TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

9 2014 Số 447

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 51
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Chào mừng năm học mới

UNIZONE 9580F2

Máy trợ giảng tốt nhất Hàn Quốc

Tặng thêm 12 tháng bảo hành!

(Duy nhất trong tháng 09/2014)

KẾT NỐI KHÔNG DÂY

PHÙ HỢP LỚP HỌC 30 - 100HS

NHỎ GỌN, THUẬN TIỆN

Công nghệ mới nhất

Công nghệ Bluethooth 2.0 kết nối micro với loa một cách ổn định và không bị lẫn sóng sang thiết bị khác.

Âm thanh thực

Được đánh giá là chiếc máy trợ giảng có âm thanh tốt nhất thị trường. UNIZONE 9580F2 phát ra âm thanh không khác gì giọng nói của người sử dụng.

Kích thước nhỏ gọn

Thiết kế nhỏ gọn như chiếc điện thoại di động. Các giáo viên sử dụng Unizone 9580F2 dễ dàng di chuyển hoặc mang đi lại qua các lớp học.

Chế độ bảo hành

Bảo hành chính hãng 12 tháng.
Tặng thêm 12 tháng bảo hành khi mua trong 09/2014.

MCRIO AUDIO TECHNOLOGY

CÔNG TY TNHH THIẾT BỊ GIẢI TRÍ MCRIO

Hotline: 0934. 683. 968

Địa chỉ: 132 Chùa Láng, HN | website: www.mcrio.vn | Điện thoại: 0462 82 82 88

HỆ PHƯƠNG TRÌNH NỬA ĐỐI XỨNG

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Đối với các bạn THCS thì phương trình (PT) và hệ phương trình (HPT) là phần kiến thức hết sức quan trọng. Vì lẽ đó một lần nữa chúng tôi gửi đến các bạn bài viết về một loại hệ phương trình mà đôi khi gặp trong các kì thi học sinh giỏi hay kì thi tuyển sinh vào THPT chuyên. Đó là ***hệ phương trình nửa đối xứng.***

Hệ phương trình nửa đối xứng (gồm hai phương trình hai ẩn) là hệ phương trình mà trong đó có một phương trình đối xứng và một phương trình không đối xứng. Để giải hệ này ta cần lưu ý đến tính đối xứng của ẩn.

• Nếu tính đối xứng không tham gia vào lời giải thì từ phương trình không đối xứng ta rút ẩn này theo ẩn kia và giải hệ bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số.

• Nếu tính đối xứng tham gia vào lời giải thì khi đó ta tìm cách đánh giá để so sánh hai ẩn.

Ta cùng theo dõi một số thí dụ minh hoạ:

Thí dụ 1. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 2x+x^2-y^2=3 & (1) \\ x^2+y^2=1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Cộng theo từng vế PT(1) và PT(2) ta được

$$2x^2+2x=4 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Với $x=-2$, thay vào PT(2) không thoả mãn.

Với $x=1$, thay vào PT(2) được $y=0$.

Vậy HPT đã cho có nghiệm là: $(x; y) = (1; 0)$.

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=3 & (1) \\ xy+x+y=x^2-2y^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 1, y \ge 1$ (*)

Ta nhận thấy nếu bình phương hai vế của PT(1) thì không thu được kết quả khả quan. Vì thế, rất tự nhiên ta xét PT(2). Ta có:

$$\text{PT}(2) \Leftrightarrow (x^2-y^2)-(x+y)-(xy+y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1)=0 \Leftrightarrow x=2y+1 \text{ (do (*))}.$$

Thay $x=2y+1$ vào PT(1), ta được

$$\sqrt{2y}+\sqrt{y-1}=3$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2y}-2\right)+\left(\sqrt{y-1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y-4}{\sqrt{2y}+2}+\frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left[\frac{2}{\sqrt{2y}+2}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right]=0$$

$\Leftrightarrow y=2$. Suy ra $x=5$ (thỏa mãn (*)).

Vậy HPT đã cho có nghiệm là: $(x; y) = (5; 2)$.

Thí dụ 3. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^3+y^3+7(x+y)xy=8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} & (1) \\ \sqrt{y}-\sqrt{2x-3}=6-2x & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge \frac{3}{2}, y \ge 0$ (*)

PT(1) là PT đối xứng của hai ẩn x và y. Ở thí dụ này, ta không thể biến đổi PT(2) như thí dụ trên. Với điều kiện (*), ta tìm cách đánh giá PT(1) bằng BĐT Cauchy.

PT(1) tương đương với

$(x+y)(x^2+y^2+6xy)=8\sqrt{xy}\sqrt{2xy(x^2+y^2)}$.

Theo BĐT Cauchy, ta có:

$0<\sqrt{2xy(x^2+y^2)}\le\dfrac{2xy+x^2+y^2}{2}=\dfrac{(x+y)^2}{2}$;

x^2+y^2+6xy

$=4xy+(x+y)^2\ge 2\sqrt{4xy(x+y)^2}$

$=4(x+y)\sqrt{xy}$.

Suy ra $\dfrac{(x+y)^2}{2}(x^2+y^2+6xy)$

$\ge\sqrt{2xy(x^2+y^2)}.4(x+y)\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow(x+y)(x^2+y^2+6xy)\ge 8\sqrt{xy}\sqrt{2xy(x^2+y^2)}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

HPT đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ \sqrt{2x-3}-\sqrt{y}=2x-6\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ (x-3)\left[\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2\right]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$

(do $x\ge\dfrac{3}{2}\Rightarrow\sqrt{x}\ge\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}>\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}>\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2<0$).

Vậy HPT đã cho có nghiệm là: $(x;y)=(3;3)$.

Thí dụ 4. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}x^3+y^3=xy\sqrt{2(x^2+y^2)} & (1)\\ 4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9(y-1)\sqrt{2x-2} & (2)\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1$. Từ PT(2) suy ra $y\ge 1$.

Ta có $0<\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}$; $0<\sqrt{2xy(x^2+y^2)}$

$\le\dfrac{2xy+x^2+y^2}{2}\le x^2+y^2\le 2(x^2+y^2-xy)$.

Suy ra $xy\sqrt{2(x^2+y^2)}\le(x+y)(x^2+y^2-xy)$.

Do đó PT(1) tương đương với

$(x+y)(x^2+y^2-xy)=xy\sqrt{2(x^2+y^2)}\Leftrightarrow x=y$.

Từ đó HPT đã cho tương đương với

$\begin{cases}x=y\\ 2\sqrt{x+1+2\sqrt{x^2-1}}+x-1=9(x-1)\sqrt{x-1}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ 2\sqrt{x+1}=(9x-11)\sqrt{x-1}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\ge\dfrac{11}{9}\\ 81x^3-279x^2+315x-125=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\ge\dfrac{11}{9}\\ (3x-5)(27x^2-48x+25)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\ y=\dfrac{5}{3}\end{cases}$

Vậy HPT đã cho có nghiệm là: $(x;y)=\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} & (1)\\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-2y}=\dfrac{3(\sqrt{2}+1)}{2} & (2)\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x,y\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ (*)

Với điều kiện (*) thì $x^2\le\dfrac{1}{4}$, $y^2\le\dfrac{1}{4}$, suy ra:

$\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\ge 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}>\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2xy<1$. Mặt khác,

với mọi $a,b\in\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ thì $ab<1$ (**) và ta

luôn có $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$. (3)

Thật vậy, BĐT(3) tương đương với

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\right)^2\le\dfrac{4}{1+ab}$

$\Leftrightarrow\dfrac{2}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}-\dfrac{4}{1+ab}\le 0$.

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\ge 1+ab$

$\Rightarrow\dfrac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}\le\dfrac{2}{1+ab}$ (4)

Ta lại có $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}-\dfrac{2}{1+ab}$

$=\dfrac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)}\le 0$ (5), theo ĐK (**).

Từ BĐT(4) và BĐT(5) ta suy ra BĐT(3).

Với $a=\sqrt{2}x,\ b=\sqrt{2}y$, áp dụng BĐT(3) ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Do đó PT(1) $\Leftrightarrow x=y$, thay vào PT(2) ta có:

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-2x}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2\sqrt{1-2x}=\sqrt{2}+1.$$

Đặt $u=\sqrt{x},\ v=\sqrt{1-2x}\ (u,v\ge 0)$ ta được HPT

$$\begin{cases}2u+2v=\sqrt{2}+1\\ 2u^2+v^2=1.\end{cases}$$

Bằng phương pháp thế (rút u theo v ở PT đầu, thay vào PT sau, giải PT bậc hai theo v, ...) ta tìm được nghiệm $(u;v)$ của HPT trên là:

$$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{6};\frac{\sqrt{2}+4}{6}\right).$$

Từ đó suy ra nghiệm $(x;y)$ của HPT đã cho là:

$$\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right),\left(\frac{9-4\sqrt{2}}{36};\frac{9-4\sqrt{2}}{36}\right).$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{1}{2}\\ 2x^3+6xy^2=1\end{cases}$

2. $\begin{cases}(x+y)^2y=2\\ x^3+y^3=1\end{cases}$

3. $\begin{cases}x^2+y=y^2+x\\ 2y=x^3-1\end{cases}$

(Đề thi vào THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước năm học 2010 – 2011)

4. $\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1\\ \sqrt{x+y}=x^2-y\end{cases}$

(Đề thi vào THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm học 2011 – 2012)

5. $\begin{cases}x^3+y^3=91\\ 4x^2+3y^2=16x+9y\end{cases}$

6. $\begin{cases}3x^3-y^3=\dfrac{1}{x+y}\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

7. $\begin{cases}x^2+y^2=2xy+1\\ x^5+y^3+1=0\end{cases}$

(Đề thi Học sinh giỏi lớp 12 TP. Hà Nội 2011)

8. $\begin{cases}x-\dfrac{1}{x^3}=y-\dfrac{1}{y^3}\\ (x-4y)(2x-y+4)=-36\end{cases}$

9. $\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16\\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}=\sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y}{2}}\end{cases}$

(Đề thi chọn Đội tuyển tỉnh Nghệ An 2012)

10. $\begin{cases}8(x^2+y^2)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13\\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1\end{cases}$

(Đề thi Học sinh giỏi lớp 12 tỉnh Thái Nguyên 2011)

11. $\begin{cases}(2x^2-3x+4)(2y^2-3y+4)=18\\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0\end{cases}$

(Đề thi chọn Đội tuyển chuyên ĐHSP Hà Nội 2010)

12. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y\\ x\sqrt{2xy+5x+3}=4xy-5x-3\end{cases}$

(T6/407 *TH&TT*)

13. $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\\ y+\dfrac{y}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{35}{12}=0\end{cases}$

14. $\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\ 2(x^2+y^2)+\dfrac{1}{2\sqrt{(1+x)(1+y)}}=1+\sqrt{x}(x+y)\end{cases}$

(Đề thi chọn Đội tuyển tỉnh Phú Thọ 2011 – 2012)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

NĂM HỌC 2014 - 2015

VÒNG 1 (*120 phút*)

Câu 1. Cho biểu thức:

$$C=\frac{a}{a-16}-\frac{2}{\sqrt{a}-4}-\frac{2}{\sqrt{a}+4}$$

1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C.

2) Tính giá trị của biểu thức C khi $a=9-4\sqrt{5}$.

Câu 2. Cho hệ phương trình (m là tham số):

$$\begin{cases}(m-1)x+y=2\\ mx+y=m+1\end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

2) Chứng minh rằng với mọi m, hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thoả mãn: $2x+y\le 3$.

Câu 3. 1) Trong hệ tọa độ Oxy, tìm m để đường thẳng (d): $y=mx-m+2$ cắt parabol (P): $y=2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3\sqrt{x+2y}=4-x-2y\\ \sqrt[3]{2x+6}+\sqrt{2y}=2\end{cases}$.

Câu 4. Cho đường tròn tâm O đường kính BC và một điểm A bất kì trên đường tròn (A khác B và C). Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Đường tròn tâm I đường kính AH cắt các dây cung AB, AC của (O) tương ứng tại D, E.

1) Chứng minh: $\widehat{DHE}=90^\circ$ và $AB.AD=AC.AE$.

2) Các tiếp tuyến của đường tròn (I) tại D và E cắt BC tương ứng tại G và F. Tính số đo $\widehat{GIF}$.

3) Xác định vị trí điểm A trên đường tròn (O) để tứ giác $DEFG$ có diện tích lớn nhất.

Câu 4. Cho ba số thực dương x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S=\frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}.$$

VÒNG 2 (*150 phút*)

Câu 1. Tính giá trị biểu thức:

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}.$$

Câu 2. 1) Giải phương trình:

$$(x+1)\sqrt{2x^2-2x}=2x^2-3x-2.$$

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(xy-2y^2)(x+2)=-6\\ x(y+1)=-1\end{cases}.$$

Câu 3. 1) Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

2) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3+y^3-3xy-3=0.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC; I là giao điểm của BO với EF; M là điểm di động trên đoạn CE.

1) Tính số đo góc $\widehat{BIF}$.

2) Gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng nếu $AM=AB$ thì tứ giác $ABHI$ là tứ giác nội tiếp.

3) Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$ của (O); P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để độ dài PQ lớn nhất.

Câu 5. Trên bảng, cho 2014 số tự nhiên từ 1 đến 2014. Thực hiện liên tiếp phép biến đổi sau: Mỗi lần biến đổi ta xóa đi hai số bất kỳ a, b có trên bảng rồi viết thêm số $a+b-\frac{1}{2}ab$ vào bảng. Khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số thì dừng lại. Tìm số còn lại đó.

PHẠM NGỌC QUANG
(*Hà Nội*) ***giới thiệu***

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI NĂM HỌC 2014 - 2015

(Đề thi đăng trên TH&TT số 446, tháng 8 năm 2014)

VÒNG 1

Câu 1. 1) Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.

Ta có $(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2 = 2+2\sqrt{1-x^2}$.

Do đó, PT đã cho tương đương với

$(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} = 2$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \in [-1, 1]$.

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 0$.

2) Từ HPT ra có $4(x^2-xy+y^2) = x^2+xy+2y^2$

$\Leftrightarrow 3x^2-5xy+2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(3x-2y) = 0$.

• Với $x-y=0$ hay $x=y$, thay vào PT thứ nhất của HPT ta có $x^2-x^2+x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

• Với $3x-2y=0$ hay $y = \frac{3}{2}x$, thay vào PT thứ nhất của HPT ta có

$$x^2 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow y = \pm\frac{3}{\sqrt{7}}.$$

Vậy HPT có bốn nghiệm $(x; y)$ là:

$$(1; 1),\ (-1; -1),\ \left(\frac{2}{\sqrt{7}}; \frac{3}{\sqrt{7}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{7}}; -\frac{3}{\sqrt{7}}\right).$$

Câu 2. 1) Đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$.

Từ giả thiết ta có $ab + bc + ca = 1$. Do đó, đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{2b}{1+b^2}+\frac{3c}{1+c^2} = \frac{5bc+4ca+3ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{2b}{(b+c)(b+a)}+\frac{3c}{(c+a)(c+b)} = \frac{5bc+4ca+3ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow a(b+c)+2b(c+a)+3c(a+b) = 5bc+4ca+3ab$$

luôn đúng. Vậy đẳng thức được chứng minh.

2) Đặt $u = x + y$, $v = xy$, PT đã cho trở thành:

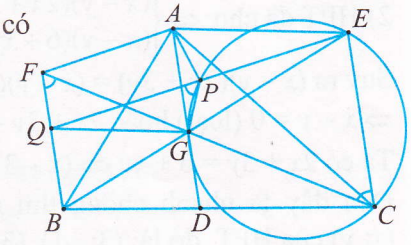
$$v^2u+u = 3+v \Leftrightarrow u = \frac{v+3}{v^2+1}.$$

Do $x; y \in \mathbb{Z}^+$ nên $u; v \in \mathbb{Z}^+$, suy ra $v^2 + 1$ là ước của $v + 3 \Rightarrow v^2 + 1$ là ước của $v^2 - 9 \Rightarrow v^2 + 1$ là ước của $v^2 + 1 - 10 \Rightarrow v^2 + 1$ là ước của 10. Lần lượt xét các ước nguyên dương của 10 để xác định v, u rồi tìm nghiệm nguyên dương x, y tương ứng, thử lại với PT ban đầu.

PT có ba nghiệm nguyên dương $(x; y)$ là:

$$(0; 3),\ (3; 0),\ (1; 1).$$

Câu 3. 1) Ta có ΔABF và ΔACE đồng dạng do chúng lần lượt cân tại F, E, và $\widehat{FBA} = \widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{ECA}$.



2) Gọi G là giao điểm của BE và CF. Ta có: $\frac{GF}{GC} = \frac{BF}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow DG // BF$. Mặt khác, $DA // BF$ suy ra A, D, G thẳng hàng, suy ra đpcm.

3) Ta có: $\widehat{BQG} = \widehat{QGA} = \widehat{GAE} = \widehat{GAC} + \widehat{CAE} = \widehat{GAB} + \widehat{BAF} = \widehat{GAF}$ suy ra $AGQF$ là tứ giác nội tiếp. Mặt khác, $\widehat{QPG} = \widehat{GCE} = \widehat{GFQ}$ nên $QGPF$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra đpcm.

Câu 4. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$a^4b^2 + \frac{1}{3}abc^2 + \frac{1}{9}ca \ge a^2bc;$$

$$b^4c^2 + \frac{1}{3}bca^2 + \frac{1}{9}ab \ge b^2ca;$$

$$c^4a^2 + \frac{1}{3}cab^2 + \frac{1}{9}bc \ge c^2ab.$$

Cộng theo từng vế của ba BĐT trên, thay $ab + bc + ca = 1$ vào và rút gọn ta được:

$$\frac{2}{3}abc(a+b+c) \le a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + \frac{1}{9}. \quad (1)$$

Ta có $abc(a + b + c) = ab.ca + bc.ab + ca.bc$

$$\le \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}abc(a+b+c) \le \frac{4}{9}. \quad (2)$$

Cộng theo từng vế (1) và (2) ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

VÒNG 2

Câu 1. 1) Với mọi $a \neq \pm b$ ta có:

$$\frac{b}{a+b} = \frac{b}{a-b} - \frac{2b^2}{a^2-b^2}.$$

Do đó đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{y}{x-y} - \frac{2y^2}{x^2-y^2} + 2\left(\frac{y^2}{x^2-y^2} - \frac{2y^4}{x^4-y^4}\right) + 4\left(\frac{y^4}{x^4-y^4} - \frac{2y^8}{x^8-y^8}\right) + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 4.$$

$\Leftrightarrow \frac{y}{x-y} = 4 \Leftrightarrow 5y = 4x$ (đpcm).

2) HPT đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(2x+3y)=12\\(x-y)(6+xy)=12\end{cases}$.

Suy ra $(x-y)(2x+3y) = (x-y)(6+xy)$

$\Rightarrow x - y = 0$ (loại) hoặc $2x + 3y = 6 + xy$.

Ta có $2x + 3y = 6 + xy \Leftrightarrow (x-3)(y-2) = 0$.

Đến đây ta nhanh chóng tìm ra các nghiệm $(x; y)$ của HPT, đó là: $(3; -1)$, $(3; 2)$, $(-4; 2)$.

Câu 2. 1) Ta có $x \geq 2$ và $y \geq 2$.

Suy ra $-4xy + 1 < -7x + 7y < 4xy + 1$. (*)

Thật vậy: $-4xy + 1 < -7x + 7y \Leftrightarrow 1 + 7x < 4xy + 7y \Leftrightarrow 1 + 7x < y(4x + 7)$ là BĐT đúng, do $1 + 7x < 2(4x + 7) < y(4x + 7)$. Tương tự, $-7x + 7y < 4xy + 1$ cũng là BĐT đúng.

Tiếp tục biến đổi, ta có (*) tương đương với $4x^2y^2 - 4xy + 1 < 4x^2y^2 - 7x + 7y < 4x^2y^2 + 4xy + 1$

$\Leftrightarrow (2xy-1)^2 < 4x^2y^2 - 7x + 7y < (2xy+1)^2$.

Mặt khác, $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương và $1 < 2xy - 1 < 2xy + 1$ nên

$4x^2y^2 - 7x + 7y = (2xy)^2 \Leftrightarrow x = y$ (đpcm).

2) Ta có $x^3 + y^3 + xy = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow (x+y-1)(x^2-xy+y^2) = 0$

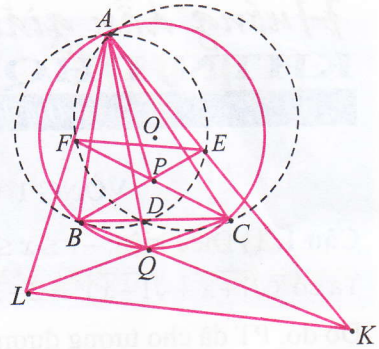
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y-1=0\\x^2-xy+y^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=1\\x=y=0\end{array}\right.$.

- Với $x = y = 0$ thì $P = \frac{5}{2}$;
- Với $x + y = 1$ thì $x; y \in [0, 1]$, suy ra:

$P \leq \frac{1+\sqrt{1}}{2+\sqrt{0}} + \frac{2+\sqrt{1}}{1+\sqrt{0}} = 4$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$ và $y = 0$); $P \geq \frac{1+\sqrt{0}}{2+\sqrt{1}} + \frac{2+\sqrt{0}}{1+\sqrt{1}} = \frac{4}{3}$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ và $y = 1$).

Vậy $P_{max} = 4$; $P_{min} = \frac{4}{3}$.

Câu 3.



1) Ta có $\widehat{EAF}$

$= \widehat{EAD} + \widehat{DAF}$

$= \widehat{EBD} + \widehat{BCF}$

$= 180^o - \widehat{BPC}$

$= 180^o - \widehat{EPF}$

$\Rightarrow A, E, P, F$ cùng thuộc một đường tròn.

2) Từ kết quả trên, suy ra $\widehat{LFC} = \widehat{BEA}$. Lại có $\widehat{LCF} = \widehat{LCB} + \widehat{BCF} = \widehat{QAB} + \widehat{EBC} = \widehat{QAB} + \widehat{DAE}$ $= \widehat{BAE}$. Suy ra $\Delta ABE \backsim \Delta CLF$ (đpcm).

3) $\Delta ABE \backsim \Delta CLF \Rightarrow AE.LF = CF.BE$. Tương tự, ta chứng minh được $AF.KE = BE.CF$. Suy ra

$AE.LF = AF.KE \Rightarrow \frac{LF}{AF} = \frac{KE}{AE} \Rightarrow EF // KL$.

Từ đó: $\widehat{QLK} = \widehat{ALK} - \widehat{ALQ} = \widehat{AFE} - \widehat{ABE}$

$= \widehat{APE} - \widehat{ABE} = \widehat{PAB}$.

Tương tự, $\widehat{QKL} = \widehat{PAC}$.

Suy ra $\widehat{QKL} + \widehat{PAB} = \widehat{QLK} + \widehat{PAC}$ (đpcm).

Câu 4. Theo giả thiết, m tập con thuộc dãy là phân biệt. Vì A có 31 phần tử nên số tập con có đúng 2 phần tử của A là $\frac{31.30}{2}$.

Kí hiệu a_k là số các tập hợp có đúng k phần tử $(2 \leq k \leq 31)$, nằm trong dãy đã cho. Suy ra $m = a_2 + a_3 + ... + a_{31}$.

Xét một tập hợp có k phần tử thì số các tập hợp con có 2 phần tử của tập hợp đó là $\frac{k(k-1)}{2}$, suy ra a_k tập này sẽ có $a_k.\frac{k(k-1)}{2}$ tập con 2 phần tử. Theo giả thiết, 2 phần tử bất kì của A không thể đồng thời thuộc 2 tập hợp cùng có k phần tử của dãy, suy ra các tập hợp con 2 phần tử nói trên là phân biệt. Từ đó:

$$a_k.\frac{k(k-1)}{2} \leq \frac{31.30}{2} \Rightarrow a_k \leq 31.30.\frac{1}{k(k-1)}$$

$$\Rightarrow a_2 + a_3 + ... + a_{31} \leq 31.30.\left(\frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + ... + \frac{1}{31.30}\right)$$

$$\Rightarrow m \leq 31.30.\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{30} - \frac{1}{31}\right) = 900.$$

Vậy $m \leq 900$ (đpcm).

NGUYỄN VŨ LƯƠNG & PHẠM VĂN HÙNG
(GV THPT Chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội) giới thiệu

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ tính đơn điệu của hàm số

LÊ HỒ QUÝ
(GV THPT Lê Lợi, Kon Tum)

Trong những năm gần đây, mỗi đề thi Đại học thường có một vài câu về nghiệm của phương trình (PT), bất phương trình (BPT), hệ phương trình; tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số, chứng minh bất đẳng thức (BĐT), ... mà công cụ hữu hiệu để giải chúng là sử dụng tính đơn điệu của hàm số (HS). Nhằm giúp các bạn học sinh làm tốt phần này, bài viết xin giới thiệu một số dạng toán trên và phương pháp giải chúng.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Kí hiệu K là một khoảng hoặc một đoạn hoặc nửa khoảng.

Định lí. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K. Khi đó

- $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của $K \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên K.
- $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của $K \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên K.

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

1. Tìm điều kiện của tham số để hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên một miền cho trước

Để giải bài toán tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên một miền D nào đó, ta thường làm như sau:

- Tính $f'(x)$.
- Áp dụng định lí về điều kiện đủ để HS đơn điệu.
- Biến đổi BPT $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) về dạng $g(x) \geq h(m)$ hoặc $g(x) \leq h(m)$.
- Lập bảng biến thiên của HS $g(x)$.
- Tìm $\max\limits_{D} g(x)$; $\min\limits_{D} g(x)$.
- Từ bảng biến thiên suy ra kết quả bài toán.

★**Thí dụ 1.** *Cho hàm số*

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m-2)x - \frac{1}{3}$$

(m là tham số thực). Tìm m để

a) *Hàm số đồng biến trên khoảng* $(1; 3)$.

b) *Hàm số đồng biến trên một đoạn có độ dài không nhỏ hơn* 4.

Lời giải. Ta có $y' = -x^2 + 2mx + m - 2$.

a) HS đồng biến trên $(1; 3)$

$\Leftrightarrow y' = -x^2 + 2mx + m - 2 \geq 0, \forall x \in (1; 3)$

$\Leftrightarrow (2x+1)m \geq x^2 + 2, \forall x \in (1; 3)$

$\Leftrightarrow m \geq \dfrac{x^2+2}{2x+1}, \forall x \in (1; 3)$.

Xét HS $g(x) = \dfrac{x^2+2}{2x+1}$ trên $[1; 3]$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2} > 0, \forall x \in (1; 3)$.

Mặt khác, dễ thấy $g(x)$ liên tục trên $[1; 3]$.

Do đó $g(x)$ đồng biến trên $[1; 3]$.

Vậy $m \geq g(x), \forall x \in (1; 3)$

$\Leftrightarrow m \geq \max\limits_{[1;3]} g(x) = g(3) = \dfrac{11}{7}$.

b) Tam thức y' có biệt thức $\Delta' = m^2 + m - 2$.

- Nếu $\Delta' \leq 0$ thì $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, HS luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (loại trường hợp này).
- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -2$ hoặc $m > 1$ thì $y' \geq 0$ $\Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$, HS đồng biến trên $[x_1; x_2]$.

Để HS đồng biến trên đoạn có độ dài không nhỏ hơn 4 thì $|x_1 - x_2| \geq 4 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 16$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \geq 16.$ (1)

Theo định lí Viète, ta có

$$x_1 + x_2 = 2m;\ x_1x_2 = 2 - m.$$

Thay vào (1) và rút gọn, ta được

$$m^2 + m - 6 \ge 0 \Leftrightarrow m \le -3 \text{ hoặc } m \ge 2$$

(thỏa mãn ĐK). ❑

Lưu ý. • Cho HS $y = f(x)$ liên tục trên tập D. Khi đó BPT $f(x) \le m$ nghiệm đúng với mọi $x \in D \Leftrightarrow \max\limits_D f(x) \le m$.

• Khi gặp bài toán tìm điều kiện của tham số để HS $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a < 0)$ đồng biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn hoặc bằng k (không nhỏ hơn k) ta thường làm như sau:

Tính y'; khi đó yêu cầu của bài toán tương đương với PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(\Delta > 0)$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| \ge k$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \ge k^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \ge k^2.$$

Sử dụng định lí Viète suy ra kết quả.

★Thí dụ 2. *Tìm m để hàm số*

$$y = -x^3 + 3x^2 + mx + 4$$

nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $y' = -3x^2 + 6x + m$.

HS nghịch biến trên $(0; +\infty)$

$\Leftrightarrow y' = -3x^2 + 6x + m \le 0,\ \forall x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \le 3x^2 - 6x,\ \forall x \in (0; +\infty)$.

Xét HS $g(x) = 3x^2 - 6x$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = 6x - 6$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có

$$m \le g(x),\ \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \le \min_{(0;+\infty)} g(x) = g(1) = -3.\ ❑$$

Lưu ý. Cho HS $y = f(x)$ liên tục trên tập D. Khi đó BPT $f(x) \ge m$ nghiệm đúng với mọi $x \in D \Leftrightarrow \min\limits_D f(x) \ge m$.

★Thí dụ 3. *Tìm m để hàm số* $y = \dfrac{mx - 4}{m - x}$ *nghịch biến trên khoảng* $(-3; 1)$.

Lời giải. Ta có $y' = \dfrac{m^2 - 4}{(m - x)^2}$.

HS nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$

$$\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-3;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ m \notin (-3;1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \le -3 \text{ hoặc } m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m < 2.\ ❑$$

Lưu ý. Cho HS $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \ne 0;\ ad - bc \ne 0)$.

Ta có $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

• HS đồng biến trên $(\alpha; \beta)$

$\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (\alpha; \beta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\dfrac{d}{c} \le \alpha \text{ hoặc } -\dfrac{d}{c} \ge \beta. \end{cases}$$

• HS nghịch biến trên $(\alpha; \beta)$

$\Leftrightarrow y' < 0,\ \forall x \in (\alpha; \beta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \le \alpha \text{ hoặc } -\dfrac{d}{c} \ge \beta. \end{cases}$$

2. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình

a) Đối với các bài toán về nghiệm của PT, BPT mà tham số độc lập với ẩn hoặc biến đổi PT, BPT, đặt ẩn phụ để được điều đó thì ta có thể sử dụng tính đơn điệu của HS để giải. Lược đồ chung của phương pháp này như sau:

• Biến đổi PT (BPT) đã cho về một trong các dạng $f(x) = g(m)$; $f(x) \ge g(m)$; $f(x) \le g(m)$.

• Tìm tập xác định D của HS $f(x)$.

• Lập bảng biến thiên của HS $f(x)$.

• Tìm $\max\limits_{x\in D} f(x)$; $\min\limits_{x\in D} f(x)$.

• Từ bảng biến thiên, suy ra kết quả bài toán.

★Thí dụ 4. *Tìm m để phương trình $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$ có nghiệm thực.*

Lời giải. ĐK: $x\ge 0$.

Xét HS $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}$ trên $[0;+\infty)$, ta có:

$$f'(x)=\frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0,\ \forall x>0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x^2+1}+x)}=0.$$

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

Theo bảng biến thiên, PT $f(x)=m$ có nghiệm thực trên $[0;+\infty)\Leftrightarrow 0<m\le 1$. ❑

Lưu ý. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập D. Khi đó:

Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm $x\in D$ $\Leftrightarrow \min\limits_D f(x)\le m\le \max\limits_D f(x)$.

★Thí dụ 5. *Tìm m để bất phương trình $m(\sqrt{x^2-2x+2}+1)+x(2-x)\le 0$ có nghiệm $x\in[0;1+\sqrt{3}]$.*

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}$.

Ta có $t'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$; $t'=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$1+\sqrt{3}$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

Do đó $1\le t\le 2$. Suy ra $t^2=x^2-2x+2$ $\Rightarrow x(2-x)=-(t^2-2)$. Khi đó BPT đã cho trở thành $m(t+1)-(t^2-2)\le 0\Leftrightarrow m\le\dfrac{t^2-2}{t+1}$. (2)

Xét HS $f(t)=\dfrac{t^2-2}{t+1}$ trên $[1;2]$. Ta có $f'(t)=\dfrac{(t+1)^2+1}{(t+1)^2}>0,\ \forall t\in[1;2]\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[1;2]$. BPT đã cho có nghiệm $x\in[0;1+\sqrt{3}]\Leftrightarrow$ BPT (2) có nghiệm $t\in[1;2]$ $\Leftrightarrow m\le\max\limits_{[1;2]} f(t)=f(2)=\dfrac{2}{3}$. ❑

Lưu ý. • Trong bài toán giải và biện luận PT (BPT) có chứa tham số, khi đặt ẩn phụ $t=g(x)$ thì ta phải tìm điều kiện của ẩn phụ đó bằng cách tìm tập giá trị của HS $g(x)$.

• Cho HS $y=f(x)$ liên tục trên tập D. Khi đó:

- BPT $f(x)\ge m$ có nghiệm $x\in D$ $\Leftrightarrow \max\limits_D f(x)\ge m$.

- BPT $f(x)\le m$ có nghiệm $x\in D$ $\Leftrightarrow \min\limits_D f(x)\le m$.

b) Khi gặp hệ PT dạng $\begin{cases} f(x)=f(y)\\ g(x,y)=0\end{cases}$

Ta có thể tìm lời giải theo hai hướng sau:

Hướng 1. Biến đổi PT thứ nhất về dạng

$$f(x)-f(y)=0,$$

sau đó tìm cách đưa về PT tích.

Hướng 2. Xét hàm số $z=f(t)$ (thường là hàm số liên tục trên tập xác định của nó).

- Nếu hàm số $z=f(t)$ đơn điệu thì từ PT thứ nhất ta suy ra $x=y$. Lúc đó bài toán quy về giải hoặc biện luận PT thứ hai theo ẩn x.

- Nếu hàm số $z=f(t)$ có một cực trị tại $t=t_0$ thì nó thay đổi chiều biến thiên một lần khi qua t_0. Từ PT thứ nhất suy ra $x=y$ hoặc x,y nằm về hai phía của t_0.

★Thí dụ 6. (Khối A - 2013) *Giải hệ phương trình* $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0.\end{cases}$

Lời giải. ĐK: $x \geq 1$.

PT thứ hai của hệ tương đương với

$$(x+y-1)^2 = 4y \Rightarrow y \geq 0. \quad (3)$$

Với ĐK(3), PT thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{(y^4+1)+1}+\sqrt[4]{(y^4+1)-1}. \quad (4)$$

Xét HS $f(t)=\sqrt{t+1}+\sqrt[4]{t-1}$ trên $[1;+\infty)$, ta có:

$$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{(t-1)^3}}>0, \forall t>1$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Từ (4) ta có $f(x)=f(y^4+1) \Leftrightarrow x=y^4+1$.

Thay vào (3), ta được

$(y^4+y)^2=4y \Leftrightarrow y(y^7+2y^4+y-4)=0$.

- Với $y=0$, ta có $x=1$.
- Với $y^7+2y^4+y=4$. (5)

xét HS $g(y)=y^7+2y^4+y$ trên $[0;+\infty)$, ta có $g'(y)=7y^6+8y^3+1>0, \forall y \geq 0 \Rightarrow g(y)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Mặt khác, $g(1)=4$ nên PT(5) có nghiệm duy nhất $y=1 \Rightarrow x=2$. Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $(1;0)$ và $(2;1)$.

Lưu ý. Cho HS $y=f(x)$ đơn điệu và liên tục trên tập D. Khi đó:

- Nếu PT $f(x)=m$ (m là hằng số) có nghiệm trên D thì PT đó có nghiệm duy nhất trên D.
- $f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v, \forall u,v \in D$.

3. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh bất đẳng thức

Để sử dụng phương pháp này, điều quan trọng là tương ứng với mỗi BĐT cần chứng minh, ta cần xây dựng một HS, rồi nghiên cứu tính đơn điệu của nó trên các đoạn thích hợp.

★**Thí dụ 7.** *Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z \leq \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:* $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+x+y+z \geq \frac{27}{2}$.

Lời giải. Gọi P là vế trái của BĐT cần chứng minh. Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$P \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(xyz)^2}}+\sqrt[3]{xyz}.$$

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz}$, ta có: $0<t \leq \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow t \in \left(0;\frac{1}{2}\right]$ và $P \geq \frac{3}{t^2}+3t$.

Xét HS $f(t)=\frac{3}{t^2}+3t, \forall t \in \left(0;\frac{1}{2}\right]$. Ta có

$f'(t)=3-\frac{6}{t^3} \leq 3-6.2^3<0, \forall t \in \left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Do đó, với mọi $t \in \left(0;\frac{1}{2}\right]$ ta có:

$$f(t)=\frac{3}{t^2}+3t \geq f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{2}.$$

Do đó $P \geq \frac{27}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$. ❑

BÀI TẬP

1. (Khối A - 2013) Tìm m để hàm số

$$y=-x^3+3x^2+3mx-1$$

nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$m(\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x^2-4})-\sqrt{x+2}=2\sqrt[4]{x^2-4}.$$

3. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm với mọi x: $m\sqrt{2x^2+9}<x+m$.

4. (Khối A - 2010) Giải hệ phương trình

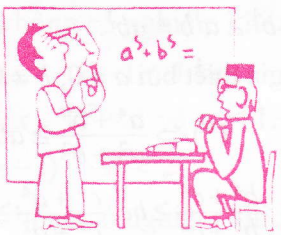
$$\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7.\end{cases}$$

5. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=c^3$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2-c^2>6(c-a)(c-b).$$

6. (Khối A - 2011) Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}.$$



TẠO HỨNG THÚ HỌC TOÁN CHO HỌC SINH THÔNG QUA CÁC BÀI TOÁN TRONG SÁCH GIÁO KHOA

LÊ QUANG HÀO
(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang)

Trong giảng dạy, việc phát huy tính tích cực của học sinh là điều quan trọng nhất của nội dung đổi mới phương pháp. Để làm được điều này mỗi giáo viên chúng ta cần đầu tư thời gian, luôn tìm tòi và phát hiện những vấn đề mới lạ từ đó hướng học sinh đến với chân trời rộng mở của Toán học, khơi dậy lòng đam mê Toán học ở các em. Trong quá trình dạy học tôi thấy có những bài tập nhìn qua thấy rất đơn giản, nhưng nếu chúng ta chịu khó tìm hiểu thì sẽ khám phá được nhiều điều thú vị từ những bài toán đó. Trong bài viết này tôi xin trao đổi cùng đồng nghiệp về hai bài toán bất đẳng thức (BĐT) trong Sách Giáo khoa (SGK) lớp 10 chương trình Nâng cao.

I. HAI BÀI TOÁN GỐC

Bài 6 *(trang 110, SGK Toán 10 nâng cao).*
Chứng minh rằng nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$.

Lời giải

Thật vậy, BĐT trên tương đương với

$$(a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$

$\Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0$ là BĐT đúng, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài 7b *(trang 110, SGK Toán 10 nâng cao).*
Chứng minh rằng với hai số thực a, b tùy ý ta có $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$.

(Chứng minh tương tự ***Bài 6***)

II. CÁC HƯỚNG KHAI THÁC

1. Hướng khai thác tổng quát hóa

Theo hướng này, ta có thể tổng quát ***Bài 6*** và ***Bài 7b*** như sau:

Bài 6.1. *Chứng minh rằng nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a^{2n+1} + b^{2n+1} \geq a^{2n}b + ab^{2n}$ với n là số nguyên dương.*

Lời giải

Thật vậy BĐT trên tương đương với $(a^{2n} - b^{2n})(a - b) \geq 0$, là BĐT đúng, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài 7.1. *Chứng minh rằng với hai số thực a, b tùy ý, ta có $a^{2n} + b^{2n} \geq a^{2n-1}b + ab^{2n-1}$ với n là số nguyên dương.*

(Chứng minh tương tự ***Bài 6.1***)

Từ kết quả trên, tôi lưu ý học sinh khi giải một bài toán có thể chú ý đến các trường hợp riêng hoặc khả năng tổng quát hóa bài toán đó.

2. Hướng khai thác mức độ nâng cao

Với $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, từ *Bài* 6 ta có

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b, \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{b} \geq c + b, \frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + c.$$

Cộng theo từng vế của các BĐT này ta đề xuất được bài toán sau.

Bài 6.2. *Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2+c^2}{b} + \frac{c^2+b^2}{a} + \frac{b^2+a^2}{c} \geq 2(a+b+c).$$

Tiếp tục biến đổi, ta có

$$\frac{a^2+c^2}{b} + \frac{c^2+b^2}{a} + \frac{b^2+a^2}{c} \geq 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + b^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) + c^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a^2.\frac{b+c}{bc} + b^2.\frac{c+a}{ca} + c^2.\frac{a+b}{ab} \geq 2(a+b+c).$$

Với $a+b+c=1$, BĐT trên tương đương với

$$a^2.\frac{1-a}{bc}+b^2.\frac{1-b}{ca}+c^2.\frac{1-c}{ab}\ge 2$$

$$\Leftrightarrow a^3(1-a)+b^3(1-b)+c^3(1-c)\ge 2abc.$$

Ta tiếp tục đề xuất được bài toán sau.

Bài 6.3. *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3\ge a^4+b^4+c^4+2abc$.*

Đặt $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$, $c=\sqrt[3]{z}$, ta lại có thêm bài toán sau.

Bài 6.4. *Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{x^2-x}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}+$$

$$+\frac{y^2-y}{\sqrt[3]{y^2}+2\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{x}}+\frac{z^2-z}{\sqrt[3]{z^2}+2\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$$

$$+2\sqrt[3]{xyz}.$$

Nếu coi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì từ ***Bài* 6.2**, kết hợp với định lí sin ta có bài toán sau.

Bài 6.5. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin C}+\frac{\sin^2 B+\sin^2 C}{\sin A}+\frac{\sin^2 C+\sin^2 A}{\sin B}$$

$$\ge 2(\sin A+\sin B+\sin C).$$

Đến đây, nếu áp dụng công thức

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$

thì ta lại được bài toán sau.

Bài 6.6. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$2\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)\ge 2(\sin A+\sin B+\sin C)+$$

$$+\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin C}+\frac{\cos^2 B+\cos^2 C}{\sin A}+\frac{\cos^2 C+\cos^2 A}{\sin B}.$$

Bây giờ, xuất phát từ ***Bài* 7.1** với $n=1$, ta có BĐT quen thuộc $a^2+b^2\ge 2ab$, với mọi $a, b\in\mathbb{R}$.

• Với $n=2$ ta có ***Bài* 7.b**: *Với mọi $a, b\in\mathbb{R}$ ta có $a^4+b^4\ge a^3b+ab^3$.* (*)

Nếu thay giả thiết bởi $a\ne 0$, $b\ne 0$ thì

$$(*)\Leftrightarrow \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\ge ab.$$

Tương tự: $\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2}\ge bc$, $\frac{c^4+a^4}{c^2+a^2}\ge ac$.

Cộng theo từng vế các BĐT này, ta có bài toán sau.

Bài 7.2. *Cho a, b, c là các số thực khác không. Chứng minh rằng $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}+\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2}+\frac{c^4+a^4}{c^2+a^2}\ge ab+bc+ca$.*

• Với $n=3$ ta có BĐT: $a^6+b^6\ge a^5b+ab^5$ (**) với mọi $a, b\in\mathbb{R}$. Tương tự như trên, ta có bài toán sau.

Bài 7.3. *Cho a, b, c là các số thực khác không. Chứng minh rằng $\frac{a^6+b^6}{a^4+b^4}+\frac{b^6+c^6}{b^4+c^4}+\frac{c^6+a^6}{c^4+a^4}\ge ab+bc+ca$.*

Tổng quát ***Bài* 7.2** và ***Bài* 7.3** ta được bài toán sau.

Bài 7.4. *Cho a, b, c là các số thực khác không. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^{2n+2}+b^{2n+2}}{a^{2n}+b^{2n}}+\frac{b^{2n+2}+c^{2n+2}}{b^{2n}+c^{2n}}+\frac{c^{2n+2}+a^{2n+2}}{c^{2n}+a^{2n}}\ge$$

$ab+bc+ca$, với n nguyên dương.

Việc cùng với học sinh khai thác, mở rộng, phát triển các bài toán cơ bản của SGK trong quá trình giảng dạy môn Toán trong trường THPT, đặc biệt là các lớp chuyên Toán đã thúc đẩy mạnh mẽ sự tìm tòi khám phá của các em. Rất mong các đồng nghiệp bổ sung thêm những kết quả mới, những vấn đề mới để chúng ta cùng nhau trao đổi, học hỏi.

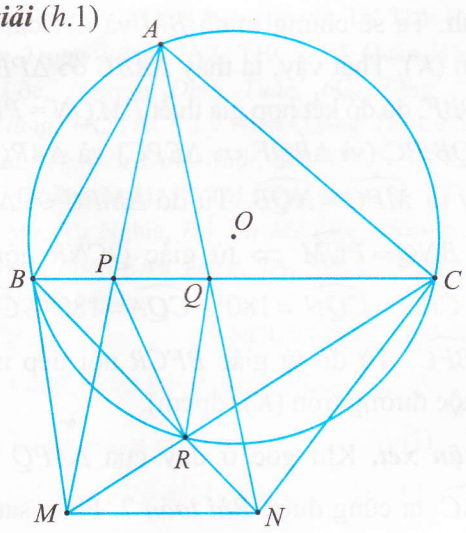
KHAI THÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KÌ THI IMO 2014

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Kì thi IMO năm 2014, ngày thứ 2 có bài toán hình học như sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{QAB} = \widehat{BCA}$ và $\widehat{CAP} = \widehat{ABC}$. Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng của A qua P, Q. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Lời giải (*h*.1)



Hình 1

Gọi R là giao điểm của BN và CM. Ta thấy $\Delta ABC \backsim \Delta PAC \backsim \Delta QBA$, do đó $\frac{BQ}{QA} = \frac{PA}{PC}$ $\Rightarrow \frac{QB}{QN} = \frac{PM}{PC}$. Mặt khác $\widehat{MPC} = \widehat{NQB}$ nên $\Delta MPC \backsim \Delta BQN \Rightarrow \widehat{BNQ} = \widehat{PCM} \Rightarrow$ tứ giác $QCNR$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CRN} = \widehat{CQN} = \widehat{BAC}$.

Vậy tứ giác $ABRC$ nội tiếp (đpcm).

Nhận xét. Bài toán thứ 4 của ngày thứ 2 này là một bài toán không khó và có nhiều lời giải.

Cách giải trên có thể coi là cách giải ngắn gọn nhất tiếp cận bài toán này, không những thế nó còn mở ra nhiều hướng tổng quát khác nhau. Trong bài viết này tôi xin giới thiệu một vài hướng tổng quát khác nhau cho bài toán trên.

Trong bài toán, dễ thấy tam giác APQ cân. Việc lấy đối xứng A qua P, Q được M, N thực chất có thể hiểu là $PM.QN = AP.AQ = AP^2 = AQ^2$. Đây là điểm mấu chốt quan trọng.

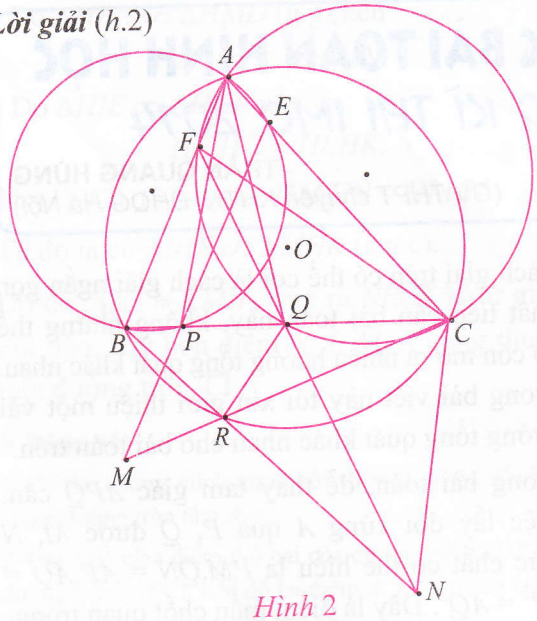
Chúng ta cùng tìm hiểu mở rộng đầu tiên.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{QAB} = \widehat{BCA}$ và $\widehat{CAP} = \widehat{ABC}$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia đối của các tia PA, QA sao cho PM.QN = AP.AQ. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Nhận xét. Đây là một mở rộng đơn giản và có lời giải hoàn toàn tương tự như bài toán trên. Để tiếp tục mở rộng, ta để ý đến các giả thiết $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ và $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Thực chất các giả thiết này cho thấy đường tròn (APB) tiếp xúc với AC và đường tròn (AQC) tiếp xúc với AB. Tiếp điểm có thể thay thế bằng giao điểm. Sau đây là một hướng khai thác cho ý tưởng này.

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho AP = AQ. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc tia đối của các tia PE, QF sao cho PM.QN = PE.QF. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Lời giải (*h*.2)



Hình 2

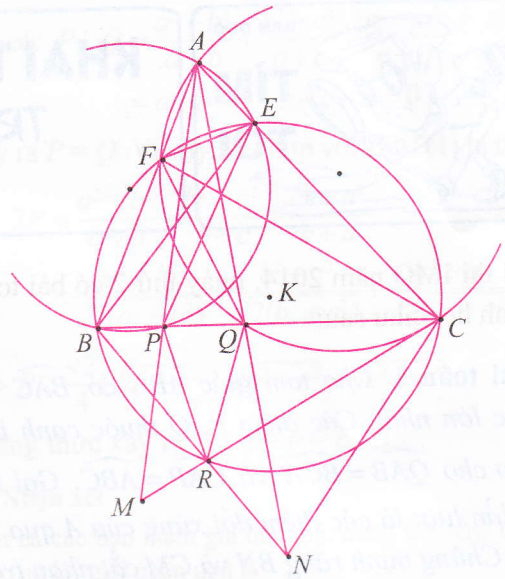
Ta nhận thấy $\Delta ABC \backsim \Delta PEC \backsim \Delta QBF$, do đó kết hợp với giả thiết $PM.QN = PE.QF = QB.PC$ và $\widehat{MPC} = \widehat{NQB}$ (cùng bù với $\widehat{BAC}$) suy ra $\Delta MPC \backsim \Delta BQN \Rightarrow \widehat{BNQ} = \widehat{PCM} \Rightarrow$ tứ giác $QCNR$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CRN} = \widehat{CQN} = \widehat{BAC}$. Vậy tứ giác $ABRC$ nội tiếp (đpcm).

Nhận xét. Khi góc ở đáy của tam giác cân APQ bằng $\widehat{BAC}$, ta có *Bài toán* 2. Đoạn sau lời giải hoàn toàn tương tự. Ta sẽ có một mở rộng ý nghĩa hơn như sau.

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho AP = AQ. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc tia đối của các tia PA, QA sao cho PM.QN = PE.QF. Chứng minh rằng giao điểm của BN và CM luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M, N di chuyển.*

Lời giải (*h*.3)

Gọi R là giao điểm của BN và CM. Ta thấy $\widehat{AEB} = \widehat{APB} = \widehat{AQC} = \widehat{AFC}$ suy ra $\widehat{BEC} = \widehat{BFC}$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (K) cố định. Ta sẽ chứng minh BM và CN cắt nhau trên (K). Thật vậy, ta thấy $\Delta ABC \backsim \Delta PEC \backsim \Delta QBF$, do đó kết hợp giả thiết $PM.QN = PE.QF = QB.PC$ (vì $\Delta BQF \backsim \Delta EPC$) và ΔAPQ cân suy ra $\widehat{MPC} = \widehat{NQB}$. Từ đó $\Delta MPC \backsim \Delta BQN$ $\Rightarrow \widehat{BNQ} = \widehat{PCM} \Rightarrow$ tứ giác $QCNR$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CRN} = \widehat{CQN} = 180^\circ - \widehat{CQA} = 180^\circ - \widehat{CFA} = \widehat{BFC}$. Từ đó tứ giác $BFCR$ nội tiếp nên R thuộc đường tròn (K) (đpcm).



Hình 3

Nhận xét. Khi góc ở đáy của ΔAPQ bằng $\widehat{BAC}$ ta cũng được *Bài toán* 2. Phần sau của lời giải có khác *Bài toán* 3 một chút, tuy nhiên ý nghĩa vẫn không đổi. Trên mô hình của bài toán gốc và các bài toán mở rộng còn có nhiều hướng khai thác đáng chú ý sau đây, coi như **bài tập luyện tập**, các bạn hãy tự giải nhé!

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{QAB} = \widehat{BCA}$ và $\widehat{CAP} = \widehat{ABC}$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia đối của các tia PA, QA sao cho PM.QN = AP.AQ.*

a) *Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R trên đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC.*

b) *Đường tròn ngoại tiếp ΔRMN cắt (O) tại X khác R. Chứng minh RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.*

c) *Đường tròn ngoại tiếp ΔRBP và ΔRCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi R di chuyển.*

d) *Gọi Z là giao điểm của BM và CN. Chứng minh rằng XZ luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.*

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho AP = AQ. Đường tròn ngoại tiếp ΔAPB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp ΔAQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc tia đối của các tia PE, QF sao cho PM.QN = PE.QF.*

a) *Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R trên đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC.*

b) *Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔRMN. Chứng minh rằng $AK \perp BC$.*

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho AP = AQ. Đường tròn ngoại tiếp ΔAPB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp ΔAQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PE, QF sao cho PM.QN = PE.QF.*

a) *Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC.*

b) *Đường tròn ngoại tiếp ΔRMN cắt (O) tại X khác R. Chứng minh rằng RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.*

c) *Đường tròn ngoại tiếp ΔRBP và ΔRCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.*

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho AP = AQ. Đường tròn ngoại tiếp ΔAPB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp ΔAQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc tia đối của các tia PA, QA sao cho PM.QN = PE.QF.*

a) *Chứng minh rằng BN và CM luôn cắt nhau tại điểm R thuộc một đường tròn (K) cố định khi M, N di chuyển.*

b) *Gọi L là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔRMN. Chứng minh rằng $AL \perp BC$.*

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho AP = AQ. Đường tròn ngoại tiếp ΔAPB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp ΔAQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc tia đối của các tia PA, QA sao cho PM.QN = PE.QF.*

a) *Chứng minh rằng BN và CM luôn cắt nhau tại điểm R thuộc một đường tròn (K) cố định khi M, N di chuyển.*

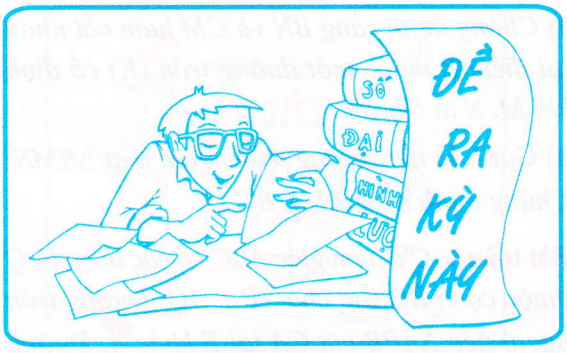
b) *Đường tròn ngoại tiếp ΔRMN cắt (K) tại X khác R. Chứng minh RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.*

c) *Đường tròn ngoại tiếp ΔRBP và ΔRCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.*

Bạn nào quen với phép nghịch đảo có thể giải thêm bài toán sau.

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm P, Q thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A sao cho AP = AQ; PB, QC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối của các tia PA, AQ sao cho $\frac{PM}{PE}.\frac{QN}{QF} = \frac{AM}{AE}.\frac{AN}{AF}$. Đường tròn ngoại tiếp ΔACM và ΔABN cắt nhau tại R khác A. Chứng minh rằng R luôn thuộc một đường tròn cố định khi M, N di chuyển.*

Lời kết. Bài toán IMO này tuy là một bài toán không khó, tuy nhiên vẻ đẹp và tính gợi mở của nó là không thể phủ nhận. Nó hoàn toàn xứng đáng là một bài thi IMO. Bên cạnh bài toán gốc, bài toán mở rộng còn rất nhiều ý để khai thác mô hình và phát triển thêm mà trong một bài viết không thể liệt kê hết. Xin dành cho bạn đọc.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/447 (Lớp 6).
Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$1 + x + x^2 + x^3 = y^2.$$

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T2/447 (Lớp 7).
Cho x, y, z là ba số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn $(x - z)(y - z) = z^2$. Chứng minh rằng tích xyz là số chính phương.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, TP Hải Phòng)

Bài T3/447. Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{1}{\sqrt{9x-3}} = \frac{1}{\sqrt{5x-1}} + \frac{1}{\sqrt{7x-2}}.$$

BÙI HẢI QUANG
(GV THCS Văn Lang, TP Việt Trì, Phú Thọ)

Bài T4/447. Cho đường tròn $(O; R)$, một dây AB cách O một khoảng d $(0 < d < R)$. Hai đường tròn (I), (K) tiếp xúc ngoài nhau tại C, cùng tiếp xúc với AB và tiếp xúc trong với đường tròn (O) (I và K cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AB). Khi hai đường tròn (I) và (K) thay đổi, tìm quỹ tích các điểm C.

TRẦN XUÂN UY
(Nam Định)

Bài T5/447. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho các phương trình $x^2 - 2ax - 3b = 0$; $x^2 - 2bx - 3a = 0$ đều có nghiệm nguyên dương.

NGUYỄN NGỌC HÂN
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/447. Tìm các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1} = 1 \\ xyz(x+y+z)(x+1)(y+1)(z+1) = 1296 \end{cases}.$$

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T7/447. Cho tứ diện $ABCD$ với độ dài các cạnh $AB = BD = DC = x$, $BC = CA = AD = y$. Chứng minh rằng: $\dfrac{3}{5} < \dfrac{x}{y} < \dfrac{5}{3}$.

NGUYỄN VĂN THIỆN
(GV THPT Tân Phú, Đồng Nai)

Bài T8/447. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)|$, trong đó a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a + b + c = \sqrt{5}$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/447. Giải phương trình:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 2ax + 4 = 0,$$

biết rằng $9(a^2 + b^2) = 16$.

LÊ BÁ HOÀNG
(Phòng GD-ĐT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Bài T10/447. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn $4a + 1$ và $4b - 1$ nguyên tố cùng nhau và $a + b$ là ước của $16ab + 1$.

ĐÀO HUY TRƯỜNG
(GV THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T11/447. Cho hai dãy số:
$a_1 = 0$, $a_2 = 16$, $a_3 = 18$, $a_{n+2} = 8a_n + 6a_{n-1}$ và $b_1 = 3$, $b_2 = 19$, $b_3 = 69$, $b_{n+2} = 3b_{n+1} + 5b_n - b_{n-1}$, $n \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$b_n = C_n^0 a_n + C_n^1 a_{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} a_1 + 3C_n^n;$$

$$a_n = C_n^0 b_n - C_n^1 b_{n-1} + C_n^2 b_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} b_1 + (-1)^n 3C_n^n.$$

ĐÀM VĂN NHỈ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T12/447. Cho tam giác ABC và đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác. Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các đoạn BC, CA, AB. Các đường tròn (AB_1C_1), (BC_1A_1), (CA_1B_1) theo thứ tự cắt (O) tại A_2, B_2, C_2. Tìm vị trí của các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}}$ nhỏ nhất.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/447. Một thấu kính mỏng hai mặt lồi có bán kính bằng nhau. Khoảng cách giữa hai tiêu điểm chính khi đặt thấu kính trong không khí và đặt trong nước lần lượt là $2f_1$ và $2f_2$. Cho chiết suất tuyệt đối của không khí bằng 1, chiết suất tuyệt đối của nước bằng n_n.

1) Tìm chiết suất tuyệt đối của chất làm thấu kính.

2) Đặt thấu kính ngập một nửa trong nước sao cho trục chính vuông góc với mặt phẳng phân cách giữa nước và không khí. Tìm khoảng cách giữa hai tiêu điểm chính.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài L2/447. Điện năng được truyền từ nơi phát điện đến một khu dân cư bằng đường dây một pha với hiệu suất truyền tải là 90%. Coi hao phí điện năng chỉ do tỏa nhiệt trên đường dây và không vượt quá 20%. Nếu công suất sử dụng điện của khu dân cư này tăng 20% và giữ nguyên điện áp ở nơi phát điện thì hiệu suất truyền tải điện năng trên chính đường dây khi đó là bao nhiêu?

ĐINH THÁI QUỲNH
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/447 (For 6th grade). Find all the integral solutions of the following equation

$$1 + x + x^2 + x^3 = y^2.$$

T2/447 (For 7th grade). Let x, y, z be three coprime positive integers satisfying

$$(x - z)(y - z) = z^2.$$

Prove that xyz is a perfect square.

T3/447. Solve the following equation

$$\frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{1}{\sqrt{9x-3}} = \frac{1}{\sqrt{5x-1}} + \frac{1}{\sqrt{7x-2}}.$$

T4/447. Given a circle $(O; R)$ and a chord AB with the distance from O is d $(0 < d < R)$. Two circles (I), (K) are externally tangent at C, are both tangent to AB and are internally tangent with (O) (I and K are in the same half plane determined by the line through AB). Find the locus of the points C which vary when (I) and (K) vary.

T5/447. Find all positive integers a and b so that both equations $x^2 - 2ax - 3b = 0$ and $x^2 - 2bx - 3a = 0$ have positive integral solution.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

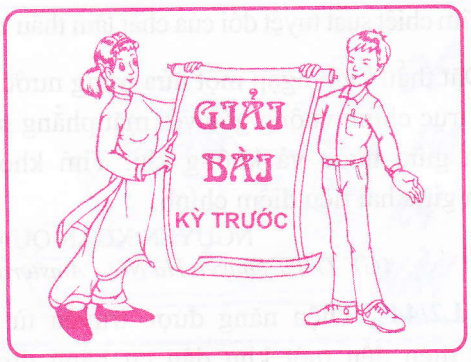
T6/447. Find all positive real numbers x, y, z satisfying the following system of equations

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1} = 1 \\ xyz(x+y+z)(x+1)(y+1)(z+1) = 1296 \end{cases}.$$

T4/447. Given a tetrahedron $ABCD$ and the lengths of its sides $AB = BD = DC = x$, $BC = CA = AD = y$. Prove that $\dfrac{3}{5} < \dfrac{x}{y} < \dfrac{5}{3}$.

T8/447. Find the maximum value of the expression $P = |(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)|$, in which a, b, c are nonnegative numbers satisfying $a + b + c = \sqrt{5}$.

(Xem tiếp trang 27)



Bài T1/443 (Lớp 6). *Cho 21 số nguyên đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện tổng của 11 số tùy ý trong chúng luôn lớn hơn tổng của 10 số còn lại. Biết trong 21 số này có một số bằng 101 và số lớn nhất bằng 2014. Tìm 19 số còn lại.*

Lời giải

Gọi 21 số nguyên đó là $a_1, a_2, \ldots, a_{20}, a_{21}$ và giả sử rằng $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{20} < a_{21}$ thì $a_{21} = 2014$. Theo giả thiết ta có:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \ldots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{21}$

nên $a_1 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \ldots + (a_{21} - a_{11})$.

Mỗi hiệu số ở vế phải bất đẳng thức không nhỏ hơn 10 và có 10 hiệu số nên $a_1 > 100$, suy ra $a_1 \geq 101$.

Vì a_1 là số nguyên nhỏ nhất nên $a_1 = 101$ và $100 \geq (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \ldots + (a_{21} - a_{11})$, suy ra 10 hiệu số này đều bằng 10.

Do đó $a_{11} = a_{21} - 10 = 2014 - 10 = 2004$.

Từ $a_{11} = 2004$ đến $a_{21} = 2014$ có 11 số khác nhau nên dãy số $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{20}$ là dãy các số nguyên liên tiếp $a_{12} = 2005$, $a_{13} = 2006$, ..., $a_{20} = 2013$, suy ra $a_2 = a_{12} - 10 = 2005 - 10 = 1995$, $a_3 = a_{13} - 10 = 2006 - 10 = 1996$, ..., $a_{10} = a_{20} - 10 = 2013 - 10 = 2003$.

Vậy 19 số phải tìm là các số nguyên liên tiếp từ 1995 đến 2013. ❐

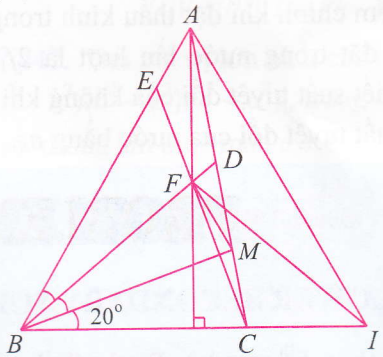
➢ **Nhận xét**

Các bạn sau có lời giải đúng và gọn: **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn, Thái Bá Bảo*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VIỆT HẢI

Bài T2/443 (Lớp 7). *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 40^o$ và $\widehat{ABC} = 60^o$. Hai điểm D và E lần lượt thuộc cạnh AC và AB sao cho $\widehat{CBD} = 40^o$ và $\widehat{BCE} = 70^o$. Gọi F là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng AF vuông góc với BC.*

Lời giải



Kẻ tia phân giác của $\widehat{CBD}$, cắt AC tại M, ta có $\widehat{ABD} = \widehat{DBM} = \widehat{MBC} = 20^o$. Tam giác BMC có $\widehat{MBC} = 20^o$, $\widehat{MCB} = 80^o \Rightarrow \widehat{BMC} = 80^o$ nên BMC là tam giác cân tại B và $BM = BC$. (1)

Tam giác BFC có $\widehat{FBC} = 40^o$, $\widehat{BCF} = 70^o$ $\Rightarrow \widehat{BFC} = 70^o$ nên BFC là tam giác cân tại B và $BF = BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BF = BM$. (3)

Trên tia BC lấy điểm I sao cho $BI = BA$, ta có ABI là tam giác đều. Xét hai tam giác BMA và BFI, có $BI = BA$ (cách dựng), $BF = BM$ (theo

(3)), $\widehat{MBA} = \widehat{FBI} = 40^o$ suy ra hai tam giác này bằng nhau (c.g.c). Suy ra $FI = MA$. Ta lại có ΔMBA cân tại M (do $\widehat{MBA} = \widehat{MAB} = 40^o$) nên $MA = MB$, mà $MB = FB$ suy ra $FB = FI$. Kết hợp với $AB = AI$ ta có AF là đường trung trực của BI. Vậy $AF \perp BI$ hay $AF \perp BC$ (đpcm). ❐

➢ Nhận xét

1. Bài toán tương đối dễ và có nhiều cách giải. Có thể lấy điểm K đối xứng với F qua AB, bằng phương pháp phản chứng ta chứng minh được $\widehat{KAF} = 60^o$, $\Rightarrow \widehat{BAF} = 30^o$, kết hợp với $\widehat{ABC} = 60^o$ ta có đpcm.

2. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn:

Phú Thọ: *Hoàng Lê Công Khôi*, 7B, THCS Thanh Hà, Thanh Ba; **Hải Phòng:** *Phùng Quang Minh*, 7A1, THCS Hồng Bàng; **Thanh Hóa:** *Kiều Xuân Bách*, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Tăng Trung Nghĩa*, 6A, THCS Hòa Hiếu II, TX Thái Hòa, *Nguyễn Trọng Bằng*, 7A2, THCS TT Quán Hành, Nghi Lộc, *Nguyễn Đình Tuấn*, 6C, *Tăng Văn Minh Hùng*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đình Nhật*, 7A, THCS TT Cẩm Xuyên; **Quảng Ngãi:** *Võ Thị Hồng Kiều*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Đỗ Thị Mỹ Lan*, *Trương Thị Mai Trâm*, *Phan Kiều Trinh*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/443. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x} - \sqrt{y} = 1 & (1) \\ \sqrt[3]{8x^3 + y^3} = \sqrt[3]{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1) & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$.

Với mọi $a \geq 0, b \geq 0$ dễ dàng chứng minh BĐT $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$. Suy ra $\sqrt[3]{a^3 + b^3} \geq \dfrac{a+b}{\sqrt[3]{4}}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Áp dụng BĐT trên đối với vế trái của PT(2) ta được: $\sqrt[3]{8x^3 + y^3} \geq \dfrac{2x + y}{\sqrt[3]{4}}$. (*)

Ta lại có $2\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 + \dfrac{1}{2} > 0$

$$\Leftrightarrow 2x + y > 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1\right). \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra:

$$\sqrt[3]{4(8x^3 + y^3)} > 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{8x^3 + y^3} > \sqrt[3]{2}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1\right).$$

Do đó PT(2) vô nghiệm.

Vậy HPT đã cho vô nghiệm. ❐

➢ Nhận xét

1. Một số bạn đưa ra những cách giải khác, sử dụng cả PT(1).

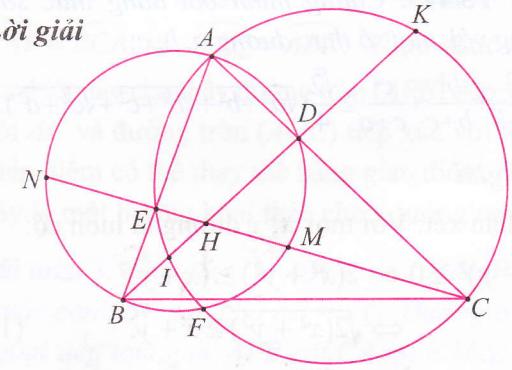
2. Các bạn có lời giải đúng:

Quảng Nam: *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, TP. Hội An; **Hưng Yên:** *Phạm Tiến Duật*, 9A, THCS Bình Minh, Khoái Châu; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Long*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn; **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Thu Uyên*, *Trần Thị Tường Vy*, *Nguyễn Lệ Giang*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Kiều Xuân Bách*, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Hà Nội:** *Lê Phúc Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/443. *Cho tam giác ABC. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm E, D sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB cắt tia CE tại M và N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC cắt tia BD tại I và K. Chứng minh rằng bốn điểm M, I, N, K cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải



Theo giả thiết $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$, suy ra $BCDE$ là tứ giác nội tiếp. Gọi H là giao điểm của BD và CE.

• Do $\Delta BEH \backsim \Delta CDH$ (g.g) nên

$$HD.HB = HE.HC. \quad (1)$$

• Do $\Delta HBN \backsim \Delta HMD$ (g.g) nên

$$HD.HB = HM.HN. \quad (2)$$

• Do $\Delta HIE \backsim \Delta HCK$ nên

$$HE.HC = HI.HK. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $HM.HN = HI.HK$.

Từ đó ta có $\Delta IHN \backsim \Delta MHK$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{NIH} = \widehat{KMH}$, suy ra $NIMK$ là tứ giác nội tiếp, hay bốn điểm N, I, M, K cùng thuộc một đường tròn. ❐

➢ Nhận xét

1. Có thể chứng minh được bốn điểm N, I, M, K cùng thuộc đường tròn tâm A.

2. Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn (ADB) và đường tròn (AEC). Khi đó ba điểm A, H, F thẳng hàng. Chứng minh xin dành cho bạn đọc.

3. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Yên: *Ngô Lê Phương Trinh*, 9E, TNCS Lương Thế Vinh, Tuy Hoà; **Hà Nội:** *Lê Phúc Anh, Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hiên*, 9A, THCS Yên Phong; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nam:** *Ngô Nhật Long*, 9A2, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hữu Huy*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Thanh Hoá:** *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; **Thừa Thiên - Huế:** *Huỳnh Hữu Nhật*, 8/7, THCS Nguyễn Tri Phương, TP. Huế; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Văn Nhật*, 9A4, THCS Nguyễn Du, TX. Buôn Hồ.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/443. *Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a, b, c:*

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\ge\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}).$$

Lời giải

• Nhận xét: Với mọi x, y dương ta luôn có:

$$(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2+y^2)} \ge x+y. \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

• Đặt: $P = \dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}$,

$$Q = \frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}.$$

Ta có: $P - Q = \dfrac{a^2-b^2}{a+b}+\dfrac{b^2-c^2}{b+c}+\dfrac{c^2-a^2}{c+a}$

$$= a-b+b-c+c-a = 0$$

suy ra $P = Q$. Vì vậy, kết hợp với BĐT(1) ta có:

$$2P = \frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}$$

$$\ge \frac{a^2+b^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}+\frac{b^2+c^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)}}+\frac{c^2+a^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}}$$

$$\Leftrightarrow P \ge \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. ❐

➢ Nhận xét

Tất cả các bạn tham gia đều giải đúng bài này. Các bạn có lời giải ngắn gọn là:

Phú Thọ: *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, *Nguyễn Tiến Long*, 8A1, THCS Lâm Thao. **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hữu Huy*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nam:** *Nhữ Ngọc Ánh*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm, *Ngô Nhật Long*, 26, Ngõ 1, Phường Minh Khai, Phủ Lý; **Hưng Yên:** *Phạm Tiến Duật*, 9A, THCS Bình Minh, Khoái Châu; **Hà Nội:** *Vương Tiến Đạt, Đặng Thanh Tùng*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, *Lê Phúc Anh, Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hiền, Cao Thị Quỳnh Nga*, 9A, THCS Yên Phong; **Thanh Hóa:** *Kiều Xuân Bách*, 7A, THCS Lê Hữu Lập Hậu Lộc, *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Thu Uyên*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Bình:** *Phan Trần Hướng*, 8Đ, THCS Quách Xuân Kỳ, Hoàn Lão, Bố Trạch; **Thừa Thiên-Huế:** *Huỳnh Hữu Nhật*, 8/7, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/443. *Giải phương trình ẩn $x \in \mathbb{R}$:*

$$(x^5+x-1)^5+x^5=2.$$

Lời giải

Cách 1

Ta nhận thấy $x = 1$ nghiệm đúng PT(1).

• Với $x > 1$ thì $x^5 + x - 1 > 1$ nên

$$(x^5+x-1)^5 > 1 \text{ và } x^5 > 1.$$

Suy ra $(x^5+x-1)^5+x^5>2$.

Do đó PT(1) không có nghiệm khi $x>1$.

• Với $x<1$ thì $x^5+x-1<1$ nên

$$(x^5+x-1)^5<1 \text{ và } x^5<1.$$

Suy ra $(x^5+x-1)^5+x^5<2$.

Do đó PT(1) không có nghiệm khi $x<1$.

Vậy PT(1) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 2

Đặt $x^5+x-1=a$ thì a^5+a-1

$=(x^5+x-1)^5+x^5+x-1-1=2+x-2=x$.

Do đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^5+x-1=a \\ a^5+a-1=x. \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình trong hệ ta được

$$x^5-a^5+2(x-a)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x^4+x^3a+x^2a^2+xa^3+a^4+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)\left[\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2+\left(\frac{ax}{2}+a^2\right)^2+\frac{x^2a^2}{2}+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=a.$$

Suy ra $x^5+x-1=x \Leftrightarrow x^5=1 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn).

Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất $x=1$. ❐

➢ **Nhận xét**

1. Rất nhiều bạn gửi bài và đều cho lời giải đúng. Ngoài hai cách trên, một số bạn đã sử dụng tính chất hàm số để giải.

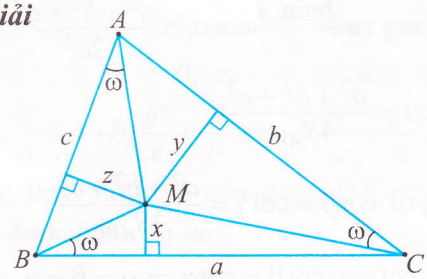
2. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Vũ Bá Sang*, 10 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hòa Bình:** *Trần Bảo Linh*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Bắc Ninh:** *Cao Thị Quỳnh Nga*, 9A, THCS Yên Phong, *Vũ Đăng Chiến*, 10A1, THPT Thuận Thành Số 1; **Thái Nguyên:** *Ma Thị Khánh Huyền*, 11 Toán-K25, THPT chuyên Thái Nguyên; **Hà Tĩnh:** *Lê Nguyễn Khánh Ly*, 10T1, *Trần Đoan Trang*, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Hồ Xuân Hùng*, 10T1,THPT Đô Lương I, *Phan Việt Anh*, A1, THPT Quỳnh Lưu I, *Dương Văn Hiếu*, 10T1, THPT Anh Sơn I; **Thanh Hóa:** *Bạch Mai Linh*, 10C5, THPT Bỉm Sơn; **Quảng Bình:** *Phan Trần Hướng*, 8Đ, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Tiến Phát*, 10A7, THPT Số 1 Đức Phổ; **Quảng Trị:** *Trần Anh Minh*, *Lê Văn Bình*, 10Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Dương:** *Phạm Ngọc Bình*, 10T1, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Long:** *Trần Duy Quân*, 11T1, *Huỳnh Hào*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Long An:** *Trần Quốc Khánh*, 10 Toán, THPT chuyên Long An; **Đồng Nai:** Nguyễn Nam Bình, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Gia Lai:** *Vũ Văn Quý*, 12A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, *Nguyễn Đức Thành*, 10C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **Ninh Thuận:** *Nguyễn Trần Lê Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Tiền Giang:** *Nguyễn Minh Thành*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Cà Mau:** *Trần Ngọc Bách*, 11 Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/443. *Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng* $\widehat{BAM}=\widehat{CBM}=\widehat{ACM}$ *khi và chỉ khi* $\frac{bx}{c}=\frac{cy}{a}=\frac{az}{b}$ *với* $BC=a, CA=b, AB=c$.

Lời giải



• Giả sử $\widehat{BAM}=\widehat{CBM}=\widehat{ACM}=\omega$. Áp dụng định lí côsin cho các tam giác MAB, MBC, MCA ta có $AB^2+AM^2-BM^2=2AB.AM.\cos\omega$

$$=4S_{MAB}.\cot\omega;$$

$$BC^2+BM^2-CM^2=4S_{MBC}.\cot\omega;$$

$$CA^2+CM^2-AM^2=4S_{MCA}.\cot\omega.$$

Cộng theo từng vế ba đẳng thức trên ta có:

$$\cot\omega=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}=\cot A+\cot B+\cot C \quad (*)$$

(theo định lí côsin suy rộng cho tam giác ABC).

Từ (*) ta có: $\frac{yb}{zc} = \frac{S_{MCA}}{S_{MAB}}$

$= \frac{AC.\sin(A-\omega)}{AB.\sin\omega} = \frac{b}{c}(\sin A\cot\omega - \cos A)$

$= \frac{b}{c}\sin A(\cot B + \cot C) = \frac{b}{c}.\frac{a^2}{bc}$.

Suy ra $\frac{y}{z} = \frac{a^2}{bc} \Rightarrow \frac{cy}{a} = \frac{az}{b}$.

Tương tự, $\frac{bx}{c} = \frac{cy}{a}$, do đó $\frac{bx}{c} = \frac{cy}{a} = \frac{az}{b}$. (**)

• Ngược lại, giả sử ta có hệ thức (**).

Đặt $\widehat{BAM} = \alpha$, $\widehat{CBM} = \beta$, $\widehat{ACM} = \gamma$. Khi đó

$\frac{yb}{zc} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \frac{AC\sin(A-\alpha)}{AB\sin\alpha}$

$= \frac{b(\sin A\cos\alpha - \cos A\sin\alpha)}{c.\sin\alpha}$.

Từ (**) ta có $\frac{yb}{zc} = \frac{a^2}{c^2}$ nên

$\frac{a^2}{c^2} = \frac{b\sin A}{c}\cot\alpha - \frac{b\cos A}{c}$

$= \frac{b\sin A}{c}\cot\alpha - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}$.

Từ đó suy ra $\frac{b\sin A}{c}\cot\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{2c^2}$

$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}$.

Tương tự $\cot\beta = \cot\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}$.

Do đó $\cot\alpha = \cot\beta = \cot\gamma \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$. ❐

➢ **Nhận xét**

1. Điểm M trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{BAM} = \widehat{CBM} = \widehat{ACM} = \omega$ được gọi là *điểm Brocard* và ω là *góc Brocard* ứng với điểm M. Hệ thức (*) ở lời giải trên là một tính chất đặc trưng của *góc Brocard* trong tam giác.

2. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hòa Bình: *Đinh Chung Mừng*, 11CT, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** *Lê Văn Trường Nhật, Nguyễn Văn Thế*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Minh Ngọc*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Đắk Lắk:** *Trương Quang Minh*, 11CT, THPT Nguyễn Du; **Phú Yên:** *Nguyễn Trần Hậu*, 10T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/443. *Cho x, y, z là ba số tùy ý thuộc đoạn* [0; 1]. *Tìm max P với*

$$P = \frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{z+x+1} + \frac{z}{x+y+1} + (1-x)(1-y)(2-z).$$

Lời giải

Với $x, y, z \in [0; 1]$ thì $1 - x \ge 0$; $1 - y \ge 0$; $x + y + 1 \ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{(1-x)+(1-y)+(x+y+1)}{3} \ge \sqrt[3]{(1-x)(1-y)(x+y+1)}$$

$\Rightarrow (1-x)(1-y)(x+y+1) \le 1$.

Nhân hai vế của BĐT này với $2 - z > 0$, ta được $(1-x)(1-y)(x+y+1)(2-z) \le (2-z)$

$\Rightarrow (1-x)(1-y)(2-z) \le \frac{2-z}{x+y+1}$

$\Rightarrow \frac{z}{x+y+1} + (1-x)(1-y)(2-z) \le \frac{2}{x+y+1}$. (1)

Mặt khác từ giả thiết, ta có:

$$\frac{x}{y+z+1} \le \frac{2x}{x+y+1}. \quad (2)$$

Thật vậy, BĐT(2) tương đương với:

$x(x+y+1) \le 2x(y+z+1)$

$\Leftrightarrow x(y+2z+1-x) \ge 0$ (BĐT đúng).

Tương tự, ta có: $\frac{y}{z+x+1} \le \frac{2y}{x+y+1}$. (3)

Cộng theo từng vế các BĐT (1), (2), (3), ta được $P \le \frac{2(x+y+1)}{x+y+1} = 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 1-x=1-y=x+y+1 \\ x(y+2z+1-x)=0 \\ y(x+2z+1-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ z\in[0;1] \end{cases}.$$

Vậy $\max P = 2$ khi $\begin{cases} x=y=0 \\ z\in[0;1] \end{cases}$. ❐

➢ **Nhận xét**

1. Một số bạn cho rằng vai trò của x, y, z như nhau nên giả thiết $x \le y \le z$. Điều đó là không đúng, trong bài toán chỉ có vai trò của x, y như nhau mà thôi.

2. Có thể giải bài toán bằng cách xét hàm số

$$f(x)=\frac{x}{y+z+1}+\frac{y}{z+x+1}+\frac{z}{x+y+1}+(1-x)(1-y)(2-z)$$

(coi y, z là hằng số) và chứng minh được với mọi $x \in [0; 1]$ ta có đạo hàm cấp hai

$$f''(x)=\frac{2y}{(z+x+1)^3}+\frac{2z}{(x+y+1)^3}>0$$

(bạn đọc tự xét trường hợp $y = z = 0$); hàm số $f(x)$ lõm trên đoạn $[0; 1]$; do đó $\max P = \max\{f(0), f(1)\}$; suy ra kết quả bài toán.

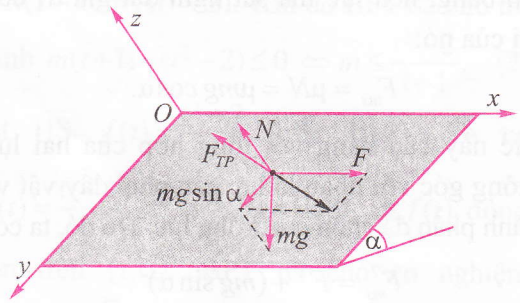
3. Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Cà Mau: *Lê Minh Phương*, 12 chuyên Toán, *Trần Ngọc Bích*, 11 chuyên Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Nghệ An:** *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I, Đà Sơn; **Thanh Hóa:** *Phạm Văn Thắng*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Đắk Lắk:** *Nguyễn Triệu Huỳnh*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Bắc Giang:** *Nguyễn Thị Tuyết Nhung*, 10 Toán K23, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Tĩnh:** *Lê Văn Trường Nhật*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Minh Ngọc*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Tiến Phát*, 10A7, THPT Số I Đức Phổ.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài L1/443. *Một khối lập phương nhỏ, khối lượng m = 100g, đứng yên trên một mặt phẳng nghiêng với mặt phẳng nằm ngang một góc $\alpha = 30^\circ$. Hệ số ma sát giữa khối lập phương và mặt phẳng là $\mu = 0,8$. Hãy xác định một lực F nằm ngang cực tiểu dùng để đẩy khối lập phương để nó bắt đầu chuyển động. Biết rằng lực F tác dụng trong mặt phẳng nghiêng.*

Lời giải



Có 4 lực tác dụng lên vật. Lực thứ nhất là lực $\vec{F}$ song song với đường sinh của mặt phẳng nghiêng (cũng tức là giao tuyến của mặt phẳng nghiêng và mặt phẳng nằm ngang). Lực thứ hai là trọng lực $m\vec{g}$ hướng thẳng đứng xuống dưới về phía tâm quả đất. Lực thứ ba là phản lực $\vec{N}$ của mặt phẳng nghiêng, có hướng vuông góc với mặt phẳng đó. Lực thứ tư là lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ nằm trong mặt phẳng nghiêng nhưng có hướng còn chưa xác định. Rõ ràng là bốn lực này định hướng trong không gian.

Khi này phương trình định luật II Newton có dạng $\vec{F}+m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{ms}=0$ vì theo đề bài $\vec{a}=0$.

Bây giờ cần phải chọn một mặt phẳng thuận tiện sao cho có thể chiếu trên đó cả bốn lực này. Rõ ràng mặt phẳng chứa trọng lực hoặc mặt phẳng chứa phản lực là không thuận tiện, vì chúng ta còn chưa biết hướng thực của lực ma sát và do đó không thể chiếu nó lên các mặt phẳng đó. Dễ thấy rằng mặt phẳng thuận tiện nhất để chiếu các lực chính là mặt phẳng nghiêng. Nằm trong mặt phẳng này là các lực $\vec{F}, \vec{F}_{ms}$ và thành phần của trọng lực bằng $mg\sin\alpha$. Để thuận tiện, ta coi hình chiếu này là một lực độc lập nào đó tác dụng lên vật theo hướng trục y. Các lực $\vec{F}, \vec{F}_{ms}$ và thành phần đã chọn của trọng lực được gọi là các *hoạt lực*, vì chính những lực đó làm cho vật chuyển

động. Vì chúng ta tìm điều kiện giới hạn của cân bằng, nên lực ma sát nghỉ đạt giá trị cực đại của nó:

$$F_{ms} = \mu N = \mu mg\cos\alpha.$$

Lực này cân bằng với tổng hợp của hai lực vuông góc với nhau là lực cần phải đẩy vật và thành phần đã chọn của trọng lực. Do đó, ta có:

$$F_{ms}^2 = F^2 + (mg\sin\alpha)^2.$$

Từ đó suy ra $F = \sqrt{F_{ms}^2 - (mg\sin\alpha)^2}$

$$= mg\sqrt{(\mu\cos\alpha)^2 - \sin^2\alpha} = 0,48\text{N}. \ \square$$

➢ **Nhận xét**

Các bạn có lời giải đúng:

Cần Thơ: *Huỳnh Hữu Hạng*, 11A1, THPT Nguyễn Việt Hồng, Quận Ninh Kiều; **Hà Nội:** *Khuất Duy Hồng*, 10 Toán, THPT Sơn Tây; **Nghệ An:** *Phan Văn Khải*, 10A1, THPT Cửa Lò; **Đồng Tháp:** *Trần Hoàng Nhựt, Nguyễn Thanh Đạt*, 10L, THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thái Bình:** *Phạm Anh Sơn*, 10 Toán 2, THPT Chuyên Thái Bình; **Hà Tĩnh:** *Lê Nguyễn Khánh Ly*, 10T1, THPT Chuyên Hà Tĩnh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 11T, THPT Chuyên Lam Sơn; **Nam Định:** *Phạm Ngọc Nam*, 10 Lí, THPT Chuyên Lê Hồng Phong; **Bình Phước:** *Nguyễn Văn Hùng*, 11B, THPT Chuyên Quang Trung.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/443. *Từ một khối cầu thủy tinh có chiết suất n = 1,5 và bán kính R = 10cm, người ta tách ra hai chỏm cầu là hai thấu kính mỏng phẳng, lồi có đường kính rìa là 1cm và 2cm. Ghép sát hai thấu kính chung trục chính. Đặt trên trục chính này một nguồn sáng điểm, cách hệ thấu kính 1m. Ở phía bên kia của hệ thấu kính đặt một màn chắn vuông góc với trục chính. Tìm vị trí đặt màn để kích thước vết sáng thu được trên màn có diện tích nhỏ nhất.*

Lời giải

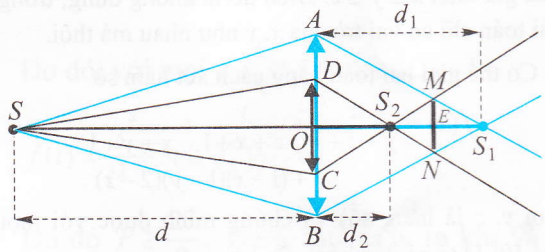
Tiêu cự của thấu kính đơn có bán kính rìa $R_1 = 2\text{cm}$ là

$$f_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 20\text{cm}.$$

Tiêu cự của hệ thấu kính:

$$f_2 = \frac{1}{D_h} = 10\text{cm} \ (D_h = D_1 + D_2)$$

Ảnh S_1 tạo qua thấu kính có bán kính $R_1 = 2\text{cm}$ và S_2 tạo qua hệ hai thấu kính được mô tả như sơ đồ sau:



Ảnh S_1 tạo bởi thấu kính đơn cách hệ thấu kính một khoảng $d_1 = \dfrac{d.f}{d-f} = 25\text{cm}$.

Ảnh S_2 tạo bởi hệ thấu kính cách hệ thấu kính ghép một khoảng $d_2 = \dfrac{d.f_h}{d-f_h} = \dfrac{100}{9}\text{cm}$.

Qua hình vẽ ta thấy diện tích vệt sáng tròn nhỏ nhất khi màn MN đặt trong khoảng S_1S_2 như hình vẽ.

Xét các cặp tam giác đồng dạng, ta có:

$$\frac{S_1E}{S_1O} = \frac{ME}{AO}; \ \frac{S_2E}{S_2O} = \frac{ME}{DO}.$$

Mặt khác ta có $AO = 2DO$ nên $\dfrac{S_2E}{2d_2} = \dfrac{S_1E}{d_1}$

$\Rightarrow S_2E \approx 6,54\text{cm}$. Từ đó tính được:

$$OE = d_2 + S_2E \approx 17,65\text{cm}. \ \square$$

➢ **Nhận xét**

Các bạn sau có lời giải đúng:

Bình Phước: *Nguyễn Văn Hùng*, 11B, THPT chuyên Quang Trung; **Nam Định:** *Phạm Ngọc Nam*, 10 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

ĐẶNG THANH HẢI

Giải bài

CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT
KỈ NIỆM 50 NĂM TẠP CHÍ TH&TT

Bài T7/THCS. *Cho n số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ thỏa mãn* $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \\ a_1 + a_2 \leq 2014 \\ a_3 + a_4 + \ldots + a_n \leq 2014 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Lời giải

• Với trường hợp $n = 2$ thì

$$A = a_1^2 + a_2^2 \leq (a_1 + a_2)^2 \leq 2014^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a_1 a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 2014 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (a_1, a_2) = (2014, 0).$$

• Với trường hợp $n = 3$, sử dụng giả thiết $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0$, ta được $A = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$$\leq a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 \leq (a_1 + a_2)^2 \leq 2014^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a_1 a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 2014 \\ a_3^2 = a_1 a_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (2014, 0, 0).$$

• Với trường hợp $n = 4$, sử dụng giả thiết $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq 0$, ta được $A = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$

$$\leq a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2 \leq 2014^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a_1 a_2 = a_3^2 = a_4^2 \\ a_1 + a_2 = 2014 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4) = (2014, 0, 0, 0)$$

hoặc $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1007, 1007, 1007, 1007)$.

• Xét trường hợp $n \geq 5$. sử dụng giả thiết $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ và $a_1 + a_2 \leq 2014$, ta được

$$a_2(a_2 - a_1) + a_3(a_3 - a_2) + \cdots + a_n(a_n - a_2) \leq 0$$

nên $A \leq (2014 - a_2^2) + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2$

$$= 2014^2 - 4028a_2 + 2a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2$$

$$\leq 2014^2 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)a_2 + 2a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2$$

$$\leq 2014^2 + a_2(a_2 - a_1) + a_3(a_3 - a_2) + \ldots + a_n(a_n - a_2)$$

$$\leq 2014^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} a_1 = 2014 - a_2 \\ a_2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 4028a_2 \\ a_2(a_2 - a_1) = a_3(a_3 - a_2) = \cdots = a_n(a_n - a_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a_1, a_2, \cdots, a_n) = (2014, 0, \ldots, 0)$$

hoặc $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n)$

$$= (1007, 1007, 1007, 1007, 0, \cdots, 0).$$

Vậy $\max A = 2014^2$. ❐

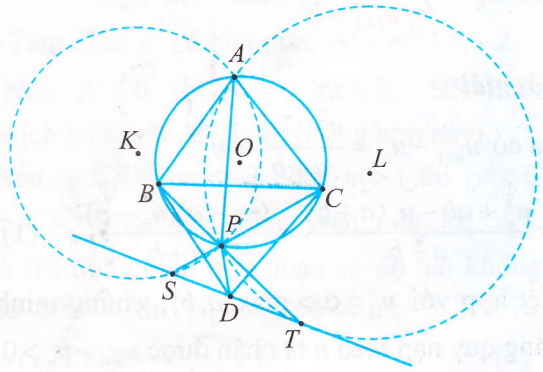
➢ **Nhận xét**

Có rất ít bài giải gửi về Tòa soạn. Hầu hết đều ngầm xét trường hợp $n \geq 5$ nên đáp số không phù hợp khi $n = 2, 3, 4$.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/THCS. *Cho tam giác ABC cố định, nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm di động trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). Gọi (K) là đường tròn qua A, P đồng thời tiếp xúc với AC. (K) cắt PC tại S khác P. Gọi (L) là đường tròn qua A, P đồng thời tiếp xúc với AB. (L) cắt PB tại T khác P. Chứng minh rằng đường thẳng ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di động.*

Lời giải



Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC (hình vẽ). Chú ý rằng BA tiếp xúc với (L), ta có

$$BD^2 = BA^2 = BP.BT.$$

Do đó $\Delta BDT \backsim \Delta BPD$.

Vậy $\widehat{BDT} = \widehat{BPD}$. (1)

Tương tự, $\widehat{CDS} = \widehat{CPD}$. (2)

Từ (1) và (2), chú ý rằng A và D đối xứng với nhau qua BC và tứ giác $ABPC$ nội tiếp, suy ra

$$\begin{aligned}\widehat{SDT} &= \widehat{BDT} + \widehat{SDC} - \widehat{BDC}\\ &= \widehat{BPD} + \widehat{CPD} - \widehat{BAC}\\ &= \widehat{BPD} + \widehat{CPD} - (180^\circ - \widehat{BPC})\\ &= \widehat{BPD} + \widehat{CPD} + \widehat{BPC} - 180^\circ\\ &= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.\end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là S, D, T thẳng hàng.

Nói cách khác, ST luôn đi qua một điểm cố định (đó là điểm D). ❐

➢ Nhận xét

Bài toán này không khó nhưng chỉ có ba bạn tham gia giải: **Thanh Hoá:** *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Cao Hữu Đạt*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T7/THPT. *Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a + b > 0$. Xét dãy số (u_n) có $u_1 = \alpha > \max\{a, b\}$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + ab}{a+b}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

Đặt $S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{u_i - a}{u_{i+1} - b}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Lời giải

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2 + ab}{a+b} - u_n$

$$= \frac{u_n^2 + ab - u_n(a+b)}{a+b} = \frac{(u_n - a)(u_n - b)}{a+b}. \quad (1)$$

Kết hợp với $u_1 = \alpha > \max\{a, b\}$, chứng minh bằng quy nạp theo n ta nhận được $u_{n+1} - u_n > 0$ với mọi $n \geq 1$, tức là $u_1 < u_2 < u_3 < \ldots$

Ta nhận thấy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

vì nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u < +\infty$ thì từ công thức (1)

ta suy ra $u - u = \dfrac{(u-a)(u-b)}{a+b}$

$\Rightarrow (u-a)(u-b) = 0$,

mâu thuẫn với $\max\{a, b\} < u_1 < u_2 < \ldots$

Cũng từ công thức (1) ta suy ra

$$(u_{n+1} - b) - (u_n - b) = \frac{(u_n - a)(u_n - b)}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{u_n - b} - \frac{a+b}{u_{n+1} - b} = \frac{u_n - a}{u_{n+1} - b} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

(công thức tách).

Do đó $S_n = \sum_{i-1}^{n} \dfrac{u_i - a}{u_{i+1} - b} = \sum_{i-1}^{n} \left(\dfrac{a+b}{u_i - b} - \dfrac{a+b}{u_{i+1} - b} \right)$

$$= \frac{a+b}{u_1 - b} - \frac{a+b}{u_{n+1} - b} = \frac{a+b}{\alpha - b} - \frac{a+b}{u_{n+1} - b} \to \frac{a+b}{\alpha - b}$$

khi $n \to +\infty$, vì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{a+b}{\alpha - b}$. ❐

➢ Nhận xét

Đây là bài toán dãy số dạng cơ bản, không quá khó. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hòa Bình: *Hoàng Bảo Linh*, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hà Nội:** *Kiều Thu Hương*, 10T, THPT Sơn Tây; *Trần Phương Nam*, 11A13, THPT Ngọc Tảo, Tam Hiệp, Phúc Thọ; **Hưng Yên:** *Trần Bá Trung*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Nguyễn Hồng Đăng*, 10T1, *Vũ Tuấn Anh*, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Phòng:** *Lương Thế Sơn*, 11T, THPT chuyên Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** *Lê Văn Trường Nhật*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Minh Ngọc*, *Hoàng Thanh Việt*, 10T, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Trị:** *Trần Trọng Tiến*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Gia Lai:** *Trần Nguyên Try*, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Pleiku.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/THPT. *Cho 100 điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ nằm trong hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập con X của $E = \{1, 2, \ldots, 100\}$ gồm 50 phần tử sao cho*

$$\left|\sum_{i\in X}\overrightarrow{AA_i} - \sum_{i\in E\setminus X}\overrightarrow{AA_i}\right| \le \sqrt{2}.$$

Lời giải

Đặt hình vuông $ABCD$ vào hệ trục tọa độ vuông góc sao cho tọa độ của A, B, C, D tương ứng là (0, 0); (1, 0); (1, 1); (0, 1). Giả sử A_i có tọa độ (a_i, b_i). Không giảm tổng quát, ta giả sử $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_{100}$.

Ta gọi các cặp (A_{2k-1}, A_{2k}) là một *bộ đôi*.

Ta phân các điểm của *bộ đôi* vào hai nhóm tùy ý. Gọi X là tập chỉ số của nhóm thứ nhất và $Y = E \setminus X$ là tập chỉ số của nhóm thứ hai. Không giảm tổng quát, ta giả sử $\sum_{i\in X} b_i \ge \sum_{i\in Y} b_i$.

Đặt $b^v = \max\{b_i\} \le 1$.

a) Nếu $\sum_{i\in X} b_i - \sum_{i\in Y} b_i = c \le b^v$ thì ta có ngay X là tập con cần tìm vì $\left|\sum_{i\in X} a_i - \sum_{i\in Y} a_i\right|$

$\le (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{99} - a_{100}) \le a_1 < 1$

và $\left|\sum_{i\in X}\overrightarrow{AA_i} - \sum_{i\in Y}\overrightarrow{AA_i}\right|$

$$= \sqrt{\left(\sum_{i\in X} a_i - \sum_{i\in Y} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i\in X} b_i - \sum_{i\in Y} b_i\right)^2} \le \sqrt{2}.$$

b) Nếu trái lại $\sum_{i\in X} b_i - \sum_{i\in Y} b_i = c > b^v$ thì khi đó tồn tại $k \in X, j \in Y$ sao cho (A_k, A_j) là một bộ đôi và $b_k \ge b_j$. Đặt $X' = (X \setminus \{k\}) \cup \{j\}$ và $Y' = (Y \setminus \{j\}) \cup \{k\}$ (tức là chuyển A_k sang nhóm 2 và A_j sang nhóm 1) thì ta có:

$$\left|\sum_{i\in X'} b_i - \sum_{i\in Y'} b_i\right| = |c - 2(b_k - b_j| < c \le 1.$$

Lại có $\left|\sum_{i\in X'} a_i - \sum_{i\in Y'} a_i\right|$

$\le (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{99} - a_{100}) \le a_1 \le 1.$

Thành thử khi đó X' là tập cần tìm. ❐

➢ **Nhận xét**

Bài toán này chỉ có ba bạn tham gia giải và giải đúng là:

Nghệ An: *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10T, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Hà Tĩnh:** *Lê Văn Trường Nhật*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(*Tiếp theo trang* 17)

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/447. Solve the equation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 2ax + 4 = 0$$

given $9(a^2 + b^2) = 16$.

T10/447. Find all pairs of positive integers $(a; b)$ satisfying the following properties: $4a + 1$ and $4b - 1$ are coprime and $a + b$ is a divisor of $16ab + 1$.

T11/447. Given two sequences $a_1 = 0$, $a_2 = 16$, $a_3 = 18$, $a_{n+2} = 8a_n + 6a_{n-1}$ and $b_1 = 3$, $b_2 = 19$, $b_3 = 69$, $b_{n+2} = 3b_{n+1} + 5b_n - b_{n-1}$, $n \ge 2$. Prove that

$$b_n = C_n^0 a_n + C_n^1 a_{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} a_1 + 3C_n^n;$$

$$a_n = C_n^0 b_n - C_n^1 b_{n-1} + C_n^2 b_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} b_1 + (-1)^n 3C_n^n.$$

T12/447. Given a triangle ABC and its circumscribed circle (O). The points A_1, B_1, and C_1 are on the sides BC, CA, and AB respectively. The circumscribed circles (AB_1C_1), (BC_1A_1), and (CA_1B_1) intersect (O) at A_2, B_2, and C_2 respectively. Find the positions of A_1, B_1, and C_1 so that $\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}}$ is minimal.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
College of Science – Vietnam National University, Ha Noi.

SỬ DỤNG NGUYÊN LÍ DIRICHLET ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

TRẦN MINH VƯƠNG
(SV lớp Y3B, ĐH Y Hà Nội)

NGUYỄN VĂN QUÝ
(SV K56, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Trong toán học, nguyên lí Dirichlet có rất nhiều ứng dụng. Nhiều kết quả sâu sắc của Toán học, đặc biệt là trong *Tổ hợp* và *Toán rời rạc* có thể chứng minh dựa trên nguyên lí Dirichlet. Bài viết này xin giới thiệu với các bạn một ứng dụng khá thú vị của nguyên lí Dirichlet trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức (BĐT).

Ở dạng đơn giản nhất, nguyên lí Dirichlet được phát biểu như sau:

Nếu nhốt $n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) con Thỏ vào n cái chuồng thì luôn có ít nhất hai con Thỏ bị nhốt trong một cái chuồng.

Sử dụng nguyên lí Dirichlet, ta có: trong ba số thực x, y, z luôn tồn tại hai số có tích dương (cùng dấu) hoặc tích bằng 0, không mất tính tổng quát giả sử hai số đó là y, z, khi đó $yz \geq 0$. Bây giờ sử dụng ý tưởng này chúng ta giải quyết các bài toán sau

CÁC BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài toán 1. *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng* $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2$.

Lời giải. Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số a^2-1, b^2-1, c^2-1 luôn tồn tại hai số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(b^2-1)(c^2-1) \geq 0$. Khi đó:

$$(b^2+2)(c^2+2) = 3(b^2+c^2+1)+(b^2-1)(c^2-1) \geq 3(b^2+c^2+1).$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$$(a^2+2)(b^2+c^2+1) \geq (a+b+c)^2.$$

BĐT này hiển nhiên đúng vì theo BĐT Bunyakovsky thì

$$(a^2+1+1)(1+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=c=-1$.

Nhận xét. Do $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ nên từ kết quả trên ta thu được bài toán sau trong đề thi APMO 2004:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca).$$

Bài toán 2. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn* $ab+bc+ca = abc+2$. *Chứng minh rằng:*

i) $a^2+b^2+c^2+abc \geq 4$.

ii) $a^2+b^2+c^2+abc(a+b+c-2) \geq 4$.

Lời giải. Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số $a-1, b-1, c-1$ luôn tồn tại hai số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(b-1)(c-1) \geq 0$, suy ra $b+c \leq 1+bc$. Do đó:

$$abc+2 = bc+a(b+c) \leq bc+a(bc+1)$$

hay $a+bc \geq 2$.

i) Sử dụng BĐT Cauchy và $a+bc \geq 2$, ta có

$$a^2+b^2+c^2+abc-4 \geq a^2+2bc+abc-4 = (a+2)(a+bc-2) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

ii) Sử dụng BĐT Cauchy và $1+bc \geq b+c$, $a+bc \geq 2$, ta có

$$\begin{aligned} &a^2+b^2+c^2+abc(a+b+c-2) \\ &= a^2(1+bc)+abc(b+c)+b^2+c^2-2abc \\ &\geq a^2(b+c)+abc(b+c)+2bc-2abc \end{aligned}$$

$= a(b+c)(a+bc)+2bc-2abc$

$\geq 2a(b+c)+2bc-2abc = 4.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 3. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng*

i) $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \leq 12.$

ii) $\dfrac{1}{2a^2+1}+\dfrac{1}{2b^2+1}+\dfrac{1}{2c^2+1}+\dfrac{2(a+b+c)^2}{3} \leq 7.$

Lời giải. i) Do $a^2+b^2+c^2+abc=4$ nên BĐT cần chứng minh tương đương với

$$2(4-abc)+2(ab+bc+ca) \leq 12$$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca-abc \leq 2$.

Từ giả thiết ta cũng có $a,b,c \in (0;2)$. Do đó

$4 = a^2+b^2+c^2+abc \geq a^2+2bc+abc$

$\Leftrightarrow (2-a)(2-a-bc) \geq 0 \Rightarrow 2 \geq a+bc$.

Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số $a-1$, $b-1$, $c-1$ luôn tồn tại hai số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(b-1)(c-1) \geq 0$, suy ra $b+c \leq 1+bc$. Vậy $ab+bc+ca-abc$

$= bc+a(b+c)-abc \leq bc+a(1+bc)-abc$

$= bc+a \leq 2.$

ii) Do $\dfrac{1}{2a^2+1} = 1-\dfrac{2a^2}{2a^2+1}$ nên ta có thể viết BĐT cần chứng minh dưới dạng

$$\frac{2a^2}{2a^2+1}+\frac{2b^2}{2b^2+1}+\frac{2c^2}{2c^2+1} \geq \frac{2(a+b+c)^2}{3}.$$

Đặt $(a+b+c)^2 = x$, ta có $a^2+b^2+c^2 \leq 12-x$.

Sử dụng BĐT Schwarz, ta có

$$\frac{a^2}{2a^2+1}+\frac{b^2}{2b^2+1}+\frac{c^2}{2c^2+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+3}$$

$$\geq \frac{x}{27-2x}.$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$4+\frac{2x}{27-2x} \geq \frac{2x}{3} \Leftrightarrow \frac{4(x-9)^2}{3(27-2x)} \geq 0..$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 4. *Tìm hằng số k nhỏ nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a, b, c:*

$abc+2+k[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2] \geq a+b+c.$

(Tập huấn Đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2009).

Lời giải. • Cho $a=0$, $b=c=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ta có

$$2+k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) \geq \sqrt{2}+2 \Rightarrow k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

• Ta chứng minh $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Thật vậy, theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số $a-1, b-1, c-1$ luôn tồn tại hai số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(b-1)(c-1) \geq 0$. Sử dụng BĐT Cauchy và BĐT Schwarz ta có

$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$

$\geq (a-1)^2+\dfrac{1}{2}(b+c-2)^2 \geq \sqrt{2}(a-1)(2-b-c).$

Do đó

$abc+2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2]$

$\geq abc+2+(a-1)(2-b-c)$

$= a+b+c+abc-ab-ac+a$

$= a+b+c+a(b-1)(c-1)$

$\geq a+b+c$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=0$, $b=c=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc các hoán vị.

Vậy hằng số k nhỏ nhất cần tìm là $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Nhận xét. 1) Việc chọn $a=0, b=c=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ để tìm hằng số k trong lời giải trên không phải một cách tình cờ. Do BĐT trên là BĐT đối xứng ba biến nên có 2 trường hợp đáng chú ý về dấu bằng là *ba biến bằng nhau* hoặc *có biến nhận giá trị tại biên*. Trong trường hợp ba biến bằng nhau thì bài toán đúng với mọi k. Với trường hợp còn lại, ta giả sử $a=0$, khi đó BĐT trở thành:

$$2+k[(b-1)^2+(c-1)^2+1]\ge b+c$$
$$\Leftrightarrow k[(b-1)^2+(c-1)^2+1]\ge b+c-2.$$

Ta có: $(b-1)^2+(c-1)^2+1\ge \frac{1}{2}(b+c-2)^2+1$
$$\ge \sqrt{2}(b+c-2).$$

Từ đây ta thấy $k=\frac{1}{\sqrt{2}}, b=c=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Cho $k=2$ ta thu được BĐT sau trong cuộc thi HELLO IMO 2007:
$$abc+2(a^2+b^2+c^2)+8\ge 5(a+b+c).$$

Bài toán 5. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*
$$(a+b+ab)(b+c+bc)(c+a+ca)\ge 27abc.$$

Lời giải. Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số $bc-a, ca-b, ab-c$ luôn tồn tại hai số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(ca-b)(ab-c)\ge 0$. Khi đó
$$(a+b+ab)(c+a+ca)=(3+ab-c)(3+ac-b)$$
$$=(3-b-c+ab+ca)+(ab-c)(ca-b)$$
$$\ge 3(3-b-c+ab+ca)=3(a+ab+ca).$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh
$$(a+ab+ca)(b+c+bc)\ge 9abc.$$

BĐT này hiển nhiên đúng vì theo BĐT Bunyakovsky
$$(a+ab+ca)(bc+c+b)$$
$$\ge(\sqrt{abc}+\sqrt{abc}+\sqrt{abc})^2=9abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Trong các bài toán chứng minh BĐT, thông thường những BĐT ít biến sẽ dễ chứng minh hơn những BĐT nhiều biến. Vì vậy một ý tưởng ta có thể áp dụng là sử dụng nguyên lí Dirichlet để đưa bài toán về ít biến hơn.

Bài toán 6. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*
$$\sqrt{9+16a^2}+\sqrt{9+16b^2}+\sqrt{9+16c^2}\ge 3+4(a+b+c)$$
(Middle European Mathematical Olympiad 2009).

Lời giải. Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số $a-1, b-1, c-1$ luôn tồn tại hai số có tích không âm. không mất tính tổng quát, giả sử $(b-1)(c-1)\ge 0$, suy ra $b+c\le 1+bc$. Sử dụng BĐT Minkowski, ta có:
$$\sqrt{9+16b^2}+\sqrt{9+16c^2}\ge\sqrt{(3+3)^2+(4b+4c)^2}$$
$$=\sqrt{36+16(b+c)^2}.$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh
$$\sqrt{9+16a^2}+\sqrt{36+16(b+c)^2}\ge 3+4(a+b+c).$$

Để ý rằng $\sqrt{36+16(b+c)^2}-4(b+c)$
$$=\frac{36}{\sqrt{36+16(b+c)^2}+4(b+c)}$$
$$\ge\frac{36}{\sqrt{36+16(1+bc)^2}+4(1+bc)}$$
$$=\sqrt{36+16(1+bc)^2}-4(1+bc)$$
$$=\sqrt{36+16\left(1+\frac{1}{a}\right)^2}-4\left(1+\frac{1}{a}\right).$$

Ta chứng minh
$$\sqrt{9+16a^2}+\sqrt{36+16\left(1+\frac{1}{a}\right)^2}\ge 4a+7+\frac{4}{a}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta có thể viết BĐT này dưới dạng
$$\sqrt{(9+16a^2)\left(13+\frac{8}{a}+\frac{4}{a^2}\right)}\ge 14a+5+\frac{6}{a}$$
$$\Leftrightarrow(9+16a^2)\left(13+\frac{8}{a}+\frac{4}{a^2}\right)\ge\left(14a+5+\frac{6}{a}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 12a^2-12a-12+\frac{12}{a}\ge 0\Leftrightarrow\frac{12(a-1)^2(a+1)}{a}\ge 0$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng. Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 7. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$
(Romania Team Selection Test 2006).

Lời giải. Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số $a-1, b-1, c-1$ luôn tồn tại hai số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(b-1)(c-1)\ge 0$, suy ra $b+c\le 1+bc$. Khi đó

$$b^2+c^2=(b+c)^2-2bc\le (b+c)^2-2(b+c-1)$$
$$=(3-a)^2-2(2-a)=a^2-4a+5.$$

Sử dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{2}{bc}\ge\frac{8}{(b+c)^2}=\frac{8}{(3-a)^2}.$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a^2}+\frac{8}{(3-a)^2}\ge 2a^2-4a+5$$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^2-6a+9}{a^2(3-a)^2}-3\ge 2a^2-4a+5$$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^2-6a+9}{a^2(3-a)^2}-3\ge 2(a-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(9+12a-3a^2)}{a^2(3-a)^2}\ge 2(a-1)^2.$$

Sử dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$a(3-a)\le\frac{1}{4}(a+3-a)=\frac{9}{4}.$$

Do đó $\dfrac{9+12a-3a^2}{a^2(3-a)^2}-2\ge\dfrac{4(3+4a-a^2)}{3a(3-a)}-2$

$$=\frac{2a^2-2a+12}{3a(3-a)}>0.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

BÀI TẬP

Qua các bài toán trên, chúng ta thấy được phần nào ứng dụng đơn giản nhưng thú vị của nguyên lí Dirichlet trong chứng minh BĐT. Việc kết hợp các BĐT cổ điển và nguyên lí Dirichlet cho chúng ta những lời giải khá đơn giản và ngắn gọn. cuối cùng mời các bạn vận dụng phương pháp này để làm các bài tập sau.

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge a^2+b^2+c^2.$$

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)\ge 1.$$

3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc+2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+2bc}}+\frac{b}{\sqrt{b+2ca}}+\frac{c}{\sqrt{c+2ca}}\le\sqrt{a+b+c}.$$

4. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $abc\ge 0$. Chứng minh rằng

$$2+abc+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ge a+b+c.$$

5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc+2$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab(2-c)}{a^2+abc+b^2}+\frac{bc(2-a)}{b^2+abc+c^2}+\frac{ca(2-b)}{c^2+abc+a^2}\le 1.$$

6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+abc)(b^2+c^2+abc)(c^2+a^2+abc)$$
$$\ge 3abc(a+b+c).$$

7. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)\ge(a+b+c+d)^2.$$

8. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}\ge\frac{25}{4}.$$

(*China Girls Mathematical Olympiad 2011*).

9. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2-a+1}+\sqrt{b^2-b+1}+\sqrt{c^2-c+1}\ge a+b+c.$$

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 447 (9.2014)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1. Lễ Khai giảng năm học mới

Trưởng ban biên tập: *ThS.* NGUYỄN ANH QUÂN
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: NGUYỄN DUY

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Giới thiệu bộ sách

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THPT

Bộ sách "***Tài liệu chuyên Toán***" lớp 10, 11, 12 có tất cả 12 cuốn, mỗi lớp có 4 cuốn gồm 2 cuốn lí thuyết (Đại số - Giải tích và Hình học) và 2 cuốn bài tập. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình cho học sinh các trường THPT chuyên mà Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ban hành. Ở mỗi cuốn lí thuyết giới thiệu các chuyên đề bắt buộc của chương trình chuyên được trình bày khá sâu và chặt chẽ, có khá nhiều các ví dụ, bài tập là những bài thi của khối chuyên Toán, thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Toán Quốc tế. Trong mỗi cuốn bài tập, ngoài hướng dẫn giải khá đầy đủ các bài tập trong cuốn lí thuyết, còn có một số bài tập bổ sung để học sinh tham khảo. Các tác giả của bộ sách là các thầy giáo có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán, đều đã hoặc đang trực tiếp giảng dạy tại các trường THPT chuyên, khối chuyên Toán, các trường Đại học, Viện nghiên cứu, . . . trên khắp cả nước, như : GS. *Đoàn Quỳnh*, GS.TS. *Văn Như Cương*, PGS. TS. *Nguyễn Đăng Phất*, PGS.TSKH *Vũ Đình Hòa*, GS.TSKH *Hà Huy Khoái*, TS. *Nguyễn Minh Hà*, GS.TSKH *Đặng Hùng Thắng*, PGS.TS. *Nguyễn Vũ Lương*, ThS. *Đỗ Thanh Sơn*, TS. *Trần Nam Dũng*, TS. *Lê Bá Khánh Trình*, ThS. *Nguyễn Trọng Tuấn*,...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ đáp ứng được phần lớn yêu cầu học tập của học sinh, việc giảng dạy của giáo viên ở các trường THPT chuyên; cũng như nhu cầu đọc của những người yêu thích Toán.

Địa chỉ liên hệ: - Phòng kinh doanh CTCP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
Tel: 0435121974 - Fax: 0435121973
- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trên cả nước

HỘI THI CÁN BỘ, GIÁO VIÊN THƯ VIỆN GIỎI TOÀN QUỐC KHU VỰC PHÍA BẮC - LẦN THỨ IV - 2014

do Nhà Xuất bản Giáo dục tại Hà Nội tổ chức

Để nâng cao nghiệp vụ cho các cán bộ, giáo viên thư viện, NXBGD Việt Nam tổ chức Hội thi Cán bộ, Giáo viên Thư viện giỏi toàn quốc. Hội thi lần thứ IV được tổ chức tại ba khu vực: miền Bắc, miền Trung, miền Nam. Hội thi Khu vực phía Bắc đã diễn ra từ ngày 5 đến ngày 8 tháng 5 năm 2014 tại NXBGD tại Hà Nội và đã được sự hưởng ứng nhiệt tình của 22 Tỉnh, Thành phố với 57 thí sinh tham gia.

Lãnh đạo NXBGD Việt Nam tham dự và chỉ đạo Hội thi lần này gồm có: TBT GS. *Vũ Văn Hùng*, PTGĐ *Nguyễn Minh Khang*, PTGĐ *Mạc Văn Thiện*, PTGĐ kiêm GĐ NXBGD tại Hà Nội *Huỳnh Bá Vân*, PGĐ NXBGD tại Hà Nội *Hoàng Lê Bách*, PTBT *Nguyễn Văn Tùng* và Lãnh đạo một số Công ty thành viên của NXBGD Việt Nam...

Hội thi đã trao giải thưởng chính thức cho 16 tập thể và 43 cá nhân. Vào hồi 16 giờ ngày 8 tháng 5 năm 2014, Hội thi đã bế mạc. Theo nhận xét, đánh giá của Nhà thơ *Trần Đăng Khoa* - Trưởng ban Giám khảo Hội thi và Lãnh đạo NXBGD Việt Nam, Hội thi Cán bộ, Giáo viên Thư viện giỏi toàn quốc Khu vực phía Bắc lần thứ IV - 2014 đã thành công rực rỡ với số lượng lớn các đơn vị và cá nhân dự thi; các thí sinh dự thi đều tâm huyết, yêu nghề; các nội dung dự thi đều đạt chất lượng cao về chuyên môn.

Lãnh đạo NXBGD Việt Nam trong lễ tổng kết giải

Một số hình ảnh trong Hội thi

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT09M4

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2014

Giá: 10.000 đồng
Mười nghìn đồng