TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

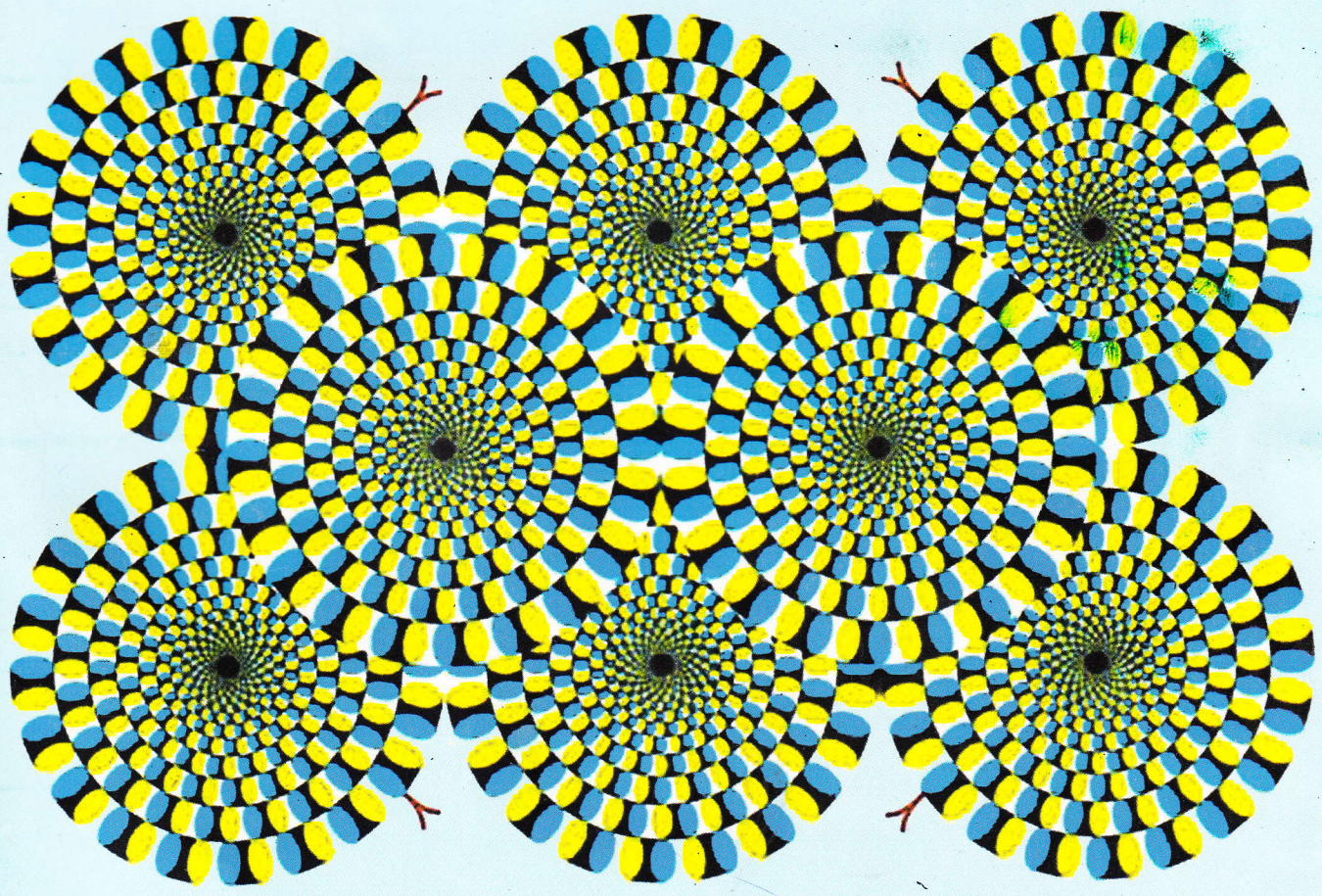
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

6 2014 Số 444

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 51
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

T. Huy DN



NHỮNG NGƯỜI SỐNG MÃI TRONG KÝ ỨC...

Thầy *Hoàng Chúng* quê ở Quảng Nam. Thầy là Thư ký Toà soạn đầu tiên của Báo *Toán học &Tuổi trẻ* .

Lần đầu tiên tôi được gặp Thầy vào cuối đông năm 1974 tại lễ kỷ niệm mười năm báo *Toán học & Tuổi trẻ* ra số đầu tiên. Trời Hà Nội se lạnh nhưng trong phòng họp ở khách sạn Phùng Hưng vẫn ấm áp tình người. Biết tôi vượt gần 500 cây số dưới mưa bom bão đạn ra họp, Thầy rất cảm động và đề nghị tôi thay mặt các cộng tác viên trẻ phát biểu ý kiến. Tôi rất sợ vì trước mắt là những nhà toán học nổi tiếng mình hằng ngưỡng mộ. Thầy liền động viên: *Hán* chỉ cần nói những tình cảm chân thực của mình với *Báo Toán* là được. Tôi vừa run run vừa nói. Không ngờ cả hội trường im lặng lắng nghe, và khi tôi nói lời cảm ơn cuối cùng, các đại biểu nhất loạt vỗ tay động viên. Đặc biệt còn được GS *Lê Văn Thiêm* khen : *Hán* giỏi văn còn hơn cả toán! Chia tay, tôi tặng Thầy chiếc nón mang từ quê ra. Thấy Thầy ngần ngại, tôi liền nói: Đây là quà em tặng Cô, Thầy mới vui vẻ nhận.

Tôi còn mang ơn Thầy đã giới thiệu tôi với GS *Lê Văn Thiêm*, lúc đó là Hội trưởng Hội Toán học Việt Nam. Nhờ vậy hai năm sau (1976), nhờ sự giúp đỡ của Giáo sư, tôi được vào thẳng Trường ĐHSP Vinh không qua kỳ thi chung. Mười năm sau (1984), thấy tôi khó khăn trong việc học lên, Thầy hứa nhận tôi vào Trường ĐHSP Hồ Chí Minh (lúc đó Thầy đang giữ chức Hiệu trưởng) để làm nghiên cứu sinh với Thầy *Trần Văn Hạo*. Vì điều kiện gia đình, tôi đã bỏ lỡ dịp may đó. Khi nghe tin Thầy mất, tôi đã khóc rất nhiều.

Thầy *Ngô Đạt Tứ* quê ở Nam Định. Thầy từng công tác ở Viện Toán Học Việt Nam .

Thời gian Thầy chuyển sang công tác ở Tòa soạn Báo *Toán Học & Tuổi Trẻ*, kinh tế nước ta gặp nhiều khó khăn, thu nhập người dân còn rất thấp. Bởi vậy, Tạp chí cũng nhiều phen lao đao, nhất là khâu phát hành. Đã có giai đoạn báo chuyển sang hai tháng một kỳ, mỗi kỳ chỉ có mấy trăm bản. Tòa soạn có 3 người mà phải lo bao nhiêu việc: Từ khâu biên tập, nhờ người đọc và chấm bài, đến khâu in ấn và phát hành. Đồng lương lại quá thấp, không đủ nuôi sống gia đình. Ấy vậy mà Thầy vẫn làm việc say sưa và động viên mọi người trong Tòa soạn cải tiến nội dung và hình thức tờ báo từng bước từng bước một, làm cho nó hấp dẫn hơn, thiết thực với thầy giáo và học sinh hơn. Sau khi báo chuyển từ cơ quan chủ quản là Hội Toán học Việt Nam sang Nhà xuất bản Giáo dục, báo có môi trường phát hành rộng rãi hơn. Báo dần dần hồi sinh, mỗi tháng một kỳ, số lượng phát hành tăng lên hàng nghìn. Báo tự nuôi sống được mình và vinh dự đổi thành Tạp chí.

Xin nói thêm rằng, thời gian trên tôi may mắn có nhiều bài đăng Tạp chí được các bạn trẻ yêu thích (*Tôi đã sống với các bài toán như thế nào, Ẩn sau Định lý Ptôlêmê, ...*). Được thế một phần cũng nhờ sự động viên khích lệ của Thầy. Nhuận bút dạo ấy thấp lắm. Mỗi lần vào dịp cuối năm, ra Hà Nội chơi, tôi đến Tòa soạn nhận nhuận bút. Số tiền ít ỏi không đủ ba anh em (Thầy, anh *Vũ Kim Thủy* và tôi) ăn một bữa cơm cho no. Thế mà vẫn vui, vẫn say sưa viết, bởi xem Tạp chí như một phần máu thịt đời mình. Kể lại chuyện cũ để các bạn trẻ thấy thời ấy thế hệ chúng tôi sống đẹp thế nào. Tạp chí một thời đã thực sự làm chiếc cầu nối những tâm hồn yêu toán cả nước.

Khi nghe tin Thầy mất đột ngột ở Hà Nội, vì ở xa không đưa tiễn Thầy được, tôi ngước nhìn ra Bắc và ngỡ như thấy một con Hạc trắng bay vút trên bầu trời Hồ Tây xanh trong.

Thành Vinh, Xuân 2014

LÊ QUỐC HÁN (*GV Trường Đại học Vinh*)

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

VỀ BÀI TOÁN MỞ TRONG BÀI CÁCH GIẢI MỘT DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

HOÀNG MINH QUÂN
GV THPT Ngọc Tảo, Hà Nội

(Bài dự thi Viết chuyên đề Toán chào mừng 50 năm Tạp chí TH&TT)

Trong số báo 442 tháng 4/2014 có nêu cách giải phương trình vô tỉ có dạng $ax^2+bx+c=k.\sqrt{dx+e}$ (1^*) và cuối bài báo có đặt câu hỏi mở "hãy tìm cách giải cho phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=k.\sqrt[3]{px+q}$". (2^*)

Bài viết này sẽ trình bày cách giải cho PT (2^*) với ý tưởng đưa về PT dạng

$$(mx+n)^3+k(mx+n)=(px+q)+k.\sqrt[3]{px+q}.\ (3^*)$$

Điều đặc biệt là dạng toán này xuất hiện nhiều trong các kì thi tuyển sinh, thi chọn học sinh giỏi và thường dùng kiến thức đạo hàm với tính đơn điệu của hàm số đặc trưng để giải, nhưng ở đây chúng tôi trình bày cách giải sơ cấp hơn không cần dùng tới đạo hàm, giúp các em học sinh bao gồm cả bậc THCS cũng có thể hiểu và vận dụng tốt.

I. LÍ THUYẾT

PT (2^*) tương đương với

$$ax^3+bx^2+(c+p)x+d+q=px+q+k.\sqrt[3]{px+q}$$

PT này đưa được về dạng (3^*) khi và chỉ khi tồn tại các số m và n sao cho:

$$(mx+n)^3+k(mx+n)=ax^3+bx^2+(c+p)x+d+q$$

hay $m^3x^3+3m^2nx^2+(3mn^2+km)x+n^3+kn=$
$=ax^3+bx^2+(c+p)x+d+q.$

Sử dụng đồng nhất thức ta được HPT (ẩn m và n): $\begin{cases} m^3=a \\ 3m^2n=b \\ 3mn^2+km=c+p \\ n^3+kn=d+q. \end{cases}$ (*)

Đến đây ta có kết quả:

– Nếu HPT (*) có nghiệm thì PT (2^*) đưa được về PT dạng (3^*).

– Nếu HPT (*) vô nghiệm thì PT (2^*) không đưa được về PT dạng (3^*).

Để thuận tiện trong trình bày, ta gọi HPT (*) là hệ tham số (HTS) của phương trình (2^*).

Chú ý: Các hệ số của (2^*) sẽ thay đổi khi ta cùng nhân hai vế của (2^*) với một số khác không và do đó hệ (*) không phải duy nhất.

II. THÍ DỤ MINH HỌA

❄ ***Thí dụ 1.*** *Giải phương trình:*

$$8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}.\quad (1)$$

Phân tích. HTS của PT (1) là

$$\begin{cases} m^3=8 \\ 3m^2n=-36 \\ 3mn^2+m=56 \\ n^3+n=-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-3. \end{cases}$$

Lời giải. Ta có PT (1) tương đương với

$$(2x-3)^3+2x-3=3x-5+\sqrt[3]{3x-5}.$$

Đặt $\begin{cases} u=2x-3 \\ v=\sqrt[3]{3x-5} \end{cases}$, khi đó

$$u^3+u=v^3+v \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+1)=0.$$

Vì $u^2+uv+v^2+1=\left(u+\dfrac{v}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}v^2+1>0$ $\forall u,v\in\mathbb{R}$ nên ta chỉ có $u=v$. Do đó ta có

$$2x-3=\sqrt[3]{3x-5} \Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}. \end{array}\right. \quad \square$$

❄ ***Thí dụ 2.*** *Giải phương trình:*

$$4x^3+6x^2+4x+1=\sqrt[3]{2x+1}.\quad (2)$$

Phân tích. HTS của (2) là $\begin{cases} m^3=4 \\ 3m^2n=6 \\ 3mn^2+m=6 \\ n^3+n=2 \end{cases}$

HPT này vô nghiệm. Tuy nhiên điều đó không có nghĩa là chúng ta không đưa được PT (2) về dạng PT (3*). Thực hiện phép nhân cả hai vế của PT (2) với 2 ta được:

$$8x^3+12x^2+8x+2=2\sqrt[3]{2x+1}.$$

PT này có HTS là

$$\begin{cases} m^3=8 \\ 3m^2n=12 \\ 3mn^2+2m=10 \\ n^3+2n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1. \end{cases}$$

Lời giải. Ta có PT (2) tương đương với

$$8x^3+12x^2+8x+2=2\sqrt[3]{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^3+2(2x+1)=2x+1+2\sqrt[3]{2x+1}.$$

Đặt $\begin{cases} u=2x+1 \\ v=\sqrt[3]{2x+1} \end{cases}$, khi đó

$$u^3+2u=v^3+2v \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0.$$

Vì $u^2+uv+v^2+2=\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3}{4}v^2+2>0$

$\forall u,v\in\mathbb{R}$ nên ta chỉ có $u=v$. Do đó ta có

$$2x+1=\sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow (2x+1)^3=2x+1$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(4x^2+4x)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0;\ x=-1;\ x=-\frac{1}{2}.\ \square$$

❄ *Thí dụ 3. Giải phương trình:*

$$9x^3+9x^2+\frac{20}{3}x+1=\sqrt[3]{1-2x}.\quad (3)$$

Phân tích. HTS của (3) là $\begin{cases} m^3=9 \\ 3m^2n=9 \\ 3mn^2+m=\frac{14}{3} \\ n^3+n=2. \end{cases}$

HPT này vô nghiệm. Tuy nhiên điều đó không có nghĩa là chúng ta không đưa được PT (3) về dạng PT (3*). Thực hiện phép nhân cả hai vế của PT (3) với 3 ta được:

$$27x^3+27x^2+20x+3=3\sqrt[3]{1-2x}.$$

PT này có HTS là $\begin{cases} m^3=27 \\ 3m^2n=27 \\ 3mn^2+3m=18 \\ n^3+3n=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=1. \end{cases}$

Lời giải. Ta có PT (3) tương đương với

$$27x^3+27x^2+20x+3=3\sqrt[3]{1-2x}$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)^3+3(3x+1)=1-2x+3\sqrt[3]{1-2x}.$$

Đặt $\begin{cases} u=3x+1 \\ v=\sqrt[3]{1-2x} \end{cases}$, khi đó ta có

$$u^3+3u=v^3+3v \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+3)=0.$$

Vì $u^2+uv+v^2+3=\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3}{4}v^2+3>0$

$\forall u,v\in\mathbb{R}$ nên ta chỉ có $u=v$. Do đó ta có

$$3x+1=\sqrt[3]{1-2x} \Leftrightarrow (3x+1)^3=1-2x$$

$$\Leftrightarrow x(27x^2+27x+11)=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Phương trình có một nghiệm $x=0$. $\square$

❄ *Thí dụ 4. Giải phương trình:*

$$4x^3-18x^2+30x-17=-\sqrt[3]{2x-1}.\quad (4)$$

Phân tích. HTS của (4) là $\begin{cases} m^3=4 \\ 3m^2n=-18 \\ 3mn^2-m=32 \\ n^3-n=-18. \end{cases}$

HPT này vô nghiệm. Tuy nhiên điều đó không có nghĩa là chúng ta không đưa được PT (4) về dạng PT(3*). Thực hiện phép nhân cả hai vế của PT (4) với -2 ta được:

$$-8x^3+36x^2-60x+34=2\sqrt[3]{2x-1}.$$

PT này có HTS là:

$$\begin{cases} m^3=-8 \\ 3m^2n=36 \\ 3mn^2+2m=-58 \\ n^3+2n=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=3. \end{cases}$$

Lời giải. Ta có PT (4) tương đương với

$$-8x^3+36x^2-60x+34=2\sqrt[3]{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (3-2x)^3+2(3-2x)=2x-1+2\sqrt[3]{2x-1}.$$

Đặt $\begin{cases} u=3-2x \\ v=\sqrt[3]{2x-1} \end{cases}$, khi đó

$$u^3+2u=v^3+2v \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0.$$

Vì $u^2+uv+v^2+2=\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3}{4}v^2+2>0$

$\forall u,v\in\mathbb{R}$ nên ta chỉ có $u=v$. Do đó ta có

$$3-2x=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow (3-2x)^3=2x-1$$

$$\Leftrightarrow -8x^3+36x^2-56x+28=0$$

$$\Leftrightarrow -4(x-1)(2x^2-7x+7)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1.\ \square$$

(Xem tiếp trang 4)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH THÁI BÌNH NĂM HỌC 2013 - 2014

(Đề thi đăng trên TH&TT số 443, tháng 5 năm 2014)

Bài 1. 1) $\begin{cases} x^2-(x+y)y+1=0 & (1) \\ (x^2+1)(x+y-2)+y=0 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $x^2+1=(x+y)y$, thay vào (2):

$(2) \Leftrightarrow (x+y).y.(x+y-2)+y=0$

$\Leftrightarrow y.((x+y)(x+y-2)+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ (x+y-1)^2=0 \end{array}\right.$

Trường hợp $y=0$, (1) trở thành $x^2+1=0$, phương trình vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Trường hợp $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$, thay vào (1) ta tìm được $x=0$ hoặc $x=-1$.

Nếu $x=0$ thì $y=1$; nếu $x=-1$ thì $y=2$.

Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(0; 1)$, $(-1; 2)$.

2) ĐKXĐ: $1 \le x \le 7$. Ta có:

$x+4\sqrt{7-x}=4\sqrt{x-1}+\sqrt{(7-x)(x-1)}+1$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x-1}-4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}=0 \\ \sqrt{x-1}-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=17. \end{array}\right.$

Theo ĐKXĐ thì $x=4$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm $x=4$.

Bài 2. 1) *Nhận xét:* 23 là số nguyên tố.

Đặt $T=\{1; 2; 3; ...; 2013\}$, kí hiệu $[A]$ là phần nguyên của số thực A, ta có:

Trong T có đúng $\left[\frac{2013}{23}\right]=87$ số chia hết cho 23;

có đúng $\left[\frac{87}{23}\right]=3$ số chia hết cho 23^2 và không có số nào chia hết cho 23^3.

Suy ra $2013!=23^{90}.k$ với $(23; k)=1$.

Vì 23^{x+13} là ước của 2013! nên $x+13 \le 90$, suy ra $x \le 77$. Vậy $x \in \mathbb{Z}^+$ lớn nhất cần tìm là 77.

2) Ta có $4n^2+14n+7=(n+3)(4n+2)+1$ và n là số nguyên dương nên $n+3$ và $4n^2+14n+7$ nguyên tố cùng nhau. Vì vậy, để A là số chính phương thì $4n^2+14n+7$ phải là số chính phương. Do $n \in \mathbb{Z}^+$ nên ta thấy:

$(2n+3)^2 \le 4n^2+14n+7<(2n+4)^2$,

suy ra $4n^2+14n+7=(2n+3)^2 \Rightarrow n=1$.

Với $n=1$ ta có $A=10^2$ là số chính phương.

Vậy số nguyên dương cần tìm là $n=1$.

Bài 3. Do $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$ nên tồn tại các số dương x, y, z để $\frac{1}{1+a}=\frac{y+z}{x+y+z}$;

$\frac{1}{1+b}=\frac{z+x}{x+y+z}$; $\frac{1}{1+c}=\frac{x+y}{x+y+z}$

$\Rightarrow a=\frac{x}{y+z}$; $b=\frac{y}{z+x}$; $c=\frac{z}{x+y}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z} \ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$

$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{4}{y+z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{4}{z+x}\right)+$

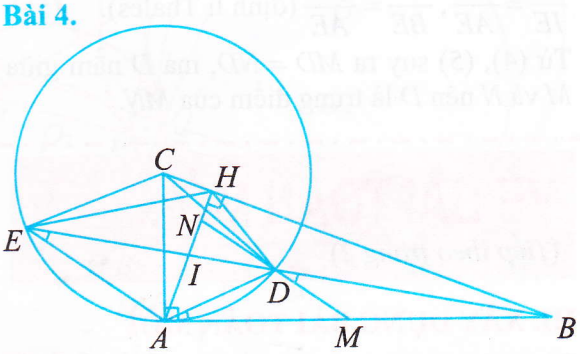
$+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}\right) \ge 0.$

Do $y; z$ dương và $(y-z)^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{4}{y+z}$.

Tương tự ta có $\frac{1}{z}+\frac{1}{x} \ge \frac{4}{z+x}$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$.

Từ đó suy ra BĐT cần chứng minh.

Bài 4.



1.a) Vì $AB \perp AC$ nên AB là tiếp tuyến của đường tròn $(C; CA) \Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{BAD}$

$\Rightarrow \Delta BAD \backsim \Delta BEA$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BA}{BD}=\frac{BE}{BA} \Rightarrow AB^2=BD.BE$ (1)

Theo giả thiết, ta có: $BH.BC=AB^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BH.BC=BD.BE$ (3)

Ta nhận thấy $\Delta BDH \backsim \Delta BCE$ (c.g.c) do có góc B chung và $\frac{BD}{BC} = \frac{BH}{BE}$ (theo (3)).

Suy ra $\widehat{BHD} = \widehat{BEC} \Rightarrow \widehat{CHD} + \widehat{DEC} = 180^o$.

Suy ra tứ giác $DHCE$ nội tiếp (đpcm).

1.b) Từ câu a) ta có $\begin{cases} \widehat{BHD} = \widehat{CED} \\ \widehat{CHE} = \widehat{CDE} \end{cases}$. Mà ΔCDE cân tại C nên $\widehat{CDE} = \widehat{CED} \Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{CHE}$.

Lại có $\widehat{AHC} = \widehat{AHB} = 90^o \Rightarrow \widehat{DHA} = \widehat{EHA}$; tia HA nằm giữa hai tia HE và HD nên HA là phân giác của $\widehat{EHD}$.

2) Gọi I là giao điểm AH và BE.

Ta có $\widehat{AED} = \frac{1}{2}\widehat{ACD}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$sđ $\widehat{AD}$).

Ta lại có $\widehat{BDM} = \frac{1}{2}\widehat{ACD}$ (giả thiết), suy ra $\widehat{AED} = \widehat{BDM}$, hai góc ở vị trí đồng vị nên $MD \,//\, AE$.

Vì HA là phân giác của $\widehat{DHE}$, $HA \perp HB$ nên HB là phân giác ngoài tại đỉnh H của ΔDHE.

Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{ID}{IE} = \frac{HD}{HE}; \frac{BD}{BE} = \frac{HD}{HE} \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{ID}{IE}. \quad (4)$$

Vì $MD \,//\, AE$ và $ND \,//\, AE$ nên

$$\frac{ID}{IE} = \frac{ND}{AE}, \frac{BD}{BE} = \frac{MD}{AE} \text{ (định lí Thales).} \quad (5)$$

Từ (4), (5) suy ra $MD = ND$, mà D nằm giữa M và N nên D là trung điểm của MN.

Bài 5. 1) Ta có $a_k = (a_k - a_{k-1}) + (a_{k-1} - a_{k-2}) + (a_{k-2} - a_{k-3}) + ... + (a_2 - a_1) + a_1 = a_1 + (k-1)\alpha$ với $k = 2; 3; ... ; 2013$.

Xét m, n nguyên dương thỏa mãn $m + n = 2014$ ta có $a_m + a_n = (a_1 + (m-1)\alpha) + (a_1 + (n-1)\alpha)$
$= 2(a_1 + 1006\alpha) = 2a_{1007}$

nên $a_1 + a_2 + ... + a_{2012} + a_{2013} = (a_1 + a_{2013}) + (a_2 + a_{2012}) + ... + (a_{1006} + a_{1008}) + a_{1007}$
$= 2013a_{1007}$.

Ta có $Q(x) =$
$= 2013x^2 + 2013x + (a_1 + a_2 + ... + a_{2012} + a_{2013})$
$= 2013(x^2 + x + a_{1007}) = 2013P_{1007}(x)$.

Vì $Q(x)$ có nghiệm nên tồn tại x_0 để $Q(x_0) = 0$ suy ra $P_{1007}(x_0) = 0$.

Vậy đa thức $P_{1007}(x)$ có nghiệm.

2) Xét m, n nguyên dương và $m + n = 2014$.

Ta có $\Delta_{P_m} + \Delta_{P_n} = (1 - 4a_m) + (1 - 4a_n)$
$= 2(1 - 2(a_m + a_n)) = 2(1 - 4a_{1007}) = 2\Delta_{P_{1007}} \geq 0$

nên ít nhất một trong hai số $\Delta_{P_m}, \Delta_{P_n}$ phải không âm hay ít nhất một trong hai đa thức $P_m(x)$, $P_n(x)$ có nghiệm.

Mà có tất cả 1006 cặp $(P_m(x), P_n(x))$ như trên (không kể thứ tự m, n trong mỗi cặp đó), do đó có ít nhất 1007 đa thức có nghiệm hay có không quá 1006 đa thức vô nghiệm.

Chẳng hạn: Chọn $a_i = \frac{1}{4} + (i - 1007)$ thỏa mãn $a_{i+1} - a_i = 1$ với $i = 1; 2; 3;...; 2012$.

Khi đó $P_1(x)$; $P_2(x)$; ...; $P_{1007}(x)$ có nghiệm; 1006 đa thức còn lại vô nghiệm.

Vậy có nhiều nhất 1006 đa thức vô nghiệm.

VỀ BÀI TOÁN MỞ ...

(Tiếp theo trang 2)

III. XÂY DỰNG BÀI TOÁN MỚI

Từ cách giải phương trình vô tỉ trên, chúng ta có thể sáng tạo những bài toán mới.

1. Xét đẳng thức $u^3 + 2u = v^3 + 2v$.

a) Cho $u = x + 1, v = \sqrt[3]{3x+5}$. Ta được phương trình: $x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 2\sqrt[3]{3x+5}$.

b) Cho $u = 2x - 3, v = \sqrt[3]{3x-4}$. Ta được phương trình: $8x^3 - 36x^2 + 55x - 29 = 2\sqrt[3]{3x-4}$.

2. Xét đẳng thức $u^3 + 3u = v^3 + 3v$.

a) Cho $u = x - 1, v = \sqrt[3]{3x-5}$. Ta được phương trình: $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 3\sqrt[3]{3x-5}$.

b) Cho $u = 3x - 4, v = \sqrt[3]{2x+4}$. Ta được phương trình: $27x^3 - 108x^2 + 151x - 80 = 3\sqrt[3]{2x+4}$.

Như vậy với cách giải trên, chúng ta đã đưa ra cách giải trọn vẹn cho câu hỏi mở của bài báo "*Cách giải một dạng phương trình vô tỉ*" trong TH&TT số 442, tháng 4/2014 mà nhiều bạn đọc quan tâm, đồng thời qua bài viết này, bạn đọc còn có thể sáng tạo ra nhiều bài toán mới để vận dụng cách giải trên.

MỘT TÍNH CHẤT THÚ VỊ CỦA tam thức bậc hai & nhị thức bậc nhất

VÕ QUỐC BÁ CẨN (*Hà Nội*)

Tam thức bậc hai và nhị thức bậc nhất là hai phần kiến thức quan trọng và gần gũi với học sinh phổ thông khi học môn Toán. Những tính chất đẹp và đặc trưng của chúng đã được sử dụng rất hiệu quả trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán sơ cấp.

Phần lớn các tính chất đó đã được giới thiệu trong nhiều bài viết khác nhau trên các tạp chí như Toán học & Tuổi trẻ, Toán Tuổi thơ, ...

Ở đây, trong bài viết này, chúng tôi xin được giới thiệu cùng các bạn một tính chất khá đặc biệt của tam thức bậc hai và nhị thức bậc nhất mà từ tính chất này với một cách sử dụng khéo léo, ta có thể giải được các bài bất đẳng thức thi Olympic Toán Quốc tế khá dễ dàng.

Tính chất đó chính là:

Định lý. *Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ trên miền $D = [x_1, x_2]$. Đặt: $m = \min\{f(x_1), f(x_2)\}$ và $M = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. Khi đó, ta có các kết quả sau:*

a) Nếu $a = 0$ thì $m \le f(x) \le M$;

b) Nếu $a > 0$ thì $f(x) \le M$;

c) Nếu $a < 0$ thì $f(x) \ge m$.

Việc chứng minh kết quả này khá dễ dàng, xin được dành cho bạn đọc. Ở đây, ta chỉ bàn về ý nghĩa và ứng dụng của nó.

Có thể thấy đây là một kết quả khá quan trọng, có thể được ứng dụng rộng rãi trong lĩnh vực bất đẳng thức và cực trị. Nó chỉ ra rằng:

Với các nhị thức bậc nhất: *Hai biên x_1, x_2 của x cũng chính là hai vị trí mà hàm số sẽ đạt được giá trị lớn nhất (max) và giá trị nhỏ nhất (min) của nó.*

Với các tam thức bậc hai có hệ số cao nhất dương ($a > 0$): *Giá trị lớn nhất của hàm số sẽ đạt được tại x_1 hoặc x_2.*

Ngược lại, ***với các tam thức bậc hai có hệ số cao nhất âm ($a < 0$):*** *Giá trị nhỏ nhất của hàm số sẽ đạt được tại x_1 hoặc x_2.*

Cho nên, tùy theo trường hợp cụ thể, ta chỉ cần xét biên của biến là có thể tìm được cực trị (ứng với từng trường hợp) của hàm $f(x)$. Và ta cũng có thể tận dụng điều này trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức. Chẳng hạn, ta đang có hàm $f(x)$ với $a > 0$ và đề bài yêu cầu chứng minh $f(x) \le K$ với mọi $x \in [x_1; x_2]$. Theo kết quả trên, chỉ cần xét bất đẳng thức này tại $x = x_1$ và $x = x_2$ là đủ. Nếu nó đúng tại hai trường hợp này thì cũng có nghĩa là bài toán được chứng minh xong.

Tính chất này cũng được ứng dụng khá nhiều trong *phương pháp dồn biến để chứng minh bất đẳng thức*, một phương pháp mà hiện nay đã không còn xa lạ với nhiều bạn đọc yêu Toán. Bây giờ, chúng ta sẽ cùng đến với một số thí dụ để minh họa cho tính chất đẹp này.

❄ ***Thí dụ 1.*** *Cho $a, b, c \in [1, 2]$. Chứng minh rằng* $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le 10.$

Lời giải. Quy đồng và khử mẫu, ta thấy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$f(a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 10abc \le 0.$$

Cố định b, c ta thấy $f(a)$ là tam thức bậc hai của a với hệ số cao nhất dương. Do đó, chỉ cần xét $a = 1$ và $a = 2$ là đủ. Nếu bất đẳng thức đúng trong hai trường hợp này thì cũng sẽ đúng trong mọi trường hợp.

Tương tự, ta cũng chỉ cần xét $b, c \in \{1; 2\}$. Từ đó, do tính đối xứng, ta đưa được bài toán về xét tại bốn trường hợp sau:

$$(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 2, 2).$$

Bằng tính toán trực tiếp, ta thấy cả bốn trường hợp đều cho kết quả đúng. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

❄ ***Thí dụ 2.*** *Cho $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, 1]$. Chứng minh rằng*

$$(1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \ge 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Lời giải. Cố định $x_2, \ldots, x_n$. Đặt:

$$f(x_1) = 4(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - (x_1 + \cdots + x_n + 1)^2.$$

Dễ thấy $f(x_1)$ là tam thức bậc hai của x_1 với hệ số cao nhất dương. Và như vậy, $f(x_1)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_1 = 0$ hoặc $x_1 = 1$, suy ra chỉ cần

kiểm tra tính đúng đắn của hai bất đẳng thức, thu được từ bất đẳng thức ban đầu với $x_1 = 0$ và $x_1 = 1$.

Lặp lại các lí luận này với mỗi một trong hai bất đẳng thức thu được, ta nhận được kết quả tương tự: chỉ cần kiểm tra tính đúng đắn của mỗi một trong hai bất đẳng thức tại $x_2 = 0$ và $x_2 = 1$. Tiếp tục lí luận tương tự, chỉ cần kiểm tra tính đúng đắn của tất cả 2^n bất đẳng thức, thu được từ bất đẳng thức ban đầu với một phần (có thể là rỗng) các biến số bằng 0 và phần còn lại bằng 1. Do tính đối xứng của bất đẳng thức ban đầu, có thể xét:

$$\begin{cases} x_1 = \cdots = x_k = 1 \\ x_{k+1} = \cdots = x_n = 0 \end{cases} \quad (0 \le k \le n).$$

Với các giá trị như vậy của biến số, bất đẳng thức ban đầu có dạng $(k+1)^2 \ge 4k$.

Đây là một kết quả hiển nhiên, bởi vì nó tương đương với $(k-1)^2 \ge 0$.

❄ ***Thí dụ 3.*** *Cho a, b, c ∈ [1, 2]. Chứng minh rằng* $a^3 + b^3 + c^3 \le 5abc$.

(*Toán học & Tuổi trẻ*)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, từ giả thiết ta có $2c \ge a \ge b \ge c$. Suy ra

$$a^3 + b^3 + c^3 - 5abc \le 2ca^2 + b^3 + c^3 - 5abc.$$

Từ đây, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$f(a) = 2ca^2 + b^3 + c^3 - 5abc \le 0.$$

Cố định b, c ta thấy $f(a)$ là một tam thức bậc hai với hệ số cao nhất dương và $a \in [b,\ 2c]$. Theo kết quả trên, ta chỉ cần chứng minh $f(b) \le 0$ và $f(2c) \le 0$ là đủ. Thật vậy, ta có $f(b) = b^2(b-2c) + c(c^2 - b^2) \le 0$ và

$$f(2c) = b^3 + 9c^3 - 10bc^2 = (b-c)(b^2 + bc - 9c^2)$$
$$\le (b-c)(4c^2 + 2c^2 - 9c^2) = -3c^2(b-c) \le 0.$$

❄ ***Thí dụ 4.*** *Cho a, b, c, d là các số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$abc + bcd + cda + dab \le \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

(*IMO Shortlist* 1993)

Lời giải. Cố định c, d. Khi đó, từ giả thiết suy ra hai tổng $c + d$ và $a + b$ cũng được cố định. Đặt $x = ab$, ta có $0 \le x \le \frac{(a+b)^2}{4}$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$f(x) = \left(c + d - \frac{176}{27}cd\right)x + cd(a+b) - \frac{1}{27} \le 0.$$

Dễ thấy $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất nên để chứng minh bất đẳng thức trên, ta chỉ cần xét $x = 0$ hoặc $x = \frac{(a+b)^2}{4}$.

Một cách tương đương, ở bất đẳng thức ban đầu, ta chỉ cần xét $ab = 0$ (ứng với $x = 0$) hoặc $a = b$ (ứng với $x = \frac{(a+b)^2}{4}$).

Lí luận tương tự, ta cũng chỉ cần xét $cd = 0$ hoặc $c = d$. Từ đó, để ý ở tính đối xứng của bất đẳng thức đã cho, ta đưa được bài toán về xét một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Có một số bằng 0. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $d = 0$. Khi đó, ta cần chứng minh $abc \le \frac{1}{27}$.

Kết quả này hiển nhiên đúng theo AM-GM:

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Trường hợp 2: $a = b$ *và* $c = d$. Lúc này ta có

$$a + c = \frac{1}{2}$$

và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2ac(a+c) \le \frac{1}{27} + \frac{176}{27}a^2c^2$$
$$\Leftrightarrow (1 - 16ac)(1 - 11ac) \ge 0.$$

Kết quả này hiển nhiên đúng do ta có

$$ac \le \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

❄ ***Thí dụ 5.*** *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \ge 0.$$

(*IMO* 1983)

Lời giải. Ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$a^3b + b^3c + c^3a \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a \ge c \ge b$. (Về nguyên tắc, đây là bất đẳng thức hoán vị nên ta phải xét cả trường hợp $a \ge b \ge c$ nữa mới đầy đủ. Tuy nhiên, ở đây ta lại có thể lược bớt trường hợp này. Bạn đọc hãy tự giải thích vì sao nhé !)

Sử dụng bất đẳng thức *AM-GM*, ta có

$$a^2 \geq 2ac - c^2.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$ab(2ac - c^2) + b^3c + c^3a \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2,$$

hay

$$f(a) = -(b-c)^2a^2 + (c-b)ac^2 + b^2c(b-c) \geq 0.$$

Do hệ số cao nhất của $f(a)$ không dương, $a \in [c;\ b+c)$ và do $f(a)$ liên tục trên $[c;\ b+c]$ nên ta chỉ cần chứng minh $f(c) \geq 0$ và $f(b+c) \geq 0$ là đủ.

Thật vậy, ta có

$$f(c) = bc(b-c)^2 \geq 0$$

và $$f(b+c) = b^3(c-b) \geq 0.$$

❄ ***Thí dụ 6.*** *Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$a^2\left(\frac{b}{c} - 1\right) + b^2\left(\frac{c}{a} - 1\right) + c^2\left(\frac{a}{b} - 1\right) \geq 0.$$

(*Moldova TST* 2006)

Lời giải. Cũng giống như thí dụ trên, ở bài toán này ta chỉ cần xét $a \geq c \geq b$ là đủ (và bạn đọc hãy tự giải thích vì sao). Lúc này, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $\frac{c}{a} \geq 2 - \frac{a}{c}$.

Do đó, chỉ cần chứng minh

$$a^2\left(\frac{b}{c} - 1\right) + b^2\left(1 - \frac{a}{c}\right) + c^2\left(\frac{a}{b} - 1\right) \geq 0,$$

hay

$$f(a) = \left(\frac{b}{c} - 1\right)a^2 + \left(\frac{c^2}{b} - \frac{b^2}{c}\right)a + b^2 - c^2 \geq 0.$$

Do $f(a)$ có hệ số cao nhất không dương, $a \in [c;\ b+c)$ và do $f(a)$ liên tục trên $[c;\ b+c]$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$f(c) \geq 0 \text{ và } f(b+c) \geq 0.$$

Thật vậy, ta có

$$f(c) = \frac{c(b-c)^2}{b} \geq 0$$

và $$f(b+c) = \frac{(b+c)(b-c)^2}{b} \geq 0.$$

❄ ***Thí dụ 7.*** *Cho các cấp số cộng (a_n), (b_n) và số nguyên $m > 2$. Xét m tam thức bậc hai $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_m(x)$ với:*

$$P_k(x) = x^2 + a_kx + b_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Chứng minh rằng nếu hai tam thức $P_1(x)$ và $P_m(x)$ đều không có nghiệm thực thì tất cả các đa thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

(*VMO* 2012)

Lời giải. Gọi d_1, d_2 lần lượt là công sai của (a_n) và (b_n). Khi đó, theo tính chất của cấp số cộng, ta có

$$a_k = a_1 + (k-1)d_1, \quad b_k = b_1 + (k-1)d_2$$

với mọi $k = 1, 2, \ldots, m$.

Ta sẽ chứng minh $a_k^2 - 4b_k < 0$ với mọi $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, hay

$$f(k) = \left[a_1 + (k-1)d_1\right]^2 - 4\left[b_1 + (k-1)d_2\right] < 0.$$

Do $f(k)$ là tam thức bậc hai của k với hệ số cao nhất không âm và $1 \leq k \leq m$ nên để chứng minh bất đẳng thức trên, chỉ cần chứng minh

$$f(1) < 0 \text{ và } f(m) < 0.$$

Thật vậy, ta có $f(1) = a_1^2 - 4b_1 < 0$ và

$$f(m) = \left[a_1 + (m-1)d_1\right]^2 - 4\left[b_1 + (m-1)d_2\right]$$
$$= a_m^2 - 4b_m < 0,$$

do giả thiết $P_1(x)$ và $P_m(x)$ cùng vô nghiệm.

❄ ***Thí dụ 8.*** *Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng $a + b + c \geq ab + bc + ca$.*

(*VMO* 1996)

Lời giải. Từ giả thiết, ta suy ra

$$ab + bc + ca = 4 - abc \text{ và } c = \frac{4 - ab}{a + b + ab}.$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$a + b + \frac{(ab+1)(4-ab)}{a+b+ab} \geq 4.$$

Đặt $S = a + b$ và $P = ab$ thì ta có

$$0 \leq P \leq \min\left\{4,\ \frac{S^2}{4}\right\}.$$

($P \leq \frac{S^2}{4}$ là kết quả quen thuộc, còn $P \leq 4$ được suy ra từ $c = \frac{4-ab}{a+b+ab}$ và $c \geq 0$)

Bất đẳng thức trên trở thành

$$S+\frac{(P+1)(4-P)}{S+P}\ge 4$$
$$\Leftrightarrow f(P)=(P+1)(4-P)+(S-4)(S+P)\ge 0.$$

Cố định S. Ta có $f(P)$ là một tam thức bậc hai với hệ số cao nhất âm và $P\in\left[0,\min\left\{4,\frac{S^2}{4}\right\}\right]$.

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$f(0)\ge 0 \text{ và } f\left(\min\left\{4,\frac{S^2}{4}\right\}\right)\ge 0.$$

Dễ dàng tính được $f(0)=(S-2)^2\ge 0$.

Còn với $f\left(\min\left\{4,\frac{S^2}{4}\right\}\right)$, ta xét như sau:

Nếu $S\ge 4$ thì ta có

$$f\left(\min\left\{4,\frac{S^2}{4}\right\}\right)=f(4)=(S+4)(S-4)\ge 0.$$

Nếu $S\le 4$ thì ta có

$$f\left(\min\left\{4,\frac{S^2}{4}\right\}\right)=f\left(\frac{S^2}{4}\right)$$
$$=\frac{(16-S^2)(S-2)^2}{4}\ge 0.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Lời kết. Các bạn thấy đấy, có những cái thật sự đơn giản nhưng nếu ta biết áp dụng chúng một cách sáng tạo và khéo léo thì có thể biến những cái đơn giản đó thành một phương pháp, một kỹ thuật mới giúp ta có thể giải được các bài toán khó mà trước mắt là phục vụ cho các kỳ thi học sinh giỏi. Bài viết trên vẫn còn nhiều thiếu sót và cần được hoàn thiện thêm, chúng tôi rất mong nhận được sự trao đổi góp ý cùng các bạn đọc gần xa! Cuối cùng, để kết thúc bài viết này, xin được nêu lên một số bài tập mà ta có thể áp dụng tính chất đẹp này để giải:

1. Cho $a,\ b,\ c,\ d\in[0,\ 1]$. Chứng minh rằng

$$a^2(b-d)+b^2(c-a)+c^2(d-b)+d^2(a-c)\le\frac{8}{27}.$$

2. Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1\right)\ge 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right).$$

3. Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\ge(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

(AMM)

4. Cho $a,\ b,\ c,\ d$ là các số không âm có tổng bằng 4. Chứng minh rằng

$$(1+3a)(1+3b)(1+3c)(1+3d)\le 125+131abcd.$$

5. Cho $a,\ b,\ c,\ d$ là các số không âm có tổng bằng 4. Chứng minh rằng

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4abcd\ge 16.$$

6. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c,\ d\ge 0$, ta đều có bất đẳng thức

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd$$
$$\ge a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+c^2d^2.$$

7. Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm $x,\ y,\ z$:

$$x^3+y^3+z^3+k(xy^2+yz^2+zx^2)$$
$$\ge(k+1)(x^2y+y^2z+z^2x).$$

(Mongolia TST 2008)

8. Tìm tất cả các số thực k để bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương $a,\ b,\ c$:

$$\left(\frac{a}{b+c}+k\right)\left(\frac{b}{c+a}+k\right)\left(\frac{c}{a+b}+k\right)\ge\left(\frac{1}{2}+k\right)^3.$$

(Vietnam TST 2009)

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

THỬ KHÔNG DÙNG ĐẠO HÀM

LƯU VĂN BIỀN
GV THPT Hiệp Hòa số 3, Bắc Giang

Như chúng ta đã biết bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức nhiều biến bằng công cụ đạo hàm thường làm theo hướng: Đưa biểu thức về hàm một biến $f(t)$ và xét sự biến thiên của hàm số $f(t)$. Bài viết xin giới thiệu một số bài toán thuộc loại này với lời giải là dùng các bất đẳng thức (BĐT) cơ bản để tìm GTLN,GTNN của hàm số $f(t)$. Khâu quyết định trong cách giải này là dự đoán được giá trị của biến t khi hàm số $f(t)$ đạt GTLN hoặc GTNN. Trong bài viết có sử dụng hai BĐT sau:

1) $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ (*) với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

2) $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2} \le \dfrac{2}{1+ab}$ (**) với $a \ge 0$, $b \ge 0$, $ab \le 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Việc chứng minh các bất đẳng thức (*) và (**) xin dành cho bạn đọc.

★ **Bài toán 1.** *Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz$.*

Lời giải. Với điều kiện của bài toán thì trong ba số x, y, z sẽ có ít nhất một số thuộc $\left[0; \dfrac{1}{3}\right]$.

Không mất tổng quát, giả sử $z \in \left[0; \dfrac{1}{3}\right]$.

Ta có $\begin{cases} x+y=1-z \\ P=(x+y)^2-2xy+z^2+4xyz \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-z \\ P=(1-z)^2+z^2+2(2z-1)xy \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-z \\ xy=\dfrac{P-2z^2+2z-1}{2(2z-1)} \end{cases}$

Áp dụng BĐT $(x+y)^2 \ge 4xy$ ta được:

$(1-z)^2 \ge 4.\dfrac{P-2z^2+2z-1}{2(2z-1)}$

$\Rightarrow (1-z)^2(2z-1) \le 2(P-2z^2+2z-1)$

(vì $2z-1<0$).

Suy ra $2P \ge 2z^3-z^2+1 = f(z)$.

Dự đoán rằng P đạt GTNN khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ nên ta tìm GTNN của $f(z)$ như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy đối với hai số $2z^3$ và $\dfrac{2}{9}z$ ta có: $f(z)=\left(2z^3+\dfrac{2}{9}z\right)-z^2-\dfrac{2}{9}z+1$

$\ge \dfrac{4}{3}z^2-z^2-\dfrac{2}{9}z+1$

$=\dfrac{1}{3}\left(z-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{26}{27} \ge \dfrac{26}{27} \Rightarrow P \ge \dfrac{13}{27}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Vậy GTNN của P là $\dfrac{13}{27}$. ❐

★ **Bài toán 2.** *Xét ba số thực $0 < x \le y \le z \le 4$ thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}$.*

Lời giải. Ta có $x, y, z > 0$ và $1 \le z \le 4$ suy ra $xy=\dfrac{1}{z} \le 1$. Khi đó, áp dụng BĐT (*) và (**) ta có: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 \le 2\left(\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\right) \le$

$\le \dfrac{4}{1+xy} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \dfrac{2}{\sqrt{1+xy}}$.

Suy ra $P \le \dfrac{2}{\sqrt{1+xy}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{z}}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}=$

$=\dfrac{2\sqrt{z}+1}{\sqrt{1+z}}=f(z)$, với $1 \le z \le 4$.

Dự đoán rằng P đạt GTLN khi $z = 4$ nên ta tìm GTLN của $f(z)$ như sau:

Áp dụng BĐT (*) ta có $(2\sqrt{z}+1)^2 \le (4+1)(z+1)$

$$\Rightarrow 2\sqrt{z}+1 \le \sqrt{5(z+1)} \Rightarrow P \le f(z) \le \frac{\sqrt{5(z+1)}}{\sqrt{z+1}} = \sqrt{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}; z = 4$.

Vậy GTLN của P là $\sqrt{5}$. ❐

Nhận xét. Trong lời giải trên, có lẽ chúng ta đã gặp may khi dự đoán P đạt GTLN tại $z = 4$. Nếu hàm số $f(z)$ ở trên không đạt GTLN tại $z = 4$ hoặc $z = 1$ thì việc tìm GTLN của P bằng các BĐT cơ bản là không dễ.

★ Bài toán 3. *(Đề thi ĐH khối B năm 2013)*

Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}.$$

Lời giải. Ta có

$$a^2+b^2+c^2+4 \ge \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(c+2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(c+2)^2\right] \ge \frac{1}{4}(a+b+c+2)^2.$$

Suy ra $\sqrt{a^2+b^2+c^2+4} \ge \frac{1}{2}(a+b+c+2)$. (1)

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}$$

$$\le \frac{1}{2}(a+b)\left[(a+2c)+(b+2c)\right]$$

$$= \frac{1}{6}(3a+3b)(a+b+4c)$$

$$\le \frac{1}{24}(4a+4b+4c)^2 = \frac{2}{3}(a+b+c)^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$P \le \frac{8}{a+b+c+2} - \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Đặt $t = a+b+c$, ta có $t > 0$ và

$$P \le \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2} = f(t).$$

Dự đoán rằng P đạt GTLN khi $a = b = c = 2$, tức là khi $t = 6$ nên ta tìm GTLN của $f(t)$ như sau:

Áp dụng BĐT $\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ ta có:

$$f(t) = 8\left(\frac{1}{\frac{2t}{3}+\left(\frac{t}{3}+2\right)}\right) - \frac{27}{2t^2}$$

$$\le 8.\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{2t}{3}}+\frac{1}{\left(\frac{t}{3}+2\right)}\right) - \frac{27}{2t^2}$$

$$\le 2\left[\frac{3}{2t}+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{t}+\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{27}{2t^2}$$

$$= -\frac{27}{2t^2}+\frac{9}{2t}+\frac{1}{4} = -\frac{3}{2}\left(\frac{3}{t}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{8} \le \frac{5}{8} \Rightarrow P \le \frac{5}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 2$.

Vậy GTLN của P là $\frac{5}{8}$. ❐

★ Bài toán 4. *(Đề thi ĐH khối A năm 2013)*

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a + c)(b + c) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

Lời giải. (Bạn đọc xem chi tiết bước thứ nhất trong TH&TT số 433, tháng 7/2013, trang 8, sau đây chỉ trình bày vắn tắt bước thứ nhất.)

Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$, với $x > 0, y > 0, xy + x + y = 3$ ta chứng minh được $P \ge (x+y-1)^3 - \sqrt{x^2+y^2}$.

Đặt $t = x + y$, khi đó $t \ge 2$ và $P \ge (t-1)^3 - \sqrt{t^2+2t-6} = f(t)$.

Dự đoán rằng P đạt GTNN khi $a = b = c \Leftrightarrow x = y = 1$, tức là khi $t = 2$, nên ta tìm GTNN của $f(t)$ như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$(t-1)^3 = (t^3+4t) - 3t^2 - t - 1 \ge 4t^2 - 3t^2 - t - 1$$

$$= (t^2+4) - t - 5 \ge 4t - t - 5 = 3t - 5.$$

Suy ra $f(t) \ge 3t - 5 - \sqrt{t^2+2t-6}$

$$= 3t - 6 + (\sqrt{2} - \sqrt{t^2+2t-6}) + 1 - \sqrt{2}$$

$$= 3(t-2) - \frac{t^2+2t-8}{\sqrt{2}+\sqrt{t^2+2t-6}} + 1 - \sqrt{2}$$

$$= \left(3 - \frac{t+4}{\sqrt{2}+\sqrt{t^2+2t-6}}\right)(t-2) + 1 - \sqrt{2}$$

$$= A.(t-2) + 1 - \sqrt{2}.$$

Ta sẽ chứng minh $A = 3 - \frac{t+4}{\sqrt{2}+\sqrt{t^2+2t-6}} > 0$ với $t \ge 2$. Thật vậy:

$$A > 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{t^2+2t-6} > t + 4 - 3\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow 4t^2+(5+3\sqrt{2})t+12\sqrt{2}-44>0,$

BĐT này luôn đúng với mọi $t \geq 2$.

Do đó, $f(t) \geq 1-\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $t=2 \Leftrightarrow x=y=1 \Leftrightarrow a=b=c$.

Vậy GTNN của P là $1-\sqrt{2}$. ❐

★ **Bài toán 5.** *Cho hai số thực dương x và y thỏa mãn* $x^4+y^4+\frac{1}{xy}=xy+2$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+y^2}-\frac{3}{1+2xy}.$$

Lời giải. Ta có

$$xy+2=x^4+y^4+\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{1}{xy}$$

$$\geq \frac{1}{2}(2xy)^2+\frac{1}{xy}=2(xy)^2+\frac{1}{xy}.$$

Đặt $xy=t$ thì $t>0$ và

$$t+2 \geq 2t^2+\frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3-t^2-2t+1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t-1)(2t-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

Với điều kiện $x>0, y>0$ và $t=xy \leq 1$, áp dụng BĐT (**) ta có

$$P \leq \frac{4}{1+xy}-\frac{3}{1+2xy}=\frac{4}{1+t}-\frac{3}{1+2t}=f(t).$$

Dự đoán rằng P đạt GTLN khi $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, tức là khi $t=\frac{1}{2}$ nên ta tìm GTLN của $f(t)$ như sau:

Ta có $f(t)=\frac{5t+1}{(1+t)(1+2t)}=\frac{5t+1}{2t^2+3t+1}$,

với $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Áp dụng BĐT Cauchy ta được:

$$2t^2+3t+1=\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)+3t+\frac{1}{2}$$

$$\geq 2t+3t+\frac{1}{2}=\frac{10t+1}{2}.$$

Suy ra $f(t) \leq \frac{2(5t+1)}{10t+1}=1+\frac{1}{10t+1}$

$$\leq 1+\frac{1}{10.\frac{1}{2}+1}=\frac{7}{6} \Rightarrow P \leq \frac{7}{6}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy GTLN của P là $\frac{7}{6}$. ❐

Kết luận. Qua các bài toán trên chúng ta thấy lời giải phụ thuộc nhiều vào việc dự đoán giá trị của biến khi hàm số đạt GTLN, GTNN. Chính vì vậy, ta có thể coi đây là cách giải thứ hai sau khi đã giải bài toán bằng phương pháp đạo hàm. Trong bài viết này, chúng tôi đã cố gắng lựa chọn những kiến thức phù hợp với cả những bạn học sinh THCS.

BÀI TẬP

1. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=x^3+y^3+z^3+6xyz.$$

2. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P=7(xy+yz+zx)-9xyz.$$

3. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P=5(x^2+y^2+z^2)-6(x^3+y^3+z^3).$$

4. *(Đề thi ĐH khối B năm 2010)* Cho ba số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+$$
$$+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

5. *(Đề thi ĐH khối B năm 2009)* Cho $x, y \in \mathbb{R}$ và $(x+y)^3+4xy \geq 2$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=3(x^4+y^4+x^2y^2)-2(x^2+y^2)+1.$$

6. Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $xy+x+y=3$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P=\frac{3x}{y+1}+\frac{3y}{x+1}+\frac{xy}{x+y}-(x^2+y^2).$$

7. Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x+y+1=3xy$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P=\frac{3x}{y(x+1)}+\frac{3y}{x(y+1)}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}.$$

8. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=x^2+y^2+z^2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 9

Câu 1. 2) Ta có $d: y=-\frac{1}{3}x-\frac{m}{3}$. Hoành độ giao điểm của d và (H) là nghiệm của PT $\frac{2x-3}{x-1}=-\frac{1}{3}x-\frac{m}{3}$,

hay $x^2+(m+5)x-m-9=0,\ x\neq 1.$ (*)

Ta có $\Delta=(m+7)^2+12>0$ với mọi m. Suy ra PT (*) có 2 nghiệm phân biệt. Hơn nữa cả hai nghiệm x_1, x_2 đều khác 1. Do đó d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;\ y_1)$, $N(x_2;\ y_2)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(x_1-1;\ y_1)$, $\overrightarrow{AN}=(x_2-1;\ y_2)$.

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=0\Leftrightarrow(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$

$\Leftrightarrow 10x_1x_2+(m-9)(x_1+x_2)+m^2+9=0.$

Đáp số: $m=-6$.

Câu 2. PT đã cho tương đương với

$$\sin 3x-\sin x+2\cos 2x=$$
$$=3(\sin x+1)+\cos x(\sin x+1)$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x+2\cos 2x=$$
$$=(\sin x+1)(\cos x+3)$$
$$\Leftrightarrow(\sin x+1)(2\cos 2x-\cos x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow(\sin x+1)(4\cos^2 x-\cos x-5)=0$$
$$\Leftrightarrow(\sin x+1)(\cos x+1)(4\cos x-5)=0.$$

PT có nghiệm $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 3. Điều kiện: $x\geq -1$. Nhận thấy $x=-1$ là một nghiệm của BPT. Xét $x>-1$, khi đó BPT đã cho tương đương với:

$$4(\sqrt{x+1}-2)+2(\sqrt{2x+3}-3)\leq x^3-x^2-2x-12$$
$$\Leftrightarrow\frac{4(x-3)}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{4(x-3)}{\sqrt{2x+3}+3}\leq(x-3)(x^2+2x+4)$$
$$\Leftrightarrow(x-3)\left(\frac{4}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{4}{\sqrt{2x+3}+3}-(x+1)^2-3\right)\leq 0.$$

Nghiệm của BPT là $x=-1$ và $x\geq 3$.

Câu 4. Ta có $I=\int_0^1\frac{3x}{(x+1)^2}dx+2\int_0^1\frac{\ln(3x+1)}{(x+1)^2}dx.$

Đặt $u=\ln(3x+1)\Rightarrow du=\frac{3dx}{3x+1}$;

$dv=\frac{dx}{(x+1)^2}\Rightarrow v=-\frac{1}{x+1}$. Khi đó

$$I=\int_0^1\frac{3x}{(x+1)^2}dx-\frac{2\ln(3x+1)}{x+1}\Big|_0^1+6\int_0^1\frac{dx}{(3x+1)(x+1)}$$
$$=\int_0^1\left(\frac{3}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}\right)dx-\ln 4+3\int_0^1\left(\frac{3}{3x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{3}{x+1}\Big|_0^1-\ln 4+3\ln|3x+1|\Big|_0^1=-\frac{3}{2}+4\ln 2.$$

Câu 5. $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. Ta có

$$d(M,(SBC))=\frac{1}{2}d(A,(SBC))=\frac{1}{2}d(H,(SBC)).\quad(1)$$

Kẻ $HK\perp BC$ tại K, $HH'\perp SK$ tại H'. Vì $BC\perp(SHK)$ nên $BC\perp HH'\Rightarrow HH'\perp(SBC)$. (2)

Mặt khác $\frac{1}{HH'^2}=\frac{1}{HK^2}+\frac{1}{HS^2}=\frac{11}{24a^2}$

$$\Rightarrow HH'=\frac{2\sqrt{6}a}{\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{66}}{11}a.\quad(3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow d\left(M,(SBC)\right)=\frac{\sqrt{66}}{11}a.$

Câu 6. Ta có $5x^2+\frac{5}{2}(y+z)^2$

$$\leq 5x^2+5(y^2+z^2)=6(xy+yz+zx)$$
$$\leq 6x(y+z)+6.\frac{1}{4}(y+z)^2.$$

Do đó $5x^2-6x(y+z)+(y+z)^2\leq 0$, hay $\frac{y+z}{5}\leq x\leq y+z$. Suy ra $x+y+z\leq 2(y+z)$.

Khi đó $P\leq\sqrt{2(x+y+z)}-\frac{1}{2}(y+z)^2$

$$\leq\sqrt{4(y+z)}-\frac{1}{2}(y+z)^2=2\sqrt{y+z}-\frac{1}{2}(y+z)^2.$$

Đặt $\sqrt{y+z}=t$, khi đó $t\geq 0$ và $P\leq 2t-\frac{t^4}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=2t-\frac{1}{2}t^4$ với $t\geq 0$.

Ta có $f'(t)=2-2t^3$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ ($t\in[0;+\infty)$) ta được $f(t)\leq f(1)=\frac{3}{2}$ với mọi $t\geq 0$.

Max $P=\frac{3}{2}$ đạt được khi $x=1$, $y=z=\frac{1}{2}$.

Câu 7a.

Vì $A \in d$ suy ra $A(-3a+1; 2a+1)$. Vì $M(2; 1)$ là trung điểm của AC suy ra $C(3+3a; 1-2a)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA} = (-3a+1; 2a+4) \\ \overrightarrow{HC} = (3+3a; 4-2a). \end{cases}$$

Từ $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC} = 0 \Rightarrow a = 1$ hoặc $a = -\dfrac{19}{13}$.

Với $a = 1$ thì $A(-2; 3)$, $C(6; -1)$ thỏa mãn.

Với $a = -\dfrac{19}{13}$ thì $C\left(-\dfrac{18}{13}; \dfrac{51}{13}\right)$ không thỏa mãn.

Với $A(-2; 3)$, $C(6; -1)$ ta có

PT $CE: x+17y+11=0$, PT $BC: x-3y-9=0$.

Suy ra $B(3b+9; b) \in BC$, do đó trung điểm của AB là $N\left(\dfrac{3b+7}{2}; \dfrac{b+3}{2}\right)$.

Mà $N \in CE \Rightarrow b = -4 \Rightarrow B(-3; -4)$.

Câu 8a. PT mặt cầu (S) là

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{9}$$

hoặc $(x+5)^2 + (y-4)^2 + (z+4)^2 = \dfrac{4}{9}$.

Câu 9a.

Số các số thuộc M có 3 chữ số là $A_5^3 = 60$.

Số các số thuộc M có 4 chữ số là $A_5^4 = 120$.

Số các số thuộc M có 5 chữ số là $A_5^5 = 120$.

Suy ra số phần tử của M là 60 + 120 + 120 = 300. Các tập con của E có tổng các phần tử bằng 10 gồm

$E_1 = \{1; 2; 3; 4\}$, $E_2 = \{2; 3; 5\}$, $E_3 = \{1; 4; 5\}$.

Gọi A là tập con của M mà mỗi số thuộc A có tổng các chữ số bằng 10.

Từ E_1 lập được số các số thuộc A là 4!

Từ mỗi tập E_2 và E_3 lập được số các số thuộc A là 3!

Suy ra số phần tử của A là 4! + 2.3! = 36.

Xác suất cần tính là $P = \dfrac{36}{300} = 0{,}12$.

Câu 7b. Phương trình đường tròn cần tìm là:

$$(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

hoặc $(C): \left(x - \dfrac{43}{13}\right)^2 + \left(y - \dfrac{51}{13}\right)^2 = \dfrac{1525}{169}$.

Câu 8b.

Vì $(P) // d_1$, $(P) // d_2$ nên (P) có cặp VTCP

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = (1; -1; 1) \\ \overrightarrow{u_2} = (-1; 2; -3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (1; 2; 1).$$

Suy ra PT (P) có dạng $x + 2y + z + D = 0$.

$$d(M, (P)) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|3+D|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 3 \\ D = -9 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} (P): x+2y+z+3=0 & (1) \\ (P): x+2y+z-9=0. & (2) \end{array}\right.$$

Lấy $K(1; 3; 1) \in d_1$ và $N(1; -3; 2) \in d_2$ thử vào các phương trình (1) và (2) ta có

$N \in (P): x+2y+z+3=0$

nên $d_2 \subset (P): x+2y+z+3=0$.

Suy ra $(P): x+2y+z-9=0$.

Câu 9b.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ và mọi số nguyên dương n, theo công thức nhị thức Newton ta có

$$C_n^0 x - C_n^1 x^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^{n+1}$$
$$= \left(C_n^0 - C_n^1 x + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n\right) x = (1-x)^n x.$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 \left(C_n^0 x - C_n^1 x^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^{n+1}\right) dx$

$$= \int_0^1 (1-x)^n x\,dx.$$

Hay $\dfrac{1}{2}C_n^0 - \dfrac{1}{3}C_n^1 + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n+2}C_n^n$

$$= \int_0^1 (1-x)^n dx - \int_0^1 (1-x)^{n+1} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{156}$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 154 = 0 \Leftrightarrow n = 11 \text{ (vì } n \in \mathbb{N}^*).$$

LÊ XUÂN SƠN, TỪ ĐỨC THẢO
(GV THPT chuyên ĐH Vinh)

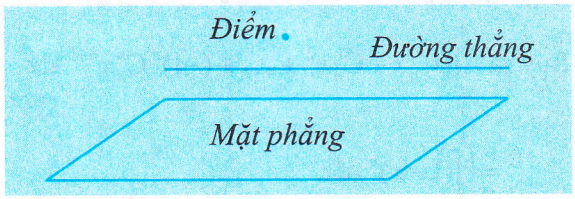
BẠN CÓ BIẾT ?

CHUYỆN LÍ THÚ VỀ "CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN"

PHAN THANH QUANG
(*Theo La Recherche*)

Bài này được đăng trong Tạp chí "*Khoa học và Thiếu niên*" (*Science et Junior* số tháng 4/2010) để phục vụ bạn đọc trẻ yêu Toán.

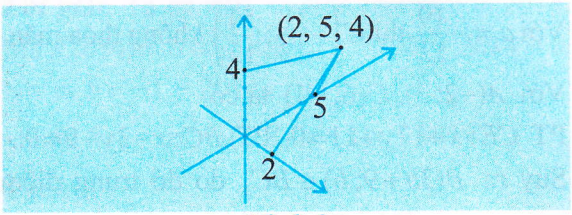
Trong toán học chiều được định nghĩa như thế nào? Ba thế kỷ trước Công nguyên trong tác phẩm "*Các yếu tố*" chuyên bàn về Hình học, *Euclide* đưa ra các định nghĩa: "*Điểm là cái không có thành phần*" tức không thể cắt ra để có nhiều phần và trong đời sống không có cái như vậy. *Euclid* viết tiếp: "*Đường là cái chỉ có bề dài mà không có bề rộng, mà cũng không có bề dày*". Ba đối tượng đó được "định nghĩa", dù có cách nói khác nhau, cũng chỉ ra một cách ẩn tàng không gian 0, 1, 2 chiều (h.1). Còn không gian ba chiều ? *Euclid* cho rằng không cần nói đến, "đó là hiển nhiên"!



Hình 1

CANTOR: MỘT ĐIỂM, ĐỦ RỒI !

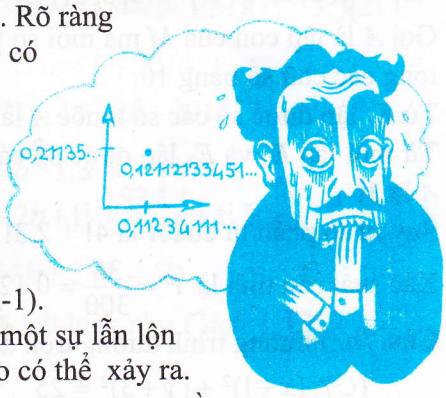
Trong hơn một ngàn năm các nhà Toán học cũng cho rằng các "*định nghĩa*" của Euclid về chiều của không gian như thế là được rồi, và chẳng cần thắc mắc thêm làm gì cho rắc rối. *René Descartes*, vào thế kỷ 17 có sáng tạo ra tọa độ 1, 2, 3 chiều (h.2). Với công cụ đó chiều của một đối tượng hiển nhiên thành số tọa độ cần thiết để xác định nó: trên đường thẳng, chỉ cần cho biết khoảng cách từ điểm đến một điểm cố định tùy chọn gọi là "gốc" và thêm dấu + hay – là xác định được điểm đó. Trên mặt phẳng, mỗi điểm được xác định bởi hai tọa độ. Và cứ thế tiếp tục, người ta có không gian 3 chiều (3 tọa độ), 4 chiều (4 tọa độ), … Thực ra cũng không khác mấy ý tưởng của *Euclid*, nhưng cách thể hiện có khác.



Hình 2

Tất cả mọi việc xem như ổn cả, cho đến năm 1887, nhà Toán học *Georg Cantor* đưa ra một phát minh "động trời" làm đảo lộn hết, một phát minh mà chính tác giả cũng "choáng váng". Trong bức thư gửi cho nhà Toán học *Richard Dedekind* ông viết: "*Tôi thấy nó mà tôi không tin vào nó*". Ông thấy rằng: Muốn xác định một điểm trong không gian chỉ cần một tọa độ!

Trước hết nói về không gian hai chiều: Hãy tự đặt mình vào trong một hình vuông có cạnh là 1. Một điểm trong hình vuông đó được xác định bởi hai số, ví dụ 0,112341… và 0,21135… với một số vô hạn số thập phân. Nhưng chính điểm đó có thể được "mã hóa" bởi số 0,1211213345…, là số có được khi xen kẽ những chữ số thập phân của hai tọa độ (xem hình dưới). Rõ ràng với một số có được bằng cách như trên ứng với một điểm và ngược lại (quan hệ 1-1).



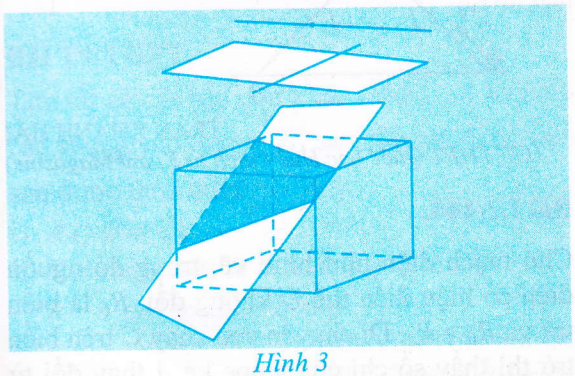
Không có một sự lẫn lộn mơ hồ nào có thể xảy ra.

Đối với không gian ba chiều, thì cách xử lí cũng tương tự. Thay vì cho ba tọa độ ta chỉ cần xen kẽ các chữ số thập phân

các tọa độ theo thứ tự, và cứ thế đối với không gian 4, 5, …, *n* chiều ta chỉ cần một điểm ! Vậy thì phải chăng khái niệm chiều chẳng có ý nghĩa gì cả, và sự phân biệt mà chúng ta gán ghép cho các không gian chẳng qua là cảm tính mà thôi ? Ý nghĩ đó làm "*điên đầu*" *Cantor*.

DEDEKIND: ĐỀ NGHỊ MỚI VỀ CHIỀU

Dedekind trả lời *Cantor* bằng một định nghĩa hoàn toàn mới về chiều của không gian, bắt đầu bằng một một nhận xét rất cụ thể và dễ hiểu: Lấy một đường thẳng, đặt trên đó một điểm bất kì (h.3). Đường thẳng bị chia làm hai phần phân biệt. Ngược lại, đặt một điểm trên mặt phẳng, nó chẳng có vai trò gì giúp ta phân biệt các điểm khác nhau. Đó là một điều khác nhau rất rõ ràng giữa 1 chiều và 2 chiều. Lại tiếp tục: Nếu kẻ một đường thẳng trên mặt phẳng, ta sẽ phân mặt phẳng ra thành 2 phần riêng biệt. Một không gian 3 chiều không thể bị cắt bởi một đường thẳng, mà phải bởi một mặt phẳng. Và cứ thế, "một cách tự nhiên" một mặt phẳng không thể nào phân không gian 4 chiều thành hai phần khác nhau, mà phải có một khối !

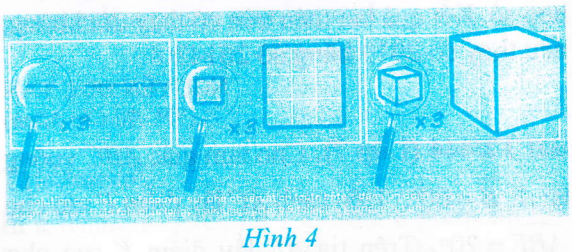


Hình 3

Với cách tiếp cận đó *Dedekind* không những giữ được ý niệm cảm tính về chiều, mà còn đưa ra được những định nghĩa chặt chẽ về chiều.

FELIX HAUSDORFF VỚI ĐỊNH NGHĨA CHIỀU CÓ TÍNH CÁCH MẠNG.

Trước hết nói về *Hình học fractal*, là hình học của những đối tượng mà mô tip tạo hình được lặp lại vô hạn lần. Hình học fractal có số chiều là bao nhiêu ? Rất đơn giản: Khi ta phóng đại một vật dưới kính lúp, có số phóng đại là 3 (làm to lên gấp 3), thì độ dài của nó tăng gấp 3, diện tích tăng gấp 3.3 = 9, và thể tích tăng gấp 3.3.3 = 27 (h.4). Như vậy, có thể nói một đối tượng có số chiều là *n* khi nó lớn lên 3 lũy thừa *n* lần khi nhìn nó qua kính lúp có số phóng đại là 3. Nói cách khác để biết chiều của một đối tượng chỉ cần nhìn xem nó đã lớn lên bao nhiêu lần trong sự phóng đại của chính nó.

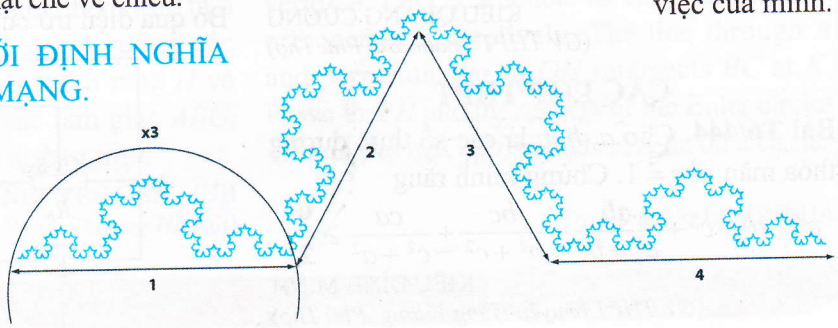


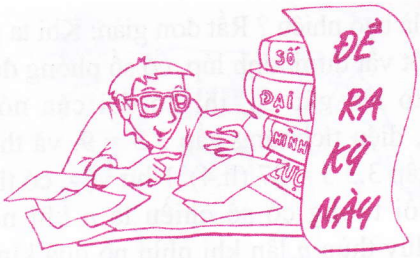
Hình 4

Như vậy người ta có thể "đo" số chiều của của đường cong có tên *Von Koch*, một trong những hình fractal nổi tiếng nhất (xem sơ đồ dưới). Lấy một mẩu của đường cong và phóng đại cho nó to lên 3 lần, ta có toàn bộ hình. Nếu đường cong đó có số chiều là 1, thì hình phóng đại của nó to lên gấp 3 lần. Thế mà các bạn hãy xem, bây giờ nó lại to lên gấp 4 lần ! Có kỳ lạ không ? Nghĩa là nó không có số chiều 1 mà cũng không có số chiều là 2 (vì nếu như thế nó phải to lên gấp 9 lần). Chỉ có thể có kết luận là nó có số chiều khoảng 1,26!

Cuối cùng, ngày nay có nhiều định nghĩa về chiều. Vậy thì chọn định nghĩa nào ? Vấn đề đặt ra là: Bạn muốn định nghĩa chiều để làm gì ?

Tùy theo lĩnh vực mà bạn đang làm việc, chính bạn là người chọn số chiều của đối tượng cho phù hợp với công việc của mình.





CÁC LỚP THCS

Bài T1/444 (Lớp 6). Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số 2013 viết được dưới dạng $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, trong đó $a_1, a_2, \ldots a_n$ đều là hợp số. Kết quả bài toán trên có thay đổi không, nếu thay số 2013 bằng số 2014?

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/444 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = 20^\circ$. Trên tia BE lấy điểm K sao cho $EK = BC$. Tính số đo $\widehat{BCK}$.

NGUYỄN XUÂN BÌNH
(NXB Giáo dục VN)

Bài T3/444. Giải bất phương trình

$$\frac{x^2+8}{x+1}+\frac{x^3+8}{x^2+1}+\frac{x^4+8}{x^3+1}+\ldots+\frac{x^{101}+8}{x^{100}+1}\geq 800.$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T4/444. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $\widehat{BAD}$ tù. Qua A vẽ các tia vuông góc với AD, AB lần lượt cắt các cạnh CB, CD tại P và Q. Giả sử đường thẳng PQ cắt đường thẳng BD tại M. Chứng minh rằng $\widehat{MAC} = 90^\circ$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T5/444. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{2x-3}-\sqrt{y}=2x-6\\ x^3+y^3+7(x+y)xy=8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}.\end{cases}$$

KIỀU QUANG CƯỜNG
(GV THPT Thanh Ba, Phú Thọ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/444. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}\geq\frac{9}{2}.$$

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T7/444. Cho tam giác ABC, D là trung điểm của cạnh BC, điểm M tùy ý thuộc khoảng BD. Vẽ hình bình hành $MEAF$ với E thuộc AB và F thuộc AC, MF cắt AD tại H. Đường thẳng qua B song song với EH cắt MF tại K; AK cắt BC tại I. Tính $\frac{IB}{ID}$.

PHAN CUNG ĐỨC
(Hà Nội)

Bài T8/444. Cho dãy số $(v_n)_n$ thỏa mãn

$$\begin{cases}v_1=5\\ v_{n+1}=v_n^4-4v_n^2+2.\end{cases}$$

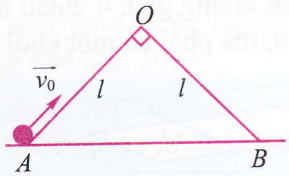
Xác định số hạng tổng quát v_n.

NGUYỄN THỊ MINH NGUYỆT
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/444.

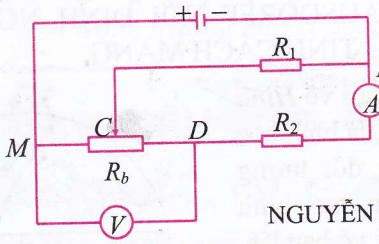
Một quả cầu nhỏ, đàn hồi nằm ở chân nêm có tiết diện là tam giác vuông cân AOB, cố định độ dài hai cạnh bên là l (hình vẽ). Cần truyền cho quả cầu vận tốc $\vec{v_0}$ bằng bao nhiêu hướng dọc mặt nêm để quả cầu rơi đúng điểm B của nêm?



TRẦN KHÁNH HẢI
(GV THPT Quốc học Huế - dịch từ Kvant Magazine)

Bài L2/444.

Cho mạch điện như hình vẽ, trong đó nguồn điện có hiệu điện thế U không đổi, R_b là biến trở và $R_b > R_2$. Di chuyển con chạy C trên biến trở thì thấy số chỉ của ampe kế A thay đổi từ $0{,}08A$ đến $0{,}2A$ và số chỉ của vôn kế V thay đổi từ $16V$ đến $20{,}8V$. Xác định giá trị của U, R_1, R_2 và R_b. Cho biết các dụng cụ đo là lí tưởng. Bỏ qua điện trở của nguồn điện và dây nối.



NGUYỄN NHẬT HUY
(Hà Nội)

(Xem tiếp trang 27)

CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT

KỈ NIỆM 50 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

THE M&Y 50th ANNIVERSARY CONTEST

Bài T9/THCS.

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, p) với p là số nguyên tố, thỏa mãn phương trình

$$8x^3 + y^3 - 6xy = p - 1.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN,ĐHQGHN)

Bài T10/THCS.

Cho tam giác ABC, I là một điểm nằm trên tia phân giác trong của góc BAC. Đường thẳng qua B song song với CI cắt AC tại D; đường thẳng qua C song song với BI cắt AB tại E. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BD, CE. Chứng minh rằng AI vuông góc với MN.

TẠ HỒNG SƠN
(Hà Nội)

Bài T9/THPT.

Tìm tất cả các tập con khác rỗng A, B của tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $A \cap B = \varnothing$;

ii) Với mọi phần tử $a \in A$; $b \in B$ ta có $a + b \in A$ và $2a + b \in B$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T10/THPT.

Cho tam giác ABC không cân tại A có O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác. Đường thẳng qua A vuông góc với OH cắt BC tại K. Chứng minh rằng H và tâm đường tròn Euler của các tam giác ABC, ABK, ACK cùng thuộc một đường tròn.

NGUYỄN VĂN LINH
(SV K50 TCNH, ĐH Ngoại Thương Hà Nội)

T9/Junior.

Find all triple of positive integers (x, y, p) where p is a prime number and

$$8x^3 + y^3 - 6xy = p - 1.$$

T10/Junior.

In a triangle ABC, let I denote a point on the internal angle-bisector of the angle BAC. The line through B and parallel to CI intersects AC at D; the line through C and parallel to BI meets AB at E. Let M, N denote the midpoints of BD, CE respectively. Prove that AI is perpendicular to MN.

T9/Senior.

Find all nonempty subsets A, B of the set of positive integers $\mathbb{Z}^+$ such that the following conditions are satisfied:

i) $A \cap B = \varnothing$;

ii) If $a \in A$; $b \in B$, then $a + b \in A$ và $2a + b \in B$.

T10/Senior.

Let ABC be a triangle, non-isosceles at vertex A. Let O, H denote its circumcenter and orthocenter respectively. The line through A and perpendicular to OH intersects BC at K. Prove that H and the centers of the Euler circles of triangles ABC, ABK, and ACK lie on a circle.

Translated by LEMINHHA

Bài T1/440 (Lớp 6). *Hãy so sánh P và Q, biết*

$$P=\frac{20}{30}+\frac{20}{70}+\frac{20}{126}+...+\frac{20}{798};$$

$$Q=\left(\frac{31}{2}.\frac{32}{2}.\frac{33}{2}...\frac{60}{2}\right):(1.3.5...59).$$

Lời giải. Ta có $P=\frac{10}{15}+\frac{10}{35}+\frac{10}{63}+...+\frac{10}{399}$

$$=5\left(\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+\frac{2}{7.9}+...+\frac{2}{19.21}\right)$$

$$=5\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$$

$$=5\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{7};$$

$$Q=\frac{1.2.3...30}{1.2.3...30}.\frac{31.32.33...60}{\underbrace{2.2.2...2}_{30\text{ thừa số }2}}.\frac{1}{1.3.5...59}$$

$$=\frac{1.2.3...60}{(2.4.6...60).(1.3.5...59)}=1.$$

Do $1<\frac{10}{7}$ nên $Q<P$. ❐

➢ **Nhận xét.**

1. Bài toán sử dụng các kĩ thuật biến đổi phân số quen thuộc. Nếu tính $Q = 1$ trước, ta có thể nghĩ đến việc so sánh P với 1, từ đó tìm cách đánh giá P, chẳng hạn:

Do $\frac{20}{126}>\frac{20}{210}$ suy ra $P>\frac{20}{30}+\frac{20}{70}+\frac{20}{210}=\frac{220}{210}>1.$

Đây chính là cách đánh giá của bạn *Tăng Trung Nghĩa*, 6A, THCS Hòa Hiếu II, Thái Hòa, **Nghệ An**.

2. Thật đáng tiếc, một số bạn giải được bài nhưng kết quả cuối cùng khi tính P và Q lại viết sai; một bạn làm đúng nhưng quên ghi tên và địa chỉ trên bài làm nên không được nêu tên khen kì này.

3. Ngoài bạn *Nghĩa*, các bạn cũng có lời giải đúng là: **Quảng Ngãi:** *Ngô Ngọc Huấn*, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành; **Vĩnh Phúc:** *Dương Tiến Đạt*, 6A2, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Hồ Khắc Huy*, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Đặng Nữ Quỳnh Anh*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T2/440 (Lớp 7). *Cho 2014 điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2014}$ và một đường tròn bán kính 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại điểm M trên đường tròn sao cho $MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_{2014} \geq 2014$.*

Lời giải. Lấy điểm M bất kì trên đường tròn đã cho, kẻ đường kính MN, ta có $MN = 2$. Theo bất đẳng thức tam giác ta có $MA_k + NA_k \geq MN$ hay $MA_k + NA_k \geq 2$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, 2014$).

Cộng từng vế tất các các bất đẳng thức trên ta được $(MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_{2014}) + (NA_1 + NA_2 + \ldots + NA_{2014}) \geq 2.2014$ (*), suy ra tồn tại ít nhất một tổng trong ngoặc ở vế trái của (*) không nhỏ hơn 2014.

Vậy trong hai điểm M, N tồn tại ít nhất một điểm, chẳng hạn M, thỏa mãn

$MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_{2014} \geq 2014$ (đpcm). ❐

➢ **Nhận xét.**

1. Bài toán không khó, chỉ cần áp dụng bất đẳng thức tam giác với ba điểm và sử dụng nguyên lí Dirichlet.

2. Các bạn có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Đặng Quốc Lập*, 7A2, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Ngọc Huyền*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/440. *Chứng minh rằng*

$$n^4 - 5n^3 - 2n^2 - 10n + 4$$

không chia hết cho 49 với mỗi số tự nhiên n không có dư 3 trong phép chia cho 7 và chia hết cho 49 trong trường hợp còn lại.

Lời giải. Chia biểu thức $A = n^4 - 5n^3 - 2n^2 - 10n + 4$ cho $n - 3$ ta được

$$A = (n-3)(n^3 - 2n^2 - 8n - 34) - 98$$
$$= (n-3)[(n-3)(n^2 + n - 5) - 49] - 98$$
$$= (n-3)^2(n^2 + n - 5) - 49(n-1).$$

Xét hai trường hợp.

• Khi $n = 7t + 3$ hay $n - 3 = 7t$ với số nguyên t thì dễ thấy $A = (n-3)^2(n^2 + n - 5) - 49(n-1)$ chia hết cho 49.

• Khi $n = 7t + r$ với số nguyên t và $r \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$ thì dễ thấy $n - 3 = 7t + r - 3$ và $n^2 + n - 5 = n(n+1) + 2 - 7$ cùng không chia hết cho 7, do đó A không chia hết cho 49. ❐

➢ **Nhận xét.**

1. Có thể biến đổi $A = (n^2 + n + 2)(n^2 - 6n + 2) = (n^2 + n + 2)(n^2 - 6n + 9 - 7) = (n^2 + n + 2)[(n-3)^2 - 7]$ rồi xét hai trường hợp như trên.

2. Các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hữu Huy*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Hoàng Thị Thảo Hiền*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, TP. Hội An.

VIỆT HẢI

Bài T4/440. *Giả sử R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của $\widehat{ACB}$ lần lượt cắt đường thẳng AB ở E và ở F. Chứng minh rằng nếu CE = CF thì $4R^2 = AC^2 + BC^2$.*

Lời giải. Do CE, CF là các tia phân giác trong và phân giác ngoài của ΔABC, nên $CE \perp CF$. Vậy ΔECF vuông cân tại C, suy ra

$\widehat{CEA} = 45° = \widehat{ABC} + \widehat{BCE}$. (1)

Mặt khác, $135° = \widehat{CEB}$

$= \widehat{BAC} + \widehat{ECA}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 90°$.

Suy ra $\widehat{BAC}$ tù.

Kẻ đường kính BD thì A khác phía với D so với BC và $\widehat{BCD} = 90°$. Mặt khác, do tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{CBD} + 2\widehat{BCE} = 90°$.

Kết hợp với (1) ta có $\widehat{CBD} + \widehat{ACE} = 45°$. (3)

Lại có CE là tia phân giác của $\widehat{ACB}$, từ (1) và (3) suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{CBD} \Rightarrow CA = CD$.

Áp dụng định lí Pythagore ta có

$AC^2 + BC^2 = CD^2 + BC^2 = BD^2 = 4R^2$. ❐

➢ **Nhận xét.**

Có rất ít bạn tham gia giải bài toán này. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Hà Nội: *Lê Duy Anh*, 9^0, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Phú Thọ:** *Vũ Thuỳ Linh*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Phú Yên:** *Ngô Lê Phương Trinh*, 9E, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hoà; **Nghệ An:** *Đậu Thị Khánh Linh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thuý Ngọc*, 9D, THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/440. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2x\left(1 + \dfrac{1}{x^2 - y^2}\right) = 5 \\ 2(x^2 + y^2)\left(1 + \dfrac{1}{(x^2 - y^2)^2}\right) = \dfrac{17}{2}. \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x \neq \pm y$ (1). Đặt $a = x + y$, $b = x - y$.

Khi đó:

$$a + b = 2x,\ a^2 + b^2 = 2(x^2 + y^2),\ ab = x^2 - y^2.$$

Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} (a+b)\left(1 + \dfrac{1}{ab}\right) = 5 \\ (a^2 + b^2)\left(1 + \dfrac{1}{a^2b^2}\right) = \dfrac{17}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + \dfrac{1}{a} + b + \dfrac{1}{b} = 5 \\ a^2 + \dfrac{1}{a^2} + b^2 + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{17}{2}. \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $u = a + \dfrac{1}{a}$, $v = b + \dfrac{1}{b}$, $|u| \geq 2$, $|v| \geq 2$ (2).

Khi đó : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u^2+v^2=\dfrac{25}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ (u+v)^2-2uv=\dfrac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv=\dfrac{25}{4}. \end{cases}$

Vậy u và v là nghiệm của phương trình:

$$t^2-5t+\frac{25}{4}=0 \Leftrightarrow \left(t-\frac{5}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}.$$

Suy ra $u=v=\dfrac{5}{2}$ (thoả mãn (2)).

Do đó: $\begin{cases} a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{2} \\ b+\dfrac{1}{b}=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-5a+2=0 \\ 2b^2-5b+2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \text{ hoặc } a=\dfrac{1}{2} \\ b=2 \text{ hoặc } b=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Có các trường hợp:

TH1: $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0. \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{4} \\ y=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

TH3: $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2} \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{4} \\ y=-\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

TH4 : $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2} \\ x-y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=0. \end{cases}$

Các cặp giá trị $(x; y)$ tìm được đều thoả mãn ĐK (1). Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là: $(2;0)$, $\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{3}{4}\right)$, $\left(\dfrac{5}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

➢ **Nhận xét.**

Các bạn có lời giải tốt là:

Hà Nội: *Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trâm*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Phú Yên:** *Lê Thị Phương Linh*, 9E, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hoà.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/440. *Xác định hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số nguyên thoả mãn $f(0)=2014$, $f(2014)=0$ và $f(2^n)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n.*

Lời giải. Ta có $f(0)=2014$ suy ra $c=2014$. Mà $f(2014)=0$ nên $2014^2a+2014b+2014=0$, suy ra $b=-1-2014a$. (1)

Do đó $f(x)=ax^2-(2014a+1)x+2014$.

Cách 1.

Khi đó $f(2^{n+1})=2^{2(n+1)}.a+2^{n+1}.b+2014$;

$f(2^n)=2^{2n}.a+2^n.b+2014$ $(n\in\mathbb{N})$.

Theo giả thiết thì $f(2^{n+1})\,\vdots\,3$ và $f(2^n)\,\vdots\,3$

nên $f(2^{n+1})-f(2^n)=3.2^n.a+2^n.b\,\vdots\,3$

suy ra $b\,\vdots\,3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$1+2014a=2013a+(a+1)\,\vdots\,3$,

do đó $a=3k+2$ $(k\in\mathbb{Z})$. Suy ra

$f(x)=(3k+2)x^2-(6042k+4029)x+2014$

với $k\in\mathbb{Z}$.

Thử lại ta thấy $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Cách 2.

Do $f(2^n)\,\vdots\,3$ với mọi $n\in\mathbb{N}$, nên $f(1)\,\vdots\,3$; $f(2)\,\vdots\,3$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=a+b+2014\,\vdots\,3 \\ f(2)=4a+2b+2014\,\vdots\,3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1\,\vdots\,3 \\ a+2b+1\,\vdots\,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\,\vdots\,3 \\ a+1\,\vdots\,3. \end{cases}$

Suy ra $a=3k+2$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Từ đó ta có kết luận như *Cách 1*. ❐

➢ **Nhận xét.**

Các bạn tham gia giải bài này đều cho kết quả đúng và đa số sử dụng kiến thức về đồng dư. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hòa Bình: *Nguyễn Thùy Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bắc Giang:** *Dương Thị Hạnh*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, *Trần Hậu Mạnh Cường*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Long:** *Ngô Hoàng Anh*, Lớp 8/12, THCS Lê Quý Đôn, TP Vĩnh Long; *Huỳnh Hào*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Nai:** *Nguyễn Nam Bình*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10 Toán, PTNK-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/440. *Cho ba số thực dương x, y, z thay đổi thoả mãn xy = 1 + z(x + y). Tìm giá trị lớn nhất của* $P=\dfrac{2xy(xy+1)}{(1+x^2)(1+y^2)}+\dfrac{z}{1+z^2}$.

Lời giải. Ta có

$$xy=1+z(x+y)\Leftrightarrow \frac{1}{xy}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}=1. \quad (1)$$

Đặt $\dfrac{1}{x}=\tan\dfrac{A}{2};\ \dfrac{1}{y}=\tan\dfrac{B}{2};\ z=\tan\dfrac{C}{2}$

với $A, B, C\in(0;\pi)$, ta có (1) trở thành

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$$

Từ đó chứng minh được A, B, C là ba góc của một tam giác.

Ta có

$$2xy(xy+1)=2x^2y^2+2xy\le 2x^2y^2+x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \frac{2xy(xy+1)}{(1+x^2)(1+y^2)}\le\frac{2x^2y^2+x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{y^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}$$

$$\Rightarrow P\le\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}+\frac{z}{1+z^2};$$

$$P\le\frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}$$

$$P\le\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\sin C.$$

Ta được $P\le 1+\dfrac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C)$. (2)

Ta có

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\le 2\cos\frac{A+B}{2}=2\sin\frac{C}{2} \quad (3)$$

(vì $\cos\dfrac{A+B}{2}>0;\ \cos\dfrac{A-B}{2}\le 1$),

đẳng thức xảy ra khi $A=B$.

$$\sin C+\sin\frac{2\pi}{3}=2\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\le 2\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

(vì $\sin\left(\dfrac{C}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)>0;\ \cos\left(\dfrac{C}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)\le 1$),

đẳng thức xảy ra khi $C=\dfrac{2\pi}{3}$.

Do đó $\cos A+\cos B+\sin C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le$

$$\le 2\left(\sin\frac{C}{2}+\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Mà $\sin\dfrac{C}{2}+\sin\left(\dfrac{C}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=$

$$=2\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\le\sqrt{3},$$

đẳng thức xảy ra khi $C=\dfrac{2\pi}{3}$.

Suy ra $\cos A+\cos B+\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. (4)

Từ (2) và (4) ta có $P\le 1+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $C=\dfrac{2\pi}{3};\ A=B=\dfrac{\pi}{6}$.

Vậy $\max P=1+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ khi

$x=y=\cot\dfrac{\pi}{12}=2+\sqrt{3};\ z=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. ❐

➢ **Nhận xét.**

Từ (2), (3) suy ra $P\le 1+\sin\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{2}\sin C=f(C)$; sử dụng đạo hàm khảo sát hàm số $f(C)$ với $C\in(0;\pi)$; suy ra kết quả như trên.

Từ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

$$\Rightarrow \cot\frac{C}{2}=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\tan\frac{A+B}{2}\Rightarrow A+B+C=\pi.$$

Vậy A, B, C là ba góc của một tam giác.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Gia Lai : *Vũ Văn Quý*, 12A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku; **Hà Tĩnh :** *Lê Văn Trường Nhật, Nguyễn Văn Thế*, 10T1, *Trần Hậu Mạnh Cường*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10 Toán, PTNK ĐHQG TP Hồ Chí Minh; **Long An:** *Nguyễn Minh Trí*, 11T1, THPT chuyên Long An.

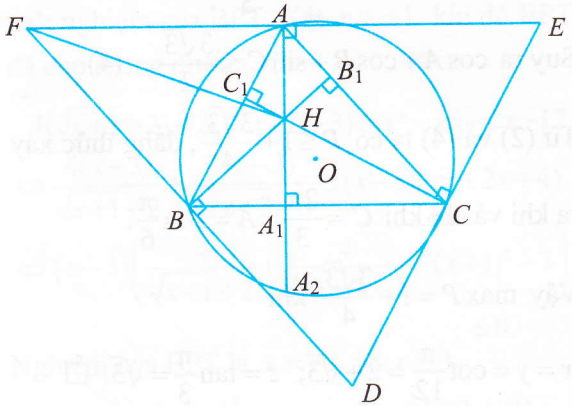
NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T8/440. *Cho tam giác nhọn ABC, ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác đồng quy tại H. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là*

$$HA^2+HB^2+HC^2=4(HA_1^2+HB_1^2+HC_1^2).$$

Lời giải. Qua A, B, C lần lượt kẻ các đường thẳng song song với BC, CA, AB, chúng cắt nhau tạo thành ΔDEF (hình vẽ). Khi đó dễ thấy HA, HB, HC thứ tự là các đường trung trực của EF, FD, DE và do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF. Gọi (O, R) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Theo cách dựng,

$$\Delta ABC \backsim \Delta DEF \Rightarrow \frac{R}{HF}=\frac{BC}{EF}\Rightarrow HF=2R.$$



Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông HAF ta có $HF^2=HA^2+FA^2$

hay $4R^2=HA^2+BC^2$,

suy ra $HA^2=4R^2-BC^2$.

Đặt $S_{HBC}=S_1$; $S_{HAC}=S_2$; $S_{HAB}=S_3$; $S_{ABC}=S$, ta thấy $\frac{HA}{HA_1}=\frac{S_2+S_3}{S_1}\Rightarrow HA=HA_1.\frac{S_2+S_3}{S_1}$;

tương tự:

$$HB=HB_1.\frac{S_1+S_3}{S_2};\ HC=HC_1.\frac{S_1+S_2}{S_3}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $BC\le CA\le AB$

$$\Rightarrow 4R^2-BC^2\ge 4R^2-CA^2\ge 4R^2-AB^2. \quad (1)$$

Kéo dài AA_1 cắt (O) tại A_2. Dễ chứng minh được $A_1H=A_1A_2$. Do đó

$$\mathcal{P}_{H/(O)}=HA.HA_2=HA.2HA_1.$$

Vậy $HA^2=\frac{\mathcal{P}^2_{H/(O)}}{4HA_1^2}$. Tương tự ta có

$$HB^2=\frac{\mathcal{P}^2_{H/(O)}}{4HB_1^2},\ HC^2=\frac{\mathcal{P}^2_{H/(O)}}{4HC_1^2}.$$

Từ (1) suy ra $HA^2\ge HB^2\ge HC^2$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{P}^2_{H/(O)}}{4HA_1^2}\ge\frac{\mathcal{P}^2_{H/(O)}}{4HB_1^2}\ge\frac{\mathcal{P}^2_{H/(O)}}{4HC_1^2}$$

$$\Rightarrow HA_1^2\le HB_1^2\le HC_1^2.$$

Từ đây có $S_1\le S_2\le S_3\Rightarrow \frac{S}{S_1}\ge\frac{S}{S_2}\ge\frac{S}{S_3}$

$$\Rightarrow\left(\frac{S_2+S_3}{S_1}\right)^2\ge\left(\frac{S_1+S_3}{S_2}\right)^2\ge\left(\frac{S_1+S_2}{S_3}\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy đơn điệu ngược chiều ta có $HA_1^2\left(\frac{S_2+S_3}{S_1}\right)^2+$

$$+HB_1^2\left(\frac{S_1+S_3}{S_2}\right)^2+HC_1^2\left(\frac{S_1+S_2}{S_3}\right)^2\ge$$

$$\ge\frac{1}{3}\left(HA_1^2+HB_1^2+HC_1^2\right)\times$$

$$\times\left(\left(\frac{S_2+S_3}{S_1}\right)^2+\left(\frac{S_1+S_3}{S_2}\right)^2+\left(\frac{S_1+S_2}{S_3}\right)^2\right). \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\left(\frac{S_2+S_3}{S_1}\right)^2+\left(\frac{S_1+S_3}{S_2}\right)^2+\left(\frac{S_1+S_2}{S_3}\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{3}\left(\frac{S_2+S_3}{S_1}+\frac{S_1+S_3}{S_2}+\frac{S_1+S_2}{S_3}\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{3}.6^2 = 12. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$HA^2+HB^2+HC^2 \geq 4(HA_1^2+HB_1^2+HC_1^2).$$

Từ đó ta thấy điều kiện cần và đủ để ΔABC đều là

$$HA^2+HB^2+HC^2 = 4(HA_1^2+HB_1^2+HC_1^2). \square$$

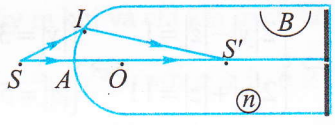
➢ **Nhận xét.**

Ba bạn sau có lời giải tương đối tốt:

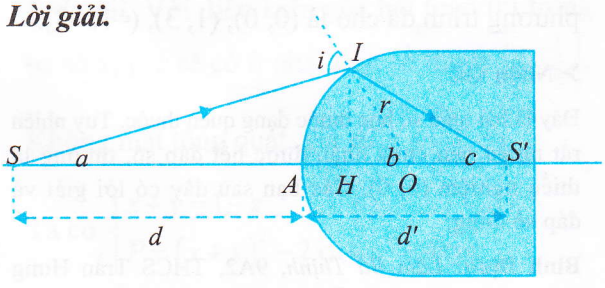
Hà Nam: *Phạm Tiến Khoa*, 9A1, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10 Toán, PTNK-ĐHQG TP Hồ Chí Minh.

HỒ QUANG VINH

Bài L1/440. *Một ống nghiệm thuỷ tinh mỏng có đáy là một nửa mặt cầu C có bán kính R = 15cm, chứa đầy chất lỏng trong suốt chiết suất n' = 1,6. Ống được nút kín và đặt nằm ngang. Một điểm sáng S đặt trên trục đối xứng AO và cách A là 240cm. Hãy xác định vị trí ảnh S' của S được tạo bởi các tia sáng xuất phát từ S không nghiêng quá so với trục AO.*



Lời giải.



Theo định luật khúc xạ ánh sáng ta có:

$$n\sin i = n'\sin r \qquad (1)$$

Vì góc i và r nhỏ nên tính gần đúng ta có:

$$ni = n'r \qquad (2)$$

Từ hình vẽ ta có:

$$i = a + b \qquad (3)$$

$$r = b - c \qquad (4)$$

Thay (3) và (4) vào (2) ta thu được:

$$n(a+b) = n'(b-c) \qquad (5)$$

Ta lại có: $a = \frac{IH}{SH} \approx \frac{IH}{SA} = \frac{IH}{d}$; $b = \frac{IH}{OH} \approx \frac{IH}{R}$;

$c = \frac{IH}{S'H} \approx \frac{IH}{d'}$ (vì các góc a, b, c nhỏ).

Thay các giá trị của a, b và c vào (5), ta được:

$$n\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{d}\right) = n'\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d'}\right) \Rightarrow d' = \frac{n'Rd}{(n'-n)d-nR}.$$

Thay số thu được kết quả: $d' = 44{,}65$cm. $\square$

➢ **Nhận xét.**

Các bạn có lời giải đúng:

Bình Phước: *Nguyễn Văn Hùng*, 11B, THPT chuyên Quang Trung; **Quảng Ngãi:** *Bùi Vũ Hoàn*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

ĐẶNG THANH HẢI

Bài L2/440. *Một quả bóng được thả rơi từ độ cao h = 2m so với sàn nằm ngang. Sau mỗi va chạm, bóng bảo toàn k = 81% cơ năng. Hỏi sau thời gian bao lâu thì bóng dừng lại? Trong thời gian đó bóng đi được quãng đường bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Ban đầu cơ năng của vật là $W = mgh$. Sau khi chạm đất lần thứ nhất, cơ năng của vật còn $W_1 = kmgh$, vật lên đến độ cao $h_1 = kh$. Sau khi chạm đất lần thứ n, cơ năng của vật còn $W_n = k^n mgh$, vật lên đến độ cao $h_n = k^n h$.

Tổng quãng đường vật đi được:

$$S = h + 2h_1 + 2h_2 + ... + 2h_n$$
$$= h + 2h(k + k^2 + ... + k^n).$$

Với n rất lớn ta tìm được:

$$S = h + 2h\frac{k}{1-k} \approx 19{,}05\text{m}.$$

Tổng thời gian quả bóng chuyển động là:

$$T = t_0 + 2t_1 + 2t_2 + ... + 2t_n,$$

trong đó $t_i = \sqrt{\frac{2h_i}{g}}$ $(i = 1; 2; \ldots; n)$.

Từ đó tìm được:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\sqrt{k} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\sqrt{k^2} + \ldots + 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\sqrt{k^n}$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\sqrt{k} + \sqrt{k^2} + \ldots + \sqrt{k^n}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1 + \frac{2\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right) \approx 12\text{s}. \ \square$$

➢ **Nhận xét.**

Các bạn có lời giải đúng:

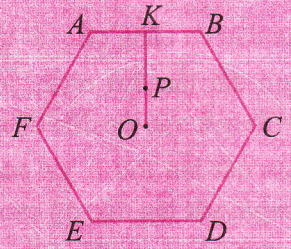
Quảng Ngãi: *Bùi Vũ Hoàn*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Phước:** *Nguyễn Văn Hùng*, 11B, THPT chuyên Quang Trung.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PHÂN CHIA LỤC GIÁC ĐỀU

Giải trí toán học

Cho lục giác đều $ABCDEF$ với tâm O. Gọi K là trung điểm cạnh AB.



Với mỗi điểm P trên đoạn KO (P khác K), hãy tìm điểm M trên cạnh CD, điểm N trên cạnh FE và kẻ các đoạn thẳng PK, PM, PN để chia lục giác đều thành ba ngũ giác lồi sao cho diện tích các ngũ giác đó đều bằng nhau.

PHI PHI (*Hà Nội*)

Giải bài

CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT

KỈ NIỆM 50 NĂM TẠP CHÍ TH&TT

T1/THCS. *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn phương trình $y^2(x^2 - 1) = x(3x - y)$.*

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*)

Phương trình đã cho có thể viết dưới dạng $x^2(y^2 - 3) = y^2 - xy$ hay $x^2(4y^2 - 11) = (2y - x)^2$.

Từ đây suy ra

hoặc $x^2(4y^2 - 11) = (2y - x)^2 = 0$

hoặc $4y^2 - 11 = z^2$ với $z \in \mathbb{Z}$.

Trường hợp đầu cho ta nghiệm $(x, y) = (0,0)$.

Trường hợp thứ hai cho ta

$$(2|y| - |z|)(2|y| + |z|) = 11$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2|y| - |z| = 1 \\ 2|y| + |z| = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = 3 \\ |z| = 5. \end{cases}$$

Với $y = 3$, thay vào phương trình đã cho ta được $2x^2 + x - 3 = 0$, với $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$.

Với $y = -3$, thay vào phương trình đã cho ta được $2x^2 - x - 3 = 0$, với $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -1$.

Kết luận: Có ba cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình đã cho là $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(-1, -3)$.

➢ **Nhận xét.**

Đây là bài toán số học thuộc dạng quen thuộc. Tuy nhiên rất nhiều bạn chưa nhận được hết đáp số, thường là thiếu nghiệm (0, 0). Các bạn sau đây có lời giải và đáp số đúng:

Bình Định: *Lâm Bá Thịnh*, 9A2, THCS Trần Hưng Đạo, Quy Nhơn; **Đà Nẵng:** *Lê Quang Anh*, 9H, THCS Nguyễn Khuyến, Cẩm Lệ; **Nghệ An:** *Nguyễn Trung Hiếu*; *Hoàng Thị Thảo Hiên*; *Phạm Quang Toàn*; *Nguyễn Quốc Hồng Khánh*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Trần Lê Hiệp*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Tăng Đức Thịnh*; *Ngô Trí Nguyên*; *Trương Diệp Anh*, 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn

Châu; **Phú Thọ:** *Quản Đức Bình*, 9A1; *Chu Thị Ánh*, 8A3; *Nguyễn Hải Dương*; *Nguyễn Hoàng Phi*; *Bùi Hồng Thái*; *Trần Quốc Lập*, 7A3, THCS Lâm Thao; **TP. Hồ Chí Minh:** *Hoàng Huân*, 9A6-09, THCS Trần Đại Nghĩa; **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Thu Uyên*; *Nguyễn Lệ Giang*, 9B; *Trần Thị Tường Vi*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Kon Tum:** *Lê Viết Lưu Thanh*, 8A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Thanh Hóa:** *Lê Viết Hoàng*, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Hà Nam:** *Ngô Trung Kiên*, 9A2, THCS Trần Phú, Phủ Lý.

NGUYỄN VĂN MẬU

T2/THCS. *Cho đa thức*

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 16.$$

Chứng minh rằng

$$P(a).P(b).P(c) \geq 144(ab + bc + ca)$$

với mọi a, b, c là các số thực.

Lời giải. Ta có

$$P(x) = (x^4 - 4x^3 + 4x^2) + (2x^2 - 8x + 8) + x^2 + 8$$
$$= x^2(x-2)^2 + 2(x-2)^2 + x^2 + 8 \geq x^2 + 8,$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$. Do đó

$$P(a).P(b).P(c) \geq (a^2 + 8)(b^2 + 8)(c^2 + 8). \quad (1)$$

Mặt khác $(a^2 + 8)(b^2 + 8) = a^2b^2 + 8a^2 + 8b^2 + 64 = (a^2b^2 - 8ab + 16) + 2(a^2 - 2ab + b^2) + 6(a^2 + 2ab + b^2) + 48 = (ab - 4)^2 + 2(a - b)^2 + 6(a + b)^2 + 48 \geq 6[(a + b)^2 + 8]$.

Suy ra $(a^2 + 8)(b^2 + 8)(c^2 + 8) \geq 6[(a + b)^2 + 8](c^2 + 8) \geq 6((a + b).\sqrt{8} + \sqrt{8}.c)^2$ (theo bất đẳng thức Bunyakovsky) $= 48.(a + b + c)^2 = 24.(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4ab + 4bc + 4ca) = 24.[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 6(ab + bc + ca)] \geq 144.(ab + bc + ca)$. (2)

Từ (1) và (2) ta nhận được bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

➢ **Nhận xét.**

Bất đẳng thức (2) đã có trong một số sách tham khảo. Các bạn học sinh gửi lời giải tới Tòa soạn chủ yếu theo hai cách giải, lời giải trên đây là một cách. Các bạn học sinh sau có lời giải khác hai lời giải đó:

Thanh Hóa: *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Quân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

T1/THPT. *Ta viết vào các ô của bảng 10 × 10 các chữ số 0, 1, 2, 3, …, 9 sao cho mỗi chữ số xuất hiện 10 lần.*

a) Tồn tại hay không một cách viết mà trong mỗi hàng và mỗi cột xuất hiện không quá bốn chữ số khác nhau?

b) Chứng minh tồn tại một dòng hoặc một cột trong đó có ít nhất bốn chữ số khác nhau.

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Như Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**)

a) Tồn tại. Chẳng hạn với cách điền số ở bảng sau thỏa mãn yêu cầu.

1	1	1	1	2	3	7	7	7	7
1	1	1	6	6	6	7	7	7	0
1	1	1	6	6	6	7	7	7	0
2	2	2	6	6	6	8	8	8	0
2	2	2	5	5	5	8	8	8	0
2	2	2	5	5	5	8	8	8	8
3	3	3	5	5	5	9	9	9	0
3	3	3	4	4	4	9	9	9	0
3	3	3	4	4	4	9	9	9	9
6	5	4	4	4	4	0	0	0	0

b) Với mỗi $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, kí hiệu c_i và h_i lần lượt là số cột và số hàng mà i xuất hiện. Gọi S là tổng số các số khác nhau ở mỗi hàng và mỗi cột. Dễ thấy $S = \sum_{i=0}^{9}(c_i + h_i)$.

Do có c_i cột và h_i hàng chứa số i và số i xuất hiện đúng 10 lần nên $c_i.h_i \geq 10$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$c_i + h_i \geq 2\sqrt{c_i.h_i} = 2\sqrt{10} \Rightarrow c_i + h_i \geq 2\left[\sqrt{10}\right] + 1 = 7.$$

Vậy $S \geq 70$.

Theo nguyên lí Dirichlet, luôn tồn tại một dòng hoặc một cột có ít nhất $\left[\frac{70}{20}\right]+1=4$ số khác nhau. ❐

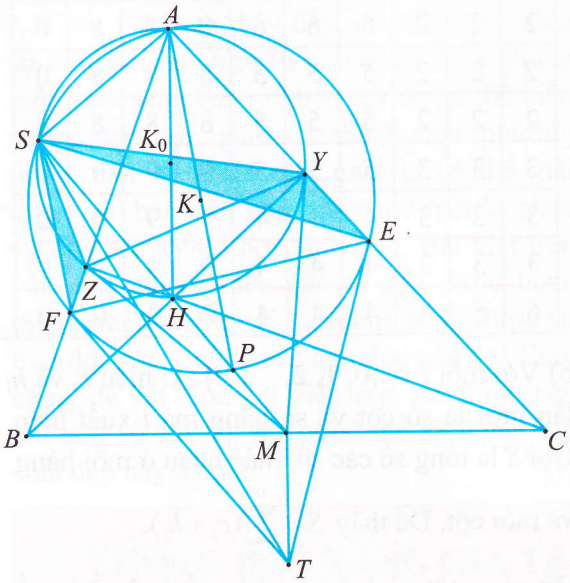
➢ **Nhận xét.**

Ngoài bạn *Hoàng*, các bạn sau đây đã gửi lời giải đúng: **Hà Tĩnh:** *Lê Văn Trường Nhật*; *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10T, PTNK – ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

T2/THPT. *Cho tam giác ABC có H là trực tâm và M là trung điểm của BC. P là một điểm thuộc đường thẳng HM, đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực BC.*

Lời giải. Gọi T là giao điểm của các tiếp tuyến với (K) tại E, F; Y, Z theo thứ tự là giao điểm của CH, BH và CA, AB; (K_0) là đường tròn đường kính AH, S là giao điểm thứ hai của (K) và (K_0). Có hai trường hợp xảy ra.



Trường hợp 1. P trùng với H.

Dễ thấy $E \equiv Y$; $F \equiv Z$. Do đó $T \equiv M$.

Trường hợp 2. P không trùng với H.

Dễ thấy các tam giác SEY và SFZ đồng dạng cùng hướng.

Do đó các tam giác SEF, SYZ đồng dạng cùng hướng (1).

Từ (1), chú ý rằng TE, TF tiếp xúc với (K) tại E, F và MY, MZ tiếp xúc với (K_0) tại Y, Z, suy ra các tam giác TEF, MYZ đồng dạng cùng hướng (2).

Từ (1) và (2) suy ra các tam giác STF, SMZ đồng dạng cùng hướng.

Do đó các tam giác STM, SFZ đồng dạng cùng hướng (3).

Dễ thấy $\widehat{ASH}=90^\circ=\widehat{ASP}$.

Do đó $SH \equiv SP$.

Kết hợp với $P \in HM$, suy ra $SM \equiv SH$ (4).

Từ (3) và (4), chú ý rằng A, S, Z, H cùng thuộc một đường tròn, suy ra

$$\begin{aligned}(TM,AH) &\equiv (TM,FZ)+(FZ,AH)\\ &\equiv (SM,SZ)+(AZ,AH)\pmod{\pi}\\ &\equiv (SH,SZ)+(SZ,SH)\equiv 0\pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Vậy $TM \,//\, AH \perp BC$.

Nói cách khác tiếp tuyến với (K) tại E, F cắt nhau tại một điểm thuộc trung trực của BC. ❐

➢ **Nhận xét.**

1. Đây là bài toán hay nhưng không quá khó, có 10 bạn tham gia giải bài và cùng giải đúng.

2. Xin nêu tên cả 10 bạn: **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế*; *Phạm Quốc Cường*; *Lê Văn Trường Nhật*; *Nguyễn Như Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nam Định:** *Vũ Tuấn Anh*, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Phòng:** *Lương Thế Sơn*, 11T, THPT chuyên Trần Phú; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bình Định:** *Trương Minh Nhật Quang*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10T, Trường PTNK-ĐHQG TP Hồ Chí Minh.

3. Một số bạn có nhận xét đúng: cần có thêm giả thiết $\widehat{BAC} \neq 90^\circ$.

NGUYỄN MINH HÀ

Giải đáp: ĐIỀN SỐ đón xuân Giáp ngọ

GIÁP + NGỌ = 2014

(*Đề đăng trên TH&TT số 440 tháng 2 năm 2014*)

Ta có $1 \le \mathbf{G} \le 2$, nhưng $\mathbf{I} + \mathbf{N} > 0$ nên $\mathbf{G} = 1$. Nếu $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 4 = 0 + 4$ thì $\mathbf{Á} > 0$ và không xảy ra $\mathbf{Á} + 1 = 11$, do đó $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 14$ và $\mathbf{Á} = 9$.

Do $9 \le \mathbf{I} + \mathbf{N} \le 17 = 9 + 8$ nên $\mathbf{I} + \mathbf{N} = 9 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$. Vì $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 14 = 6 + 8$, nên có thể $\mathbf{P} = 6$ và $\mathbf{Q} = 8$, hoặc $\mathbf{P} = 8$ và $\mathbf{Q} = 6$.

Từ đó chỉ có: $\mathbf{I} = 2$ và $\mathbf{N} = 7$,
hoặc $\mathbf{I} = 7$ và $\mathbf{N} = 2$,
hoặc $\mathbf{I} = 4$ và $\mathbf{N} = 5$,
hoặc $\mathbf{I} = 5$ và $\mathbf{N} = 4$.

Bài toán có tám nghiệm sau:

$1296 + 718 = 2014$; $1298 + 716 = 2014$;
$1796 + 218 = 2014$; $1798 + 216 = 2014$;
$1496 + 518 = 2014$; $1498 + 516 = 2014$;
$1596 + 418 = 2014$; $1598 + 416 = 2014$.

Hoan nghênh bạn *Nguyễn Văn Cường*, 11A4, THPT Ba Chúc, Tri Tôn, **An Giang** đã tìm được đủ nghiệm của bài toán.

ĐAN QUỲNH

(Xem Đề ra kì này mục Giải trí toán học ở trang 24)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(*Tiếp theo trang 16*)

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/444 (For 6th grade). Find the maximum possible value of positive integer n such that 2013 can be written as the sum of n compound numbers. How does the answer change if 2013 is replaced by 2014?

T2/444 (For 7th grade). Let ABC be a right triangle, right angle at A, $\widehat{B} = 60^\circ$. Point E on side AC such that $\widehat{ABE} = 20^\circ$. Point K on the half line BE such that $EK = BC$. Find the measure of the angle $\widehat{BCK}$.

T3/444. Solve the inequality

$$\frac{x^2+8}{x+1} + \frac{x^3+8}{x^2+1} + \frac{x^4+8}{x^3+1} + \ldots + \frac{x^{101}+8}{x^{100}+1} \ge 800.$$

T4/444. The quadrilateral $ABCD$ is inscribed in circle (O) where angle $\widehat{BAD}$ is obtuse. The rays through A and perpendicular to AD, AB meet CB, CD at P and Q respectively. PQ intersects BD at M. Prove that $\widehat{MAC} = 90^\circ$.

T5/444. Solve the inequality

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3} - \sqrt{y} = 2x - 6 \\ x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}. \end{cases}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOL

T6/444. The positive real numbers a, b, c satisfy the equation $abc = 1$. Prove the inequality

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{bc}{b^2+c^2} + \frac{ca}{c^2+a^2} \ge \frac{9}{2}.$$

T7/444. Let ABC be a triangle. D is the midpoint of side BC and M is an arbitrary point on segment BD. $MEAF$ is a parallellogram where vertex E lies on AB, F lies on AC, MF and AD intersect at H. The line through B and parallel to EH intersects MF at K; AK meets BC at I. Find the ratio $\frac{IB}{ID}$.

T8/444. The sequence $(v_n)_n$ satisfies

$$\begin{cases} v_1 = 5 \\ v_{n+1} = v_n^4 - 4v_n^2 + 2. \end{cases}$$

Find a closed formula for v_n.

BÀI TOÁN 6 TRONG KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA IRAN NĂM 2013

NGUYỄN VĂN LINH
(SV K50 TCNH ĐH Ngoại Thương, Hà Nội)

I. GIỚI THIỆU BÀI TOÁN

Trong ngày thi thứ hai của kì thi chọn Đội tuyển Quốc gia Iran năm 2013 xuất hiện một bài toán khá thú vị:

Cho 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự cùng nằm trên đường thẳng l. Hai cung ω_1, ω_2 dựng trên dây AB và ω_3, ω_4 dựng trên dây CD sao cho 4 cung này cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng l đồng thời ω_1 tiếp xúc với ω_3 và ω_2 tiếp xúc với ω_4. Chứng minh rằng giao điểm của tiếp tuyến chung ngoài của các cặp cung (ω_2, ω_3) và (ω_1, ω_4) nằm trên l.

Ở bài viết này, tác giả sẽ đưa ra 4 cách chứng minh cho bài toán trên và lời giải cho bài toán tổng quát.

II. LỜI GIẢI BÀI TOÁN

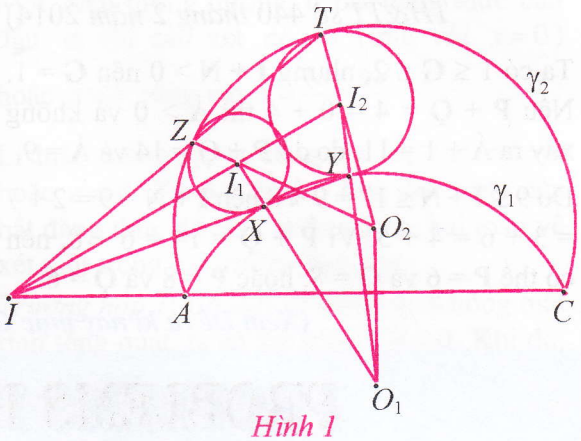
★ *Trước tiên ta phát biểu một số bổ đề.*

Bổ đề 1. *(Định lí Monge - D'Alembert) Cho ba đường tròn $C_1(O_1, R_1)$; $C_2(O_2, R_2)$; $C_3(O_3, R_3)$ phân biệt trên mặt phẳng. Khi đó tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (C_1, C_2); (C_2, C_3); (C_3, C_1) cùng thuộc một đường thẳng. Hai tâm vị tự trong của hai trong ba cặp đường tròn trên và tâm vị tự ngoài của cặp đường tròn còn lại cùng thuộc một đường thẳng.*

Có thể chứng minh *Bổ đề 1* tương đối đơn giản dựa theo định lí Menelaus, xin phép không trình bày lại ở đây.

Bổ đề 2. *Cho hai dây cung γ_1 và γ_2 cùng dựng trên dây AC sao cho chúng cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AC. Gọi C_1, C_2 là hai đường tròn tiếp xúc với γ_1 và γ_2. Khi đó tâm vị tự ngoài của C_1 và C_2 nằm trên AC.*

Chứng minh. *(h.1)* Gọi (O_1, R_1), (O_2, R_2) lần lượt là đường tròn chứa các cung γ_1, γ_2; I là tâm vị tự ngoài của C_1 và C_2. X, Y là tiếp điểm của C_1, C_2 với γ_1; Z, T là tiếp điểm của C_1, C_2 với γ_2.

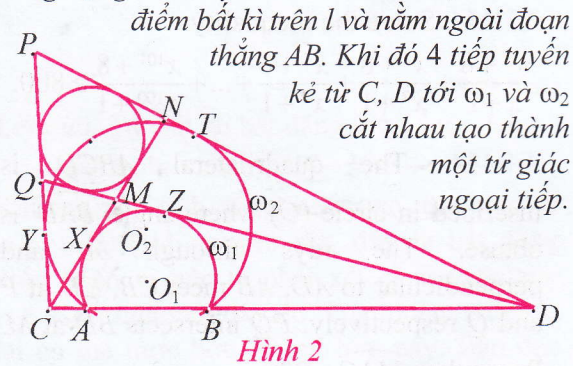


Hình 1

Áp dụng định lí *Monge - D'Alembert* cho bộ ba đường tròn $((O_1), \gamma_1, \gamma_2)$ và $((O_2), \gamma_1, \gamma_2)$ suy ra I, X, Y thẳng hàng và I, Z, T thẳng hàng.

Gọi IA_1A_2 là tiếp tuyến chung ngoài của γ_1, γ_2. Phép nghịch đảo $I_I^{\overline{IA_1}.\overline{IA_2}} : \gamma_1 \mapsto \gamma_2$; đồng thời các cặp đường thẳng I_1Z và I_2T, I_1X và I_2Y không song song nên $\overline{IZ}.\overline{IT} = \overline{IA_1}.\overline{IA_2} = \overline{IX}.\overline{IY}$. Suy ra X, Y, Z, T cùng nằm trên một đường tròn. Ba đường tròn (O_1), (O_2), $(XYTZ)$ có trục đẳng phương lần lượt là AC, XY, ZT nên AC, XY, ZT đồng quy. Từ đó suy ra $I \in AC$.

Bổ đề 3. *Cho hai cung ω_1 và ω_2 cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng l và cùng dựng trên dây AB nằm trên l. C, D là hai điểm bất kì trên l và nằm ngoài đoạn thẳng AB. Khi đó 4 tiếp tuyến kẻ từ C, D tới ω_1 và ω_2 cắt nhau tạo thành một tứ giác ngoại tiếp.*



Hình 2

Chứng minh.

Gọi X và Z ; Y và T lần lượt là các cặp điểm trên ω_1; ω_2 sao cho CX, CY, DZ, DT là các tiếp tuyến của hai đường tròn (O_1) và (O_2) chứa các cung ω_1 và ω_2; $MNPQ$ là tứ giác tạo bởi giao điểm của CX, CY, DZ, DT (*h.2*).

Do C, D nằm trên trục đẳng phương của ω_1 và ω_2 nên $CX = CY$, $DZ = DT$.

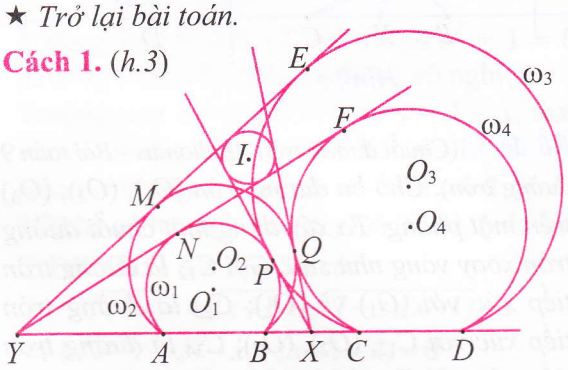
Từ đó $CM + DP = CX + XM + DT + TP$

$= CY + MZ + DZ + PY = CP + DM$.

Theo định lí Pithot suy ra tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp.

★ *Trở lại bài toán.*

Cách 1. (*h.3*)



Hình 3

Gọi (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) lần lượt là các đường tròn chứa các cung ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. P ; Q lần lượt là tiếp điểm của (O_1) và (O_2); (O_3) và (O_4).

Qua P kẻ tiếp tuyến chung trong của (O_1) và (O_3), cắt d tại X.

Ta có $XP^2 = XA.XB = XC.XD$ nên X thuộc trục đẳng phương của (O_2) và (O_4), tức là XQ là tiếp tuyến chung trong của (O_2) và (O_4).

Giả sử tiếp tuyến chung ngoài ME của ω_2 và ω_3 cắt d tại Y, qua Y kẻ tiếp tuyến YN tới ω_1, YF tới ω_2.

Áp dụng *Bổ đề 3* cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) với hai điểm X, Y suy ra YM, YN, XP, XQ cắt nhau tạo thành một tứ giác ngoại tiếp đường tròn (I).

Lại áp dụng *Bổ đề 3* cho hai đường tròn (O_3) và (O_4) với hai điểm X, Y suy ra suy ra YF tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác tạo bởi các đường thẳng XP, XQ, YM hay đường tròn (I). Như vậy YN, YF cùng tiếp xúc với (I), suy ra Y, N, F thẳng hàng (đpcm).

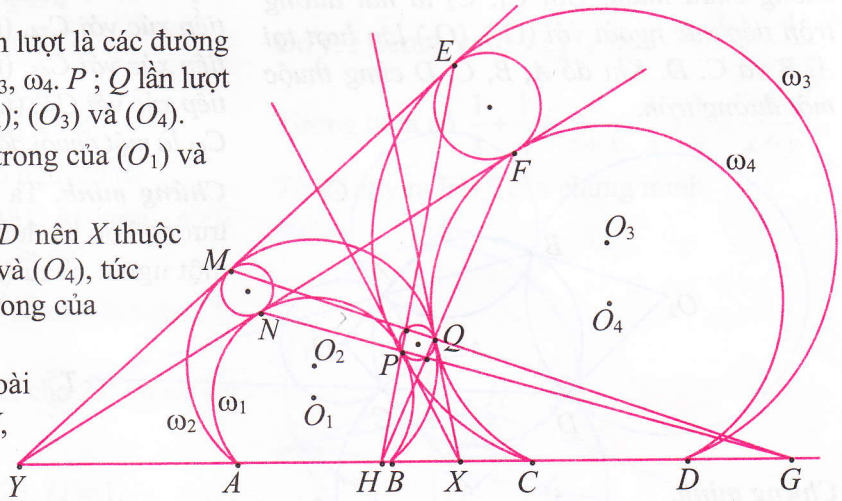
Cách 2. (*h.4*)

Với kí hiệu tương tự như *Cách 1*, tiếp tuyến ME của ω_2 và ω_3 cắt l tại Y, lần lượt kẻ các tiếp tuyến YN, YF tới ω_2 và ω_4. Ta cần chứng minh Y, N, F thẳng hàng.

Do $XP = XQ$, $YM = YN$, $YE = YF$ nên tồn tại đường tròn C_1 lần lượt tiếp xúc với (O_1) và (O_3) tại P ; tiếp xúc với (O_2) và (O_4) tại Q; đường tròn C_2 tiếp xúc với (O_2) tại M và (O_1) tại N; đường tròn C_3 tiếp xúc với (O_3) tại E và (O_4) tại F.

Từ *Bổ đề 2* suy ra MQ cắt NP tại tâm vị tự ngoài G của C_1 và C_2 và $G \in l$, EP cắt FQ tại tâm vị tự ngoài H của C_1 và C_2 và $H \in l$.

Áp dụng định lí Monge-D'Alembert cho ba đường tròn C_1, C_2, C_3 suy ra ME cắt d tại tâm vị tự ngoài của C_2 và C_3, hay Y là tâm vị tự ngoài của C_2 và C_3. Suy ra Y, N, F thẳng hàng.



Hình 4

Cách 3. (*h.5*)

Với ý tưởng tương tự *Cách 2* ta cần chứng minh Y, N, F thẳng hàng.

Như *Cách 2* ta đã chứng minh tồn tại các đường tròn C_1, C_2, C_3.

Từ đó, theo cách chứng minh *Bổ đề 2* suy ra M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn và E, F, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Mặt khác, áp dụng định lí Monge-D'Alembert cho ba đường tròn C_1, (O_2), (O_3) suy ra PQ cắt EM tại tâm vị tự ngoài T của hai đường tròn (O_2) và (O_3).

Suy ra $\overline{TM}.\overline{TE} = \overline{TP}.\overline{TQ}$, nghĩa là M, E, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Như vậy 6 điểm M, N, E, F, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

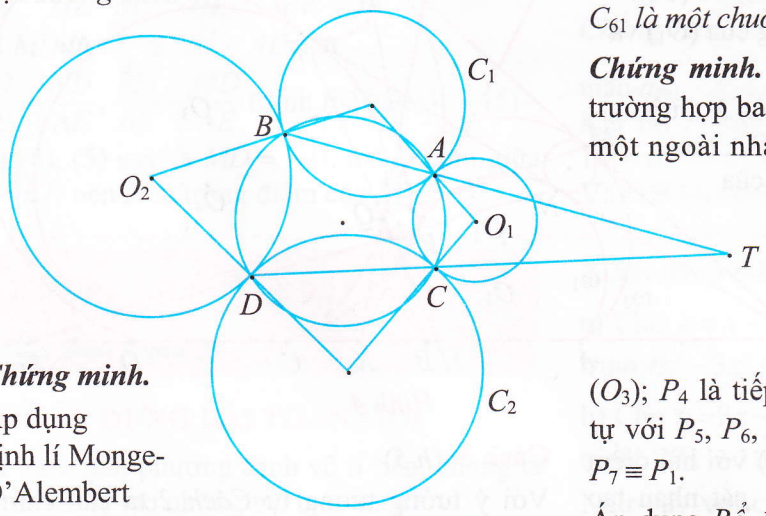
Suy ra tứ giác $MNFE$ nội tiếp.

Giả sử YN cắt đường tròn (Y, YE) tại F'. Do hai đường tròn (Y, YM) và (Y, YN) đồng tâm và hai đường thẳng ME, NF' giao nhau tại Y nên tứ giác $MNF'E$ là hình thang cân, suy ra $MNF'E$ là tứ giác nội tiếp.

Lại có F và F' cùng nằm trên (Y, YN) nên $F \equiv F'$, hay Y, N, F thẳng hàng. Ta có đpcm.

Cách 4. Trước tiên ta phát biểu hai bổ đề sau.

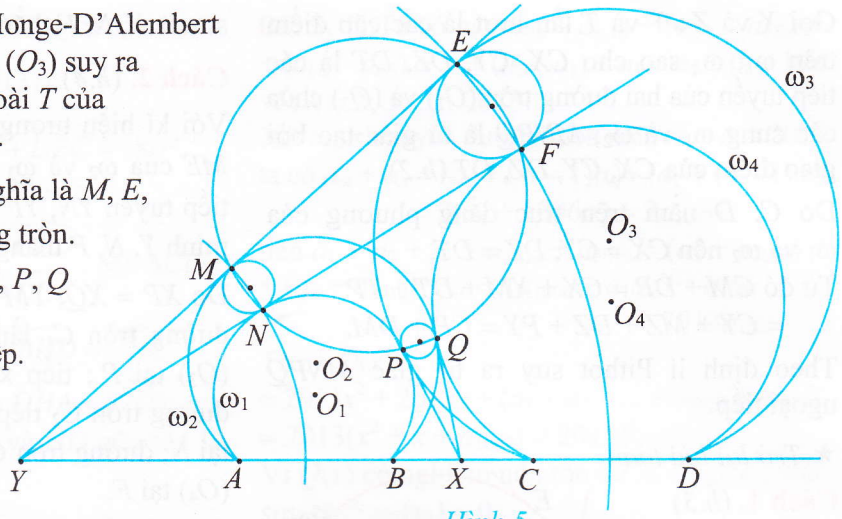
Bổ đề 4. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) không chứa nhau. Gọi C_1, C_2 là hai đường tròn tiếp xúc ngoài với (O_1), (O_2) lần lượt tại A, B và C, D. Khi đó A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.*



Hình 6

Chứng minh. Áp dụng định lí Monge-D'Alembert cho ba đường tròn (O_1), (O_2), C_1 suy ra AB đi qua tâm vị tự ngoài T của (O_1) và (O_2). Tương tự ta cũng có CD đi qua T (*h.6*).

Từ đó $\overline{TA}.\overline{TB} = \overline{TC}.\overline{TD} = k$. Suy ra A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.



Hình 5

Bổ đề 5. *(Chuỗi đường tròn Apollonius - Bài toán 9 đường tròn). Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) trên mặt phẳng. Ta xây dựng một chuỗi đường tròn xoay vòng như sau: Gọi C_{12} là đường tròn tiếp xúc với (O_1) và (O_2); C_{23} là đường tròn tiếp xúc với C_{12}, (O_2), (O_3); C_{34} là đường tròn tiếp xúc với C_{23}, (O_3), (O_1); C_{45} là đường tròn tiếp xúc với C_{34}, (O_1), (O_2); C_{56} là đường tròn tiếp xúc với C_{45}, (O_2), (O_3); C_{61} là đường tròn tiếp xúc với C_{56}, (O_3), (O_1). Khi đó C_{12}, C_{23}, ..., C_{61} là một chuỗi đóng, hay C_{61} tiếp xúc với C_{12}.*

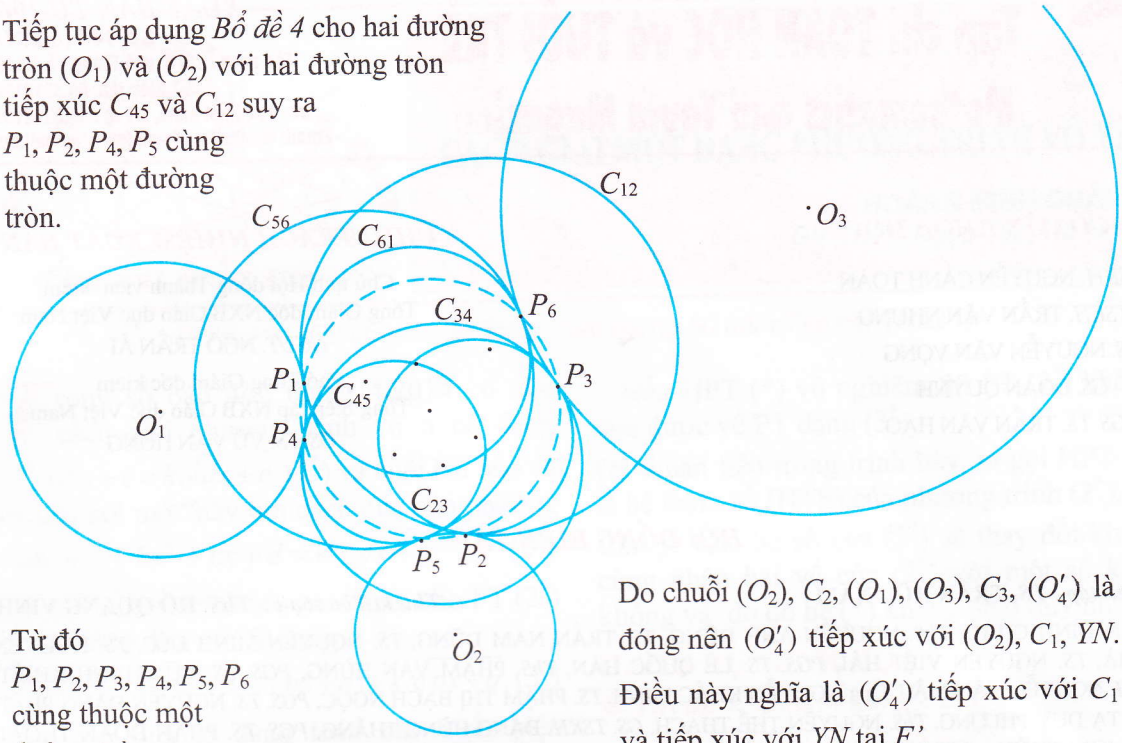
Chứng minh. Ta chứng minh bài toán trong trường hợp ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) đôi một ngoài nhau (*h.7*). Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Gọi P_1, P_2 lần lượt là tiếp điểm của C_{12} với (O_1) và (O_2); P_3 là tiếp điểm của C_{23} với (O_3); P_4 là tiếp điểm của C_{34} với (O_1), tương tự với P_5, P_6, P_7. Như vậy ta cần chứng minh $P_7 \equiv P_1$.

Áp dụng *Bổ đề 4* cho hai đường tròn C_{12} và C_{34} cùng hai đường tròn tiếp xúc C_{23} và (O_1) suy ra P_1, P_2, P_3, P_4 cùng thuộc một đường tròn.

Áp dụng *Bổ đề 4* cho hai đường tròn (O_2) và (O_3) với hai đường tròn tiếp xúc C_{23} và C_{56} suy ra P_2, P_3, P_5, P_6 cùng thuộc một đường tròn.

Tiếp tục áp dụng *Bổ đề 4* cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) với hai đường tròn tiếp xúc C_{45} và C_{12} suy ra P_1, P_2, P_4, P_5 cùng thuộc một đường tròn.



Hình 7

Từ đó $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ cùng thuộc một đường tròn ω.

Áp dụng *Bổ đề 4* cho hai đường tròn (O_1) và (O_3) với hai đường tròn tiếp xúc C_{61} và C_{34} suy ra P_3, P_4, P_6, P_7 cùng thuộc một đường tròn. Từ đó P_7 là giao của ω với (O_1) hay $P_7 \equiv P_1$. Như vậy C_{61} tiếp xúc với C_{12}. Ta có đpcm.

Trở lại bài toán (h.8).

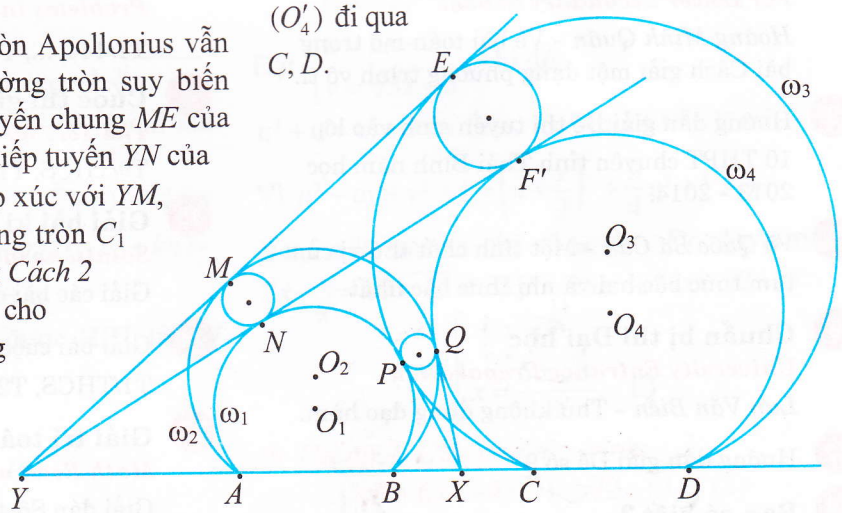
Chú ý rằng chuỗi đường tròn Apollonius vẫn đúng trong trường hợp đường tròn suy biến thành đường thẳng. Tiếp tuyến chung ME của (O_2) và (O_3) cắt l tại Y. Kẻ tiếp tuyến YN của ω_1, dựng đường tròn C_3 tiếp xúc với YM, YN lần lượt tại E, F'. Đường tròn C_1 và C_2 được định nghĩa giống *Cách 2* và *Cách 3*. Áp dụng *Bổ đề 5* cho đường tròn C_1 và hai đường tròn suy biến thành hai đường thẳng YM và YN, ta có: (O_2) tiếp xúc với C_1, YM; C_2 tiếp xúc với (O_2), YM, YN; (O_1) tiếp xúc với C_2, YN, C_1; (O_3) tiếp xúc với (O_1), C_1, YM; C_3 tiếp xúc với (O_3), YM, YN; (O'_4) tiếp xúc với C_3, YN, C_1.

Do chuỗi (O_2), C_2, (O_1), (O_3), C_3, (O'_4) là chuỗi đóng nên (O'_4) tiếp xúc với (O_2), C_1, YN.

Điều này nghĩa là (O'_4) tiếp xúc với C_1 tại P và tiếp xúc với YN tại F'.

Lại có tiếp tuyến tại Q của (O_2) cắt tiếp tuyến tại P của (O_1) tại X và $XP = XQ$ nên X nằm trên trục đẳng phương của (O'_4) và (O_3).

Mà $YE = YF'$ nên Y cũng thuộc trục đẳng phương của (O'_4) và (O_3). Vậy XY là trục đẳng phương của (O'_4) và (O_3) hay (O'_4) đi qua C, D.



Hình 8

Suy ra $(O'_4) \equiv (O_4)$. Ta có đpcm.

(*Kì sau đăng tiếp*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 444 (6.2014)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Trưởng ban biên tập: NGUYỄN ANH QUÂN — *Mĩ thuật:* QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ — *Thiết kế, chế bản:* NGUYỄN DUY

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc

Cuốn sách ảnh

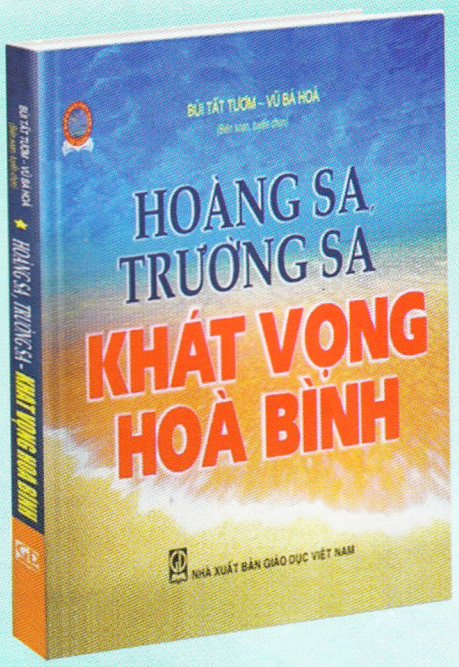
HOÀNG SA, TRƯỜNG SA - KHÁT VỌNG HÒA BÌNH

Với hơn 500 bức ảnh được tuyển chọn công phu từ nhiều nguồn tư liệu trong và ngoài nước, ***"Hoàng Sa, Trường Sa – Khát vọng hòa bình"*** sẽ giúp bạn đọc nắm được một cách khái quát về vị trí địa lí, điều kiện tự nhiên, tiềm năng kinh tế… của hai quần đảo Hoàng Sa và Trường Sa; những tư liệu lịch sử chủ yếu về chủ quyền của Việt Nam đối với hai quần đảo; về cuộc sống nơi tuyến đầu Tổ quốc hiện nay - nơi mà những người dân Việt, dù là ngư dân hay người chiến sĩ, người công nhân... đang kiên cường bám biển, bám đảo; về sự đầu tư đặc biệt của Nhà nước, của các tổ chức, đoàn thể xã hội và nhân dân đã tạo nên sự đổi thay kì diệu của quần đảo Trường Sa.

Nhóm biên soạn đã tuyển chọn kĩ lưỡng các bức ảnh từ nguồn tư liệu phong phú và đa dạng của những phóng viên – nghệ sĩ nhiếp ảnh trực tiếp sáng tạo tại nơi diễn ra những sự kiện được cả cộng đồng quan tâm. Phần lớn các bức ảnh là ảnh báo chí in đậm hơi thở của cuộc sống, vừa mang tính lịch sử, vừa có tính thời sự, lại giàu giá trị nghệ thuật.

Ảnh được sắp xếp theo kiểu phóng sự với lời bình tinh tế, khiến người xem như đang được dõi theo một câu chuyện với nhiều chủ đề. Đặc biệt có những bức ảnh ghi lại những sự kiện hào hùng, bi tráng..., kí thác tâm huyết của người nghệ sĩ - phóng viên ảnh.

Xem và đọc ***"Hoàng Sa, Trường Sa – Khát vọng hòa bình"***, bạn đọc sẽ có những phút giây chăm chú ngắm nhìn những bức ảnh và suy tư về những sự kiện gắn với quá trình lịch sử xây dựng và bảo vệ biển đảo quê hương của biết bao thế hệ Việt Nam.



Tác giả: ***Bùi Tất Tươm, Vũ Bá Hoà***
Khổ sách: 23×25*cm*; Số trang: 200 *trang*
Giá bìa: 119.000 *đồng*

Đây thực sự là tác phẩm tôn vinh chủ nghĩa yêu nước Việt Nam, tôn vinh phẩm chất và khí phách cao đẹp của những ngư dân và những người lính đang ngày đêm bảo vệ chủ quyền thiêng liêng của Tổ quốc ở vùng biển đảo Hoàng Sa, Trường Sa. Đó cũng là tài liệu tham khảo cần thiết, phục vụ trực tiếp việc cập nhật kiến thức biển, đảo; bồi dưỡng, giáo dục cho học sinh về nhiệm vụ bảo vệ chủ quyền biển, đảo quê hương.

Bạn đọc có thể mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị Trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng Sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Website bán hàng trực tuyến: www.sach24.vn Website: www.nxbgd.vn

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI - NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
(Theo chuyên đề)

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ
(Từ lớp 6 đến lớp 9)

BỘ SÁCH ÔN THI VÀO LỚP 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT06M4

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2014

Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng