau lần biến đổi thứ nhất là:

$$\begin{aligned} T_1 &= P \cdot \left[\left(a + b - \frac{1}{2}ab \right) - 2 \right] \\ &= -\frac{1}{2}P \cdot (a-2)(b-2) = -\frac{1}{2}T = 0 \end{aligned}$$

Tương tự: $T_2 = -\frac{1}{2}T_1 = 0$; $T_3 = -\frac{1}{2}T_2 = 0$; ...

Sau khi biến đổi lần thứ k thì được tích thứ k là: $T_k = -\frac{1}{2}T_{k-1} = 0$.

Vậy khi dừng lại, trên bảng chỉ còn lại số 2.

PHẠM NGỌC QUANG (Hà Nội) giới thiệu

LỄ KỶ NIỆM 40 NĂM VIỆT NAM THAM DỰ OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ (IMO) (1974-2014)

Sáng ngày 14/9/2014, tại Hội trường C2 ĐHBK Hà Nội đã tiến hành tổ chức Lễ kỷ niệm 40 năm Việt Nam tham dự Olympic Toán học Quốc tế (IMO). Buổi lễ được tổ chức bởi Bộ GD&ĐT, Hội Toán học Việt Nam phối hợp với Chương trình trọng điểm Quốc gia Phát triển Toán học 2010 – 2020. Tham dự buổi lễ có sự hiện diện của các vị lãnh đạo Đảng và Nhà nước: GS Nguyễn Thiện Nhân, Ủy viên Bộ Chính trị, Chủ tịch MTTQ Việt Nam; GS Đào Trọng Thi, Ủy viên Trung ương Đảng, Chủ nhiệm Ủy ban Văn hóa Giáo dục, TNN&Đ TW; Thứ trưởng Bộ GD&ĐT Nguyễn Vinh Hiên; Thứ trưởng Bộ TT&TT Trương Minh Tuấn, Ông Nguyễn Đắc Vinh, Bí thư thứ Nhất Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh; GS Hoàng Tụy, đại diện gia đình Cố Thủ tướng Phạm Văn Đồng và Bộ Trưởng Tạ Quang Bửu; GS Ngô Bảo Châu cùng đại diện lãnh đạo các Bộ Ngành liên quan, Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, Hội Thanh niên và Sinh viên Việt Nam, Liên hiệp các Hội KH&KT Việt Nam, các khách mời đặc biệt là các chính khách, các nhà toán học lão thành đã có rất nhiều công lao và đóng góp trong sự nghiệp hình thành và phát triển hệ thống đào tạo bồi dưỡng nhân tài cho đất nước, đại diện giáo viên, học sinh của các trường THPT

chuyên, các trường THPT đã từng có học sinh tham dự đội tuyển, cùng các thầy cô giáo đã có nhiều đóng góp trong việc tuyển chọn, bồi dưỡng các đội tuyển và các cựu học sinh đã tham gia đội tuyển dự thi IMO trong suốt 40 năm qua. Năm 1974, Việt Nam lần đầu tiên cử đoàn tham dự Kỳ thi IMO lần thứ 16 tại CHDC Đức. Kể từ đó đến nay Việt Nam đã 38 lần tham dự IMO. Trong suốt 40 năm qua đoàn Việt Nam thường nằm trong topten tại IMO. Các em học sinh Việt Nam đã đoạt được 213 huy chương, trong đó 52 HC Vàng, 94 HC Bạc và 67 HC Đồng, trong đó có 9 học sinh hai lần đoạt HC Vàng, 6 học sinh đạt điểm tuyệt đối. Mục tiêu của Chương trình kỷ niệm 40 năm Việt Nam tham gia IMO là tôn vinh các thế hệ giáo viên và học sinh đã tham gia, đóng góp vào quá trình đào tạo, bồi dưỡng và dự thi thành tích cao; đề cao vai trò của hệ thống trường chuyên cùng phong trào học sinh giỏi nói chung và Olympic Toán học Quốc tế nói riêng trong sự nghiệp phát triển nền khoa học Việt Nam; qua đó khuyến khích, tạo khát vọng và động lực học tập trong học sinh để các em không ngừng phấn đấu, rèn luyện, sau này đóng góp tài năng, trí tuệ vào công cuộc phát triển và chấn hưng đất nước.

HÀI MAI (Theo VIASM)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH NĂM HỌC 2014 - 2015

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (1.5 điểm) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Không giải phương trình, hãy chứng minh $P(x_1) = P(x_2)$ với $P(x) = 3x - \sqrt{33x + 25}$.

Câu 2. (2.5 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{3 + \sqrt{3 + x}} = x$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = \sqrt{xy} + 3 \\ \sqrt{x^2 + 7} + \sqrt{y^2 + 7} = 8 \end{cases}$$

Câu 3. (2.5 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y, z khác 0 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x + y = xy + z \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

b) Cho các số $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$F = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}.$$

Câu 4. (2.5 điểm) Cho tam giác ABC vuông ở A có đường cao AH , trên cạnh BC lấy các điểm E, F sao cho $CE = CA$; $BF = BA$. Gọi I, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH và M là giao điểm của BI và AC . Chứng minh rằng

a) Ba điểm A, I_1, E thẳng hàng và $IE = IF$.

b) Đường thẳng FM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_1 I_2 I$.

Câu 5. (1 điểm) Trên bảng có ghi hai số 1 và 5. Ta ghi các số tiếp theo bằng quy tắc sau: Nếu có hai số x, y phân biệt thì ghi thêm số $z = x + y + xy$. Hỏi bằng quy tắc đó có thể ghi được các số 2015 và 2015^{2014} hay không?

TỪ HỮU SƠN (Sở GD-ĐT Hà Tĩnh) giới thiệu



HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG CỦA MỘT DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC VÀ ỨNG DỤNG

THÁI VĂN TÀI

(GV THPT Phúc Trạch, Hương Khê, Hà Tĩnh)

Trong quá trình giải toán bất đẳng thức

(BĐT) ta hay gặp dạng toán:

Cho $x_i \in D$ ($i = 1, 2, \dots, n$) thỏa mãn

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = r.$$

Chứng minh $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq s$ (*)

$$\text{trong đó } F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_1(x_i);$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_2(x_i); r, s \in \mathbb{R}.$$

Đẳng thức ở (*) xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n$
(điểm rơi: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_0$)

BĐT (*) sẽ được chứng minh nếu ta tìm được $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \lambda F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu \quad (1)$$

Nhưng bản chất của việc tìm λ, μ ở (1) là việc xác định $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$f_2(x_i) \geq \alpha f_1(x_i) + \beta \quad (2) \quad \forall x_i \in D; i = 1, 2, \dots, n.$$

Ta sẽ nghĩ tới việc đưa BĐT (2) về dạng tương đương:

$$(2) \Leftrightarrow f(x_i) \geq 0; (\forall x_i \in D; i = 1, 2, \dots, n). \text{ Và ta}$$

xét BĐT $f(x) \geq 0$ (3) với điểm rơi $x = x_0$.

BĐT (3) là BĐT một biến được chứng minh thông dụng, thường dùng phương pháp biến đổi tương đương đưa (3) về dạng:

$$(x - x_0)^2 h(x) \geq 0. \text{ Tuy nhiên sẽ khó khăn khi } \alpha, \beta \text{ là hai số thực chưa biết trong biểu thức}$$

$f(x)$. Bài viết này trình bày cách xác định α, β trong BĐT (3).

Ta sẽ sử dụng tính chất quan trọng sau có trong sách giải tích 12:

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại $x_0 \in (a; b)$ thì $f'(x_0) = 0$.

Trở lại BĐT (3): $f(x) \geq 0$ với điểm rơi $x = x_0$, kết hợp với tính chất trên ta thu được

$$\text{hệ sau: } \begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases} \quad (I).$$

Ta gọi hệ (I) là hệ phương trình đặc trưng (HPTĐT) của BĐT (3). Ta sẽ sử dụng hệ (I) để giải một số bài toán BĐT sau.

Bài toán 1. (Poland 1997) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b, c \geq \frac{-3}{4}$ và $a + b + c = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}.$$

Lời giải

Nhận thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Ta sẽ tìm α, β sao cho:

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \alpha x + \beta \quad (\text{đúng } \forall x \geq \frac{-3}{4})$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^3 + \beta x^2 + x(\alpha - 1) + \beta \geq 0 \quad (*)$$

$$(\text{điểm rơi } x = \frac{1}{3}).$$

$$\text{HPTĐT: } \begin{cases} \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \beta \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}(\alpha - 1) + \beta = 0 \\ 3\alpha \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\beta \left(\frac{1}{3}\right) + \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = \frac{9}{10} \\ 2\alpha + \beta = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{36}{50} \\ \beta = \frac{3}{50} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow 36x^3 + 3x^2 - 14x + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^2(4x+3) \geq 0 \quad (\text{đúng } \forall x \geq \frac{-3}{4}).$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Do đó ta có:}$$

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{36}{50}x + \frac{3}{50} \quad (\forall x \geq \frac{-3}{4}).$$

Thay x lần lượt bởi a, b, c rồi cộng theo vế ta

$$\text{được: } \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2}$$

$$\leq \frac{36}{50}(a+b+c) + 3 \cdot \frac{3}{50} = \frac{9}{10}.$$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c \in \left\{\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right\} \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Bài toán 2. Chứng minh với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$a\sqrt{\frac{b^4+c^4}{b(b+c)}} + b\sqrt{\frac{c^4+a^4}{c(c+a)}} + c\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a(a+b)}} \geq ab+bc+ca.$$

Lời giải. Ta tìm $\alpha, \beta \geq 0$ sao cho:

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^3b^2(a+b)}} \geq \frac{\alpha}{b} + \frac{\beta}{a} \quad (\text{đúng } \forall a, b > 0)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 \geq (a^2 + ab)(\alpha^2 a^2 + 2\alpha\beta ab + \beta^2 b^2)$$

$$\Leftrightarrow f(a) = a^4(1-\alpha^2) - a^3b(\alpha^2 + 2\alpha\beta) - a^2b^2(\beta^2 + 2\alpha\beta) - \beta^2 ab^3 + b^4 \geq 0 \quad (*)$$

(điểm rơi $a=b$)

$$\text{HPTĐT: } \begin{cases} f(b) = 0 \\ f'(b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\alpha^2)b^4 - (\alpha^2 + 2\alpha\beta)b^4 - (\beta^2 + 2\alpha\beta)b^4 - \beta^2 b^4 + b^4 = 0 \\ 4(1-\alpha^2)b^3 - 3(\alpha^2 + 2\alpha\beta)b^3 - 2(\beta^2 + 2\alpha\beta)b^3 - \beta^2 b^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$(*) \Leftrightarrow 15a^4 - 7a^3b - 15a^2b^2 - 9ab^3 + 16b^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(15a^2 + 23ab + 16b^2) \geq 0$$

(đúng $\forall a, b > 0$).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b$. Do đó

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^3b^2(a+b)}} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{b} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a}$$

Tương tự, ta được các BĐT cho các cặp $(b, c); (c, a)$. Cộng theo vế các BĐT này ta được:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{b^4+c^4}{b^3c^2(b+c)}} + \sqrt{\frac{c^4+a^4}{c^3a^2(c+a)}} + \sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^3b^2(a+b)}} \\ & \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ \Leftrightarrow & a\sqrt{\frac{b^4+c^4}{b(b+c)}} + b\sqrt{\frac{c^4+a^4}{c(c+a)}} + c\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a(a+b)}} \\ & \geq ab+bc+ca \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét. Như vậy ta có thể sử dụng HPTĐT đối với các BĐT với điểm rơi là các biến với điều kiện sau khi biến đổi đưa về BĐT $f(a,b) \geq 0$ thỏa mãn tổng số mũ của a và b ở tất cả các số hạng của $f(a,b)$ đều bằng nhau. Với bài toán trên HPTĐT đã giúp ta giải quyết trọn vẹn, tuy nhiên đối với một số bài toán chỉ giúp ta định hướng cho phương pháp giải khác đó là phương pháp bình phương S.O.S.

Bài toán 3. (Đề thi HSG toán 12 tỉnh Hà Tĩnh năm học 2008-2009) Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

Lời giải. Dự đoán $\min P = 2$, đạt được khi $x = y = 0; z = 1$. Ta tìm α, β sao cho $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq \alpha x + \beta$ (1) với mọi $x \in [0;1]$ và $\alpha x + \beta \geq 0$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 1-x \geq (1+x)(\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\alpha^2 x^3 - x^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta)$$

$$-x(1+2\alpha\beta + \beta^2) + 1 - \beta^2 \geq 0 \quad (*)$$

(điểm rơi $x = 0$).

$$\text{HPTĐT: } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \beta^2 = 0 \\ 1 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

(loại trường hợp $\alpha = 1, \beta = -1$ vì khi đó

$$\alpha x + \beta = x - 1 \leq 0; \forall x \in [0;1])$$

Trường hợp $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$ thỏa mãn vì khi đó

$$\alpha x + \beta = -x + 1 \geq 0; \forall x \in [0;1].$$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow -x^3 + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(1-x) \geq 0$ (đúng $\forall x \in [0;1]$). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.

$$\text{Do đó } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq -x+1, \forall x \in [0;1]$$

Tương tự, ta được các BĐT cho y, z . Cộng theo về các BĐT này ta được:

$$P = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \geq -(x+y+z) + 3 = 2.$$

Vậy $\min P = 2$, đạt được $\Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \in \{0,1\} \\ x+y+z=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 1)$ hoặc các hoán vị.

Bài toán 4. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1}{2} + 3x + x^3} + \sqrt{\frac{1}{2} + 3y + y^3} + \sqrt{\frac{1}{2} + 3z + z^3} \geq \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Lời giải. Nhận thấy đẳng thức xảy ra khi

$$(x, y, z) = (1, 0, 0).$$

Ta tìm $\alpha, \beta \geq 0$ sao cho

$$\sqrt{\frac{1}{2} + 3x + x^3} \geq \alpha x + \beta \quad (\forall x \in [0;1]).$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - \alpha^2 x^2 + x(3 - 2\alpha\beta) + \frac{1}{2} - \beta^2 \geq 0 \quad (*)$$

(điểm rơi $x = 1$). HPTĐT:

$$\begin{cases} 1 - \alpha^2 + 3 - 2\alpha\beta + \frac{1}{2} - \beta^2 = 0 \\ 3 - 2\alpha^2 + 3 - 2\alpha\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{2} \\ \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 \geq 0$$

(đúng $\forall x \in [0;1]$). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Do đó: $\sqrt{\frac{1}{2} + 3x + x^3} \geq \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} (\forall x \in [0;1])$.

Tương tự, ta được các BĐT cho y, z . Cộng theo về các BĐT này ta được:

$$\sqrt{\frac{1}{2} + 3x + x^3} + \sqrt{\frac{1}{2} + 3y + y^3} + \sqrt{\frac{1}{2} + 3z + z^3} \geq \sqrt{2}(x + y + z) + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

BĐT được chứng minh. Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \in \{0,1\} \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 1)$$

hoặc các hoán vị.

Như vậy đối với các BĐT có điểm rơi lệch thì tùy vào giả thiết từng bài toán mà ta chọn các điểm rơi thích hợp làm điểm rơi chính để sử dụng trong HPTĐT. (Nếu $(x - x_0)^2 h(x) \geq 0$ (*) thì x_0 được gọi là điểm rơi chính của BĐT (*)).

Bài tập đề nghị

1. (China MO 2005) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1.$$

2. (Japan MO 2002). Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^4}{a^3 + b^3} + \frac{b^4}{b^3 + c^3} + \frac{c^4}{c^3 + a^3} \geq \frac{a + b + c}{2}$$

4. (MOP) Cho các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + \dots + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1$$

5. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{1}{3} + 2x + x^3} + \sqrt{\frac{1}{3} + 2y + y^3} + \sqrt{\frac{1}{3} + 2z + z^3}$$

6. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

$$a) \sqrt[3]{\frac{a^4 + 2b^4}{2a+b}} + \sqrt[3]{\frac{b^4 + 2c^4}{2b+c}} + \sqrt[3]{\frac{c^4 + 2a^4}{2c+a}} \geq a + b + c$$

$$b) \sqrt{a^2 + \frac{1}{c}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{a}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{abc}}(a + b + c)$$

$$c) a\sqrt{1+b^2c} + b\sqrt{1+c^2a} + c\sqrt{1+a^2b} \leq \sqrt{1+abc}(a + b + c)$$

7. (CWMO 2005) Cho các số thực dương a, b, c, d, e thỏa mãn:

$$\frac{1}{4+a} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{4+c} + \frac{1}{4+d} + \frac{1}{4+e} = 1$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{4+a^2} + \frac{b}{4+b^2} + \frac{c}{4+c^2} + \frac{d}{4+d^2} + \frac{e}{4+e^2} \leq 1.$$

8. Cho a_i với $i = \overline{1, k}$ là các số thực dương; m, n là các số nguyên dương. Chứng minh:

a) Nếu $m \geq \frac{3}{2}n$ thì

$$\frac{a_1^m}{a_1^n + a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_2^n + a_3^n} + \dots + \frac{a_k^m}{a_k^n + a_1^n} \geq \frac{1}{2}(a_1^{m-n} + a_2^{m-n} + \dots + a_k^{m-n}).$$

b) Nếu $m \leq \frac{1}{2}n$ thì

$$\frac{a_1^m}{a_1^n + a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_2^n + a_3^n} + \dots + \frac{a_k^m}{a_k^n + a_1^n} \leq \frac{1}{2}(a_1^{m-n} + a_2^{m-n} + \dots + a_k^{m-n}).$$

THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1 (2 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ (H).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng $x + y - 2 = 0$ và cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho tam giác IAB có diện tích $2\sqrt{3}$, với I là giao điểm hai tiệm cận.

Câu 2 (1 điểm). Giải phương trình

$$\cos 2x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) + \tan x = 2 \sin x + 1.$$

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn

$$\mathbb{L} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1 - x\sqrt{1-x}}{x^3 + x^2}.$$

Câu 4 (1 điểm).

a) Có tất cả bao nhiêu cặp vợ chồng thực hiện việc bắt tay lẫn nhau (tất nhiên mỗi người không bắt tay vợ/chồng mình) trong một buổi gặp mặt biết rằng có tất cả 40 cái bắt tay.

b) Tìm hệ số của số hạng thứ 4 trong khai triển nhị thức Newton (theo thứ tự số mũ giảm dần

của x) của biểu thức $\mathbb{P}(x) = \left(\frac{2}{x^3} - \sqrt{x^5} \right)^n$ với

$x > 0$, biết rằng trong khai triển này, tổng các hệ số của số hạng thứ 2 và số hạng thứ 3 bằng hệ số của số hạng cuối cùng.

Câu 5 (1 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $A(3;0;0)$; $B(0;3;0)$ và C thuộc tia Oz . Tìm tọa độ điểm S biết thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng 9.

Câu 6 (1 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O ; hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của đoạn thẳng AO . Biết rằng $SO = a$ và SAB là tam giác vuông. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC đến mặt phẳng SCO .

Câu 7 (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 2x$. Tam giác ABC vuông tại A có AC là tiếp tuyến của (C) trong đó A là tiếp điểm, chân đường cao kẻ từ A là $H(2;0)$. Tìm tọa độ đỉnh B của tam giác ABC biết B có tung độ dương và $S_{ABC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 8 (1 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + y^3 = 2y\sqrt{y-1}(x + \sqrt[3]{x}) \\ x^4 + \sqrt{x^3 - x^2 + 1} = x(y-1)^3 + 1. \end{cases}$$

Câu 9 (1 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathbb{P} = \frac{4(a+c)}{a^2+3c^2+28} + \frac{4a}{a^2+bc+7} - \frac{5}{(a+b)^2} - \frac{3}{a(b+c)}.$$

TRẦN QUỐC LUẬT

(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

THÔNG BÁO

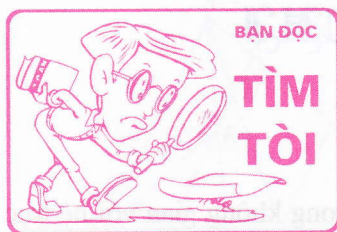
Bạn đọc có thể đặt mua

ĐÓNG TẬP TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

các năm 2010, 2011, 2012, 2013 tại các Cơ sở Bưu điện trên cả nước.

Số 448 (10-2014)

TOÁN HỌC
& **TUỔI TRẺ 11**



BỔ ĐỀ SAWAYAMA VÀ NHỮNG BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Phùng Khắc Vũ Anh (HS 12 Toán 1, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam)
Nguyễn Quỳnh Anh (HS 12 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

A. GIỚI THIỆU BỔ ĐỀ VÀ NHỮNG KẾT QUẢ LIÊN QUAN

Định lý 1 (Bổ đề Sawayama). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Điểm D thuộc BC . Một đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh DA và DC tại E và F đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại K . Khi đó tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thuộc EF .

Nếu đường tròn (O') tiếp xúc ngoài với (O) trong định lý 1 thì ta có tâm đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác ABC nằm trên EF . Trong định lý 1, nếu cho D trùng với B hoặc C , ta nhận được định lý Lyness:

Định lý 2 (Định lý Lyness). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . Một đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh AB và AC tại E và F , đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O) . Khi đó I là trung điểm DE . Đường tròn (O') được gọi là A -Mixtilinear. Tương tự có các đường tròn B -Mixtilinear, C -Mixtilinear.

Sử dụng định lý 1, ta có thể chứng minh định lý

Định lý 3 (Định lý Thebault). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Điểm D thuộc BC . Đường tròn (O_1) tiếp xúc với hai cạnh DA , DC và tiếp xúc trong với (O) . Đường tròn (O_2) tiếp xúc với hai cạnh DA , DB và tiếp xúc trong với (O) . Khi đó tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thuộc O_1O_2 .

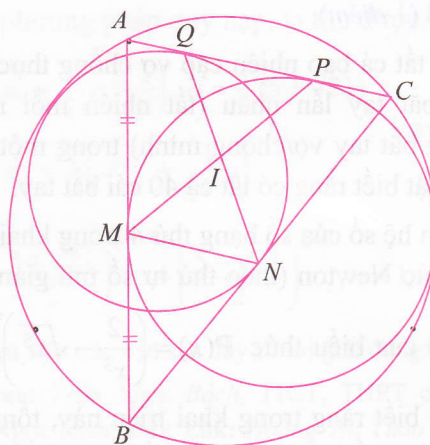
Các định lý trên cho phép ta nhìn bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau bằng cách làm xuất hiện thêm yếu tố mới là các đường tròn. Qua đó, ta có thể tìm những cách giải thuần túy hình học cho bài toán thay vì những công cụ tính toán.

B. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

★ **Bài toán 1.** Cho đường tròn (O) , dây cung AB , M là trung điểm AB . Đường tròn (O_1) tiếp xúc với AB tại M và tiếp xúc trong với (O) . Tiếp tuyến đi qua A khác AB của (O_1) cắt (O) tại C . (O_2) là đường tròn tiếp xúc với BC tại trung điểm BC và tiếp xúc với tia CA . Chứng minh rằng (O_2) tiếp xúc với (O) .

Lời giải

Ta chứng minh cho trường hợp O_1 và O nằm cùng phía đối với AB , trường hợp O_1 và O khác phía đối với AB chứng minh tương tự (h.1).



Hình 1

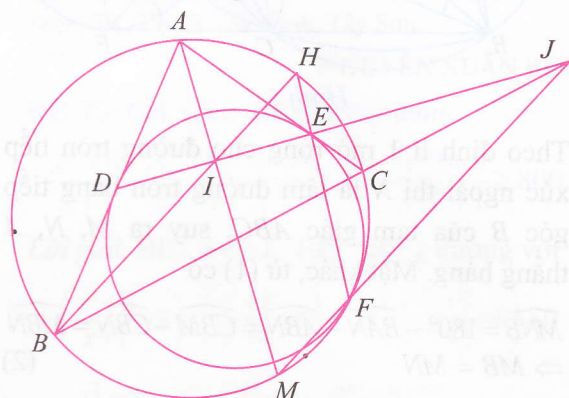
Gọi Q , N lần lượt là tiếp điểm của C -Mixtilinear với AC , BC . M , P lần lượt là tiếp điểm của A -Mixtilinear với AB , AC .

Áp dụng định lý 1 ta thấy NQ , MP đi qua tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC và nhận I là trung điểm mỗi đoạn, suy ra $MNPQ$ là hình bình hành $\Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow N$ là trung điểm BC . Vậy C -Mixtilinear trùng với (O_2) .

✧ **Bài toán 2.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) . Đường tròn (C_1) tiếp xúc với $AB, AC, (C)$ lần lượt tại D, E, F . Gọi M là điểm chính giữa cung BC không chứa A . Chứng minh rằng DE, BC, FM đồng quy.

Lời giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . H là giao điểm của EF và (C) . J là giao điểm của BC và FM (h.2).



Hình 2

Áp dụng định lý 2 ta thấy D, E, I thẳng hàng.

Dễ thấy H là điểm chính giữa của cung AC .

Từ $I = BH \cap AM; E = AC \cap FH; J = BC \cap FM$.

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $AMFHBC$ ta có I, E, J thẳng hàng.

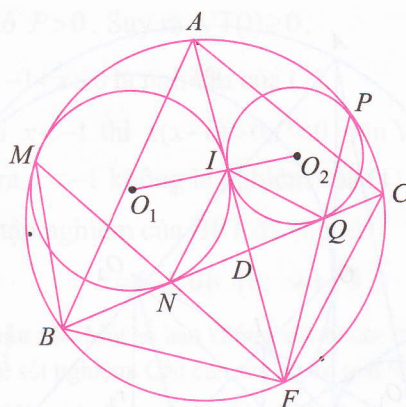
Tương tự có D, I, J thẳng hàng.

Vậy DE, BC, FM đồng quy tại J (đpcm).

✧ **Bài toán 3** (Romania 1997). Xét tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp Ω . Một điểm D bất kì trên cạnh BC . Chứng minh rằng đường tròn (O_1) tiếp xúc với Ω, AD, BD và đường tròn (O_2) tiếp xúc với Ω, AD, DC tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$.

Lời giải (h.3)

• Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm của (O_1) với Ω, BC . P, Q lần lượt là tiếp điểm của (O_2) với Ω, BC . Kéo dài AD cắt Ω tại F . AD cắt O_1O_2 tại I . Giả sử (O_1) và (O_2) tiếp xúc với nhau, lúc đó $(O_1), (O_2)$ và AD tiếp xúc nhau tại I . Theo định lý 1 ta thấy I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$.



Hình 3

• Ngược lại nếu $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$, khi đó F là điểm chính giữa cung BC không chứa A . Từ đây dễ suy ra F, M, N thẳng hàng; F, Q, P thẳng hàng.

Giả sử (O_1) tiếp xúc với AD tại I_1 ; (O_2) tiếp xúc với AD tại I_2 . Lúc đó

$$FI_1^2 = FM \cdot FN = FB^2 \quad (\triangle FBN \sim \triangle FMB \text{ (g.g)})$$

$$FI_2^2 = FP \cdot FQ = FC^2.$$

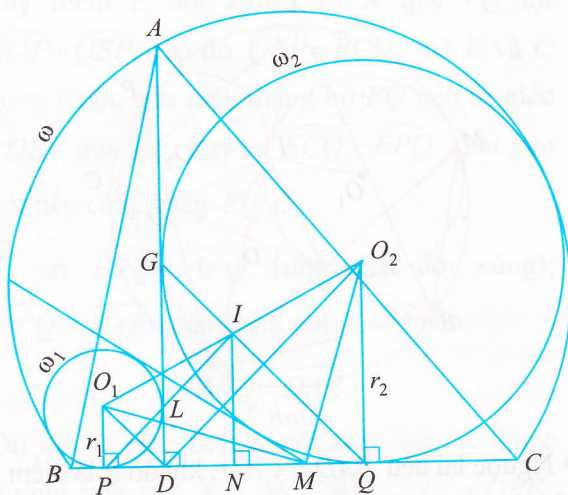
Do $FB = FC = FI$ (I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$) nên $FI_1^2 = FI_2^2 = FI^2 \Rightarrow I_1 \equiv I_2 \equiv I$, nghĩa là $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc nhau tại I (đpcm).

✧ **Bài toán 4** (Romania 2006). Cho tam giác ABC nhọn không cân tại A . Gọi D là chân đường cao hạ từ A và ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Giả sử ω_1 là đường tròn tiếp xúc với AD, BD và ω , ω_2 là đường tròn tiếp xúc với AD, CD và ω . Gọi ℓ là tiếp tuyến chung trong khác AD của ω_1 và ω_2 . Chứng minh rằng ℓ đi qua trung điểm của BC khi và chỉ khi $2BC = AB + AC$.

Lời giải

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$.

Gọi O_1 là tâm đường tròn ω_1 , O_2 là tâm đường tròn ω_2 ; P, Q lần lượt là tiếp điểm của $(O_1), (O_2)$ với BC ; L, G lần lượt là tiếp điểm của $(O_1), (O_2)$ với AD ; I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC ; N là trung điểm PQ (h.4).



Hình 4

Theo định lí 1, I thuộc PL và QG . Dễ thấy, tam giác IPQ vuông cân tại I , suy ra $IN \perp PQ$.

Ta có: ℓ đi qua trung điểm M của BC

$$\Leftrightarrow \Delta O_1PM = \Delta MQO_2 \quad (MP = r_2, MQ = r_1)$$

$$\Leftrightarrow MP \cdot MQ = O_1P \cdot O_2Q = DP \cdot DQ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} PD = MQ \\ QD = MP \end{cases} \Leftrightarrow ND = NM$$

$$\Leftrightarrow BN - BD = CN - CM$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c-b}{2} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{a+b-c}{2} - \frac{a}{2}$$

$$(\text{Do } BD^2 - CD^2 = c^2 - b^2; CD + BD = a).$$

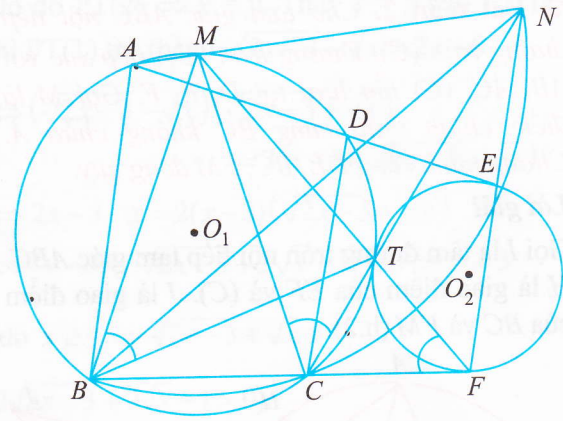
$$\Leftrightarrow 2a = b + c \quad (\text{đpcm}).$$

★ **Bài toán 5** (CGMO 2013). Cho hai đường tròn (O_1) , (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại T . Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O_1) sao cho AD, BC tiếp xúc (O_2) lần lượt tại E, F . Phân giác $\widehat{ABF}$ cắt EF tại N . FT cắt (O_1) lần thứ hai tại M . Chứng minh rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN .

Lời giải (h.5)

$$\text{Ta có: } \widehat{MCT} = \widehat{MBT} = \frac{1}{2} \widehat{MO_1T} = \frac{1}{2} \widehat{TO_2F} = \widehat{BFM}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MB^2 = MT \cdot MF \\ MC^2 = MT \cdot MF \end{cases} \Rightarrow MB = MC \quad (1)$$



Hình 5

Theo định lí 1 mở rộng cho đường tròn tiếp xúc ngoài thì N là tâm đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác ABC , suy ra M, N, A thẳng hàng. Mặt khác, từ (1) có

$$\widehat{MNB} = 180^\circ - \widehat{BAN} - \widehat{ABN} = \widehat{CBM} - \widehat{CBN} = \widehat{MBN} \Rightarrow MB = MN \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN (đpcm).

★ **Bài toán 6** (Việt Nam TST 2014). Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Trên cung BC không chứa A của lấy điểm D . Giả sử CD cắt AB ở E và BD cắt AC ở F . Gọi (K) là đường tròn nằm trong tam giác EBD , tiếp xúc với EB, ED và tiếp xúc trong với đường tròn (O) . Gọi (L) là đường tròn nằm trong tam giác FCD , tiếp xúc với FC, FD và tiếp xúc trong với đường tròn (O) .

a) Gọi M là tiếp điểm của (K) với BE và N là tiếp điểm của (L) với CF . Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN luôn đi qua một điểm cố định khi D di chuyển trên (O) .

b) Đường thẳng qua M và song song với CE cắt AC ở P , đường thẳng qua N song song với BF cắt AB ở Q . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP và ANQ cùng tiếp xúc với đường tròn cố định khi D di chuyển.

Lời giải

a) Gọi tiếp điểm của (K) với CD là G , (L) với BD là H (h.6).



CÁC LỚP THCS

Bài T1/448 (Lớp 6). Cho m, n là hai số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $3^m + 5^n$ chia hết cho 8. Chứng minh rằng $3^n + 5^m$ cũng chia hết cho 8.

NGUYỄN TIẾN LÂM
(GV THPT chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội)

Bài T2/448 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có góc A tù. Gọi M là trung điểm BC . Bên trong $\widehat{BAC}$ vẽ hai tia Ax và Ay sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{CAy} = 22^\circ$. Gọi H là hình chiếu của B trên Ax , I là hình chiếu của C trên Ay . Tính số đo góc HMI .

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

Bài T3/448. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^2 + 3x + 3} + \sqrt[3]{2x^2 + 3x + 2} = 6x^2 + 12x + 8$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T4/448. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = a$, $AC = b$. Hai phân giác BB_1 và CC_1 cắt nhau ở R , AR cắt B_1C_1 ở M . Tính khoảng cách từ M đến BC theo a và b .

PHẠM TUẤN KHẢI
(Hà Nội)

Bài T5/448. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)^3} + \frac{b^2 + c^2}{bc(b+c)^3} + \frac{c^2 + a^2}{ca(c+a)^3} \geq \frac{9}{4}.$$

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/448. Hãy biểu thị số 2015 thành tổng các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ lớn hơn 1

sao cho $\sum_{i=1}^n \sqrt[n]{a_i}$ lớn nhất.

NGUYỄN VĂN NIỆM
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T7/448. Cho tứ giác $ABCD$. a, b, c, d theo thứ tự là phân giác ngoài của các góc $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$. Kí hiệu $K = a \cap b$, $L = b \cap c$, $M = c \cap d$, $N = d \cap a$. Chứng minh rằng tứ giác $KLMN$ nội tiếp một đường tròn và đường tròn đó có bán kính bằng

$$\frac{KM \cdot LN}{AB + BC + CD + DA}.$$

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T8/448. Giả sử đa thức

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

có ba nghiệm thực không âm. Tìm số thực α lớn nhất thỏa mãn: $f(x) \geq \alpha(x-a)^3, \forall x \geq 0$.

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Nam Yên Thành, Nghệ An)

TIỀN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/448. Gọi $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , $\{x\} = x - [x]$ là phần lẻ của x . Hãy tìm $\left\{ \frac{p^{2012} + q^{2016}}{120} \right\}$ biết rằng p, q là các số nguyên tố lớn hơn 5.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN
(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

Bài T10/448. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^2 + z = 2\sqrt{3} + 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^3}.$$

HÀN NGỌC ĐỨC
(Trung tâm CNTT EVNIT, Hà Nội)

Bài T11/448. Cho dãy số (a_n) có tất cả các số hạng lớn hơn 1 và thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln a_n)}{n} = \frac{1}{2014}.$$

Chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ tồn tại và hữu hạn, với

$$b_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong 2, Bắc Ninh)

Bài T12/448. Cho tam giác ABC . O là điểm bất kì trong tam giác. P, Q, R thứ tự là hình chiếu của O trên BC, CA, AB . A_1, B_1, C_1 là các điểm bất kì trên các đường thẳng BC, CA, AB

(A_1, B_1, C_1 phân biệt với A, B, C). A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua P, Q, R .

Đặt $Z_1 \equiv (AB_1C_1) \cap (BC_1A_1) \cap (CA_1B_1)$;

$Z_2 \equiv (AB_2C_2) \cap (BC_2A_2) \cap (CA_2B_2)$.

Chứng minh rằng O cách đều Z_1 và Z_2 .

NGUYỄN THANH TRÀ

(K56, Tài năng Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/448. Trong một xi lanh cao, cách nhiệt, đặt thẳng đứng, ở dưới pittông có một lượng khí hêli ở nhiệt độ $T_1 = 240K$. Ở trên pittông, người ta đặt một vật nặng có khối lượng bằng một nửa khối lượng pittông. Sau đó người ta đột ngột lấy vật nặng đi và đợi cho hệ trở về trạng thái cân bằng. Xác định nhiệt độ của khí. Biết rằng bên trên pittông không có khí. Bỏ qua mọi ma sát và trao đổi nhiệt.

NGUYỄN XUÂN QUANG

(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội)

Bài L2/448. Đặt điện áp xoay $\omega = U_0 \cos \omega t$ (V), với ω thay đổi được vào một đoạn mạch gồm điện trở thuần R , cuộn cảm thuần có độ tự cảm $L = \frac{4}{5\pi}$ (H) và tụ điện có điện dung C mắc nối tiếp.

Khi $\omega = \omega_0$ thì cường độ dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch đạt giá trị cực đại I_m .

Khi $\omega = \omega_1$ hoặc $\omega = \omega_2$ thì cường độ dòng điện cực đại qua đoạn mạch đều có giá trị bằng I_m . Biết $\omega_1 - \omega_2 = 200\pi \text{ rad/s}$.

1) Tính R .

2) Cho biết $I_m = 1A$ và $\omega_0 = 100\pi \text{ rad/s}$, hãy tính U_0 , ω_1 và C .

VŨ THANH KHIẾT

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/448 (For 6th grade). Let m, n be two positive integers such that $3^m + 5^n$ is divisible by 8. Prove that $3^n + 5^m$ is also divisible by 8.

Problem T2/448 (For 7th grade). Given a triangle ABC with A is an obtuse angle. Let M be the midpoint of BC . Inside $\widehat{BAC}$, draw two rays Ax and Ay such that $\widehat{BAx} = \widehat{CAy} = 22^\circ$. Let H be the projection of B on Ax , and I the projection of C on Ay . Find the angle HMI .

Problem T3/448. Solve the following equation

$$\sqrt[3]{x^2 + 3x + 3} + \sqrt[3]{2x^2 + 3x + 2} = 6x^2 + 12x + 8$$

Problem T4/448. Let ABC be a right triangle with the right angle A and let $AB = a$, $AC = b$. Two internal angle bisectors BB_1 and CC_1 intersect at R , AR intersects B_1C_1 at M . Compute the distance from M to BC in terms of a and b .

Problem T5/448. Let a, b, c be real numbers satisfying $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Prove that

$$\frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)^3} + \frac{b^2 + c^2}{bc(b+c)^3} + \frac{c^2 + a^2}{ca(c+a)^3} \geq \frac{9}{4}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/448. Express 2015 as a sum of integers $a_1, a_2, \dots, a_n$ which are greater than 1 such that $\sum_{i=1}^n \sqrt[n]{a_i}$ is maximal.

Problem T7/448. Given a quadrilateral $ABCD$ and a, b, c, d respectively are external angle bisectors of $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$. Denote $K = a \cap b$, $L = b \cap c$, $M = c \cap d$, $N = d \cap a$. Prove that the quadrilateral $KLMN$ inscribes a circle whose radius is

$$\frac{KM \cdot LN}{AB + BC + CD + DA}.$$

(Xem tiếp trang 27)



Bài T1/444 (Lớp 6). Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số 2013 viết được dưới dạng $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ đều là hợp số. Kết quả bài toán trên có thay đổi không, nếu thay số 2013 bằng số 2014?

Lời giải. Ta giải bài toán tổng quát đối với số $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ đều là hợp số. Để số các số hạng n là lớn nhất thì các số hạng phải nhỏ nhất. Chú ý rằng hợp số chẵn nhỏ nhất bằng 4 và hợp số lẻ nhỏ nhất bằng 9. Vì thế ta viết số a trong dạng $a = 4k + r$ với $0 \leq r \leq 3$. Xảy ra bốn trường hợp sau:

- Nếu $a = 4k$ thì số n lớn nhất bằng k ;
- Nếu $a = 4k + 1$ thì viết $a = 4(k - 2) + 9$ nên số n lớn nhất bằng $k - 1$;
- Nếu $a = 4k + 2$ thì viết $a = 4(k - 1) + 6$ nên số n lớn nhất bằng k ;
- Nếu $a = 4k + 3$ thì viết $a = 4(k - 3) + 6 + 9$ nên số n lớn nhất bằng $k - 1$.

Áp dụng với $a = 2013 = 4.503 + 1 = 4.501 + 9$ thì số n lớn nhất bằng 502; với $a = 2014 = 4.503 + 2 = 4.502 + 6$ thì số n lớn nhất bằng 503. $\square$

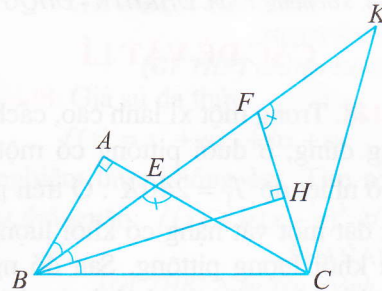
► **Nhận xét**

Các bạn sau có lời giải đúng : **Nghệ An** : Nguyễn Đình Tuấn, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi** : Lê Tuấn Anh, Phan Nguyễn Thiên Định, Đỗ Thị Mỹ Lan, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; Mai Thị Thu Thảo, 6C, THCS TTr. Sông Vệ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

Bài T2/444 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = 20^\circ$. Trên tia BE lấy điểm K sao cho $EK = BC$. Tính số đo $\widehat{BCK}$.

Lời giải



Lấy điểm F trên BK sao cho $BF = BC$. Kẻ tia phân giác của góc EBC , cắt FC tại H . Tam giác FBC cân, có BH là phân giác nên cũng là đường cao, tức $BH \perp FC$, suy ra $\widehat{CFE} = \widehat{CEF} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{CFK} = 110^\circ$ và $CE = CF$. Xét hai tam giác CEB và CFK có $BE = FK$ (do $BF = EK = BC$), $\widehat{CEB} = \widehat{CFK}$, $CE = CF$ (theo trên), do đó $\triangle CEB = \triangle CFK$ (c.g.c) $\Rightarrow CB = CK$. Tam giác CBK cân tại C nên $\widehat{BKC} = \widehat{KBC} = 40^\circ$. Vậy $\widehat{BCK} = 100^\circ$. $\square$

► **Nhận xét**

1) Bài toán tương đối dễ, tất cả các bạn tham gia gửi bài đều cho kết quả đúng. Ngoài cách giải trên đây, một số bạn tìm ra kết quả bằng cách dựng thêm tam giác đều BCG để có CE là trung trực của BG .

2) Ta có thể thay giả thiết $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{ABE} = 20^\circ$ bằng giả thiết $\widehat{ABE} = \frac{1}{3} \widehat{ABC}$, vẫn có kết quả $\triangle BCK$ cân tại C .

3) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn:

Phú Thọ: Trần Minh Hiếu, Lê Quỳnh Trang, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Thanh Hoá:** Đinh Quang Anh, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; Nguyễn Văn Hùng, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hoá; **Nghệ An:** Tăng Trung Nghĩa, 6A, THCS Hoà Hiếu II, T.X Thái Hoà; Nguyễn Đình Tuấn, 6C; Trần Lê Hiệp, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Võ

Phương Tâm, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nguyễn Trọng Bằng, 7A₂, THCS T.T Quán Thành, Nghi Lộc; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Đình Nhật, 7A, THCS T.T Cẩm Xuyên, Cẩm Khê; **Quảng Ngãi:** Trương Thị Mai Trâm, Đỗ Thị Mỹ Lan, Phan Thị Mỹ Hồng, Nguyễn Lê Hoàng Duyên, 7A, THCS Phạm Văn Đồng; Nguyễn Đại Dương, 7B, Nguyễn Trung Anh, 7C, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; Phạm Quốc Trung, Võ Thị Hồng Kiều, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Bình Định:** Nguyễn Bảo Trân, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/444. Giải bất phương trình

$$\frac{x^2+8}{x+1} + \frac{x^3+8}{x^2+1} + \frac{x^4+8}{x^3+1} + \dots + \frac{x^{101}+8}{x^{100}+1} \geq 800.$$

Lời giải. ĐK: $x \neq -1$. BPT tương đương với

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^2+8}{x+1} - 8 \right) + \left(\frac{x^3+8}{x^2+1} - 8 \right) + \dots + \left(\frac{x^{101}+8}{x^{100}+1} - 8 \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2-8x}{x+1} + \frac{x^3-8x^2}{x^2+1} + \dots + \frac{x^{101}-8x^{100}}{x^{100}+1} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x(x-8) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \dots + \frac{x^{99}}{x^{100}+1} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x(x-8) \cdot P \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

với $P = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \dots + \frac{x^{99}}{x^{100}+1}$.

- Với $x \geq 8$ thì $x(x-8) \geq 0$, $P > 0$ nên VT(1) ≥ 0 .

Suy ra $x \geq 8$ là nghiệm của (1).

- Với $0 < x < 8$ thì $x(x-8) < 0$, $P > 0$ nên VT(1) < 0 . Suy ra $0 < x < 8$ không là nghiệm của (1).

- Với $-1 < x \leq 0$ thì $x(x-8) \geq 0$. Ta có:

$$P = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} \right) + \left(\frac{x^2}{x^3+1} + \frac{x^3}{x^4+1} \right) + \dots + \left(\frac{x^{98}}{x^{99}+1} + \frac{x^{99}}{x^{100}+1} \right).$$

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ và $-1 < x \leq 0$ ta có:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)} \geq 0$$

$$\frac{x^{2k}}{x^{2k+1}+1} + \frac{x^{2k+1}}{x^{2k+2}+1} = \frac{x^{2k}(2x^{2k+2}+x+1)}{(x^{2k+1}+1)(x^{2k+2}+1)} \geq 0.$$

Do đó $P > 0$. Suy ra VT(1) ≥ 0 .

Vậy $-1 < x \leq 0$ là nghiệm của (1).

- Với $x < -1$ thì $x(x-8) > 0$, $P < 0$ nên VT(1) < 0 .

Suy ra $x < -1$ không là nghiệm của (1).

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là

$$S = (-1; 0] \cup [8; +\infty). \square$$

► **Nhận xét.** Một số bạn không xét đủ các trường hợp nên dễ sót nghiệm. Các bạn sau có lời giải tốt:

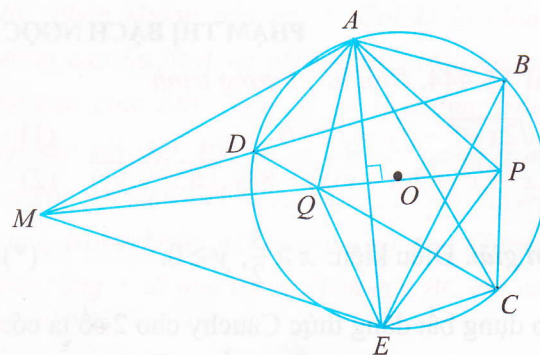
Hà Nội: Lê Duy Anh, 9A, THCS Nguyễn Huy Tường, Đông Anh. **Hà Nam:** Ngô Nhật Long, số nhà 26, ngõ 1, tổ 17, phường Minh Khai, TP. Phú Lý.

Quảng Ngãi: Võ Thành Hy, 8A, THCS Hành Trung; Nguyễn Trung Anh, 8C, Nguyễn Đại Dương, 8B, THCS Kim Vang; Nguyễn Lê Hoàng Duyên, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/444. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có $\widehat{BAD}$ tù. Qua A vẽ các tia vuông góc với AD, AB lần lượt cắt các cạnh CB, CD tại P và Q. Giả sử đường thẳng PQ cắt đường thẳng BD tại M. Chứng minh rằng $\widehat{MAC} = 90^\circ$.

Lời giải



Tứ giác ABCD nội tiếp nên

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ \quad (1)$$

Ta có $\widehat{DAB} + \widehat{QAP} = \widehat{DAP} + \widehat{QAB}$

$$= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{QAP}$.

Lấy điểm E đối xứng với A qua PQ thì $\widehat{QAP} = \widehat{QEP}$. Do đó $\widehat{QEP} = \widehat{BCD}$, mà E và C cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ PQ nên tứ giác $PQEC$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{ECQ} = \widehat{EPQ}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{EQ}$).

Ta có $\widehat{EPQ} = \widehat{APQ}$ (tính chất đối xứng); $\widehat{APQ} = \widehat{DAE}$ (cùng phụ với $\widehat{EAP}$) nên $\widehat{EPQ} = \widehat{DAE}$.

Do đó tứ giác $DACE$ nội tiếp, hay E thuộc đường tròn (O) . Khi đó $\widehat{DBE} = \widehat{DAE} = \widehat{QPE}$, suy ra tứ giác $MEPB$ nội tiếp.

Do đó $\widehat{MEP} + \widehat{MBP} = 180^\circ$. Lại có

$\widehat{MEP} = \widehat{MAP}$; $\widehat{MBP} = \widehat{DAC}$ suy ra

$$\widehat{MAP} + \widehat{DAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MAC} + \widehat{CAP} + \widehat{DAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MAC} + \widehat{DAP} = 180^\circ.$$

Mà $\widehat{DAP} = 90^\circ$ nên $\widehat{MAC} = 90^\circ$ (đpcm) $\square$

► **Nhận xét.** Bài này có ít bạn gửi lời giải đến tòa soạn. Tuyên dương bạn *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An** có lời giải tốt.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T5/444. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3} - \sqrt{y} = 2x-6 & (1) \\ x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq \frac{3}{2}$, $y \geq 0$. (*)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số ta có:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 7(x+y)xy &= (x+y)^3 + 4(x+y)xy \\ &\geq 2\sqrt{(x+y)^3 4(x+y)xy} = 4(x+y)^2 \sqrt{xy} \\ &= 4\sqrt{xy}[(x^2+y^2)+2xy] \\ &\geq 4\sqrt{xy} 2\sqrt{(x^2+y^2)2xy} = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

Như vậy, $x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}$ và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Do đó $PT(2) \Leftrightarrow x = y$. Thay $x = y$ vào $PT(1)$ thì $PT(1)$ trở thành $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x-6$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x-3} - \sqrt{x})(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}) = 2(x-3)(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow 2x-3-x = 2(x-3)(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

(do $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{2x-3} + \sqrt{x} > 0$;

$$2\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{x} - 1 > 0).$$

Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất:

$$x = y = 3. \square$$

► **Nhận xét**

1) Đa số các bạn đều giải đúng. Để đi đến kết luận $x = y$, một số bạn đã sử dụng các lập luận, biến đổi khác, chẳng hạn:

• Đặt $y = kx$ ($k \geq 0$), $PT(2) \Leftrightarrow (k-1)^4(k^2 + 18k + 1) = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = y$.

• $PT(2)$ tương đương với

$$x^3 + y^3 - (x+y)xy = 8xy[\sqrt{2(x^2+y^2)} - (x+y)]$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) = 8xy \frac{2(x^2+y^2) - (x+y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)} + (x+y)}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2[(x+y)^2 + (x+y)\sqrt{2(x^2+y^2)} - 8xy] = 0.$$

• Đặt $S = x + y$ và $P = xy$, biến đổi $PT(2)$ theo S và P dẫn đến kết quả $S^2 = 4P$.

2) Một số bạn còn biến đổi dài dòng, lập luận chưa chặt chẽ, có bạn quên không ghi đầy đủ địa chỉ trên bài nên chưa được nêu tên lần này.

3) Các bạn có lời giải đúng:

Nghệ An: *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Đậu Thị Khánh Linh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn; **Vĩnh Long:** *Ngô Hoàng Anh*, 8/2, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vĩnh Long; **Phú Yên:** *Ngô Lê Phương Trinh*, 9E, THCS Lương Thế Vinh, TP. Tuy Hòa; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, TP. Hội An; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Long*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 9A4, THCS Nguyễn Đức Cảnh, TT. Diêm Điền, Thái

Thụy; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Đặng Quang Anh, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Hà Nội:** Lê Duy Anh, 9A, THCS Nguyễn Huy Tường, Đông Anh; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thanh Mai, 9A, THCS Tuân Chính, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T6/444. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2} \geq \frac{9}{2}.$$

Lời giải. BĐT phải chứng minh tương đương với

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \geq 9 \quad (1).$$

Với các số dương a, b, c , ta có :

$$a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b; \quad b^3 + c^3 \geq bc^2 + b^2c;$$

$$c^3 + a^3 \geq ca^2 + c^2a.$$

Cộng theo về ba BĐT trên, suy ra :

$$\begin{aligned} 2(a^3 + b^3 + c^3) &\geq c(a^2 + b^2) + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) \\ \Rightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) &\geq a^3 + b^3 + c^3 + \\ &+ \frac{c(a^2 + b^2) + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2)}{2} \quad (2). \end{aligned}$$

Ta chứng minh rằng

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + \frac{c(a^2 + b^2) + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2)}{2} &+ \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \geq 9 \quad (3). \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có :

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3.$$

$$\frac{c(a^2 + b^2)}{2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2} \geq 2\sqrt{\frac{c(a^2 + b^2)}{2} \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2}} = 2$$

(lưu ý $abc = 1$).

$$\text{Tương tự: } \frac{a(b^2 + c^2)}{2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} \geq 2$$

$$\frac{b(c^2 + a^2)}{2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \geq 2$$

Cộng theo về bốn BĐT trên, ta được (3).

Từ (2), (3) suy ra (1). BĐT trong đầu bài được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán không khó nên có nhiều bạn gửi bài giải với một vài cách làm khác nhau. Một số bạn đã sử dụng BĐT Cauchy cho sáu số hoặc BĐT không có trong chương trình phổ thông. Điều đó là không cần thiết. Với các số dương a, b, c , ta có :

$$a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b \Leftrightarrow a(a^2 - b^2) - b(a^2 - b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) \geq 0. \text{ BĐT đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = b.$$

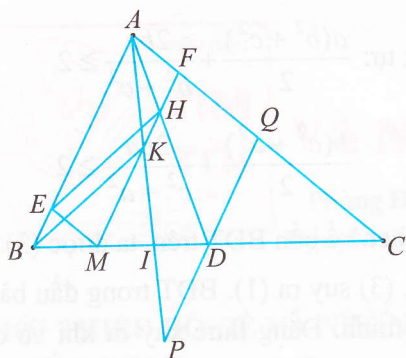
Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Tiền Giang : Đặng Trần Quốc Dũng, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang, TP Mỹ Tho; **Thanh Hoá :** Võ Phúc Thanh Sơn, 12A1, THPT Sầm Sơn, TX Sầm Sơn; **Vĩnh Long :** Lưu Hoài Bảo Trán, 12T1, Trần Cao Nhiệm, 11 T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nghệ An :** Dương Đức Minh, 10A1, THPT Quỳnh Lưu I; **Hà Tĩnh:** Lê Nguyễn Khánh Ly, 11T1, Nguyễn Văn Thế, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** Phạm Văn Huy, 11A4, THPT Vũng Tàu; **Ninh Thuận:** Nguyễn Trần Lê Minh, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Trị:** Hồ Sỹ Hoàng, 11B1, THPT Đakrông, H. Đakrông; **Đồng Nai:** Nguyễn Nam Bình, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/444. Cho tam giác ABC , D là trung điểm của cạnh BC , điểm M tùy ý thuộc khoảng BD . Vẽ hình bình hành $MEAF$ với E thuộc AB và F thuộc AC , MF cắt AD tại H . Đường thẳng qua B song song với EH cắt MF tại K ; AK cắt BC tại I . Tính $\frac{IB}{ID}$.

Lời giải (Theo bạn Nguyễn Tiến Đạt, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hoá).



Qua D kẻ đường thẳng song song với AB , cắt tia AI tại P . Áp dụng định lý Thales cho các đoạn song song ta có

$$\bullet \frac{IB}{ID} = \frac{AB}{DP} = \frac{AB}{HK} \cdot \frac{HK}{DP} \quad (\text{vì } DP \parallel AB) \quad (1)$$

$$\bullet \frac{AB}{HK} = \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BM} \quad (\text{vì } ME \parallel AC) \quad (2)$$

$$\bullet \frac{HK}{DP} = \frac{AH}{AD} = \frac{BM}{BD} \quad (\text{vì } HK \parallel DP \text{ và } MH \parallel AB) \quad (3)$$

Từ (1), (2), và (3) suy ra

$$\frac{IB}{ID} = \frac{BC}{BM} \cdot \frac{BM}{BD} = \frac{BC}{BD} = 2. \text{ Vậy } \frac{IB}{ID} = 2. \quad \square$$

► Nhận xét

1) Gọi Q là giao điểm của PD và AC . Vì $HF \parallel DQ$ và $ME \parallel AC$ nên $\frac{HF}{DQ} = \frac{AH}{AD} = \frac{BM}{BD} = \frac{2BE}{BA} = \frac{HK}{DQ}$, suy ra

$$HF = HK \Rightarrow (BDIC) = -1 \Rightarrow \frac{ID}{IB} \cdot \frac{CD}{CB} = 1 \Rightarrow \frac{IB}{ID} = 2.$$

2) Một số bạn còn sử dụng định lý Menelaus để giải bài toán trên. Ngoài bạn *Đạt*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Vĩnh Long: Trần Duy Quân, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Nam:** Nguyễn Vĩnh Ngọc Nữ, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, Nguyễn Ngọc Phương Linh, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Cần Thơ:** Võ Thường San, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, Bình Thủy; **Hà Nội:** Trần Diệu Linh, 10T1, THPT Chuyên ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 10Toán, PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Long An:** Nguyễn Hồng Hà Vy, 11T1, THPT chuyên Long An; **Ninh Thuận:** Nguyễn Trần Lê Minh, 11Toán, THPT

chuyên Lê Quý Đôn; **Nghe An:** Hồ Xuân Hùng, 10T1, THPT Đô Lương I.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T8/444. Cho dãy số $(v_n)_n$ thỏa mãn

$$\begin{cases} v_1 = 5 \\ v_{n+1} = v_n^4 - 4v_n^2 + 2. \end{cases}$$

Xác định số hạng tổng quát v_n .

Lời giải (Theo đa số các bạn).

Sử dụng hằng đẳng thức sau

$$8m^4 - 8m^2 + 1 = \frac{1}{2} \left(a^4 + \frac{1}{a^4} \right), \text{ với } m = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \quad (1)$$

Đặt $\frac{v_n}{2} = u_n$ ta thu được

$$\begin{cases} u_1 = \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right), \quad a = \frac{1}{2} (5 + \sqrt{21}), \\ u_{n+1} = 8u_n^4 - 8u_n^2 + 1 \end{cases} \quad (2)$$

Theo (1) thì

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(a^4 + \frac{1}{a^4} \right), \quad u_3 = \frac{1}{2} \left(a^{4^2} + \frac{1}{a^{4^2}} \right), \dots$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta thu được

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right), \quad a = \frac{1}{2} (5 + \sqrt{21}) \\ u_n = \frac{1}{2} \left(a^{4^{n-1}} + \frac{1}{a^{4^{n-1}}} \right) \end{cases} \quad \text{Vậy}$$

$$v_n = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)^{4^{n-1}} + \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2} \right)^{4^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng:

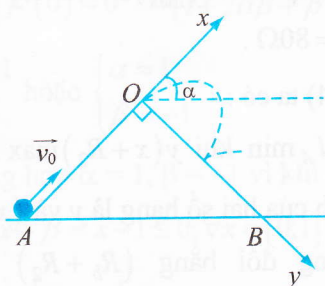
Cà Mau: Trần Ngọc Bách, 11CT, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Đắk Lắk:** Hoàng Thị Thảo Ngọc, 10CT, Nguyễn Triệu Huỳnh, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Hoàng Hải, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** Nguyễn Công Phúc, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Gia Lai:** Phạm Thành Nhân, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương, Pleiku; **Hoà Bình:** Hoàng Bảo Linh, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hà Nam:** Hoàng Đức Mạnh, 11T, THPT chuyên Biên Hoà; **Hà Nội:** Hoàng Lê Nhật Tùng, 11A2 Toán, THPT chuyên KHTN; Trần Phương Nam, 11A13, THPT

Ngọc Tào, *Trần Mạnh Hùng*, 11TA, THPT chuyên Nguyễn Huệ; *Kiều Thu Hương*, 11T, THPT Sơn Tây; **Hà Tĩnh**: *Lê Văn Trường Nhật*, *Nguyễn Văn Thế*, 10T₁, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh**: *Võ Thành Đạt*, 10CT, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10T, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Hưng Yên**: *Trần Bá Nhung*, 11T₁, THPT chuyên Hưng Yên; **Long An**: *Châu Hoà Nhân*, THPT chuyên Long An; **Nam Định**: *Vũ Tuấn Anh*, 12T₂, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Ninh Thuận**: *Nguyễn Trần Lê Minh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Nghệ An**: *Hồ Xuân Hùng*, 10T₁, THPT Đô Lương I; *Phan Như Trinh*, 11A, THPT Diễn Châu 3; *Trần Quang Huy*, THPT chuyên ĐH Vinh; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phạm Văn Huy*, 11A₄, THPT Vũng Tàu; **Quảng Trị**: *Hồ Sỹ Hoàng*, 11B₁, THPT Đakrông; *Lê Văn Bình*, 11T; *Trần Trọng Tiến*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thanh Hoá**: *Trịnh Hoàng Đức*, *Nguyễn Tiến Đạt*, *Phạm Văn Thắng*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Long**: *Trần Cao Nhiệm*, 11T₁; *Huỳnh Hào*, 11T₂, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Ngãi**: *Bạch Thị Thiên Ngân*, 10T₂, THPT chuyên Lê Khiết; **Yên Bái**: *Phạm Ngọc Sơn*, *Vũ Hồng Quân*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài L1/444. Một quả cầu nhỏ, đàn hồi nằm ở chân nêm có tiết diện là tam giác vuông cân AOB, cố định độ dài hai cạnh bên là l (hình vẽ). Cần truyền cho quả cầu vận tốc $\vec{v}_0$ bằng bao nhiêu hướng dọc mặt nêm để quả cầu rơi đúng điểm B của nêm?

Lời giải



- Chọn mốc thế năng ở mặt phẳng chứa cạnh AB.
- Gọi v là vận tốc của quả cầu khi ở đỉnh của nêm.

– Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + mgl\cos\alpha \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + mgl\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow v &= \sqrt{v_0^2 - gl\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Khi quả cầu tới O, nó tạo với phương ngang một góc 45° với vận tốc v .

Xét chuyển động của quả cầu theo hai trục Ox và Oy (hình vẽ).

– Xét quả cầu chuyển động theo trục Oy:

$$a_y = -\frac{g\sqrt{2}}{2}; v_y = v - \frac{g\sqrt{2}}{2}t; y = vt - \frac{g\sqrt{2}}{4}t^2.$$

Khi quả cầu chạm B thì $y = 0$

$$\Rightarrow vt = g\frac{\sqrt{2}}{4}t^2 \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{2}}{g}v.$$

Vận tốc của quả cầu ngay trước va chạm:

$$v_y = v - \frac{g\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{g}v = -v.$$

Khoảng cách giữa hai lần quả cầu va chạm trên mặt OB của nêm là: $t = \frac{2\sqrt{2}}{g}v$.

– Xét quả cầu chuyển động theo trục Ox:

$$a_x = \frac{g\sqrt{2}}{2}.$$

Quãng đường quả cầu đi được dọc theo trục Ox, sau các va chạm liên tiếp:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_n = 1 : 3 : 5 : \dots : (2n-1), \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Ta có: } x_1 = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{2\sqrt{2}(v_0^2 - gl\sqrt{2})}{g}.$$

Điều kiện để quả cầu rơi trúng điểm B:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ = [1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)]x_1 = n^2 x_1 = l\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow n^2 \frac{2\sqrt{2}(v_0^2 - gl\sqrt{2})}{g} = l$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{(4n^2 + 1)gl}{2\sqrt{2}n^2}}. \square$$

► Nhận xét

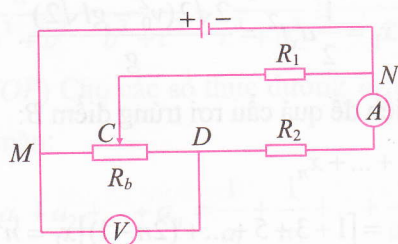
1) Một số bạn giải không tổng quát, chỉ xét trường hợp duy nhất quả cầu bay từ O và rơi đúng điểm B mà không xét quả cầu nảy n lần trên OB và rơi đúng điểm B .

2) Các bạn sau có lời giải đúng và đầy đủ.

Hà Tĩnh: Lê Nguyễn Khánh Ly, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Gia Lai:** Trần Thanh Long, 10C4B, THPT chuyên Hùng Vương; **Hoà Bình:** Hoàng Bảo Linh, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Đồng Tháp:** Trần Hoàng Nhật, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Nghệ An:** Tăng Trung Hiếu, 11A1, THPT Thái Hoà, TX. Thái Hoà; **Chu Minh Thông,** 11A3-K41, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bình Phước:** Nguyễn Văn Hùng, 11B, THPT chuyên Quang Trung; **Thái Nguyên:** Trần Trọng Đạo, 10 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên.

ĐẶNG THANH HẢI

Bài L2/444. Cho mạch điện như hình vẽ, trong đó nguồn điện có hiệu điện thế U không đổi, R_b là biến trở và $R_b > R_2$. Di chuyển con chạy C trên biến trở thì thấy số chỉ của ampe kế A thay đổi từ $0,08A$ đến $0,2A$ và số chỉ của vôn kế V thay đổi từ $16V$ đến $20,8V$. Xác định giá trị của U , R_1 , R_2 và R_b . Cho biết các dụng cụ đo là lí tưởng. Bỏ qua điện trở của nguồn điện và dây nối.



Lời giải. Gọi I_1 là cường độ dòng điện qua R_1 , y và x lần lượt là điện trở của hai đoạn mạch CD và CM ($0 \leq x, y \leq R_b$). Ta có:

$$U = U_V + I_A \cdot R_2 \quad (1)$$

Vì U không đổi nên từ (1) ta suy ra, khi U_V đạt giá trị lớn nhất thì I_A nhỏ nhất và khi U_V đạt giá trị nhỏ nhất thì I_A lớn nhất. Từ đó ta được:

$$U = 16 + 0,2 \cdot R_2 \quad (2)$$

$$\text{và } U = 20,8 + 0,08 \cdot R_2 \quad (3)$$

Giải hệ (2) và (3) ta được

$$U = 24V \text{ và } R_2 = 40\Omega.$$

Điện trở của cả đoạn mạch là:

$$R_{MN} = y + \frac{(x + R_2)R_1}{x + R_2 + R_1} = \frac{y(x + R_2) + (R_b + R_2)R_1}{x + R_2 + R_1}$$

$$I_A = I_{tm} \cdot \frac{R_1}{x + R_2 + R_1} = \frac{U}{R_{MN}} \cdot \frac{R_1}{x + R_2 + R_1} \quad (4)$$

$$= \frac{UR_1}{y(x + R_1) + (R_b + R_2)R_1}$$

Vì U, R_1, R_2 và R_b không đổi nên từ (4) suy ra: I_A max khi $y(x + R_2)$ min

Do $y \geq 0$ nên $y(x + R_2) \geq 0$.

Vậy $y(x + R_2)_{\min} = 0$

$$\text{Suy ra } I_{A\max} = \frac{UR_1}{0 + (R_b + R_2)R_1} = \frac{U}{R_b + R_2}.$$

Thay giá trị của $I_{A\max}, U$ và R_2 ở trên ta được $R_b = 80\Omega$.

Cũng từ (4) ta có:

$$I_A \text{ min khi } y(x + R_2) \text{ max.}$$

Đây là tích của hai số hạng là y và $(x + R_2)$ có tổng không đổi bằng $(R_b + R_2)$ nên tích $y(x + R_2)$ max khi $y = x + R_2$

$$\Rightarrow 80 - x = x + 40.$$

Suy ra $x = 20\Omega$ và $y = 60\Omega$.

Thay các giá trị vào (4) ta được:

$$I_{Amin} = 0,08 = \frac{24R_1}{60(20+40) + (80+40)R_1}$$

$\Rightarrow R_1 = 20\Omega$. $\square$

► **Nhận xét**

Bạn Nguyễn Văn Hùng 11B THPT Chuyên Quang Trung, Bình Phước có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Giải bài

CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT KỶ NIỆM 50 NĂM TẠP CHÍ TH&TT



Bài T9/THCS. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, p) với p là số nguyên tố, thỏa mãn phương trình $8x^3 + y^3 - 6xy = p - 1$.

Lời giải (Theo bạn Lê Phước Định, 9/1 THCS Kim Đồng, Hội An, Quảng Nam).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } p &= 8x^3 + y^3 + 1 - 6xy \\ &= (2x + y + 1)(4x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - y). \end{aligned}$$

Vì p là số nguyên tố, $x, y > 0$ nên ta suy ra

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = p & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow (2x - y)^2 + (2x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow (2x - 1)^2 \leq 2 \Rightarrow 2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Thay vào (3) ta được $(y - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

$$\Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Nếu $y = 1$ thay vào (1) ta được $p = 4$ (loại).

Nếu $y = 2$ thay vào (1) ta được $p = 5$ (chấp nhận).

Thử lại với $(x, y, p) = (1, 2, 5)$ ta thấy thỏa mãn.

Đáp số: $(x, y, p) = (1, 2, 5)$. $\square$

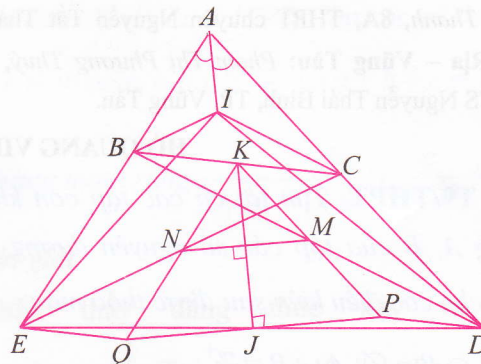
► **Nhận xét.** Bài này được đông đảo các bạn học sinh THCS tham gia giải. Tất cả các lời giải đều đúng. Các bạn có lời giải tốt:

Thanh Hoá: Lê Quang Dũng, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hoá; **Quảng Bình:** Phan Trần Hường, 8D, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Nghệ An:** Hoàng Trần Đức, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thái Bình:** Trần Quang Minh, 9A₄, THCS Nguyễn Đức Cảnh, Thái Thụy; **Hà Nội:** Nguyễn Hoàng Long, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hoà.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/THCS. Cho tam giác ABC , I là một điểm nằm trên tia phân giác trong của góc BAC . Đường thẳng qua B song song với CI cắt AC tại D ; đường thẳng qua C song song với BI cắt AB tại E . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BD, CE . Chứng minh rằng AI vuông góc với MN .

Lời giải



Kết quả bài toán là hiển nhiên với $\triangle ABC$ cân tại A . Ta xét trường hợp $\triangle ABC$ không cân tại A .

Vì $BI \parallel CE$ nên $S_{EIB} = S_{CBI}$;

$CI \parallel BD$ nên $S_{DCI} = S_{BCI}$. Từ đó $S_{EIB} = S_{DCI}$.

Do I nằm trên tia phân giác trong của góc BAC nên khoảng cách từ I đến BE bằng khoảng cách từ I đến CD . Suy ra $BE = CD$ (1)

Gọi K, J theo thứ tự là trung điểm của BC, DE . Dựng các hình bình hành $KBEQ, KCDP$. Ta thấy các tứ giác $KCQE, BKDP, EQDP$ đều là các hình bình hành. Do đó M, N, J theo thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng KP, KQ, PQ .

Từ (1) ta có $KP = CD = BE = KQ$, suy ra tam giác KPQ cân tại K , dẫn đến $KJ \perp PQ$.

Mà MN là đường trung bình của ΔKPQ , nên $KJ \perp MN$ (2)

Lại có $KQ \parallel AB, KP \parallel AC$ và KJ, AI theo thứ tự là phân giác các góc $\widehat{QKP}$ và $\widehat{BAC}$, nên $KJ \parallel AI$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $AI \perp MN$ (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Điểm mấu chốt trong lời giải bài toán là việc chỉ ra $BE = CD$. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Thái Bình: Trần Quang Minh, 9A4, THCS Nguyễn Đức Cảnh, Thái Thụy; **Thanh Hoá:** Đặng Quang Anh, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Quốc Khánh, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Quảng Nam:** Lê Phước Định, 9/1, THCS Kim Đồng, TP. Hội An; **Kon Tum:** Lê Viết Lưu Thanh, 8A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** Phạm Thị Phương Thuý, 9², THCS Nguyễn Thái Bình, TP. Vũng Tàu.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/THPT. Tìm tất cả các tập con khác rỗng A, B của tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

- $A \cap B = \emptyset; A \cup B = \mathbb{Z}^+;$
- Với mọi phần tử $a \in A; b \in B$ ta có $a + b \in A$ và $2a + b \in B$.

(Do sơ suất, điều kiện i) bị in thiếu $A \cup B = \mathbb{Z}^+.$

Toà soạn thành thật xin lỗi bạn đọc).

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra trong A không có phần tử a mà $2a \in A$.

Kí hiệu c là phần tử nhỏ nhất của tập hợp B . Từ nhận xét trên ta có $c \in \{1, 2\}$. Ta sẽ chứng minh $c = 2$.

Phản chứng $c = 1$, khi đó $\forall a \in A$

$\Rightarrow a + 1 \in A \Rightarrow a + 2 = (a + 1) + 1 \in A, \dots$ Do đó $a + n \in A, \forall n = 0, 1, 2, \dots$ mâu thuẫn với $2a + 1 = a + (a + 1) \in B$.

Như vậy $c = 2 \Rightarrow 1 \in A$

$\Rightarrow 3 = 1 + 2 \in A \Rightarrow 5 = 3 + 2 \in A, \dots$

Cũng như vậy

$4 = 2.1 + 2 \in B, 6 = 2.1 + 4 \in B, \dots$

$\Rightarrow$ tất cả các số nguyên dương chẵn $\in B$.

Thử lại thấy hai tập hợp $A = \{1, 3, 5, \dots\}, B = \{2, 4, 6, \dots\}$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán. $\square$

► **Nhận xét.** Trong số các bạn học sinh gửi lời giải tới Toà soạn có hai bạn có lời giải đúng:

Yên Bái: Vũ Hồng Quân, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hung Yên:** Trần Bá Trung, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/THPT. Cho tam giác ABC không cân tại A có O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác. Đường thẳng qua A vuông góc với OH cắt BC tại K . Chứng minh rằng H và tâm đường tròn Euler của các tam giác ABC, ABK, ACK cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải (Theo bạn Nguyễn Quang Huy, THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội).

Gọi E, E_b, E_c theo thứ tự là tâm đường tròn Euler của các tam giác $ABK, ACK; X, Y, Z$ theo thứ tự là trung điểm của $AB, AC, AK; D$ là giao điểm của AH và BC (hình vẽ).

Đương nhiên E, E_b, E_c theo thứ tự là tâm của các đường tròn $(XYD), (XZD), (YZD)$ (1).

Do đó EE_b, EE_c theo thứ tự vuông góc với XD, YD (2).

PROBLEMS ...

(Tiếp theo trang 17)

Problem T8/448. Suppose that the polynomial

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

has three non-negative real solutions. Find the maximal real number α such that $f(x) \geq \alpha(x-a)^3, \forall x \geq 0$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

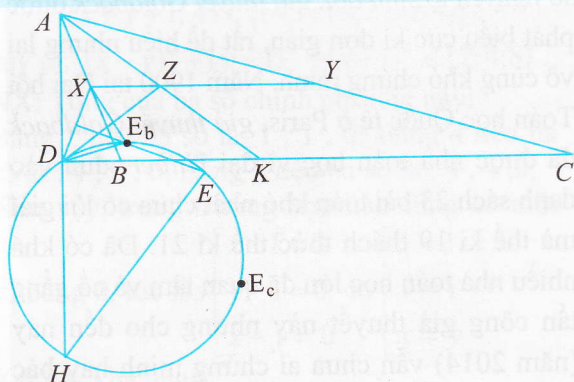
Problem T9/448. Let $[x]$ be the greatest integer not exceeding x and let $\{x\} = x - [x]$.

Find $\left\{ \frac{p^{2012} + q^{2016}}{120} \right\}$ where p, q are primes

numbers which are greater than 5.

Problem T10/448. Let x, y, z be positive real numbers satisfying $x^3 + y^2 + z = 2\sqrt{3} + 1$. Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^3}.$$



Vậy $(HE, HD) \equiv (AZ, XZ) \pmod{\pi}$

(vì $HE \perp AK \equiv AZ; HD \perp BC \parallel XZ$)

$\equiv (XZ, DZ) \pmod{\pi}$

(vì A và D đối xứng với nhau qua X)

$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{E_b X}, \overrightarrow{E_b D}) \pmod{\pi}$ (vì (1))

$\equiv (E_b E, E_b D) \pmod{\pi}$ (vì (2); $E_b X = E_b D$).

Problem T11/448. Given a sequence (a_n) whose terms are greater than 1 and satisfy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln a_n)}{n} = \frac{1}{2014}.$$

Let $b_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Prove that $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ is a finite number.

Problem T12/448. Given a triangle ABC and O is any point inside the triangle. Let P, Q , and R respectively be the projections of O on BC, CA , and AB respectively. Let A_1, B_1 and C_1 be arbitrary points other than A, B, C on the lines BC, CA , and AB respectively. Let A_2, B_2 , and C_2 are the reflections of A_1, B_1 , and C_1 through the points P, Q , and R .

Let $Z_1 \equiv (AB_1 C_1) \cap (BC_1 A_1) \cap (CA_1 B_1)$;

$Z_2 \equiv (AB_2 C_2) \cap (BC_2 A_2) \cap (CA_2 B_2)$.

Prove that O is equidistant from Z_1 and Z_2 .

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
College of Science - Vietnam National University, Hanoi.

Do đó H, E, D, E_b cùng thuộc một đường tròn. Tương tự H, E, D, E_c cùng thuộc một đường tròn. Vậy H, E, E_b, E_c cùng thuộc một đường tròn. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán hay nhưng không quá khó, tuy nhiên chỉ có 8 bạn tham gia giải. Trừ bạn Huy, 7 bạn còn lại hoặc không biết sử dụng góc định hướng hoặc sử dụng góc định hướng chưa thành thạo nên lời giải đều quá dài và phụ thuộc hình vẽ. Xin nêu tên cả 7 bạn: **Cần Thơ:** Lương Khang An, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Thanh Hoá:** Nguyễn Tiến Đạt, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nam Định:** Vũ Tuấn Anh, 12T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Hồ Xuân Hùng, 10T1, THPT Đô Lương I; **Trần Quang Huy**, 10A1, THPT chuyên, ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, 10T1; Trần Hậu Mạnh Cường, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN MINH HÀ



Tiếp tục câu chuyện về các giả thuyết trong lý thuyết số mà chưa có lời giải (xem bài “Giả thuyết số nguyên tố sinh đôi và Yitang Zhang” TH&TT số 443, tháng 5/2014) trong bài

này chúng tôi muốn kể với các bạn câu chuyện về Giả thuyết Goldback, một giả thuyết cực kỳ nổi tiếng trong lý thuyết số.

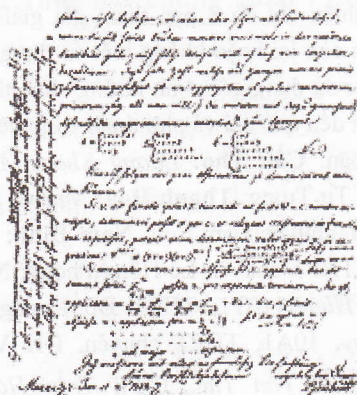
I. GIẢ THUYẾT GOLDBACK



Nhà Toán học Đức
Christian Goldbach

thuyết sau đây:

“Mỗi số chẵn lớn hơn 2 đều biểu diễn được thành tổng của hai số nguyên tố”.



Bức thư của Goldbach gửi Euler ngày 7-6-1742
Trong thư trả lời ngày 30-6-1742, Euler viết:

Câu chuyện về Giả thuyết Goldback

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(GV ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

“Tôi tin rằng giả thuyết này hoàn toàn đúng nhưng tôi vẫn chưa thể chứng minh được”.

Ta có thể kiểm tra bằng tay Giả thuyết Goldback với những số nhỏ. Chẳng hạn:

$$4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5; 10 = 3 + 7$$

$$12 = 5 + 7; 14 = 7 + 7$$

$$16 = 5 + 11$$

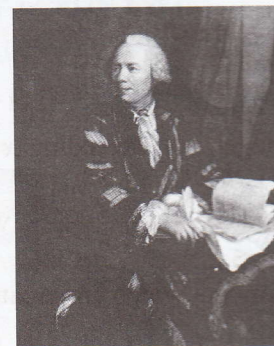
$$18 = 7 + 11$$

$$20 = 7 + 13$$

$$48 = 19 + 29; 100 = 3 + 97.$$

Giống như định lý lớn Fermat hay Giả thuyết số nguyên tố sinh đôi, giả thuyết Goldback được phát biểu cực kỳ đơn giản, rất dễ hiểu nhưng lại vô cùng khó chứng minh. Năm 1900 tại Đại hội Toán học Quốc tế ở Paris, giả thuyết Goldback đã được nhà toán học vĩ đại Hilbert đưa vào danh sách 23 bài toán khó nhất chưa có lời giải mà thế kỷ 19 thách thức thế kỷ 21. Đã có khá nhiều nhà toán học lớn đã quan tâm và cố gắng tấn công giả thuyết này nhưng cho đến nay (năm 2014) vẫn chưa ai chứng minh hay bác bỏ được giả thuyết này mặc dù có đạt được những bước tiến nhất định. Sau đây là một số kết quả đáng chú ý nhất, củng cố niềm tin cho giả thuyết Goldback:

1) Với sự trợ giúp của các siêu máy tính, T.Oliveira e Silva đã viết một chương trình cho siêu máy tính kiểm tra. Máy tính đã xác nhận rằng giả thuyết Goldback đúng cho mọi số chẵn bé hơn 4.10^8 .



Nhà Toán học Thụy Sĩ
Leonhard Euler

2) Để đánh giá mức độ “dày đặc” của tập hợp vô hạn các số nguyên dương người ta đưa ra khái niệm mật độ của một tập các số nguyên dương. Cho tập A các số nguyên dương. Kí hiệu A_n tập các phần tử của A không vượt quá n và $|A_n|$ là số phần tử của A_n . Nếu tỉ số $\frac{|A_n|}{n}$ có giới hạn khi n tiến ra vô cùng thì giới hạn đó được gọi là *mật độ* của A và ký hiệu là $d(A)$: $d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n}$.

Nếu giới hạn đó không tồn tại ta nói tập A không có mật độ.

Khi chọn ngẫu nhiên một số trong tập $\{1, 2, \dots, n\}$ thì xác suất để số được chọn thuộc A là $\frac{|A_n|}{n}$. Thành thử $d(A)$ có thể xem như xác suất chọn được một số thuộc A khi ta chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương.

Một số tính chất và ví dụ về mật độ:

- $0 \leq d(A) \leq 1$.
 - Nếu A có mật độ thì A^C , phần bù của A trong tập số nguyên dương, cũng có mật độ và $d(A^C) = 1 - d(A)$.
 - Tập các số chính phương có mật độ bằng 0.
 - Tập các số dạng $ak + b$ với a, b là các số nguyên dương cho trước có mật độ là $\frac{1}{a}$.
 - Nói riêng, tập các số chẵn (tập các số dạng $2k$) và tập các số lẻ (tập các số dạng $2k + 1$) có mật độ bằng nhau và bằng $\frac{1}{2}$.
 - Tập các số không có ước chính phương có mật độ là $\frac{6}{\pi^2}$.
 - Tập các số nguyên tố có mật độ bằng 0.
 - Không phải tập số nguyên nào cũng có mật độ. Chẳng hạn tập các số có một số lẻ các chữ số trong biểu diễn cơ số 2 là tập không có mật độ.
- Năm 1975, hai nhà toán học *H. Montgomery* và *R.C. Vaughan* chứng minh được định lý sau:

“Tồn tại các hằng số dương c, C và số nguyên dương n_0 sao cho với mọi $n > n_0$ số các số chẵn bé hơn n mà không biểu diễn được thành tổng của hai số nguyên tố sẽ không vượt quá Cn^{1-c} . Từ đó suy ra tập các số chẵn mà không biểu diễn được thành tổng của hai số nguyên tố có mật độ bằng 0”.

Từ kết quả trên ta suy ra kết quả do hai nhà toán học *Chudakov* và *Van der Corput* tìm được trước đó:

Kí hiệu $p(n)$ là xác suất để khi chọn ngẫu nhiên một số chẵn không vượt quá n ta được một số viết được thành tổng của hai số nguyên tố. Khi đó ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 1$.

Điều đó có nghĩa là

“Nếu chọn ngẫu nhiên một số chẵn thì “hầu chắc chắn” số chẵn đó sẽ biểu diễn được thành tổng của hai số nguyên tố”.

3) Năm 1930, nhà toán học *L.Schnirelmann* đã chứng minh rằng:

“Mọi số chẵn lớn hơn 2 đều được biểu diễn thành tổng của không quá 800000 số nguyên tố”.

Nhiều nhà toán học đã cố gắng cải tiến hơn nữa kết quả trên. Kết quả tốt nhất theo hướng này cho đến nay thuộc về nhà toán học *Olivier Ramaré* công bố năm 1995 với định lý sau:

“Mọi số chẵn lớn hơn 2 đều được biểu diễn được thành tổng của không quá sáu số nguyên tố”.

II. GIẢ THUYẾT GOLDBACK YẾU

Nếu mỗi số chẵn lớn hơn 2 biểu diễn được thành tổng của hai số nguyên tố thì mỗi số lẻ lớn hơn 5 sẽ biểu diễn được thành tổng của ba số nguyên tố. Thật vậy giả sử n là số lẻ lớn hơn 5. Khi đó $n - 3$ là số chẵn lớn hơn 2. Do đó $n - 3 = p + q$ với p, q là hai số nguyên tố. Vậy $n = 3 + p + q$.

Như vậy nếu giả thuyết Goldbach đúng thì giả thuyết “Mọi số lẻ lớn hơn 5 đều biểu diễn được thành tổng của ba số nguyên tố” cũng đúng.

Giả thuyết này được gọi là **giả thuyết Goldback yếu**. Thay vì tấn công trực diện giả thuyết Goldback, nhiều nhà toán học tìm cách công phá giả thuyết Goldback yếu. Nếu giả thuyết Goldback yếu bị bác bỏ thì giả thuyết Goldback cũng bị bác bỏ. Nhưng nếu giả thuyết Goldback yếu đúng thì đó mới chỉ là một bằng chứng rất thuyết phục để tin rằng giả thuyết Goldback đúng mà thôi.

Năm 1937, nhà toán học Vinogradov đã đạt được một kết quả đột phá khi giải quyết giả thuyết Goldback yếu. Ông chứng minh được rằng:

“Tồn tại số nguyên dương C sao cho mỗi số lẻ lớn hơn C đều viết được thành tổng của ba số nguyên tố”.

Tuy nhiên Vinogradov chỉ chứng minh sự tồn tại của hằng số C mà không chỉ ra độ lớn của nó. Gọi K là tập hợp các số nguyên dương C có tính chất *“mỗi số lẻ lớn hơn C đều viết được thành tổng của 3 số nguyên tố”*.

Kết quả của Vinogradov đã xác nhận là $K \neq \emptyset$ và giả thuyết Goldback yếu nói rằng “ $\min K = 5$ ”.

Nếu chỉ ra được cụ thể một số $C \in K$ thì chỉ cần kiểm tra bằng máy tính giả thuyết Goldback yếu cho mọi số lẻ bé hơn hay bằng C là đủ.

Năm 1956, một học trò của Vinogradov là K. Borozdin chỉ ra $3^{14348907} \in K$. Số này có 6846169 chữ số thập phân. Nó quá lớn nên không thể kiểm tra được giả thuyết Goldback yếu cho tất cả các số lẻ bé hơn $3^{14348907}$.

Năm 1989, hai nhà toán học Chen và Wang đã hạ thấp được cận trên của $\min K$ bằng cách chỉ ra $10^{43000} \in K$.

Năm 2002, hai nhà toán học Liu Ming-Chit và Wang Tian-Ze đã hạ thấp hơn nữa cận trên của $\min K$, chỉ ra $2.10^{1346} \in K$. Tuy nhiên số 2.10^{1346} vẫn còn quá lớn để siêu máy tính

kiểm tra được giả thuyết Goldback yếu cho tất cả các số lẻ bé hơn 2.10^{1346} .

Chú ý rằng từ kết quả của Olivier Ramaré về giả thuyết Goldback ta suy ra:

Mỗi số lẻ lớn hơn 5 đều biểu diễn được thành tổng của không quá bảy số nguyên tố.

Năm 2012, thần đồng toán học Terence Tao (giải thưởng Fields năm 2006) đã chứng minh được kết quả mạnh hơn sau đây:

Mỗi số lẻ lớn hơn 5 đều biểu diễn được thành tổng của không quá năm số nguyên tố.

Cuối cùng vào năm 2013, một tin vui đến với các nhà toán học, giả thuyết Goldback yếu:

“Mọi số lẻ lớn hơn 5 đều biểu diễn được thành tổng của ba số nguyên tố” đã được chứng minh là đúng.

Tác giả của nó là nhà toán học người Peru Harald Andrés Helfgott. Ông sinh năm 1977, nhận học vị Tiến sĩ Toán tại Đại học Princeton (Mỹ) năm 2003 và hiện đang là giáo sư tại Đại học École Normale Supérieure, Paris (Pháp).

Một điều trùng hợp lí thú là cũng vào năm 2013 đáng ghi nhớ ấy, nhà toán học Yitang Zhang (sinh năm 1955), giáo sư của Trường Đại học New Hampshire (Mỹ) thông báo đã chứng minh được một kết quả thú vị liên quan tới giả thuyết số nguyên tố sinh đôi. Giả thuyết số nguyên tố sinh đôi nói rằng:

Có vô số cặp số nguyên tố (p, q) ($p < q$) thỏa mãn $q - p = 2$.

Y. Zhang đã chứng minh rằng:

Tồn tại số nguyên dương $k \leq 700000000$ sao cho có vô số cặp số nguyên tố (p, q) ở đó p và q là hai số nguyên tố đứng cạnh nhau và $q - p = k$.

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT KỶ NIỆM 50 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

LTS. Cuộc thi giải toán đặc biệt kỷ niệm 50 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ được bắt đầu từ số 440 (tháng 2/2014) đến số 444 (tháng 6/2014). Cuộc thi này được nhiều bạn ở khắp cả nước tham gia. Đặc biệt có một số bạn ở bậc THCS đã gửi lời giải hay, độc đáo với những phương pháp mới cho nhiều bài toán ở bậc THPT. Sau đây là danh sách các bạn đoạt giải cuộc thi.

Giải Xuất sắc (1 giải)

Lê Phước Định, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An, **Quảng Nam**.

Giải Nhất (3 giải)

1) Đặng Quang Anh, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, **Thanh Hoá**.

2) Lê Quang Dũng, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hoá, **Thanh Hoá**.

3) Nguyễn Văn Thế, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

Giải Nhì (7 giải)

1) Phan Trần Hương, 8Đ, THCS Quách Xuân Kỳ, Hoàn Lão, Bố Trạch, **Quảng Bình**.

2) Nguyễn Hồng Quốc Khánh, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

3) Lê Văn Trường Nhật, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

4) Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 10T, PTNK – ĐHQG TP. **Hồ Chí Minh**.

5) Nguyễn Tiến Đạt, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hoá**.

6) Lương Thế Sơn, 11T, THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**.

7) Vũ Tuấn Anh, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

Giải Ba (10 giải)

1) Nguyễn Bảo Trân, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn, **Bình Định**.

2) Lê Viết Lưu Thanh, 8A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **KonTum**.

3) Trần Thị Tường Vy, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

4) Nguyễn Lê Giang, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

5) Trương Minh Nhật Quang, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**.

6) Vũ Hồng Quân, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**.

7) Hồ Xuân Hùng, 10T₁, THPT Đô Lương I, **Nghệ An**.

8) Nguyễn Hồng Đăng, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

9) Nguyễn Minh Ngọc, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình, **Quảng Bình**.

10) Trần Hậu Mạnh Cường, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

 Y.Zhang gửi công trình của mình tới Tạp chí *Annals of Mathematics*, một Tạp chí danh tiếng hàng đầu về Toán học. Phản biện của Tạp chí đã kiểm tra cẩn thận và kết luận rằng tác giả đã thành công trong việc chứng minh được một kết quả rất lý thú và rất lớn trong lý thuyết số, dù rằng còn xa mới đến được *giả thuyết số nguyên tố sinh đôi*. Bài báo đã được đăng ở tập 179, xuất bản tháng 3 năm 2014. Với thành tựu này Zhang đã được mời báo cáo tại phiên họp toàn thể của Đại hội Toán học Thế giới năm 2014 ở Seoul (Hàn Quốc), được nhận giải thưởng Rolf Schock (trị giá 93.000 USD) và giải thưởng Ostrowski (trị giá 85.000 USD).

III. LỜI KẾT

Chúng ta chưa biết làm thế nào hoặc khi nào *giả thuyết Goldback* sẽ được giải quyết. Có thể 5 năm, 10 năm, 20 năm mà cũng có thể hàng trăm năm hoặc lâu hơn nữa. *Giả thuyết Goldback* hiện vẫn đang đứng sừng sững như đỉnh núi Everest thách thức trí tuệ con người. Chinh phục đỉnh Everest là một việc cực kỳ khó khăn, cái giá phải trả là cực kỳ đắt, thậm chí có thể bằng chính mạng sống của mình.

Tuy nhiên, các nhà leo núi vẫn cứ tiến lên, tiếp tục cắm thêm những cột mốc mới với niềm tin và hy vọng rằng một khi đã lên tới đỉnh, quang cảnh mở ra sẽ thật tuyệt vời và tên tuổi của người chinh phục sẽ được lưu danh mãi mãi.



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 448 (10.2014)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606

Email: toanhocvatuoi@vietnamnet.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HẠ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Nguyễn Anh Tuyến – Mối liên hệ giữa các yếu tố của hai tam giác “lồng nhau”.

4 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp

10 THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2014-2015.

6 Hải Mai – Lễ kỉ niệm 40 năm Việt Nam

tham dự Olympic Toán học Quốc tế (IMO) (1974-2014).

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán trường THPT chuyên Hà Tĩnh năm học 2014-2015.

7 Chuẩn bị thi vào đại học

University Entrance Preparation

Thái Văn Tài - Hệ phương trình đặc trưng của một dạng bất đẳng thức và ứng dụng.

11 Thử sức trước kì thi - Đề số 1.

12 Bạn đọc tìm tòi

Reader's Contributions

Phùng Đắc Vũ Anh, Nguyễn Quỳnh Anh – Bổ đề Sawayama và những bài toán liên quan.

16 Đề ra kì này

Problems in This Issue

T1/448, ..., T12/448, L1/448, L2/448.

18 Giải bài kì trước

Solutions to Previous Problems

Giải các bài của Số 444.

28 Bạn có biết

Did you know

Đặng Hùng Thắng – Câu chuyện về giả thuyết Goldbach.

31 Kết quả cuộc thi giải toán đặc biệt kỉ niệm 50 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

Ảnh Bìa 1. GS.TSKH Trần Văn Nhung, Tổng Thư kí Hội đồng chức danh Giáo sư Nhà nước đọc báo cáo tổng kết 40 năm Việt Nam tham gia IMO.

Trưởng ban biên tập: ThS. NGUYỄN ANH QUÂN

Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ

Mỹ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: KHÁNH LINH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI

Tham dự khai giảng năm học mới 2014 – 2015 và tặng quà các trường kết nghĩa trên địa bàn TP. Hà Nội

Theo thông lệ, hằng năm Lãnh đạo NXBGD tại Hà Nội đều đến dự và chúc mừng lễ Khai giảng năm học mới ở các trường kết nghĩa trên địa bàn TP. Hà Nội. Những lời chúc mừng tốt đẹp nhất cùng với món quà có ý nghĩa, những

cuốn sách tham khảo mới, chất lượng bổ sung cho thư viện của nhà trường là tình cảm của cán bộ công nhân viên NXBGD tại Hà Nội đối với các thầy cô giáo, các em học sinh nhân dịp năm học mới 2014 – 2015.

NHÀ TRƯỜNG VĂN HÓA - NHÀ GIÁO MẪU MỰC - HỌC SINH THANH LỊCH



Thường vụ Đảng ủy, Phó TGD NXBGD Việt Nam kiêm GD NXBGD tại Hà Nội ông Hoàng Lê Bách đến chúc mừng và dự lễ Khai giảng năm học mới 2014 – 2015 của trường TH Kim Liên, Số 17 Hoàng Tích Trí, Kim Liên, Đống Đa



Ông Nguyễn Văn Tùng PTBT NXBGDVN cùng lãnh đạo NXBGD tại Hà Nội tham dự lễ Khai giảng năm học mới 2014 – 2015 của trường THCS Ngô Sĩ Liên, Số 27-29 Hàm Long, Hàng Bài, Hoàn Kiếm



Bà Lê Thị Vân Anh, Phó GD NXBGD tại Hà Nội tham dự lễ Khai giảng năm học mới 2014 – 2015 của trường THCS Giảng Võ, Số 1 Trần Huy Liệu, Giảng Võ, Ba Đình

TRƯỜNG TRUNG HỌC CƠ SỞ NGUYỄN CHÍ ĐIỀU THÀNH PHỐ HUẾ

• Địa chỉ: 11 Đống Đa-TP Huế - ĐT: 054.3824223 • website: <http://thcs-ncdieu.tphue.thuathienhue.edu.vn>



**Thầy giáo Nguyễn Phương
Hiệu trưởng nhà trường**

Tên con đường Đống Đa – TP Huế, có một ngôi trường khang trang, xinh đẹp – Đó là trường THCS Nguyễn Chí Diệu thân yêu của chúng tôi.

Trường THCS Nguyễn Chí Diệu được thành lập năm 1979, trên cơ sở kế thừa truyền thống của trường Trung học kháng chiến Nguyễn Chí Diệu - ngôi trường đầu tiên của chính quyền Cách mạng - được thành lập vào năm 1949, theo Quyết định của Ủy ban kháng chiến hành chính Tỉnh Thừa Thiên.

Tổng số cán bộ, giáo viên của Trường là 94 người, trong đó Ban Giám hiệu: 3 người, giáo viên: 82 người, trình độ Đại học: 70 người, Thạc sĩ: 7 người. Chi bộ Đảng có 22 đảng viên, là chi bộ độc lập trực thuộc Đảng bộ Phường Phú Nhuận - Thành phố Huế. Công đoàn nhà trường có 8 tổ công đoàn với 94 đoàn viên. Đoàn Thanh niên cộng sản có 16 đoàn viên giáo viên.

Những năm tháng làm việc, học tập dưới mái trường là những ngày đẹp nhất của Thầy và trò trường THCS Nguyễn Chí Diệu. Ngôi trường như mái nhà thứ hai của các em học sinh. Cánh cổng trường hàng ngày vẫn mở rộng đón các em đến lớp, hàng cây, ghế đá, nơi các em đùa

vui, trò chuyện, tiếng trống trường đưa các em vào những giờ học đầy lí thú. Dưới mái trường, các em được các thầy cô dạy bảo truyền thụ những kiến thức, những kĩ năng sống để từng ngày... từng ngày... khôn lớn.

Mỗi năm học qua đi, thầy trò Trường THCS Nguyễn Chí Diệu lại bước vào một mùa gieo hạt mới. Kế tục xứng đáng và phát huy truyền thống tốt đẹp của trường trung học kháng chiến năm xưa, Trường THCS Nguyễn Chí Diệu đã đạt được những thành tích rất đáng tự hào: Nhiều năm liên trường được công nhận là tập thể Lao động Xuất sắc, Liên đội Thiếu niên Tiền phong của trường liên tục được công nhận là Liên đội mạnh cấp Trung ương. Các hoạt động đoàn thể khác của trường được đánh giá là một trong những đơn vị có phong trào và thành tích Xuất sắc. Trường đã có nhiều học sinh giỏi đạt học sinh giỏi cấp Thành phố, cấp Tỉnh và cấp Quốc gia.

- Năm học 2005 – 2006, trường được Nhà nước tặng thưởng Huân chương Lao động hạng Ba.

- Năm học 2007-2008, trường được tặng Cờ thi đua Xuất sắc của UBND Tỉnh.

- Năm học 2008-2009, trường được tặng Bằng khen của UBND Tỉnh.

- Năm học 2009-2010, trường được tặng Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ.

- Năm học 2010-2011, trường được tặng Cờ thi đua Xuất sắc của UBND Tỉnh và được tặng thưởng Huân chương Lao động hạng Nhì.

- Năm học 2011-2012, trường được tặng Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

- Năm học 2012-2013: trường được công nhận Tập thể Lao động Xuất sắc, được nhận Bằng khen của UBND Tỉnh Thừa Thiên - Huế.

Chất lượng giáo dục toàn diện, tỉ lệ học sinh khá giỏi vượt mặt bằng chung của thành phố. Đặc biệt số lượng các em học sinh lớp 9 mỗi năm thi đậu vào trường THPT chuyên Quốc Học đạt số lượng cao.

Vào năm học mới, thầy trò trường THCS Nguyễn Chí Diệu chúng tôi cùng gửi vào sắc thu trong trẻo, gửi vào tiếng trống trường rộn rã, lời hứa quyết tâm dạy tốt, học tốt; nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện, phấn đấu đưa trường ngày càng lớn mạnh, gặt hái được nhiều thành công hơn nữa trong sự nghiệp trồng người.



Hội đồng Giáo dục nhà trường



Tổ Toán



Một buổi ngoại khóa

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT10M4

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2014

Giá: 10.000 đồng
Mười nghìn đồng