TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

4 2014 Số 442

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 51
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Kỉ niệm ngày Giải phóng miền Nam

30-4-1975 ★ 30-4-2014

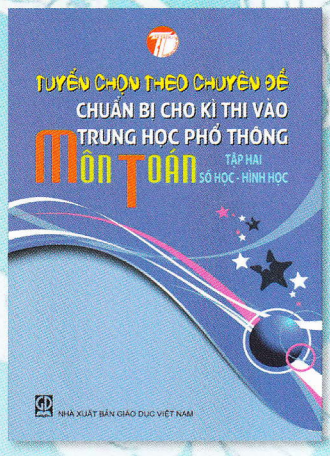
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI VÀO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG MÔN TOÁN

Bộ sách gồm hai tập tuyển chọn theo chuyên đề những bài viết hay trên Tạp chí TH&TT và một số bài viết thêm của các nhà giáo có kinh nghiệm nhằm giúp các bạn HS THCS ôn tập và thi có hiệu quả vào lớp 10 các trường THPT và THPT chuyên. Bộ sách cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh HS.

200 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 35.000 đồng

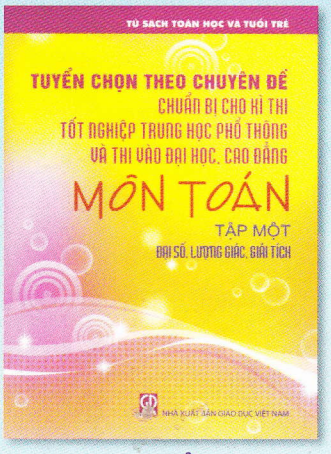


200 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 35.000 đồng

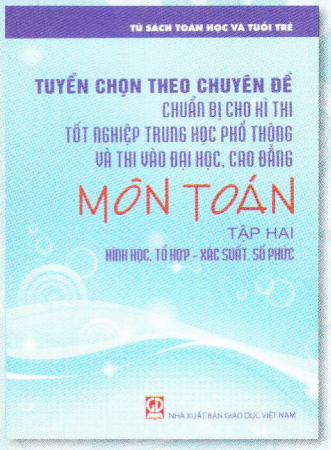
Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Bộ sách có hai tập gồm 10 chương với nhiều chuyên đề được tuyển chọn từ các bài viết của các thầy cô giáo giỏi chuyên môn và có kinh nghiệm giảng dạy trong cả nước, được sắp xếp theo đúng thứ tự trong Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Phần cuối mỗi cuốn giới thiệu một số đề tự luyện và có hướng dẫn giải.



260 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 46.000 đồng



240 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 44.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ: TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
187B, Giảng Võ, Hà Nội
• ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)35121606 • Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

CÁCH GIẢI MỘT DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

LƯU VĂN BIỀN - TRẦN VĂN TỚI
(GV THPT Hiệp Hoà 3, Hiệp Hoà, Bắc Giang)

Trong quá trình làm toán chúng tôi thấy có nhiều phương trình (PT) dạng

$$ax^2+bx+c=k.\sqrt{dx+e} \qquad (1^*)$$

trong đó $b,c,k,d,e\in\mathbb{R}$, a là số hữu tỉ khác không có thể đưa được về dạng

$$(mx+n)^2+k.(mx+n)=(dx+e)+k.\sqrt{dx+e} \quad (2^*)$$

Bài viết này giới thiệu tới bạn đọc một số kĩ năng biến đổi phương trình (1*) về phương trình (2*).

1. LÍ THUYẾT

Ta có PT(1*)

$$\Leftrightarrow ax^2+(b+d)x+c+e=(dx+e)+k.\sqrt{dx+e}.$$

PT này đưa được về dạng (2*) khi và chỉ khi tồn tại các số m và n sao cho

$$(mx+n)^2+k.(mx+n)=ax^2+(b+d)x+c+e$$

$$\Leftrightarrow m^2x^2+(2mn+km)x+n^2+kn$$

$$=ax^2+(b+d)x+c+e.$$

Sử dụng đồng nhất thức ta thu được hệ (ẩn là m và n)

$$\begin{cases} m^2=a \\ 2mn+km=b+d \\ n^2+kn=c+e \end{cases} \qquad (I)$$

Đến đây, ta có kết quả:

- Nếu hệ (I) có nghiệm thì (1*) đưa được về dạng (2*).
- Nếu hệ (I) vô nghiệm thì (1*) không đưa được về dạng (2*).

Để cho thuận tiện trong trình bày ta gọi hệ (I) là hệ tham số (HTS) của PT(1*).

Chú ý. Các hệ số của (1*) sẽ thay đổi nếu ta nhân cả hai vế của (1*) với một số khác không và khi đó HTS của (1*) cũng thay đổi, tức là HTS của (1*) là không duy nhất.

2. THÍ DỤ MINH HỌA

★Thí dụ 1. *Giải phương trình*

$$x^2-3x-1=2\sqrt{x+1} \qquad (1)$$

Phân tích. HTS của (1) là

$$\begin{cases} m^2=1 \\ 2mn+2m=-2 \\ n^2+2n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m=-1 \\ n=0 \end{cases}$$

Do đó, PT(1) đưa được về dạng (2*).

Lời giải

PT(4) $\Leftrightarrow (x-2)^2+2(x-2)=(x+1)+2\sqrt{x+1}$

Đặt $\begin{cases} u=x-2 \\ v=\sqrt{x+1} \end{cases}, (v\ge 0)$. Khi đó ta có

$$u^2+2u=v^2+2v \Leftrightarrow (u-v)(u+v+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=u \\ v=-u-2 \end{array}\right. . \text{ Suy ra } \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=x-2 \\ \sqrt{x+1}=-x \end{array}\right. .$$

Giải các PT này ta được nghiệm

$$x=\frac{5+\sqrt{13}}{2};\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}. \ \square$$

Chú ý. Trong lời giải trên ta đã dùng nghiệm ($m=1$; $n=-2$) của HT để đưa (1) về dạng (2*). Nếu dùng nghiệm ($m=-1$; $n=0$) của HTS thì ta cũng đưa (1) về dạng (2*) và tìm được nghiệm của PT(1).

★Thí dụ 2. *Giải phương trình*

$$2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1} \qquad (2)$$

Phân tích. HTS của (2) là $\begin{cases} m^2=2 \\ 2mn+m=6 \\ n^2+n=2 \end{cases}$,

hệ PT này vô nghiệm. Tuy nhiên, chúng ta đừng vội kết luận là PT(2) không đưa được về dạng (2*). Nếu nhân cả hai vế của PT(2) với 2

thì ta được PT: $4x^2+4x+2=2\sqrt{4x+1}$, PT này có HTS là

$$\begin{cases} m^2=4 \\ 2mn+2m=8 \\ n^2+2n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m=-2 \\ n=-3 \end{cases}.$$

Do đó, PT(2) đưa được về dạng (2*).

Lời giải. PT(2) $\Leftrightarrow 4x^2+4x+2=2\sqrt{4x+1}$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2+2(2x+1)=(4x+1)+2\sqrt{4x+1}$

Đặt $\begin{cases} u=2x+1 \\ v=\sqrt{4x+1} \end{cases}, (v\ge 0)$. Khi đó ta có

$u^2+2u=v^2+2v \Leftrightarrow (u-v)(u+v+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=u \\ v=-u-2 \end{array}\right.$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \sqrt{4x+1}=2x+1 \\ \sqrt{4x+1}=-2x-3 \end{array}\right.$.

Giải các PT này ta được nghiệm $x=0$. ❐

Nhận xét. Thông thường, ta sẽ biến đổi PT(1*) sao cho hệ số của x^2 là bình phương của một số hữu tỉ.

★Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$x^2-x-1=\sqrt{8x+1} \quad (3)$$

Phân tích. HTS của PT(3) là

$$\begin{cases} m^2=1 \\ 2mn+m=7 \\ n^2+n=0 \end{cases}, \text{ hệ PT này vô nghiệm.}$$

Nhân cả hai vế của PT(3) với 4 ta được PT: $4x^2-4x-4=4\sqrt{8x+1}$, PT này có HTS là

$$\begin{cases} m^2=4 \\ 2mn+4m=4 \\ n^2+4n=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} m=-2 \\ n=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=u \\ v=-u-2 \end{array}\right.$.

Do đó PT(3) đưa được về dạng (2*).

Lời giải. PT(3) $\Leftrightarrow 4x^2-4x-4=4\sqrt{8x+1}$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2+4(2x-1)=(8x+1)+4\sqrt{8x+1}$

Đặt $\begin{cases} u=2x-1 \\ v=\sqrt{8x+1} \end{cases}, (v\ge 0)$. Khi đó ta có

$u^2+4u=v^2+4v \Leftrightarrow (u-v)(u+v+4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=u \\ v=-u-4 \end{array}\right.$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \sqrt{8x+1}=2x-1 \\ \sqrt{8x+1}=-2x-3 \end{array}\right.$.

Giải các PT này ta được nghiệm $x=3$. ❐

★Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$\sqrt{3x-2}=-4x^2+21x-22 \quad (4)$$

Phân tích. Nhân cả hai vế của (4) với -1 ta được $4x^2-21x+22=-\sqrt{3x-2}$, PT này có HTS là

$$\begin{cases} m^2=4 \\ 2mn-m=-18 \\ n^2-n=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m=-2 \\ n=5 \end{cases}.$$

Do đó PT(4) đưa được về dạng (2*).

Lời giải. PT(4) tương đương với

$4x^2-21x+22=-\sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow (2x-4)^2-(2x-4)=(3x-2)-\sqrt{3x-2}$

Đặt $\begin{cases} u=2x-4 \\ v=\sqrt{3x-2} \end{cases}, (v\ge 0)$. Khi đó ta có

$u^2-u=v^2-v \Leftrightarrow (u-v)(u+v-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=u \\ v=1-u \end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-2}=2x-4 \\ \sqrt{3x-2}=5-2x \end{array}\right.$.

Giải các PT này ta được các nghiệm:

$$x=\frac{23-\sqrt{97}}{8};\ x=\frac{19+\sqrt{73}}{8}. \ ❐$$

★Thí dụ 5. *Giải phương trình*

$$27x^2+18x=\sqrt{x+\frac{4}{3}} \quad (5)$$

Phân tích. Nhân cả hai vế của PT(5) với 3 ta được $81x^2+54x=\sqrt{9x+12}$, PT này có HTS là

$$\begin{cases} m^2=81 \\ 2mn+m=63 \\ n^2+n=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=9 \\ n=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m=-9 \\ n=-4 \end{cases}.$$

Do đó PT(5) đưa được về dạng (2*).

Lời giải. PT(5) tương đương với

$$81x^2+54x=\sqrt{9x+12}$$

$$\Leftrightarrow (9x+3)^2+(9x+3)=(9x+12)+\sqrt{9x+12}$$

Đặt $\begin{cases} u=9x+3 \\ v=\sqrt{9x+12} \end{cases}, (v\ge 0)$.

Khi đó ta có $u^2+u=v^2+v$

$$\Leftrightarrow (u-v)(u+v+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=u \\ v=-1-u \end{array}\right.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \sqrt{9x+12}=9x+3 \\ \sqrt{9x+12}=-4-9x \end{array}\right.$.

Giải các PT này ta được các nghiệm:

$$x=\frac{-5+\sqrt{37}}{18};\frac{-7-\sqrt{33}}{18}. \square$$

★Thí dụ 6. *Giải phương trình*

$$x^4+\sqrt{x^2+3}=3 \quad (6)$$

Phân tích. Đặt $x^2=t\ge 0$, ta có $t^2-3=-\sqrt{t+3}$,

PT này có HTS là $\begin{cases} m^2=1 \\ 2mn-m=1 \\ n^2-n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=0 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$. Do đó ta có lời giải sau.

Lời giải

PT(6) tương đương với $x^4-3=-\sqrt{x^2+3}$

$$\Leftrightarrow \left(-x^2\right)^2-\left(-x^2\right)=\left(x^2+3\right)-\sqrt{x^2+3}$$

Đặt $\begin{cases} u=-x^2 \\ v=\sqrt{x^2+3} \end{cases}, (u\le 0, v>0)$.

Khi đó, ta có $u^2-u=v^2-v$

$$\Leftrightarrow (u-v)(u+v-1)=0 \Leftrightarrow u+v-1=0$$

(Vì $u-v<0$). Suy ra $\sqrt{x^2+3}=x^2+1$.

Giải PT này ta được nghiệm $x=\pm 1$. $\square$

3. XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH MỚI

Từ cách giải các phương trình vô tỉ có dạng trên, ta có thể sáng tác những phương trình mới.

1. Xét đẳng thức $u^2+3u=v^2+3v$

• Cho $u=2x-1, v=\sqrt{x+2}$ ta được PT:

$$4x^2+x-4=3\sqrt{x+2}.$$

• Cho $u=x-1, v=\sqrt{3x+5}$ ta được PT:

$$x^2-2x-7=3\sqrt{3x+5}.$$

2. Xét đẳng thức $u^2-\frac{1}{2}u=v^2-\frac{1}{2}v$

• Cho $u=x-3, v=\sqrt{x-1}$ ta được PT:

$$2x^2-15x+23+\sqrt{x-1}=0$$

• Cho $u=x, v=\sqrt{2x+1}$ ta được PT:

$$\sqrt{2x+1}=-2x^2+5x+2$$

Như vậy, chúng ta có thể thiết lập được nhiều PT có dạng (1*).

4. KẾT LUẬN

a) Chúng tôi rất mong nhận được cách giải tương tự như trên đối với PT:

$$ax^3+bx^2+cx+d=\sqrt[3]{px+q}.$$

b) PT(1*) đưa được về dạng (2*) khi và chỉ khi PT(1*) đưa được về hệ đối xứng loại 2.

c) Dễ dàng nhận thấy: Nếu PT(1*) đưa được về dạng (2*) thì PT(1*) đưa được về dạng $\left(p+q\sqrt{dx+e}\right)^2=(rx+s)^2$. Theo các bạn, điều ngược lại có đúng không ?

Cuối cùng mời các bạn vận dụng phương pháp trên để giải các phương trình sau:

1. $4x^2+14x+11=4\sqrt{6x+10}$.

2. $x^2+\sqrt{x+5}=5$.

3. $\sqrt{x+1}=x^2+4x+5$.

4. $3\sqrt{x-3}=-x^2+2x-1$.

5. $\sqrt{3x+1}=-4x^2+13x-5$.

6. $7x^2+7x=\sqrt{\frac{4x+9}{28}}$.

7. $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x$.

8. $2x^2+4x=\sqrt{\frac{x+3}{2}}$.

9. $2\sqrt{2x-1}=x^2-2x$.

10. $3x^2+6x-3=\sqrt{\frac{x+7}{3}}$.

11. $\sqrt{2x-1}=x^2-3x+1$.

12. $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$.

13. $x^2-2x-3=\sqrt{x+3}$.

14. $x^2-2=\sqrt{x+2}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH BẮC NINH

NĂM HỌC 2013 - 2014

(Thời gian làm bài: 150 phút)

VÒNG 1

Dành cho tất cả thí sinh

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1. (2 *điểm*)

a) Giải phương trình $2x - 3 = 0$.

b) Với giá trị nào của x thì biểu thức $\sqrt{x-5}$ xác định?

c) Rút gọn biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}.\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Câu 2. (2 *điểm*) Cho hàm số $y = mx + 1$ (1), trong đó m là tham số.

a) Tìm m để đồ thị hàm số (1) đi qua điểm $A(1; 4)$. Với giá trị m vừa tìm được, hàm số (1) đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) song song với đường thẳng (d): $y = m^2x + m + 1$.

Câu 3. (1,5 *điểm*)

Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36km. Khi đi từ B trở về A, người đó tăng vận tốc thêm 3km/h, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

Câu 4. (3 *điểm*)

Cho nửa đường tròn đường kính BC, trên nửa đường tròn đó lấy điểm A (khác B và C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên cung AC lấy điểm D bất kì (khác A và C), đường thẳng BD cắt AH tại I. Chứng minh rằng

a) $IHCD$ là tứ giác nội tiếp;

b) $AB^2 = BI.BD$;

c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AID luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi D thay đổi trên cung AC.

Câu 5. (1,5 *điểm*)

a) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x; y)$ thoả mãn phương trình

$$x^2 + 2y^2 - 3xy + 2x - 4y + 3 = 0.$$

b) Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ là các góc tù. Chứng minh rằng $AC < BD$.

VÒNG 2

Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, Tin

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (1,5 *điểm*) a) Rút gọn biểu thức

$$A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

b) Cho $x = \frac{(\sqrt{3}-1).\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$, tính giá trị của biểu thức $P = (x^2 + 4x - 2)^{2013}$.

Câu 2. (2 *điểm*) Cho phương trình

$$2x^2 - 4mx + 2m^2 - 1 = 0 \ (1),$$

với x là ẩn số, m là tham số.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi hai nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2. Tìm m để $2x_1^2 + 4mx_2 + 2m^2 - 9 < 0$.

Câu 3. (1,5 *điểm*) a) Cho các số dương x, y thoả mãn $x - y = x^3 + y^3$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 < 1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x = y^2 + 1 \\ 2y = z^2 + 1 \\ 2z = x^2 + 1. \end{cases}$

Câu 4. (3 *điểm*) Cho đường tròn tâm O đường kính $BC = 2R$, Điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho tam giác ABC nhọn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với (O) (M, N là hai tiếp điểm). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, F là giao điểm của AH và BC. Chứng minh rằng

a) Năm điểm A, O, M, N, F cùng nằm trên một đường tròn;

b) Ba điểm M, N, H thẳng hàng;

c) $HA.HF = R^2 - OH^2$.

Câu 5. (2 *điểm*)

a) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ thoả mãn $\frac{x + y\sqrt{2013}}{y + z\sqrt{2013}}$ là số hữu tỉ, đồng thời $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

b) Tính diện tích của ngũ giác lồi $ABCDE$, biết các tam giác ABC, BCD, CDE, DEA, EAB cùng có diện tích bằng 1.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TP. HẢI DƯƠNG

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Đề thi đăng trên TH&TT số 441, tháng 3 năm 2014)

Bài 1. Điều kiện xác định: $x > 4$.

Rút gọn $\dfrac{\sqrt{x-4}+2+\left|\sqrt{x-4}-2\right|}{\dfrac{x-4}{x}}$. Nếu $4 < x \le 8$ thì $A = \dfrac{4x}{x-4}$. Nếu $x > 8$ thì $A = \dfrac{2x}{\sqrt{x-4}}$.

• Xét $A = \dfrac{4x}{x-4} = 4 + \dfrac{16}{x-4}$ với $x \in \mathbb{Z}$ và $4 < x \le 8$.

Ta có $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{5; 6; 8\}$.

• Xét $A = \dfrac{2x}{\sqrt{x-4}}$ với $x \in \mathbb{Z}$ và $x > 8$.

Ta có $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x-4} = a \in \mathbb{N}$ và $a > 2$

$\Rightarrow A = \dfrac{2(a^2+4)}{a} = 2a + \dfrac{8}{a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a$ là ước của 8

$\Rightarrow a \in \{4; 8\} \Rightarrow x \in \{20; 68\}$.

Vậy $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$.

Bài 2. a) Điều kiện xác định: $x \ge 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x-1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} = 0 & (1) \\ \sqrt{x-1} - 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Tìm được nghiệm phương trình đã cho là $x = 2$.

b) Điều kiện xác định: $x \ge -8$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sqrt{x+8} - x - 2)(\sqrt{x+8} - 3x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+8} - x - 2 = 0 \\ \sqrt{x+8} - 3x = 0 \end{array}\right.$$

Tìm được nghiệm phương trình đã cho là $x = 1$.

Bài 3. a) Ta có $a^3 = 32 + 3.(-4).a$

$$\Leftrightarrow a^3 + 12a - 31 = 1 \Rightarrow f(a) = 1^{2013} = 1.$$

b) Ta có $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = (x+1)(x+2). \qquad (*)$$

Với x, y nguyên thì VT (*) là số chính phương, VP (*) là tích của hai số nguyên liên tiếp, suy ra

$$(x+y)^2 = (x+1)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1;\ y=1 \\ x=-2;\ y=2 \end{array}\right..$$

Bài 4. $abc = 1$ nên $\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{c^2} + \dfrac{c}{a^2} = \dfrac{a^2}{c} + \dfrac{b^2}{a} + \dfrac{c^2}{b}$

$$\Leftrightarrow a^3c^2 + b^3a^2 + c^3b^2 = a^3b + b^3c + c^3a$$

$$\Leftrightarrow (a^2b^2c^2 - a^3c^2) - (b^3a^2 - a^3b) - (c^3b^2 - c^3a) + (b^3c - abc) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - a)((a^2c^2 - ba^2) - (c^3 - bc)) = 0$$

$\Leftrightarrow (b^2 - a)(c^2 - b)(a^2 - c) = 0$. Suy ra đpcm.

b) Do a, b dương và $1 + b^2 \ge 2b$ với mọi b nên $\dfrac{a}{1+b^2} = a - \dfrac{ab^2}{1+b^2} \ge a - \dfrac{ab^2}{2b} = a - \dfrac{ab}{2}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = 1$. Tương tự ta có $\dfrac{b}{1+c^2} \ge b - \dfrac{bc}{2}$; $\dfrac{c}{1+a^2} \ge c - \dfrac{ca}{2}$, mà $a + b + c = 3$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \qquad (1)$$

Cũng do $a + b + c = 3$ suy ra $(a + b + c)^2 = 9$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 9$, mà

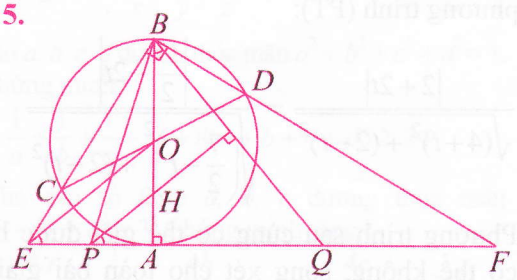
$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}((a^2+b^2) + (a^2+b^2) + (a^2+b^2))$$

$$\ge ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow 3(ab+bc+ca) \le 9 \Rightarrow ab + bc + ca \le 3 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 5.



a) BA là đường cao của $\Delta BPQ \Rightarrow H \in BA$ (1)

Ta có $AB^2 = AE.AF \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AB}{AF} \Rightarrow \dfrac{AE}{AO} = \dfrac{AB}{AQ}$

Ta có $\Delta AEO \backsim \Delta ABQ \Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{ABQ}$.

(Xem tiếp trang 11)

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

KHAI THÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

CAO HẢI VÂN
(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Các bài toán tọa độ trong mặt phẳng trong những kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng, học sinh thường ưu tiên sử dụng các phép suy luận dựa trên những phép toán tọa độ, mà ít coi trọng đến việc khai thác các tính chất hình học đã có. Nếu biết sử dụng hợp lí các tính chất đó thì việc tìm ra lời giải bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Chẳng hạn chúng ta xem hướng giải quyết vấn đề của học sinh mà ở đây chúng tôi tạm gọi là "lối suy nghĩ tự nhiên" thông qua bài toán sau:

Đề bài. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B(–4; 1), trọng tâm G(1; 1) và đường thẳng chứa phân giác trong của góc BAC có phương trình $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A.*

Lời giải. Gọi N là trung điểm của AC. Khi đó $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GN}$. Từ đó $N\left(\frac{7}{2};1\right)$. Vì A thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 1 = 0$ nên $A(t; t-1)$.

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}(1;1)$. Ta có Δ là đường phân giác trong của góc BAC nên $\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right)\right| = \left|\cos\left(\overrightarrow{AN},\vec{u}\right)\right|$. Từ đây ta được phương trình (PT):

$$\frac{|2+2t|}{\sqrt{(4+t)^2+(2-t)^2}} = \frac{\left|\frac{11}{2}-2t\right|}{\sqrt{\left(\frac{7}{2}-t\right)^2+(2-t)^2}}$$

Phương trình sau cùng có thể giải được hoặc có thể không, song xét cho toàn bài giải thì việc lựa chọn phương pháp như trên lại quá cồng kềnh. Nếu như học sinh biết khai thác kết quả: *Với B′ là điểm đối xứng của B qua đường phân giác trong góc BAC thì B′ nằm trên AC* thì việc tìm ra lời giải là rất ngắn gọn. Tức là với giả thiết đã cho ta có thể tìm ra tọa độ B', lập PT đường thẳng AC cũng chính là đường thẳng NB'. Khi đó A là giao điểm của đường phân giác và NB'.

Một bài toán có thể có nhiều cách giải khác nhau, tuy nhiên người học nếu biết huy động hết những kiến thức đã học một cách hợp lí thì lời giải có thể đơn giản hơn. Qua bài viết này chúng tôi muốn trao đổi với bạn đọc một hướng giải quyết các bài toán phương pháp tọa độ trong mặt phẳng bằng cách sử dụng những tính chất hình học phẳng đã được học.

Sau đây là một số thí dụ cụ thể.

Ghi chú. Trong suốt bài viết, các bài toán đều được xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

★Thí dụ 1. *Cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$, hai đỉnh A(2; –3), B(3; –2), trọng tâm G nằm trên đường thẳng $3x - y - 8 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác đó.*

Ta biết rằng nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $S_{GAB} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Nếu biết sử dụng tính chất này thì bài toán sẽ đơn giản hơn nhiều so với "cách giải tự nhiên".

Lời giải. Gọi tọa độ trọng tâm $G(t; 3t-8)$.

Ta có $AB = \sqrt{2}$ và PT đường thẳng

$$AB: x - y - 5 = 0.$$

Theo giả thiết $S_{GAB} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.d(G;AB) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow d(G;AB) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|t-(3t-8)-5|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |3-2t| = 1$$

$\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 2$.

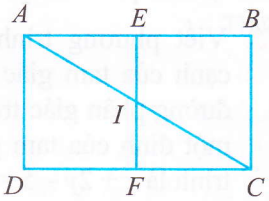
• Với $t = 1$, ta có $G(1; -5)$, từ đó tìm được toạ độ trung điểm I của BC là $\left(\frac{1}{2}; -6\right)$. Do đó $C(-2; -10)$.

• Với $t = 2$, ta có $G(2; -2)$, tìm được toạ độ trung điểm I của BC là $\left(2; -\frac{3}{2}\right)$. Do đó $C(1; -1)$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C(-2; -10)$ và $C(1; -1)$. □

★Thí dụ 2. *Cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ đỉnh A biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.*

Lời giải. (h.1) Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Từ giả thiết ta có $AEFD$ là hình vuông và $\cos\widehat{EAI} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.



Hình 1

Gọi $\vec{n}(a; b)$ là VPTP của đường thẳng AI.

Đường thẳng AB có VTPT $\vec{n}'(1; -2)$.

Từ đó $\cos\widehat{EAI} = \left|\cos(\vec{n}; \vec{n}')\right|$

$$\Leftrightarrow \frac{|a - 2b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 3a^2 + 4ab = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ 3a + 4b = 0 \end{array}\right.$$

• *Trường hợp 1.* $a = 0$, ta có phương trình AI: $y = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}. \text{ Vậy } A(-2; 0).$$

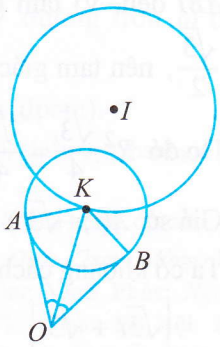
• *Trường hợp 2.* $3a + 4b = 0$, ta có phương trình AI: $4x - 3y - 2 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Trường hợp này không thỏa mãn vì điểm A có hoành độ âm. Vậy đỉnh $A(-2; 0)$. □

★Thí dụ 3. *Cho đường tròn (C): $(x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x - y = 0$; $\Delta_2: x - 7y = 0$. Xác định tọa độ tâm K đường tròn (C') tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1; Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C).*

Lời giải. (h.2) Rõ ràng hai đường thẳng $\Delta_1; \Delta_2$ cắt nhau tại gốc tọa độ $O(0; 0)$. Gọi A và B lần lượt là hai tiếp điểm của (C') với Δ_1; Δ_2. Ta có tam giác OAB cân tại O và K thuộc đường phân giác của góc $\widehat{AOB}$.



Hình 2

Mặt khác ta lại có phương trình đường phân giác của góc $\widehat{AOB}$ là

$$\frac{x - y}{\sqrt{2}} = \pm\frac{x - 7y}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right..$$

Vì K thuộc đường tròn (C) nên tọa độ K là nghiệm của các hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5} \end{cases} \text{(I)} \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5} \end{cases} \text{(II)}$$

Ta có hệ PT(I) vô nghiệm, còn hệ (II) có nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Vậy tọa độ điểm K cần tìm là $\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$. □

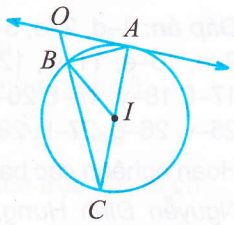
★Thí dụ 4. *Cho hai đường thẳng*

$$\Delta_1: \sqrt{3}x + y = 0 \text{ và } \Delta_2: \sqrt{3}x - y = 0.$$

Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với Δ_1 tại A, cắt Δ_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của đường tròn (T), biết rằng tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải. (h.3)

Giả sử đường tròn (T) có tâm I. Do tam giác ABC vuông tại B nên (T) có bán kính $R = AI = \frac{AC}{2}$.



Hình 3

Kiểm tra được Δ_1 cắt Δ_2 tại gốc tọa độ O và Δ_1 hợp với Δ_2 một góc 60°. Do đó tam giác ABI đều. Vì tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$, nên tam giác ABI có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $R^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$, suy ra $R=1$.

Giả sử $A(t;-\sqrt{3}t)$ $(t>0)$.

Ta có khoảng cách từ A đến Δ_2 : $d(A,\Delta_2)=AB$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\sqrt{3}t+\sqrt{3}t\right|}{2}=1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{3}t\right|=1 \Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(vì $t>0$). Vậy $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-1\right)$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với

$$\Delta_1:\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\sqrt{3}(y+1)=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x-3y-4=0.$$

Khi đó tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0\\ \sqrt{3}x-3y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{2}{\sqrt{3}}\\ y=-2\end{cases}$$

Vậy $I\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}};-\frac{3}{2}\right)$.

Từ đó suy ra phương trình đường tròn (T) là

$$\left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1. \square$$

BÀI TẬP

1. Cho điểm $P(3;\ 0)$ và hai đường thẳng $d_1: 2x-y-2=0$ và $d_2: x+y+3=0$. Gọi d là đường thẳng qua P và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B. Viết phương trình đường thẳng d biết rằng $PA=PB$.

2. Cho hai đường thẳng có phương trình: $d_1: x-y-1=0, d_2: 3x-y+1=0$ và điểm $M(1;\ 2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, cắt d_1 và d_2 lần lượt tại các điểm M_1, M_2 và thỏa mãn một trong các điều kiện sau

a) $MM_1=MM_2$; b) $MM_1=2MM_2$.

3. Viết phương trình đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác ABC biết đỉnh $C(4;\ 3)$, đường phân giác trong và trung tuyến kẻ từ một đỉnh của tam giác lần lượt có phương trình là $x+2y-5=0$ và $4x+13y-10=0$.

4. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(-3;\ 1)$. Gọi T_1 và T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

5. Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Tìm trên (E) các điểm M sao cho $MF_1=4MF_2$, trong đó F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E).

Giải đáp

VÀI NÉT VỀ CÁC CUỘC THI NHO HỌC Ở NƯỚC VIỆT XƯA

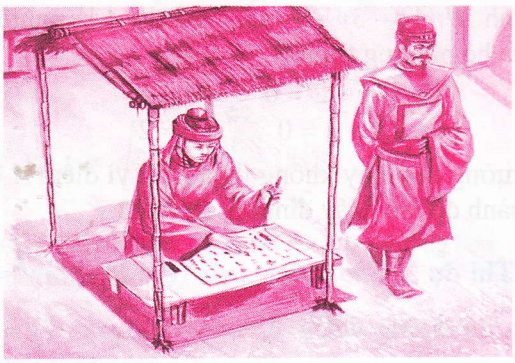
(Đề đăng trên TH&TT số 438 tháng 12 năm 2013)

Đáp án: 1–d, 2–a, 3–b, 4–đ, 5–z, 6–m, 7–x, 8–c, 9–e, 10–e, 11–w, 12–s, 13–u, 14–p, 15–q, 16–r, 17–f, 18–y, 19–t, 20–z, 21–m, 22–x, 23–n, 24–h, 25–v, 26–g, 27–k, 28–i.

Hoan nghênh các bạn có lời giải đúng :

Nguyễn Đình Hưng, *Trịnh Thị Yến Trang*, 9A, THCS Tân Bình, TX. Tam Điệp, **Ninh Bình**; *Trần Nguyên Try*, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Pleiku, **Gia Lai**; *Lê Ngọc Trâm Đan*, 12 Anh, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre.**

VÂN KHANH



Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 8

(*Thời gian làm bài: 180 phút*)

PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 *điểm*). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

2) Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(2;-4)$ và có hệ số góc k. Tìm tất cả giá trị của tham số k để Δ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, D sao cho tam giác MBD có diện tích bằng 2, biết rằng điểm $M(1;2)$.

Câu 2 (1 *điểm*). Giải phương trình

$$\sin^2 x + \cos\left(x + \frac{9\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-2\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 3 (1 *điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y(1+13y^2) - x(1+x^2) = 3xy(x+y) \\ x^2(x^2-2) = 2(1+4y) \end{cases}$$

Câu 4 (1 *điểm*). Tính tích phân

$$I = \int_e^{e^2} \frac{3x^3\ln x + \sqrt[3]{1-\ln x}}{x}dx.$$

Câu 5 (1 *điểm*). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có khối $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều, $AB = a$, $0 < a < 2$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng $(C'B'BC)$. Tính a biết rằng thể tích khối chóp $A'.BCC'B'$ bằng $\frac{2}{3}$ và $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6 (1 *điểm*). Cho các số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + b = ab$. Chứng minh rằng $a^b + b^a > 6$.

PHẦN RIÊNG

(*Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B*)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a (1 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), C\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$, $D(2;0)$. Viết phương trình đường tròn (T) tâm D và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tạo ra dây cung có độ dài bằng 2.

Câu 8a (1 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 1 = 0$. Gọi A là giao điểm của Δ và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ' đi qua A, nằm trong (P) và tạo với Δ một góc bằng 60°.

Câu 9a (1 *điểm*). Tìm hệ số nhỏ nhất trong khai triển nhị thức Newton $(2-3x)^{2n}$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^3 + 4C_n^2 = 100$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b (1 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(5;5)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $x + y - 8 = 0$. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm $M(7;3)$, $N(4;2)$. Tính diện tích tam giác ABC.

Câu 8b (1 *điểm*). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ và hai điểm $A(1;4;2)$, $B(-1;2;4)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 9b (1 *điểm*). Chứng minh rằng

$$C_{2014}^3 + C_{2014}^6 + C_{2014}^9 + \ldots + C_{2014}^{2013} = \frac{2^{2014} - 4}{3}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, Yên Trung, Bắc Ninh)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 7

Câu 1. b) Ta có $y = 1 - \frac{1}{x+2}$. Gọi hệ số góc của hai tiếp tuyến là k thì

$$y' = \frac{1}{(x+2)^2} = k > 0 \Rightarrow x + 2 = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow A\left(-2+\frac{1}{\sqrt{k}}; 1-\sqrt{k}\right), B\left(-2-\frac{1}{\sqrt{k}}; 1+\sqrt{k}\right)(k>0).$$

PT hai tiếp tuyến tại A, B với đồ thị (C) là

$y = kx + 2k - 2\sqrt{k} + 1; y = kx + 2k + 2\sqrt{k} + 1.$

Suy ra $C\left(0; 2k - 2\sqrt{k} + 1\right); D\left(0; 2k + 2\sqrt{k} + 1\right).$

Do $CD = \left|4\sqrt{k}\right| = 4 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow A(-1;0); B(-3;2).$

Câu 2

PT $\Leftrightarrow 2\cos 4x + 2\cos 2x = 1 + \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2\cos 3x\right) = 0$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$;

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 3. ĐK: $x \geq 0$. Do $x = 0$ không là nghiệm nên chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[4]{x}$, đặt $t = \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$. Phương trình trở thành

$$\sqrt{t+3} + \sqrt{3t-2} = \sqrt{5t+4} \quad \left(t \geq \frac{2}{3}\right),$$

tìm được $t = 1 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm.

Câu 4. $I = \int_1^2 \left(x^2+1\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx + \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx$.

Tính $K = 2\int_1^2 xe^{x-\frac{1}{x}}dx = x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2$

$-\int_1^2 \left(x^2+1\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx$, nên $I = 4e^{\frac{3}{2}} - 1$.

Câu 5. Gọi M là trung điểm của BC, kẻ $AH \perp SM$ tại H thì $d(AD, SC) = AH = \frac{3a}{2}$.

Suy ra $SA = 3a$; $V_{ABCD} = 2a^3\sqrt{3}$.

Lưu ý rằng điểm C là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABD. Tính $R^2 = \frac{25a^2}{4} \Rightarrow S_{mc} = 25\pi a^2$.

Câu 6. Ta có $x^4 + 16y^4 + (2xy+1)^2 = 2$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + (2y)^2\right)^2 = (2xy-1)^2 \Rightarrow x^2 + (2y)^2 + 2xy = 1$

$\Rightarrow (x+2y)^2 - 1 = 2xy$, do $2xy \leq \frac{(x+2y)^2}{4}$.

$\Rightarrow (x+2y)^2 - 1 \leq \frac{(x+2y)^2}{4} \Rightarrow (x+2y)^2 \leq \frac{4}{3}$

Đặt $t = x + 2y \Rightarrow t \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$; $2xy = t^2 - 1$.

Ta có $P = x^3 + (2y)^3 + 3(x+2y)$

$= (x+2y)^3 - 6xy(x+2y) + 3(x+2y)$

$= -2t^3 + 6t = f(t).$

Khảo sát hàm số $f(t)$ với $t \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

Ta có $\max P = 4 \Leftrightarrow t = 1$

$\Leftrightarrow (x;\ y) = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ hoặc $(x;\ y) = (1;\ 0)$.

$\min P = -4 \Leftrightarrow t = -1$

$\Leftrightarrow (x;\ y) = \left(0; -\frac{1}{2}\right)$ hoặc $(x;\ y) = (-1;\ 0)$.

Câu 7a. Gọi G là trọng tâm ΔABC thì $G(t; 3t-2) \in d$. Do $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BG}$

$\Rightarrow D(3t-2; 9t-8)$. Do N là trung điểm DC nên $C(10-3t; 20-9t)$. Ta có $\overrightarrow{CB} = (3t-9; 9t-19)$, $\overrightarrow{CN} = (3t-6; 9t-14)$. Do $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CN} = 0$ nên

$90t^2 - 342t + 320 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{32}{15}$ hoặc $t = \frac{5}{3}$.

Từ đó tìm được $A(-1; 3)$ hoặc $A\left(\frac{9}{5}; \frac{57}{5}\right)$.

Câu 8a. Gọi $A(2a+3;\ a;\ b) \in (P)$,

$\overrightarrow{MA} = (2a+2; a; b-2)$; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OM} = 0 \Rightarrow b = 1 - a$

dẫn đến $A(2a+3; a; 1-a)$.

Do ΔOAB cân tại O, M là trung điểm AB nên

$B(-1-2a; -a; 3+a) \in (Q) \Rightarrow a = 1$.

Khi đó PT của d: $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-2}$.

Câu 9a. Đặt $z=a+bi$; $w=x+yi$.

Theo đề bài, ta có $a-b-1=0$

và $x+y.i=(1-i)(a+bi) \Rightarrow y=-1$.

Để $|w|=\sqrt{x^2+1}\geq 1$, $\min|w|=1 \Leftrightarrow x=0$

Vậy $w=-i$.

Câu 7b. Ta có $A(a;3a-2)\in\Delta, OA=\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\Rightarrow a=\frac{3}{5} \Rightarrow A\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$. Tam giác OAB vuông tại A nên M chính là trung điểm của OB, gọi $B(t;3t-2)\in\Delta$ thì $M\left(\frac{t}{2};\frac{3t-2}{2}\right)\in(C)$

$\Rightarrow 5t^2-6t-8=0 \Leftrightarrow t=2$ hoặc $t=-\frac{4}{5}$.

Từ đó $B(2;4)$ hoặc $B\left(-\frac{4}{5};-\frac{22}{5}\right)$.

Câu 8b. Giả sử tâm $I(a;b;c)$. Do $IA=IB=IC$

$\Rightarrow \begin{cases}a+2b+c=5\\2a+b-c=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=4-b\\c=1-b\end{cases} \Rightarrow I(4-b;b;1-b)$

$OI^2=3b^2-10b+17=3\left(b-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{26}{3}\geq\frac{26}{3}$

Suy ra $b=\frac{5}{3}\Rightarrow I\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

PT (S): $\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{28}{3}$.

Câu 9b. Để hệ phương trình có nghiệm thì $y>0$. PT thứ nhất trở thành

$2^x(x+1)=2^{2y}.y \Leftrightarrow 2^{x+1}(x+1)=2^{2y}.2y$.

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ có

$f'(t)=2^t+t.2^t\ln 2>0, \forall t>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do $f(x+1)=f(2y)$

$\Rightarrow x=2y-1$. Thế vào PT thứ 2, ta được

$$\sqrt{2y^2+2}+\sqrt{y^2+2y+1}=4y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y^2+2}=3y-1 \Rightarrow y=1.$$

Đáp số. $(x;\ y)=(1;\ 1)$. □

HƯỚNG DẪN GIẢI... (Tiếp trang 5)

Mặt khác, $\widehat{ABQ}=\widehat{APH} \Rightarrow \widehat{AEO}=\widehat{APH}$, nên $PH // EO$ (2). Trong ΔAEO có P là trung điểm của AE, kết hợp với (1); (2) suy ra H là trung điểm của OA.

b) Ta có $S_{BPQ}=\frac{AB.PQ}{2}=R.PQ=R.(AP+AQ)$

$=\frac{R(AE+AF)}{2}\geq R.\sqrt{AE.AF}=R.\sqrt{AB^2}=2R^2$.

$S_{BPQ}=2R^2 \Leftrightarrow AE=AF \Leftrightarrow \Delta BEF$ vuông cân tại $B \Leftrightarrow \Delta BCD$ vuông cân tại $B \Leftrightarrow AB\perp CD$.

Vậy ΔBPQ có diện tích nhỏ nhất khi $AB\perp CD$.

c) Ta có $AC\perp BE$; $AD\perp BF$, do đó

$CD^4=AB^4=(AE.AF)^2=AE^2.AF^2$

$=(EC.EB)(FD.FB)=(EC.FD)(EB.FB)$

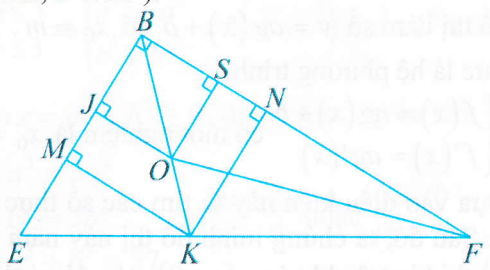
$=(EC.FD)(AB.EF)=CE.DF.CD.EF$

$\Rightarrow CD^3=CE.DF.EF$.

Ta cũng có $\frac{BE^2}{BF^2}=\frac{EA.EF}{FA.EF}=\frac{EA}{FA}$

$\Rightarrow \frac{BE^4}{BF^4}=\frac{EA^2}{FA^2}=\frac{EC.EB}{FD.FB}\Rightarrow\frac{BE^3}{BF^3}=\frac{CE}{DF}$.

d) Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp của ΔEBF, $BMKN$ là hình vuông nên BK là phân giác của $\widehat{EBF}$, do đó $O\in BK$. Kẻ $OJ\perp BE$; $OS\perp BF$ ($J\in BE$; $S\in BF$).



Ta thấy $OS//KN \Rightarrow \frac{BK}{BO}=\frac{KN}{OS}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mà $\frac{BK}{BO}=\frac{BO+OK}{BO}=1+\frac{OK}{OB}\Rightarrow\frac{OK}{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác, FO là phân giác của $\widehat{BFE}$ nên

$\frac{FK}{FB}=\frac{OK}{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow FB=\sqrt{2}.FK\Rightarrow FB^2=2FK^2$.

Tương tự ta có $EB^2=2EK^2$.

Suy ra $EF^2=EB^2+FB^2=2(EK^2+FK^2)$

$\Rightarrow (EK+KF)^2=2(EK^2+FK^2)$

$\Rightarrow (EK-KF)^2=0\Rightarrow EK=KF$

$\Rightarrow \Delta EBF$ vuông cân tại $B \Rightarrow \widehat{BEF}=\widehat{BFE}=45^o$. □

DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

NGUYỄN TUẤN NGỌC – GV THPT chuyên Tiền Giang

(Bài dự thi Viết chuyên đề Toán chào mừng 50 Tạp chí TH&TT)

1. CƠ SỞ LÍ LUẬN CỦA VẤN ĐỀ

Ta biết rằng nếu hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại x_0 thì tồn tại một khoảng $(\alpha;\beta)$ chứa x_0, sao cho trên khoảng đó, đồ thị này nằm dưới đồ thị kia, tức là

$$f(x) \ge g(x), \forall x \in (\alpha;\beta)$$

hoặc $f(x) \le g(x), \forall x \in (\alpha;\beta)$.

Sử dụng tính chất này, ta có thể chứng minh một số bất đẳng thức có dạng như sau:

Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n \in D$ thỏa mãn $g(a_1) + g(a_2) + ... + g(a_n) \ge (\le) ng(m)$, với $m \in D$. Chứng minh rằng :

$$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \ge (\text{hoặc} \le nf)(m)$$

Để giải bài toán này, ta cần tìm các số thực *a*, *b* sao cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = ag(x) + b$ tại $x_0 = m$.

Tức là hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) = ag(x) + b \\ f'(x) = ag'(x) \end{cases} \text{ có một nghiệm là } x_0 = m.$$

Dựa vào điều kiện này ta tìm các số thực *a* và *b*. Sau đó, ta chứng minh đồ thị này nằm dưới đồ thị kia trên khoảng $(\alpha;\beta)$ nào đó có thể.

Đôi khi, ta chỉ cần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm dưới (hoặc nằm trên) đồ thị hàm số $y = ag(x) + b$ trên khoảng $(\alpha;\beta)$ (hoặc đoạn $[\alpha;\beta]$) cần thiết, mà không cần tiếp xúc.

Trong trường hợp *g*(*x*) là hàm bậc nhất thì đây chính là phương pháp tiếp tuyến như đã biết.

2. CÁC THÍ DỤ ÁP DỤNG

2.1. Các bài toán có giả thiết tổng bình phương các biến bằng hằng số

✶Thí dụ 1. *Cho x, y, z dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - (x + y + z) \ge 2\sqrt{3}.$$

Lời giải. Ta có *x, y, z* là các số dương và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên $x, y, z \in (0; 1)$.

Ta cần tìm các số *m* và *n* sao cho đồ thị hàm số có dạng $y = mx^2 + n$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x} - x$ trong khoảng $(0; 1)$ và tiếp xúc với đồ thị này tại điểm $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (tại điểm mà đẳng thức xảy ra).

Như vậy, ta có điều kiện cần là hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - x = mx^2 + n \\ -\frac{1}{x^2} - 1 = 2mx \end{cases} \text{ có một nghiệm là } x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Từ đây ta sẽ có $m = -2\sqrt{3}$ và $n = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Ta chứng minh $\frac{1}{r} - r \ge -2\sqrt{3}r^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}, \forall r \in (0; 1)$ (*).

Thật vậy, $(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}r - 1\right)^2 \left(2\sqrt{3}r + 3\right) \ge 0$, đúng với mọi $r \in (0; 1)$.

Từ đó suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - (x + y + z)$

$$\ge -2\sqrt{3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 3.\frac{4}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. □

✶Thí dụ 2. *Cho các số a, b, c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải. Ta có a, b, c là các số dương và $a^2+b^2+c^2=1$ nên $a, b, c \in (0; 1)$. Ta có

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}.$$

Ta cần tìm hai số m, n sao cho đồ thị hàm số có dạng $y=mx^2+n$ nằm phía dưới đồ thị $y=\frac{x}{1-x^2}$ trong khoảng $(0;1)$ và tiếp xúc với đồ thị này tại điểm $x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy điều kiện cần là hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2}=mx^2+n \\ \dfrac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2}=2mx \end{cases} \text{ có một nghiệm là } x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Từ đây sẽ có $m=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ và $n=0$. Ta chứng minh

$$\frac{x}{1-x^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2,\ \forall x\in(0;1)\ (*)$$

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}x-1\right)^2\left(\sqrt{3}x+2\right)\ge 0$, đúng với mọi $x\in(0;1)$. Từ đó suy ra

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}$$
$$\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. □

2.2. Các bài toán có giả thiết tích các biến bằng hằng số

★Thí dụ 3. *Cho các số a, b, c dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}}+\frac{b}{\sqrt{1+b}}+\frac{c}{\sqrt{1+c}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Lời giải. Ta có $abc=1\Leftrightarrow \ln a+\ln b+\ln c=0$. Ta cần tìm hai số m, n sao cho đồ thị hàm số có dạng $y=m\ln x+n$ nằm phía dưới đồ thị $y=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ trong khoảng $(0;+\infty)$ và tiếp xúc với đồ thị này tại điểm $x_0=1$.

Vậy điều kiện cần là hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}=m\ln x+n \\ \dfrac{2+x}{2\sqrt{(1+x)^3}}=\dfrac{m}{x} \end{cases} \text{ có một nghiệm là } x_0=1.$$

Từ đây sẽ có $m=\frac{3}{4\sqrt{2}}$ và $n=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta chứng minh $\frac{x}{\sqrt{1+x}}\ge\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln x+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\forall x\in(0;+\infty)$ (*).

Thật vậy, đặt

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln x-\frac{1}{\sqrt{2}},\ x\in(0;+\infty).$$

Ta có $f'(x)=\frac{2+x}{2\sqrt{(1+x)^3}}-\frac{3}{4\sqrt{2}}.\frac{1}{x}=0$

$$\Leftrightarrow 8x^4+23x^3+5x^2-27x-9=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(8x^3+31x^2+36x+9\right)=0\Leftrightarrow x=1$$

(do $x>0$). Ta có bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

Từ bảng biến thiên ta được

$$f(x)\ge f(1)=0, \forall x>0.$$

Suy ra $\frac{a}{\sqrt{1+a}}+\frac{b}{\sqrt{1+b}}+\frac{c}{\sqrt{1+c}}$.

$$\ge\frac{3}{4\sqrt{2}}(\ln a+\ln b+\ln c)+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$. □

★Thí dụ 4. *Cho các số a, b, c dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{1+bc}+\frac{b^2}{1+ac}+\frac{c^2}{1+ab}\ge\frac{3}{2}.$$

Lời giải. Ta có $a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$ (*), và

$$\frac{a^2}{1+bc}+\frac{b^2}{1+ac}+\frac{c^2}{1+ab}=\frac{a^3}{a+abc}+\frac{b^3}{b+abc}+\frac{c^3}{c+abc}$$
$$=\frac{a^3}{1+a}+\frac{b^3}{1+b}+\frac{c^3}{1+c}=P.$$ Ta có

$$\frac{x^3}{1+x}\ge\frac{5x^2-1}{8}\Leftrightarrow 3x^3-5x^2+x+1\ge 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(3x+1) \ge 0$ (đúng với mọi $x > 0$).

Suy ra

$$\frac{a^2}{1+bc}+\frac{b^2}{1+ac}+\frac{c^2}{1+ab} \ge \frac{5(a^2+b^2+c^2)-3}{8} \ge \frac{3}{2}.$$

Nhận xét. Trong thí dụ này ta "linh hoạt" sử dụng giả thiết $abc = 1$ bằng cách dùng bất đẳng thức Cauchy ở (*) và đưa về biểu thức P để *ước lượng* giá trị hai hàm số

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x}; \quad g(x) = \frac{5x^2-1}{8}.$$

2.3. Các bài toán có giả thiết khác

★Thí dụ 5. *Cho các số a, b, c dương thỏa mãn*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{2}(a+b+c) = \frac{15}{2}.$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \le 3$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{15}{2} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{2}(a+b+c)$$
$$\ge \frac{9}{a+b+c}+\frac{3}{2}(a+b+c) = \frac{9}{t}+\frac{3}{2}t,$$

với $t = a+b+c > 0 \Rightarrow 3t^2 - 15t + 18 \le 0$

suy ra $2 \le t \le 3 \Rightarrow 0 < a, b, c < 3$.

Ta cần tìm hai số m, n sao cho đồ thị hàm số có dạng $y = m\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2}x\right)+n$ nằm phía trên đồ thị $y = x^2$ trong khoảng $(0;3)$ và tiếp xúc với đồ thị này tại điểm $x_0 = 1$.

Vậy điều kiện cần là hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = m\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2}x\right)+n \\ 2x = m\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

có một nghiệm là $x_0 = 1$. Từ đây ta sẽ có $m = 4$ và $n = -9$. Ta chứng minh

$$4\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2}x\right)-9 \ge x^2, \forall x \in (0;3) \ (*).$$

Thật vậy, $(*) \Leftrightarrow (x-1)^2(x-4) \le 0$, đúng $\forall x \in (0;3)$.

Từ đó, suy ra

$$a^2+b^2+c^2 \le 4\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{2}(a+b+c)\right]-27$$

$= 4.\frac{15}{2}-27 = 3$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

★Thí dụ 6. *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh*

$$\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2+3bc}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2+3ac}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2+3ab} \ge \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Do BĐT có dạng đồng bậc nên có thể giả sử $a^2+b^2+c^2 = 3$. BĐT trở thành

$$\frac{a^2}{1+bc}+\frac{b^2}{1+ac}+\frac{c^2}{1+ab} \ge \frac{3}{2}.$$

Ta có $3 = a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \le 1$

Suy ra

$$\frac{a^2}{1+bc}+\frac{b^2}{1+ac}+\frac{c^2}{1+ab} = \frac{a^3}{a+abc}+\frac{b^3}{b+abc}+\frac{c^3}{c+abc}$$
$$\ge \frac{a^3}{1+a}+\frac{b^3}{1+b}+\frac{c^3}{1+c}.$$

Ta có $\frac{x^3}{1+x} \ge \frac{5x^2-1}{8} \Leftrightarrow 3x^3-5x^2+x+1 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(3x+1) \ge 0$ (đúng với mọi $x > 0$).

Suy ra

$$\frac{a^3}{1+a}+\frac{b^3}{1+b}+\frac{c^3}{1+c} \ge \frac{1}{8}\left[5\left(a^2+b^2+c^2\right)-3\right] = \frac{3}{2}.$$

Từ đó ta có đpcm. ❐

2.4. Các bài toán bất đẳng thức đồng bậc, có hiệu giữa bậc của tử và bậc của mẫu khác 1

★Thí dụ 7. *Cho các số a, b, c dương. Chứng minh rằng* $\frac{a^3-b^3}{a+3b}+\frac{b^3-c^3}{b+3c}+\frac{c^3-a^3}{c+3a} \ge 0.$

Lời giải. Ta cần tìm hai số m, n sao cho đồ thị hàm số có dạng $y = mx^2+n$ nằm phía dưới đồ thị $y = \frac{x^3-1}{x+3}$ trong khoảng $(0;+\infty)$ và tiếp xúc với đồ thị này tại điểm $x_0 = 1$.

Vậy điều kiện cần là hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^3-1}{x+3} = mx^2+n \\ \frac{2x^3+9x^2+1}{(x+3)^2} = 2mx \end{cases}$$ có một nghiệm là $x_0 = 1$.

Từ đây sẽ có $m = \frac{3}{8}$ và $n = -\frac{3}{8}$. Ta chứng minh

$$\frac{x^3-1}{x+3} \ge \frac{3}{8}\left(x^2-1\right), \forall x \in (0;+\infty)\ (*).$$

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow 8x^3-8 \ge 3x^3-3x+9x^2-9$

$\Leftrightarrow 5x^3-9x^2+3x+1 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)(5x+1) \ge 0$

(đúng với mọi $x > 0$).

Thay x lần lượt bởi $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} > 0$ vào (*) ta được

$$\frac{a^3-b^3}{a+3b} \ge \frac{3}{8}\left(a^2-b^2\right); \frac{b^3-c^3}{b+3c} \ge \frac{3}{8}\left(b^2-c^2\right); \frac{c^3-a^3}{c+3a} \ge \frac{3}{8}\left(c^2-a^2\right).$$

Suy ra $\frac{a^3-b^3}{a+3b}+\frac{b^3-c^3}{b+3c}+\frac{c^3-a^3}{c+3a} \ge 0$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. □

★**Thí dụ 8**. *Cho các số a, b, c dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4}{a+4b}+\frac{b^4}{b+4c}+\frac{c^4}{c+4a} \ge \frac{a^3+b^3+c^3}{5}.$$

Lời giải. Ta cần tìm hai số m, n sao cho đồ thị hàm số có dạng $y=mx^3+n$ nằm phía dưới đồ thị $y=\frac{x^4}{x+4}$ trong khoảng $(0;+\infty)$ và tiếp xúc với đồ thị này tại điểm $x_0=1$.

Vậy điều kiện cần là hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^4}{x+4}=mx^3+n \\ \frac{3x^4+16x^3}{(x+4)^2}=3mx^2 \end{cases}$$

có một nghiệm là $x_0=1$. Từ đây ta sẽ có $m=\frac{19}{75}$ và $n=-\frac{4}{75}$. Ta chứng minh

$$\frac{x^4}{x+4} \ge \frac{19x^3-4}{75}, \forall x \in (0;+\infty)\ (*).$$

Thật vậy $\frac{x^4}{x+4} \ge \frac{19x^3-4}{75}$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)\left(56x^2+36x+16\right) \ge 0$

(đúng với mọi $x > 0$).

Thay x lần lượt bởi $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} > 0$ vào (*) ta được

$$\frac{a^4}{a+4b} \ge \frac{1}{75}\left(19a^3-4b^3\right);$$

$$\frac{b^4}{b+4c} \ge \frac{1}{75}\left(19b^3-4c^3\right); \frac{c^4}{c+4a} \ge \frac{1}{75}\left(19c^3-4a^3\right).$$

Suy ra $\frac{a^4}{a+4b}+\frac{b^4}{b+4c}+\frac{c^4}{c+4a} \ge \frac{a^3+b^3+c^3}{5}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. □

2.5. Các bài toán bất đẳng thức "kẹp" và tìm cả hai giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Đôi khi, ta chỉ cần đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm dưới (hoặc nằm trên) đồ thị hàm số $y=ag(x)+b$ trên khoảng $(\alpha;\beta)$ (hoặc đoạn $[\alpha;\beta]$) cần thiết, mà không cần tiếp xúc. Ta xét một số thí dụ sau.

★**Thí dụ 9.** *Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$1 \le \frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1} \le \frac{30-\sqrt{3}}{13}.$$

Lời giải.

• Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức trái. Bất đẳng thức này đạt dấu "=" tại "tâm", có nghĩa là ba biến bằng nhau. Trong trường hợp này ta có thể dùng điều kiện hai đồ thị tiếp xúc nhau để tìm đồ thị ước lượng. Ta có

$(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=9 \Rightarrow a+b+c \le 3.$

Ta chứng minh $\frac{1}{x^2+x+1} \ge \frac{2-x}{3}, \forall x > 0$ (*)

Thật vậy, (*)

$\Leftrightarrow x^3-x^2-x+1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1) \ge 0$

(đúng với mọi $x \ge 0$). Suy ra

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1} \ge \frac{6-(a+b+c)}{3} \ge 1.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$. □

Chú ý. Nếu ước lượng qua đồ thị có dạng $y=mx^2+n$ thì ta được $\frac{1}{x^2+x+1} \ge \frac{3-x^2}{6}$, $\forall x > 0$ (*). Thật vậy, (*)

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+3x+3\right) \ge 0$ (đúng $\forall x \ge 0$).

(*Xem tiếp trang 27*)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/442 (Lớp 6). Tìm hai số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$ và $\overline{ba}$ $(a \neq b)$ thỏa mãn

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \frac{\overline{a\underbrace{3\ldots3}_{\substack{2014\\ \text{chữ số 3}}}b}}{\overline{b\underbrace{3\ldots3}_{\substack{2014\\ \text{chữ số 3}}}a}}.$$

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Nam Yên Thành, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T2/442 (Lớp 7). Cho tổng A gồm 2014 số hạng: $A = \frac{1}{19^1} + \frac{2}{19^2} + \frac{3}{19^3} + \ldots + \frac{n}{19^n} + \ldots + \frac{2014}{19^{2014}}$. Hãy so sánh A^{2013} và A^{2014}.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(SV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T3/442. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Kẻ ME vuông góc với CD tại E; NF vuông góc với BC tại F. Chứng minh rằng tứ giác $MNEF$ nội tiếp.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T4/442. Giải phương trình

$$4x^3 + 4x^2 - 5x + 9 = 4\sqrt[4]{16x+8}.$$

BÙI HẢI QUANG
(GV THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

Bài T5/442. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$44(xy + yz + zx) \leq (3x + 4y + 5z)^2.$$

NGUYỄN NGỌC HÂN
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/442. Chứng minh rằng phương trình sau vô nghiệm trên tập số thực:

$$9x^4 + x(12x^2 + 6x - 1) + (x+1)(9x^2 + 12x + 5) + 1 = 0.$$

NGUYỄN BÁ LONG
(GV THPT Như Thanh, Thanh Hóa)

Bài T7/442. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R với $CA \neq CB$; $\widehat{ACB} \neq 90^\circ$. Một đường tròn tâm S ngoại tiếp tam giác AOB cắt các đường thẳng CA, CB tại các điểm tương ứng M, N. Gọi K là ảnh đối xứng của điểm S qua đường thẳng MN. Chứng minh rằng $SK = R$.

ĐÀO TAM
(GV Đại học Vinh, Nghệ An)

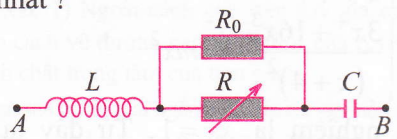
Bài T8/442. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5.$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/442. Đặt một điện áp xoay chiều $u = U\sqrt{2}\cos\omega t (V)$ vào hai đầu đoạn mạch AB (hình vẽ). Biết tụ điện có dung kháng $Z_C = 60\Omega$, cuộn cảm thuần có cảm kháng $Z_L = 20\Omega$, điện trở thuần R_0 có giá trị xác định và R là một biến trở. Điều chỉnh biến trở để công suất tỏa nhiệt trên nó đạt lớn nhất, khi đó công suất tỏa nhiệt trên R bằng 2 lần công suất tỏa nhiệt trên R_0. Hỏi phải điều chỉnh biến trở bằng bao nhiêu thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB là lớn nhất ?



NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

Bài L2/442. Một người pha một lượng trà đá bằng cách trộn lẫn 500g nước trà nóng với một khối lượng bằng nó nước đá đang tan. Nếu nhiệt độ ban đầu của nước trà nóng lần lượt là

a) 85°C; b) 75°C

Hỏi nhiệt độ và khối lượng của đá còn lại bằng bao nhiêu khi trà và đá đạt tới cùng một nhiệt độ?

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV ĐH KTCN TP. Hồ Chí Minh)

(Xem tiếp trang 28)

CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT

KỈ NIỆM 50 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

THE M&Y 50th ANNIVERSARY CONTEST

Thông tin vắn tắt

– *Đề thi đăng từ số 440 (2.2014) đến số 444; Bài giải đăng từ số 444 đến số 448 (10.2014).*
– *Mỗi số có 2 bài toán cho THCS (kí hiệu T*/THCS) và 2 bài toán cho THPT (kí hiệu T*/THPT).*
– *Thời hạn nhận bài muộn nhất là 2 tháng, tính từ cuối tháng của số Tạp chí có đăng đề thi.*
– *Mỗi bài giải viết trên một tờ giấy riêng, ghi rõ họ và tên, trường, lớp (có thể gửi chung phong bì, bên ngoài ghi rõ:* ***Bài dự thi Giải toán đặc biệt kỉ niệm 50 năm Tạp chí TH&TT****, có dán tem.*
– *Kết quả cuộc thi được công bố trên số 448 (10.2014) và trao giải vào Lễ kỉ niệm 50 năm TH&TT.*

Bài T5/THCS.
Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(a; b; c)$ thỏa mãn a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và $\sqrt{\frac{19}{a+b-c}}+\sqrt{\frac{5}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{79}{c+a-b}}$ là số tự nhiên lẻ khác 1.

ĐÀO HUY TRƯỜNG
(GV THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T6/THCS.
Cho tam giác ABC, D là chân đường cao hạ từ C; Trên AB lấy các điểm E, F sao cho $\widehat{ACE}=\widehat{BCF}=90^\circ$. X là điểm trên đoạn CD; K là điểm trên FX sao cho $BK = BC$ và L là điểm trên EX sao cho $AL = AC$; AL và BK cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $ML = MK$.

LÊ VIẾT ÂN
(SV lớp Toán 2B, ĐHSP Huế)

Bài T5/THPT.
Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(a; b; p)$ trong đó p là số nguyên tố, a và b nguyên tố cùng nhau sao cho tập ước nguyên tố của $a+b$ trùng với tập ước nguyên tố của a^p+b^p.

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(GV ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T6/THPT.
Cho tam giác không cân ABC. Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại A_0, B_0, C_0; AI, BI, CI theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1; B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 theo thứ tự cắt B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng A_0A_2, B_0B_2, C_0C_2 đồng quy tại một điểm thuộc (I).

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

T5/Junior.
Find all triples of positive integers $(a; b; c)$ such that a, b, c are the side lengths of a triangle and $\sqrt{\frac{19}{a+b-c}}+\sqrt{\frac{5}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{79}{c+a-b}}$ is an odd integer, differ from 1.

T6/Junior.
In a triangle ABC, segment CD is the altitude from C; Points E, F chosen on the side AB such that $\widehat{ACE}=\widehat{BCF}=90^\circ$. X is a point on segment CD; point K on segment FX such that $BK = BC$ and point L on segment EX such that $AL = AC$; AL meets BK at M. Prove that $ML = MK$.

T5/Senior.
Find all triples of positive integers $(a; b; p)$ such that p is a prime number, a and b have no common divisor, and the set of prime divisors of $a+b$ is the same as that of a^p+b^p.

T6/Senior.
Let ABC be a non-isosceles triangle. The incirlce (I) touches BC, CA and AB at A_0, B_0, and C_0 respectively; AI, BI, CI intersect BC, CA, AB at A_1, B_1, C_1; B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 meet B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 at A_2, B_2, C_2 respectively. Prove that the lines A_0A_2, B_0B_2, C_0C_2 intersect at a point on the circle (I).

Translated by LE MINH HA

Bài T1/438 (Lớp 6). *Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c (có thể bằng nhau) biết rằng*

$$a(a+1)+b(b+1)=c(c+1).$$

Lời giải. Từ giả thiết có thể coi $2 \le b \le a < c$ và có $a(a+1)=c(c+1)-b(b+1)$

$$=c(c+b+1)-b(c+b+1)$$

hay là $a(a+1)=(c-b)(c+b+1)$ (*)

Do $a+1<c+b+1$ nên từ (*) suy ra $c-b<a$

$\Rightarrow c<a+b \Rightarrow c+b+1<a+2b+1$

$\Rightarrow c+b+1<3a+1.$

Từ đó và $c>a$ suy ra $c+b+1=2a$ hoặc $c+b+1=3a$.

Vì a, b, c là các số nguyên tố mà $c>a$ nên c là số lẻ. Xét hai trường hợp sau:

1) Giả sử $c+b+1=2a$. Do $c+1$ và $2a$ là số chẵn thì b là số nguyên tố chẵn, do đó $b=2$, suy ra $c=2a-3$.

Thay $c=2a-3$ vào đẳng thức (*) và rút gọn được $a+1=2(2a-5)$, hay là $3a=11$. Lúc đó a không là số nguyên.

2) Giả sử $c+b+1=3a$. Thay điều này vào đẳng thức (*) và rút gọn được $a+1=3(c-b)$.

Từ đó và $c=3a-b-1$ suy ra

$a+1=3(3a-2b-1)$, hay là $3b=4a-2$.

Từ đó b là số nguyên tố chẵn và $b=2$, suy ra $a=2$ và $c=3a-b-1=3$.

Vậy các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn đề bài là $a=b=2$ và $c=3$. ❐

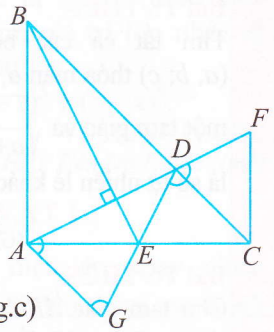
➢***Nhận xét.*** Nhiều bạn tìm được đẳng thức (*) từ đó cho kết quả đúng, nhưng lập luận không chặt chẽ. Các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Nguyễn Thùy Dương*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VIỆT HẢI

Bài T2/438 (Lớp 7). *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi E là trung điểm của cạnh AC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt BC tại D. Chứng minh rằng AD = 2ED.*

Lời giải. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia AD ở F. Do $\widehat{ABE}=\widehat{CAF}$ (cùng phụ với góc AEB) nên $\Delta BAE=\Delta ACF$ (c.g.c) $\Rightarrow CF=AE=EC$.



Do đó $\Delta CDE=\Delta CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CDE}=\widehat{CDF}$.

Trên tia DE lấy điểm G sao cho $EG=ED$, ta có $\Delta AEG=\Delta CED$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CDE}=\widehat{AGE}$ và $AG \parallel DC$, do đó $\widehat{DAG}=\widehat{FDC}$ (đồng vị), suy ra $\widehat{DAG}=\widehat{DGA}$. Vậy ΔDAG cân tại D, hay $DA=DG=2DE$ (đpcm). ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Ngoài cách giải trên đây, đa số các bạn giải theo cách vẽ đường cao từ đỉnh A của ΔABC, và áp dụng tính chất trọng tâm của tam giác.

2) Các bạn sau có lời giải ngắn gọn hơn cả, lập luận chặt chẽ.

Thanh Hóa: *Kiều Xuân Bách*, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Trần Lê Hiệp*, 7A, *Nguyễn Đình Tuấn Ngọc*, 7C, *Nguyễn Thị Hằng*, *Lê Hoài Dũng*, *Dương Thị Linh Chi*, *Mai Mạnh Hùng*, *Cao Thị Thùy Linh*, *Lê Đình Linh*, *Nguyễn Văn Quân*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Hồ Thị Thu Uyên*, 7A, THCS

Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Ngãi:** *Võ Quang Thời*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; *Phan Kiều Trinh, Nguyễn Lê Hoàng Duyên*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng; *Phạm Quốc Trung*, 6A, *Võ Thị Hồng Kiều*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Bình Định:** *Phạm Võ Phúc Tân*, 7A, THCS Võ Hải; *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn; *Trần Cả Bảo*, 7A, THCS Phước Lộc, Tuy Phước.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/438. *Tìm các số nguyên dương x, y, t với $t \le 6$ thỏa mãn phương trình sau*

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 7t - 2 = 0 \qquad (1)$$

Lời giải. Ta có

PT (1) $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 7(t+1)$ (2)

Nhận xét: Một số chính phương chia cho 7 có dư là 0, 1, 2 hoặc 4. Do đó, nếu tổng của hai số chính phương chia hết cho 7 thì cả hai số chính phương này đều chia hết cho 7.

Do vậy, từ (2) suy ra $(x-2)^2 \vdots 7$, $(y-1)^2 \vdots 7$

$\Rightarrow x - 2 \vdots 7$, $y - 1 \vdots 7$ (do 7 là số nguyên tố)

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 7(t+1) \vdots 49$

$\Rightarrow t + 1 \vdots 7$. Mà $1 \le t \le 6$ nên $t = 6$.

Vậy $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 49 = 0 + 7^2 = 7^2 + 0^2$.

Nếu $\begin{cases}(x-2)^2 = 0\\(y-1)^2 = 49,\end{cases}$ ta tìm được $\begin{cases}x = 2\\y = 8\end{cases}$

(do $x, y \in \mathbb{N}^*$).

Nếu $\begin{cases}(x-2)^2 = 49\\(y-1)^2 = 0\end{cases}$ ta được $\begin{cases}x = 9\\y = 1\end{cases}$

(do $x, y \in \mathbb{N}^*$). Vậy các số nguyên dương (x, y, t) thỏa mãn đề bài là (2; 8; 6), (9; 1; 6). ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Nhiều bạn tham gia giải bài này. Đa số đều làm đúng và làm với nhiều cách khác nhau, chẳng hạn:

Do $1 \le t \le 6$ nên $14 \le 7(t+1) \le 49$.

Mặt khác $7(t+1) \vdots 7$ nên VP (2) $\in \{14, 21, 28, 35, 42, 49\}$.

Từ đó tìm được x, y, t.

Từ (2), xét các giá trị cụ thể của t ($t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) để xem giá trị nào làm $7(t+1)$ phân tích được thành tổng của hai số chính phương, từ đó cũng tìm được x, y, t.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Trần Thị Chu Ánh*, 9A3, THCS Từ Sơn; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hữu Trung Kiên, Nguyễn Thu Hiền*, 6A3; *Đỗ Trọng Tấn, Hoàng Thị Hồng Ngát, Nguyễn Thảo Chi*, 7A3; *Dương Gia Huy*, 8A1, THCS Lâm Thao; *Nguyễn Dương Hoàng Anh*, 7C, *Khổng Tú Uyên*, 8A, THCS Văn Lang, Việt Trì; *Nguyễn Thúy Quỳnh*, 9A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Bùi Trâm Anh, Hoàng Thị Hằng*, 9A, THCS Lập Thạch, *Tô Minh Ngọc*, 9A1, THCS Yên Lạc; *Nguyễn Đình Trung*, 9B, THCS Lý Tự Trọng, Hương Canh; **Hải Phòng:** *Nguyễn Phương Hoa*, 7A1, THCS Hồng Bàng, Ngô Quyền; **Hà Nam:** *Lê Tuấn Anh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Võ Công Thành*, 6D, *Nguyễn Trung Sơn, Phạm Thu Uyên*, 6A, *Lệ Thị Thủy*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Nguyễn Tất Đức*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Phương Duyên*, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, THCS Hành Phước; *Nguyễn Đại Dương*, 8B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; *Phạm Quốc Trung*, 8C, THCS Nghĩa Mỹ; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trâm*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/438. *Tìm phần nguyên của A biết rằng*

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2013}}.$$

Lời giải. Với mọi số tự nhiên n khác 0, ta có

$$\sqrt{n-1} < \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n-1} + \sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \overset{(1)}{<} \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{(2)}{<} 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \quad (*)$$

Áp dụng BĐT kép (*) lần lượt với n bằng 4; 5; 6; …; 2013 rồi cộng các BĐT theo từng vế được

$$2(\sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{6}-\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{2014}-\sqrt{2013})$$

$$< \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2013}}$$

$$< 2(\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{2013}-\sqrt{2012})$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{2014}-\sqrt{4}) < A - \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} < 2(\sqrt{2013}-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow 2{,}28 + 2(\sqrt{2014}-2) < A < 2{,}3 + 2(\sqrt{2013}-\sqrt{3})$$

$\Rightarrow 88 < A < 89$ (tính trực tiếp). Vậy $[A] = 88$.

➢ ***Nhận xét***

1) Một số bạn áp dụng đơn thuần BĐT kép (*) khi cho n lần lượt nhận các giá trị 1; 2; 3; …; 2013 rồi cộng các BĐT

theo từng vế và rút gọn để được BĐT $2(\sqrt{2014}-1) < A < 2.\sqrt{2013}$. Tuy nhiên BĐT này dẫn đến $87{,}755 < A < 89{,}733$ nên $[A]$ nhận hai giá trị là 87 hoặc 88 chứ không phải một giá trị duy nhất. Vì vậy cần áp dụng (*) khéo hơn để "khoanh vùng chặt hơn" phạm vi giá trị của A như trong lời giải trên hoặc một vài lời giải khác.

2) Toà soạn xin giới thiệu tóm tắt một lời giải đẹp của bạn *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, TP. Hội An, **Quảng Nam**:

Áp dụng BĐT (2): $A = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2013}}$

$< 1 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + ... + \sqrt{2013} - \sqrt{2012})$

$= 2\sqrt{2013} - 1 < 2\sqrt{2025} - 1 = 89.$

Áp dụng BĐT (1): $A = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2013}}$

$> \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 2(\sqrt{5} - \sqrt{4} + \sqrt{6} - \sqrt{5} + ... + \sqrt{2014} - \sqrt{2013})$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{2014} - 3.$ Lại có

$\frac{1}{2} > \frac{49}{100} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{7}{10}; \frac{1}{3} > \frac{121}{400} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{11}{20};$

$2014 > \frac{128881}{64} \Rightarrow 2\sqrt{2014} > 2.\frac{359}{8} = \frac{359}{4}.$

Suy ra $A > \frac{7}{10} + \frac{11}{20} + \frac{359}{4} - 3 = 88.$

3) Ngoài bạn *Định*, các bạn có lời giải đúng và gọn gàng là **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Thêm*; *Tô Minh Ngọc*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Yến*, 9A, THCS Yên Phong; **Thanh Hoá:** *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T5/438. *Cho tam giác ABC nhọn có hai đường cao BE và CF. Kẻ FI và EJ cùng vuông góc với BC (I, J thuộc BC). Các điểm K, L lần lượt thuộc AB, AC sao cho KI // AC, LJ // AB. Chứng minh rằng ba đường thẳng EI, FJ và KL đồng quy.*

Lời giải. Gọi O là giao điểm của EI và FJ. Ta có

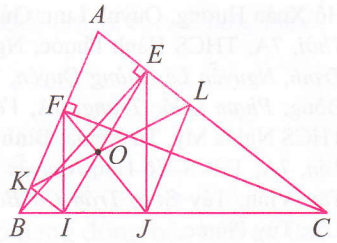
$\widehat{KFI} = \widehat{FCB}$ (cùng phụ với góc IFC).

$= 90° - \widehat{ABC} = 90° - \widehat{LJC} = \widehat{EJL}$ (1)

Lại có $\widehat{IKF} = \widehat{ELJ}$ (cùng bù với $\widehat{BAC}$) (2)

Từ (1), (2) suy ra $\Delta KFI \backsim \Delta LJE$ (g.g).

Suy ra $\frac{KF}{LJ} = \frac{FI}{EJ}$ (3)



Xét ΔFOI và ΔJOE có

$\widehat{IFO} = \widehat{EJO}$ (so le trong),

$\widehat{FOI} = \widehat{JOE}$ (đối đỉnh),

nên $\Delta FOI \backsim \Delta JOE$ (g.g).

Suy ra $\frac{FO}{OJ} = \frac{FI}{JE}$ (4)

Lại có $\widehat{KFO} = \widehat{LJO}$ (so le trong) (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\Delta KFO \backsim \Delta LJO$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{FOK} = \widehat{JOL}$, mà hai góc ở vị trí đối đỉnh, suy ra K, O, L thẳng hàng, tức là FJ, EI, KL đồng quy. □

Nhận xét. Hầu hết các bạn tham gia đều cho lời giải đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải gọn và tốt.

Nghệ An: *Mai Mạnh Hùng*, 8A, *Dương Thị Linh Chi*, *Nguyễn Thị Hằng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, THCS Hành Phước; *Nguyễn Đại Dương*, 8B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; *Võ Quang Phú Thời*, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước; **Hà Nam:** *Nhữ Ngọc Ánh*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T6/438. *Giải phương trình*

$$13\sqrt{2x^2 - x^4} + 9\sqrt{2x^2 + x^4} = 32.$$

Lời giải. Điều kiện

$$2x^2 - x^4 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \quad (*)$$

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm, ta có

$$13\sqrt{2x^2 - x^4} = \frac{13}{2}\sqrt{x^2(8 - 4x^2)}$$

$$\leq \frac{13(8 - 3x^2)}{4} = 26 - \frac{39x^2}{4} \quad (1)$$

$$9\sqrt{2x^2 + x^4} = \frac{3}{2}\sqrt{9x^2(8 + 4x^2)}$$

$$\leq \frac{3(8 + 13x^2)}{4} = 6 + \frac{39x^2}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$13\sqrt{2x^2 - x^4} + 9\sqrt{2x^2 + x^4} \leq 32.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 = 8 - 4x^2 \\ 9x^2 = 8 + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow 5x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

thỏa mãn (*). Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\left\{-\frac{2\sqrt{10}}{5}; \frac{2\sqrt{10}}{5}\right\}$.

Cách 2. Áp dụng BĐT Bunyacovsky, ta có

$$(13\sqrt{2x^2 - x^4} + 9\sqrt{2x^2 + x^4})^2$$

$$= x^2(\sqrt{13}.\sqrt{13(2-x^2)} + 3\sqrt{3}.\sqrt{3(2+x^2)})^2$$

$$\le x^2(13+27).\left(13(2-x^2) + 3(2+x^2)\right)$$

$$= 16.5x^2\left(16 - 5x^2\right) \le 16.\frac{\left(5x^2 + 16 - 5x^2\right)^2}{4} = 32^2$$

(áp dụng bất đẳng thức $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{13\left(2-x^2\right)}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3\left(2+x^2\right)}}{3\sqrt{3}} \\ 5x^2 = 16 - 5x^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{10}}{5}$ (thỏa mãn (*)). □

➢ ***Nhận xét.*** Bài này có nhiều bạn tham gia và đều cho lời giải đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Yên Bái: *Đỗ Tùng Dương*, 10 T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Phúc**: *Trương Thị Hoài Thu*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Nguyên**: *Nguyễn Văn Tuyến*, 12A11, THPT Đồng Hỷ; **Hòa Bình**: *Nguyễn Thị Thu Hương*, 10 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Thị Thanh Hương*, 9A, THCS Yên Phong; **Bắc Giang**: *Dương Phương Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nội**: *Lê Thị Thu Huệ, Đào Thị Lan Hương*, 10 Toán, THPT Sơn Tây; **Hưng Yên**: *Nguyễn Trung Hiếu*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam**: *Trịnh Ngọc Tú*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam Định**: *Vũ Tuấn Anh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Thọ**: *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 10A1, THPT Thanh Thủy, *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa**: *Lê Hùng Cường, Nguyễn Ngọc Thạch*, 11A7, THPT Lương Đắc Bằng; **Nghệ An**: *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I, *Nguyễn Văn Huy*, 9D, THCS Lý Nhật Quang; **Hà Tĩnh**: *Trần Đoan Trang*, 10 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Nguyễn Minh Ngọc*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Trị**: *Hoàng Hải Hà*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam**: *Lê Phước Thịnh*, 9/1, THCS Kim Đồng, TP Hội An; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10 Toán, PTNK-ĐHQG TP Hồ Chí Minh; **Long An**: *Phạm Minh Hậu*, 11 Toán T1, THPT chuyên Long An; **Đồng Nai**: *Nguyễn Công Phúc*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP Biên Hòa; **Sóc Trăng**: *Lâm Bửu Hưng*, 10A1T, *Vương Hoài Thanh*, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Gia Lai**: *Trần Nguyên Try*, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương, TP Pleiku; **Vĩnh Long**: *Dương Trí Toàn*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bến Tre**: *Nguyễn Xuân Đại*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Cà Mau**: *Lê Minh Phương*, 12 Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/438. *Xét các số x, y thỏa mãn*

$$\begin{cases} x - y \ge 0 \\ x + y \ge 0 \end{cases} \text{ và } \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3} + \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3} = 27.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của x.

Lời giải. Đặt

$$a = \sqrt{\frac{x+y}{2}};\ b = \sqrt{\frac{x-y}{2}} \quad (a \ge 0;\ b \ge 0)$$

Thế thì $x = a^2 + b^2$ và từ giả thiết có $a^3 + b^3 = 27$. Suy ra

$$\begin{cases} 0 \le a \le 3 \\ 0 \le b \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 \le 3a^2 \\ b^3 \le 3b^2 \end{cases} \Rightarrow 3\left(a^2 + b^2\right) \ge a^3 + b^3 = 27$$

Do đó $x = a^2 + b^2 \ge 9$, đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} a^3 = 3a^2 \\ b^3 = 3b^2 \\ a^3 + b^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow y = \pm 9$. Vậy $\min x = 9$ khi $y = \pm 9$. □

➢***Nhận xét.*** Có thể giải bài toán bằng cách đặt $t = \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{2}}$ $(t > 0)$; ta tính được $x = \frac{t^3}{3} + \frac{18}{t}$; áp dụng bất đẳng thức Cauchy $x = \frac{t^2}{3} + \frac{9}{t} + \frac{9}{t} \ge 9$ suy ra kết quả như trên. Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Hồng Ngọc, Bùi Duy Cường*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ**: *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh**: *Cao Thị Quỳnh Nga*, 9A, THCS Yên Phong; **Nghệ An**: *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I, Đà Sơn, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Đình Nhật Nam, Nguyễn Văn Thế*,

10 T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Nam**: *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10 Toán, PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T8/438. *Cho tam giác ABC. Gọi m_a, l_b, l_c và p theo thứ tự là độ dài đường trung tuyến kẻ từ A, độ dài các đường phân giác trong kẻ từ B, C và nửa chu vi của tam giác. Chứng minh rằng $m_a + l_b + l_c \le p\sqrt{3}$.*

Lời giải. Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Từ công thức đường phân giác và *BĐT Cauchy* ta có

$$l_b = \frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c} \le \sqrt{ac}.\cos\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow l_b^2 \le ac\left(\frac{1+\cos B}{2}\right) = \frac{ac}{2}\left(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$$

$$\Rightarrow l_b^2 \le p(p-b) \Rightarrow l_b \le \sqrt{p(p-b)} \quad (1)$$

Tương tự có $l_c \le \sqrt{p(p-c)}$ (2)

Theo công thức đường trung tuyến trong tam giác ABC thì $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$

$$= (b+c)^2 - (a^2 - (b-c)^2)$$

$$= \left(b+c+2\sqrt{(p-b)(p-c)}\right)\left(b+c-2\sqrt{(p-b)(p-c)}\right) \quad (3)$$

Mặt khác,

$$b+c+2\sqrt{(p-b)(p-c)} \le b+c+2p-b-c = 2p$$

(theo BĐT Cauchy);

$$b+c-2\sqrt{(p-b)(p-c)} = 2p-\left(\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)^2.$$

Từ (3) suy ra

$$4m_a^2 \le 2p\left(2p-\left(\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)^2\right),$$

dẫn đến

$$\sqrt{p(p-b)}+\sqrt{p(p-c)} \le \sqrt{2(p^2-m_a^2)} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (4) kết hợp với *BĐT Bunyakovsky*, ta được $m_a + l_b + l_c$

$$\le m_a + \sqrt{2(p^2-m_a^2)} \le \sqrt{(1+2)(m_a^2+p^2-m_a^2)}$$

$$= p.\sqrt{3} \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Bài **T8/438** đã được giới thiệu trong cuốn sách *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ, Quyển 6, trang 145.*

2) Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Những bạn sau có đáp án gọn hơn cả:

Thái Nguyên: *Nguyễn Văn Tuyến*, 12A11, THPT Đồng Hỷ; **Bắc Giang:** *Nguyễn Thị Trang*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hòa Bình:** *Lê Đức Việt*, 12CT, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, TP. Hòa Bình; **Hà Nội:** *Nguyễn Duy Khương*, 8A9, THCS Giảng Võ, quận Ba Đình; *Bùi Hữu Thành*, 12 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** *Đinh Thị Diệu Linh*, 11A1, THPT Lý Nhân; **Nam Định:** *Vũ Tuấn Anh*, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Bùi Hoàng Đạt*, 12C1, THPT Nguyễn Đức Mậu, Quỳnh Lưu; *Nguyễn Đình Toàn*, 10T1, THPT Đô Lương 1; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đình Nhật Nam, Nguyễn Văn Thế*, 10 Toán 1; *Trần Đoan Trang*, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đăk Lăk:** *Huỳnh Trung Quân*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Phú Yên:** *Trần Đỗ Bảo Huân*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Long An:** *Nguyễn Minh Trí*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Cà Mau:** *Lê Minh Phương*, 12CT, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10 Toán, Trường PTNK – ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/438. a) *Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số hữu tỉ. Chứng minh rằng, nếu với mọi số nguyên dương m mà $a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m$ là số nguyên thì $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số nguyên.*

b) *Bài toán trên còn đúng không nếu chỉ giả thiết rằng $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số thực?*

Lời giải. a) Trước tiên, ta nhận xét rằng nếu trong n số $a_1, a_2, ..., a_n$ có một số nguyên, chẳng hạn $a_1 \in \mathbb{Z}$ thì $a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}^+$

$$\Leftrightarrow a_2^m + ... + a_n^m \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}^+.$$

Vì vậy không mất tính tổng quát ta có thể giả sử phản chứng rằng tất cả các a_i ($i = 1,..., n$) không là số nguyên.

Đặt $a_i = \frac{p_i}{q_i}$, $(p_i, q_i) = 1$, $q_i > 1$, $\forall i = 1,..., n$.

Đặt $Q = \text{BCNN}(q_1,..., q_n)$.

Khi đó $a_i = \frac{k_i}{Q}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Lấy p là một ước nguyên tố của Q. Khi đó tồn tại $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho p không là ước của k_{i_0}.

Thật vậy giả sử trái lại, khi đó $k_i = l_i p$

$$\Rightarrow a_i = \frac{l_i p}{Q} = \frac{l_i}{Q'} \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

với $Q' = \frac{Q}{p} < Q$ và Q' là một bội của $q_1, \ldots, q_n$

(vì $l_i = Q' a_i = \frac{Q' p_i}{q_i} \in \mathbb{Z}$, $(p_i, q_i) = 1 \Rightarrow Q' \vdots q_i$).

Điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của Q.

Gọi r_i là số dư khi chia k_i cho p.

Ta có: $0 \le r_i < p, \forall i \ne i_0$ và $0 < r_{i_0} < p$ (1)

Ta có $k_i \equiv r_i \pmod{p}$, $\forall i = \overline{1, \ldots, n} \Rightarrow k_i^m \equiv r_i^m \pmod{p}$. Vậy

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^m \equiv \sum_{i=1}^{n} k_i^m = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m\right) Q^m \equiv 0 \pmod{p^m} \quad (2)$$

Vì (1) ta có $\sum_{i=1}^{n} r_i^m > 0$. Do đó từ (2) suy ra

$$p^m \le \sum_{i=1}^{n} r_i^m, \forall m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 1 \le \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r_i}{p}\right)^m, \forall m \in \mathbb{Z}^+.$$

Vì $\frac{r_i}{p} < 1$ nên $\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r_i}{p}\right)^m = 0$ (vô lí).

Vậy ta có điều cần chứng minh.

b) Kết luận của a) không đúng nếu chỉ giả thiết $a_1, \ldots, a_n$ là các số thực: chẳng hạn với $n = 2$ $a_1 = 1 - \sqrt{2}$, $a_2 = 1 + \sqrt{2}$ thì $a_1, a_2 \notin \mathbb{Q}$ và $a_1^m + a_2^m = (1 - \sqrt{2})^m + (1 + \sqrt{2})^m = S_m$ là số nguyên với $\forall m \in \mathbb{Z}^+$.

Thật vậy dễ thấy $S_{m+2} = 2S_m + S_m$, mà

$S_1 = 2, S_2 = 6$ nên $S_m \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}^+$. □

➢***Nhận xét.*** Chỉ có 6 bạn tham gia giải trong đó hai bạn có lời giải đúng. Đó là bạn *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy* (10 PTNK – ĐHQG **TP. Hồ Chí Minh**. Bạn còn lại ẩn danh (không ghi tên và địa chỉ).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/438. *Tìm hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn (với mọi số thực x, y):*

$$f(x) + f(y) + 2 = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Lời giải. Giả sử $f(x)$ là hàm số thỏa mãn bài toán. Ta có $(f(x) - 1) + (f(y) - 1)$

$$= 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - 1\right) + 2\left(f\left(\frac{x-y}{2}\right) - 1\right).$$

Do đó $g(x) + g(y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2g\left(\frac{x-y}{2}\right)$,

trong đó $g(x) = f(x) - 1$. Cho $x = y = 0$ thì $2g(0) = 4g(0)$. Suy ra $g(0) = 0$.

Nhận xét: với $n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$ thì

$$g((n+1)x) + g((n-1)x) = 2g(nx) + 2g(x)$$

và ta có hằng đẳng thức

$$(n+1)^2 + (n-1)^2 = 2.n^2 + 2.1^2.$$

Bởi vậy, từ $g(0) = 0$ và chứng minh bằng quy nạp theo n ta nhận được $g(n.x) = n^2.g(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó với mọi số hữu tỉ

$\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1)$ ta có

$$p^2 g(1) = g(p) = g\left(q.\frac{p}{q}\right) = q^2.g\left(\frac{p}{q}\right).$$

Suy ra $g\left(\frac{p}{q}\right) = a.\left(\frac{p}{q}\right)^2$, trong đó ta kí hiệu $a = g(1)$. Với x là số thực bất kì, như ta biết: tồn tại một dãy các số hữu tỉ $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $r_n \to x$ khi $n \to +\infty$.

Ta có $g(r_n) = a.r_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và do $g(x)$ là hàm số liên tục (vì $f(x)$ là hàm số liên tục) ta suy ra $\lim_{n \to +\infty} g(r_n) = g(x)$.

Bởi vậy $g(x) = \lim_{n \to +\infty} a.r_n^2 = a.x^2$.

Do đó $f(x) = g(x) + 1 = ax^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì các biến đổi từ $f(x)$ về $g(x)$ là tương đương nên chúng ta không phải thử lại.

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn bài toán là $f(x) = ax^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, trong đó a là hằng số thực bất kì. □

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán phương trình hàm dạng cơ bản, hay. Các bạn học sinh lớp 10, 11 sau có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Trần Bá Trung*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** *Trần Mạnh Hùng*, 11 Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hà Nam:** *Đặng Quang Huy, Trịnh Ngọc Tú, Lê Anh Tuấn*, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Thái Bình:** *Vũ Văn Dũng*, 12T2, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** *Phạm Việt Anh*, 10A1, THPT Quỳnh Lưu I; *Phạm Trung Dũng*, 11A1, THPT chuyên Đại Học Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trần Hậu Mạnh Cường*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Trần Trọng Tiến*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Nữ Ngọc Hân*; *Huỳnh Trung Quân*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Du; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10T, PTNK – ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Bình Định:** *Mai Tiến Luật*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Long An:** *Nguyễn Minh Trí*, 11T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/438. *Cho tam giác ABC với BC = a, AC = b, AB = c; m_a, m_b, m_c theo thứ tự là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng*

a) $\left(\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\right)\frac{MA}{a}+\left(\frac{m_c}{c}+\frac{m_a}{a}\right)\frac{MB}{b}+\left(\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}\right)\frac{MC}{c}\geq 3;$

b) $\left(\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\right)\frac{MA}{a}+\left(\frac{c}{m_c}+\frac{a}{m_a}\right)\frac{MB}{b}+\left(\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}\right)\frac{MC}{c}\geq 4.$

Lời giải. *Bổ đề 1. Với mọi số thực dương a, b, c, x, y, z, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geq 2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}.$$

Chứng minh. Kí hiệu

$M=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$,

$N=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$.

Ta có $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$

$=(a+b+c)(x+y+z)-(ax+by+cz)$

$=\sqrt{M.N}-(ax+by+cz)$

$\geq\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}+$

$+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}-(ax+by+cz)$

$\geq 2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}.$

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kì. Ta luôn có

$$\frac{MA.MB}{ab}+\frac{MB.MC}{bc}+\frac{MC.MA}{ca}\geq 1.$$

Chứng minh. Với mọi số thực x, y, z ta luôn có

$$(x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC})^2\geq 0,$$

suy ra $(x+y+z)(xMA^2+yMB^2+zMC^2)$

$\geq yza^2+zxb^2+xyc^2.$

Chọn $x=\frac{a}{MA}$; $y=\frac{b}{MB}$; $z=\frac{c}{MC}$ ta được

$$\left(\frac{a}{MA}+\frac{b}{MB}+\frac{c}{MC}\right)(a.MA+b.MB+c.MC)$$

$$\geq abc\left(\frac{a}{MB.MC}+\frac{b}{MC.MA}+\frac{c}{MA.MB}\right).$$

Nhân cả hai vế của BĐT trên với $MA.MB.MC$ và rút gọn ta được điều cần chứng minh..

Bổ đề 3. Trong tam giác ABC, ta luôn có

(i) $\frac{m_a.m_b}{ab}+\frac{m_b.m_c}{bc}+\frac{m_c.m_a}{ca}\geq\frac{9}{4}$;

(ii) $\frac{ab}{m_a.m_b}+\frac{bc}{m_b.m_c}+\frac{ca}{m_c.m_a}\geq 4.$

Chứng minh. (i) Theo bổ đề 2, ta có

$$\frac{GA.GB}{ab}+\frac{GB.GC}{bc}+\frac{GC.GA}{ca}\geq 1,$$

trong đó G là trọng tâm của tam giác ABC.

Thay $GA=\frac{2}{3}m_a$; $GB=\frac{2}{3}m_b$; $GC=\frac{2}{3}m_c$, suy ra điều cần chứng minh.

(ii) Chú ý rằng, nếu một tam giác có độ dài các cạnh là m_a; m_b; m_c thì độ dài các đường trung tuyến ứng với các cạnh đó là $\frac{3}{4}a$; $\frac{3}{4}b$; $\frac{3}{4}c$.

Áp dụng BĐT đã chứng minh ở phần (i) vào tam giác này ta có điều cần chứng minh.

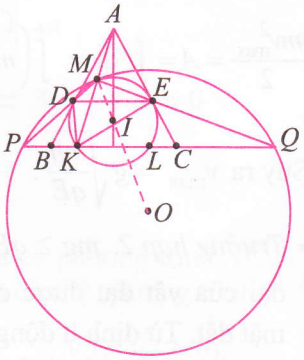
a) Trong bổ đề 1 thay $(a; b; c)$ bởi $\left(\frac{m_a}{a}; \frac{m_b}{b}; \frac{m_c}{c}\right)$ và thay $(x; y; z)$ bởi $\left(\frac{MA}{a}; \frac{MB}{b}; \frac{MC}{c}\right)$ sau đó áp dụng bổ đề 2 và bổ đề 3 ta nhận được BĐT phải chứng minh.

b) Trong bổ đề 1 thay $(a; b; c)$ bởi $\left(\frac{a}{m_a}; \frac{b}{m_b}; \frac{c}{m_c}\right)$ và thay $(x; y; z)$ bởi $\left(\frac{MA}{a}; \frac{MB}{b}; \frac{MC}{c}\right)$ sau đó áp dụng bổ đề 2 và bổ đề 3 ta nhận được BĐT phải chứng minh. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Tòa soạn không nhận được bài giải nào của bạn đọc gửi về.

TH&TT

Bài T12/438. *Cho tam giác ABC cân tại A. Một đường tròn ω tiếp xúc với các cạnh AB, AC và cắt cạnh BC lần lượt tại K, L. Đoạn thẳng AK cắt đường tròn ω tại M. Gọi P, Q lần lượt là các điểm đối xứng của K qua B, C. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ. Chứng minh rằng các điểm M, O và tâm đường tròn ω thẳng hàng.*



Lời giải. Gọi I là tâm của ω D, E theo thứ tự là tiếp điểm của ω và AB, AC; (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔMPQ.

Dễ thấy tứ giác $MDKE$ điều hoà.

Do đó $D(MKBE) = D(MKDE) = -1$.

Dễ thấy $DE // PK$. Từ đó, chú ý rằng $BP = BK$, suy ra $D(PKBE) = -1$.

Vậy $D(MKBE) = D(PKBE)$.

Từ đó $DM \equiv DP$. Nói cách khác M, D, P thẳng hàng. Tương tự M, E, Q thẳng hàng. Kết hợp với $DE // DQ$, suy ra

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{ME}} = k.$$

Do đó qua phép vị tự V_M^k các điểm M, D, E theo thứ tự biến thành các điểm M, P, Q.

Vậy qua phép vị tự V_M^k đường tròn ω biến thành đường tròn (O).

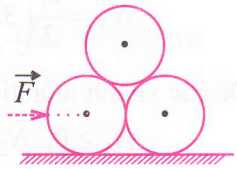
Do đó M, I, O thẳng hàng (đpcm). ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Bài toán này dễ, nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên nhiều lời giải còn dài.

2) Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tương đối tốt: **Hoà Bình:** *Lê Đức Việt*, 12T; *Đinh Chung Mừng*, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Hồng Ngọc*, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội**: *Trần Mạnh Hùng*, 11TA, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hà Nam**: *Lê Anh Tuấn*, 11T, THPT chuyên Biên Hoà; **Nam Định**: *Nguyễn Hồng Đăng*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh**: *Trần Hậu Mạnh Cường*, 11T1; *Lê Văn Trường Nhật*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định**: *Trương Minh Nhật Quang*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre**: *Nguyễn Xuân Đại*, 11T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/438. *Ba xi lanh giống hệt nhau được xếp trên một mặt sàn như hình vẽ. Mặt sàn và các xi lanh đều không có ma sát. Tác dụng vào xi lanh trái một lực $\vec{F}$ nằm ngang hướng vào trục của xi lanh. Hỏi lực $\vec{F}$ nhỏ nhất và lớn nhất bằng bao nhiêu để cho cả ba xi lanh luôn tiếp xúc với nhau khi chuyển động?*



Lời giải. Vì mặt sàn và các xilanh đều không có ma sát nên phản lực tương tác giữa các xilanh được mô tả như hình vẽ.

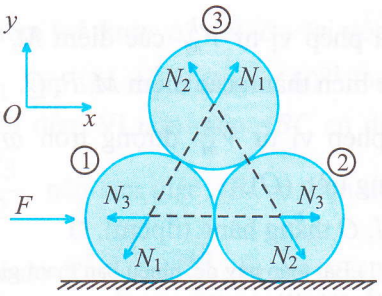
Theo giả thiết cả ba xilanh luôn tiếp xúc với nhau khi chuyển động nên ta có thể coi chúng như một vật có khối lượng $3m$ và chuyển động với cùng gia tốc: $a = \frac{F}{m}$ (1)

Chọn hệ quy chiếu Oxy như hình vẽ.

Xét xilanh ③, ta có $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 = m\vec{a}$ (*)

Chiếu phương trình (*) lên trục Ox, ta có:

$$(N_1 - N_2)\cos 60^o = ma \Rightarrow N_1 - N_2 = 2ma \quad (2)$$



Chiếu phương trình (*) lên trục Oy, ta có

$$(N_1 + N_2)\cos 30^o = mg \Rightarrow N_1 + N_2 = \frac{2mg}{\sqrt{3}} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có

$$N_1 = m\left(\frac{g}{\sqrt{3}} + a\right) \ (4)\ ;\ N_2 = m\left(\frac{g}{\sqrt{3}} - a\right) \quad (5)$$

Xét xilanh số ②, ta có $\vec{N}_3 + \vec{N}_2 = m\vec{a}$ (**)

Chiếu phương trình (**) lên trục Ox, ta có

$$N_3 + N_2\cos 60^o = ma \quad (6)$$

Từ (5) và (6), ta thu được

$$N_3 = \frac{m}{2}\left(3a - \frac{g}{\sqrt{3}}\right) \quad (7)$$

Để các xilanh luôn tiếp xúc nhau thì

$$N_1 \geq 0,\ N_2 \geq 0 \text{ và } N_3 \geq 0.$$

• Với $N_2 \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{g}{\sqrt{3}} \Rightarrow F \leq \frac{3mg}{\sqrt{3}}$.

• Với $N_3 \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{g}{3\sqrt{3}} \Rightarrow F \geq \frac{mg}{\sqrt{3}}$.

Vậy $F_{max} = mg\sqrt{3}$ và $F_{min} = \frac{mg}{\sqrt{3}}$. □

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải đúng:

Nghệ An: *Nguyễn Hồng Đức*, 10A3, *Chu Minh Thông*, 11A3, *Lê Xuân Bảo*, 12A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Phan Quốc Vương*, 11A1, THPT Diễn Châu 3; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Đức Thắng*, *Nguyễn Mạnh Dân*, 10A3, *Nguyễn Mạnh Dũng*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Nguyễn Tuấn Quyền*, 11V0, THPT Lương Thế Vinh; **Thái Bình:** *Vũ Văn Dũng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình.

ĐẶNG THANH HẢI

Bài L2/438. *Trong không gian có trọng trường đều với gia tốc $\vec{g}$ và điện trường thẳng đứng hướng lên từ mặt đất, có độ lớn phụ thuộc vào độ cao x theo biểu thức $E_x = E\left(1 - \frac{x}{h}\right)$. Một quả cầu nhỏ khối lượng m mang điện tích q (q > 0) được thả không vận tốc ban đầu từ độ cao h. Hãy tìm vận tốc cực đại của quả cầu trong quá trình chuyển động. Bỏ qua sức cản của không khí.*

Lời giải. Chọn trục Oy hướng thẳng đứng xuống dưới, gốc O là vị trí thả vật. Khi vật ở độ cao x, tọa độ y của vật là $y = h - x$. Hợp lực tác dụng lên vật là $F = mg - \frac{qEy}{h}$.

• *Trường hợp 1.* $mg < qE$. Khi đó tồn tại vị trí cân bằng tại đó hợp lực bằng 0:

$$F = mg - \frac{qEy}{h} = 0 \Rightarrow y_{cb} = \frac{mgh}{qE}.$$

Vận tốc cực đại vật đạt được tại vị trí cân bằng. Áp dụng định lí động năng ta có

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = A = \int F dy = \int_0^{y_{cb}} \left(mg - \frac{qEy}{h}\right) dy = \frac{(mg)^2 h}{2qE}$$

Suy ra $v_{max} = g\sqrt{\frac{mh}{qE}}$.

• *Trường hợp 2.* $mg \geq qE$. Khi đó vận tốc cực đại của vật đạt được ở thời điểm nó chạm mặt đất. Từ định lí động năng có

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = A = \int F dy = \int_0^h \left(mg - \frac{qEy}{h}\right) dy$$

$$= mgh - \frac{qEh}{2}.$$

Suy ra $v_{max} = \sqrt{2gh - \frac{qEh}{2m}}$. □

➢***Nhận xét.*** Tất cả các bạn đều chỉ xét được trường hợp 1 và bỏ qua trường hợp 2.

NGUYỄN XUÂN QUANG

DÙNG PHƯƠNG PHÁP... *(Tiếp trang 16)*

• Tiếp theo, ta chứng minh bất đẳng thức phải. Nhận thấy, khi $a = b = 0, c = \sqrt{3}$ (và các hoán vị) thì dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra. Do đó, ta ước lượng đồ thị có dạng $y = mx^2 + n$ nằm trên đồ thị $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ trên đoạn $\left[0; \sqrt{3}\right]$ và hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x = 0$ và $x = \sqrt{3}$.

Vậy phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $\dfrac{1}{x^2 + x + 1} = mx^2 + n$ có hai nghiệm là 0 và $\sqrt{3}$. Suy ra

$$\begin{cases} n = 1 \\ 3m + n = \dfrac{1}{4 + \sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = \dfrac{-3 - \sqrt{3}}{3\left(4 + \sqrt{3}\right)} = -\dfrac{9 + \sqrt{3}}{39} \end{cases}$$

Ta chứng minh

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} \le 1 - \frac{9 + \sqrt{3}}{39}x^2,\ \forall x \in \left[0; \sqrt{3}\right] (*)$$

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow$

$$x\left(x - \sqrt{3}\right)\left[\left(9 + \sqrt{3}\right)x^2 + \left(12 + 10\sqrt{3}\right)x + 13\sqrt{3}\right] \le 0,$$

đúng $\forall x \in \left[0; \sqrt{3}\right]$. Suy ra

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1}$$
$$\le 3 - \frac{9 + \sqrt{3}}{39}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{30 - \sqrt{3}}{13}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 0, c = \sqrt{3}$ và các hoán vị. ❐

★Thí dụ 10. *Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của

$$P = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{z^2 - z + 1}.$$

Lời giải. Phương trình tiếp tuyến của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ tại $x_0 = 1$ là $y = \dfrac{1}{2}(x + 1)$.

Với $x \ge 0$ ta có $\sqrt{x^2 - x + 1} \ge \dfrac{1}{2}(x + 1)$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4 \ge x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 3(x - 1)^2 \ge 0$ (đúng với mọi $x \ge 0$). Do đó

$$P = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{z^2 - z + 1}$$
$$\ge \frac{1}{2}(x + y + z + 3) = 3.$$

Vậy $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Ta cần tìm 2 số *a, b* sao cho đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ nằm dưới đồ thị $y = ax + b$ trên đoạn [0; 3] và hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm đầu mút 0 và 3.

Tức là phương trình hoành độ giao điểm:

$\sqrt{x^2 - x + 1} = ax + b$ có hai nghiệm là 0 và 3.

Suy ra $\begin{cases} 1 = b \\ \sqrt{7} = 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \dfrac{\sqrt{7} - 1}{3} \end{cases}$.

Ta chứng minh

$$\sqrt{x^2 - x + 1} \le \frac{\sqrt{7} - 1}{3}x + 1,\ \forall x \in [0; 3]\ (*)$$

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow \dfrac{-1 - 2\sqrt{7}}{9}x(x - 3) \ge 0$

(đúng với mọi $x \in [0; 3]$).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 3$. Suy ra

$$P = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{z^2 - z + 1}$$
$$\le \frac{\sqrt{7} - 1}{3}(x + y + z) + 3 = \sqrt{7} + 2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 3, y = z = 0$ và các hoán vị. Vậy $\max P = \sqrt{7} + 2$. ❐

BÀI TẬP

1. Cho *x, y, z* dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + (x + y + z) \ge 4\sqrt{3}$.

2. Cho *a, b, c, d* dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 8(a + b + c + d) \ge 24.$$

3. Cho các số thực *a, b, c* dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4a}{a^2 - 2a + 5} + \frac{4b}{b^2 - 2b + 5} + \frac{4c}{c^2 - 2c + 5} \ge 3.$$

4. Cho *a, b, c* dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1 - a} + \frac{1}{1 - b} + \frac{1}{1 - c} \ge \frac{3\sqrt{3} + 9}{2}.$$

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(Tiếp trang 16)

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/442 (For 6th grade). Find two whole numbers of the form $\overline{ab}$ and $\overline{ba}$ $(a \neq b)$ such that

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \frac{\overline{a\underbrace{3\ldots3}_{\substack{2014\\ \text{digits } 3}}b}}{\overline{b\underbrace{3\ldots3}_{\substack{2014\\ \text{digits } 3}}a}}.$$

T2/442 (For 7th grade). The sum A below consists of 2014 summands

$$A = \frac{1}{19^1} + \frac{2}{19^2} + \frac{3}{19^3} + \ldots + \frac{n}{19^n} + \ldots + \frac{2014}{19^{2014}}.$$

Compare the number A^{2013} with A^{2014}.

T3/442. Let $ABCD$ be a quadrilateral whose diagonals AC and BD are perpendicular. M and N are the midpoints of line segments AB, AD respectively. Points E, F are the feet of perpendicular lines from M and N onto CD, BC respectively. Prove that $MNEF$ is a cyclic quadrilateral.

T4/442. Solve for x.

$$4x^3 + 4x^2 - 5x + 9 = 4\sqrt[4]{16x+8}.$$

T5/442. The real numbers x, y, z satisfy $x + y + z = 1$. Prove the inquality

$$44(xy + yz + zx) \leq (3x + 4y + 5z)^2.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/442. Prove that the following equation has no real solutions:

$$9x^4 + x(12x^2 + 6x - 1) + (x+1)(9x^2 + 12x + 5) + 1 = 0.$$

T7/442. Triangle ABC inscribed in a circle centered at O and radius R, where $CA \neq CB$; $\widehat{ACB} \neq 90^\circ$. The circumcircle centered at S of triangle AOB meets CA, CB at points M, N respectively. Let K be the reflection of S in the line MN. Prove that $SK = R$.

T8/442. The real numbers x, y, z satisfy $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Determine the largest and smallest values of the following expression

$$P = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5.$$

Translated by LE MINH HA

---

5. Cho x, y dương thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$A = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

6. Cho $0 < x, y, z < 1$ thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm GTNN của biểu thức

$$A = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} + \frac{z}{\sqrt{1-z}}$$

7. Cho a, b, c, d dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+d)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+d)(c+a)(c+b)} + \frac{d^3}{(d+a)(d+b)(d+c)} \geq \frac{1}{2}$$

8. Cho a, b, c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

9. Cho a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+\sqrt{a}}{1-a} + \frac{1+\sqrt{b}}{1-b} + \frac{1+\sqrt{c}}{1-c} + \frac{1+\sqrt{d}}{1-d} \geq 8.$$

10. Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a^3}{1+a} + \frac{b^3}{1+b} + \frac{c^3}{1+c}.$$

11. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{9}{4}$. Tìm GTLN của biểu thức

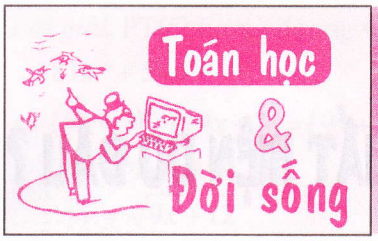
$$S = \left(a + \sqrt{a^2+1}\right)^b \left(b + \sqrt{b^2+1}\right)^c \left(c + \sqrt{c^2+1}\right)^a$$

12. Cho a, b, c dương. Chứng minh

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

13. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + 10(x+y).$$



PHƯƠNG TRÌNH THÁP EIFFEL

PHAN THANH QUANG
(*Theo Science et Vie*)

Tại sao *Gustave Eiffel* lại tạo cho Tháp Eiffel một dáng độc đáo, không giống với bất kì công trình kiến trúc đồ sộ nào trước đó? Phải chăng nguyên lí Vật lí và Toán học nào đã gợi ý cho Ông kiểu dáng đó? Có thể mô hình hóa dáng của tháp bằng một phương trình toán học không? Từ 116 năm nay, ngọn tháp cao 300m kiêu hãnh ngự trị thủ đô ánh sáng vẫn không ngớt là đề tài nghiên cứu, thảo luận của các nhà toán học và kiến trúc. Người đem lại giải đáp là kĩ sư *Patrick Weidman*, công tác ở Đại học Colorado (Hoa Kỳ). Ông đã giải thích lí do hình dáng của tháp bằng tính chất vật lí của hình dáng đó.

Câu chuyện bắt đầu từ năm 2001. Năm đó ông nhận được một cuốn sách Toán dành cho kĩ sư. Bìa sách in ảnh bốn giai đoạn xây dựng tháp và một công thức toán đầy bí ẩn gọi là "*Phương trình của tháp Eiffel*". Phương trình này không phải của một nhà toán học hay kiến trúc đặt ra, mà là của một kĩ sư người Pháp tên là *Christophe Chouard*. Ông ta "say mê" tháp Eiffel và đặt ra một phương trình xuất phát từ một nguyên lí Vật lí: "*Lực của gió tác động vào Tháp phải được bù lại bằng trọng lực kéo nó xuống nền*". Chỗ bí ẩn của phương trình là không thể giải được bằng công cụ hiện có của Toán học. Ông *Chouard* đã đưa phương trình lên internet bằng tiếng Anh với hi vọng "có nhà toán học tài năng nào giải được".

Patrick Weidman đã bỏ bốn tháng ngồi tìm cách giải, nhưng vô ích. Ông nghĩ rằng "có thể phương trình này sai". Ông liên hệ với nhà toán học chuyên về giải tích ở Đại học Công nghệ Michigan tên là *Iosif Pinelis*. Ông này khẳng định rằng: tất cả những lời giải của phương trình dẫn đến những dạng lồi, còn tháp Eiffel lại có dạng lõm! *Weidman* quyết định "sục" vào những bài viết của *Eiffel* và cuối cùng thấy rằng Chouard không dựa vào đúng những nguyên lí Vật lí mà *Eiffel* đã sử dụng, vì *Eiffel* cho rằng "*không phải trọng lực của tháp cân bằng với sức gió, mà chính hướng của những cột chống tạo ra lực cân bằng với gió*".

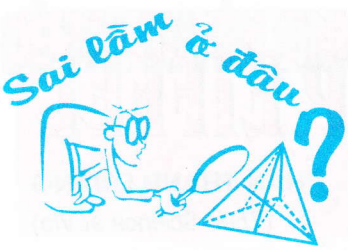
Eiffel đã viết trong hồi kí rằng ông đã tính những đường cong của bốn cây cột theo lực của gió, đó là bằng chứng cho thấy ông không làm một cách mò mẫm, mà theo những phương pháp toán học rất công phu. Để hiểu được những phép tính đó, ta hãy xét một độ cao của tháp. Ở trên độ cao đó, lực của gió thay đổi tùy theo diện tích phần kim loại lộ ra, nhưng người ta có thể tính hợp lực của các lực đó. Nếu ở độ cao đang xét đó mà hướng của các cạnh đối diện gặp mức mà hợp lực của gió đặt vào, thì lực của gió làm lung lay tháp sẽ bị triệt tiêu. "*Bằng cách đó Eiffel có thể bỏ những lực ngang của gió bằng cách tính theo toán học hướng của xà. Từ đó có thể bỏ qua luôn những yếu tố chéo góc. Vì thế có thể giảm bớt diện tích của vật liệu đương đầu với gió. Kết quả là cấu trúc giảm được nhiều trọng lượng.*" Phương trình của *Eiffel* dựa vào một nguyên lí khác của xây dựng.

Có phải chăng vì thế mà *Chouard* thất bại còn Eiffel thành công?

Phương trình của *Eiffel* dẫn đến một hàm số mũ mà đồ thị của nó chính là dáng của đế tháp tầng một. Trên thực tế, *Eiffel* không xây dựng toàn bộ tháp theo cùng một tiêu chuẩn an toàn. Ông đã tăng cường độ vững chãi của bốn chân tháp, để phòng ngừa những trận gió cực mạnh làm tháp rung, nghiêng. Do đó ngày nay ta thấy tầng một có dạng tuyến tính,và sau đó ở các tầng trên là dạng hàm số mũ. Hai dạng đó ứng với hai phương trình đặc trưng: "*Phương trình Tháp Eiffel*".

Tư liệu về Tháp Eiffel:

- Thời gian thi công: *2 năm 2 tháng 5 ngày*
- Số người tham gia: *50 kĩ sư và 200 công nhân*
- Chiều cao: *324 mét (kể cả ăng ten), là tháp cao nhất thế giới cho đến năm 1930*
- Trọng lượng: *10.000 tấn.*
- Có: *2,5 triệu ri vê (ốc tán), 1665 bậc*
- Cứ *7 năm sơn lại lần, mỗi lần tốn 60 tấn sơn.*
- Khánh thành năm 1889, cho đến nay Tháp Eiffel đã đón 200 triệu lượt người tham quan.



Giải đáp bài
NGHIỆM NGOẠI LAI XUẤT HIỆN DO ĐÂU ?

(Đề đăng trên TH&TT số 438, tháng 12 năm 2013)

Nghiệm ngoại lai $x = \frac{56}{65}$ xuất hiện nằm ở trường hợp thứ hai của lời giải. Thật vậy, khi đặt $b = 2\sqrt{x^2 - x + 1}$, ta thấy

$$b = 2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{3}.$$

Do đó $a + b \geq \sqrt{3} > 1$, hay $a + b - 1 > 0$.

Nghĩa là trường hợp 2: $a + b - 1 = 0$ không xảy ra. Từ đó $x = \frac{56}{65}$ không phải là nghiệm của phương trình

$$\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3 \quad (1)$$

Kết luận

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có đáp án tốt hơn cả: *Ma Thị Khánh Huyền*, 10 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên, **Thái Nguyên**; *Nguyễn Đình Trung*, 9B, THCS Lý Tự Trọng, Hương Canh, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Trần Bá Trung*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Nguyễn Đình Toàn*, 10T1, THPT Đô Lương 1, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Văn Cường*, 11A4, THPT Ba Chúc, Tri Tôn, **An Giang**; *Lê Thảo Nhân*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre**.

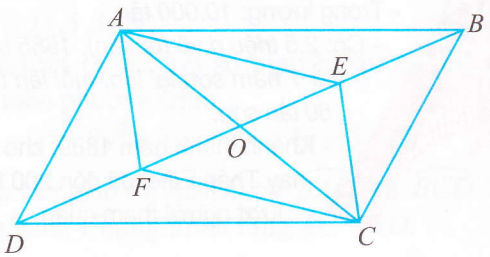
NGỌC HIỀN

Lời giải đã hoàn chỉnh chưa?

Trong một tiết học toán, thầy giáo ra một đề toán với nội dung:

Cho hình bình hành ABCD, trên đường chéo BD ta lấy hai điểm E, F khác O (với O là giao điểm hai đường chéo) sao cho BE = DF. Chứng minh rằng AF // CE.

Một bạn học sinh xung phong lên bảng giải bài toán trên như sau:



Vì ta có $OB = OD$ và theo giả thiết

$BE = DF$, nên

$$\begin{aligned} OF &= OD - DF \\ &= OB - BE \\ &= OE. \end{aligned}$$

Vậy tứ giác $AECF$ có hai đường chéo AC, EF cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên nó là hình bình hành. Do đó ta được $AF//CE$ (đpcm).

Theo bạn, lời giải trên đã hoàn chỉnh chưa?

Lời giải của bạn như thế nào?

TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Câu lạc bộ

MỘT SỐ TƯỚNG LĨNH THỜI HAI BÀ TRƯNG

VIỆT AN
(Hà Nội)

Mùa xuân năm Canh Tý (năm 40) cuộc khởi nghĩa (KN) của Hai Bà Trưng giành lại độc lập, tự chủ cho nước ta trong gần ba năm, chiếm được một vùng rộng lớn từ Nhật Nam (Nghệ Tĩnh), Cửu Chân (Thanh Hóa), Giao Chỉ (đồng bằng Bắc bộ) đến Hợp Phố (Quảng Đông, Trung Quốc), Lĩnh Nam (miền nam núi Nghĩa Lĩnh, tỉnh Hồ Nam, Trung Quốc).

Xin giới thiệu một số trong khoảng 250 tướng lĩnh thời Hai Bà Trưng. Nhiều tướng lĩnh đã được Trưng Nữ Vương sắc phong (mục **A**) và được thờ ở nhiều địa phương (mục **B**). Bạn hãy sắp xếp các mục **A**, mục **B** cho phù hợp nhé! Các địa danh tỉnh, huyện được gọi theo tên hiện nay.

A – Họ, tên và Sắc phong, nơi khởi nghĩa

A1. Trưng Trắc, con quan Lạc tướng Mê Linh (Mê Linh, Hà Nội), Trưng Nữ Vương. Chồng là Thi Sách (họ Đặng ?), con quan Lạc tướng Chu Diên (vùng đất giữa sông Đáy và sông Hồng). Em Trưng Trắc là Trưng Nhị, Bình Khôi công chúa. KN: Mê Linh, Hà Nội.

A2. Hồ Đề, Đề Nương (Đào Nương) công chúa, Phó Nguyên soái, Trấn Viễn đại tướng quân. KN: Lão Mai, Đông Cao, Mê Linh, Hà Nội.

A3. Lê Chân, Thánh Chân công chúa, Trưởng quản binh quyền duyên hải Đông Bắc. KN: An Biên trang, An Dương, Hải Phòng.

A4. Nàng Chủ, Thánh Thiên công chúa, Bình Tây Đại tướng quân, trấn giữ Hợp Phố. KN: Yên Dũng, Bắc Ninh và Bắc Giang.

A5. Ông Cai, Đại tướng quân. KN: Nam Nguyễn, Ba Vì, Hà Nội. Lập đội quân giả gái.

A6. Phật Nguyệt (họ Đinh), Phật Nguyệt công chúa, Thao Giang Thượng Tả tướng thủy quân, Tổng trấn khu Động Đình – Trường Sa (hiện thuộc Trung quốc). KN: Thanh Ba, Phú Thọ.

A7. Quách A (Quách Lã nương), Khâu Ni công chúa, Tiên phong Tả tướng quân. KN: Bạch Hạc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc.

A8. Sa Giang (Sa Lăng), Lĩnh Nam công chúa. Quê ở Trường Sa, Lĩnh Nam.

A9. Vĩnh Huy công chúa (họ Tống). KN: Từ Sơn, Đông Anh, Hà Nội. Lập đội quân giả nam.

A10. Vũ Thị Thục (Thục Nương), Trinh Thục công chúa, Bát Nạn đại tướng quân. KN: Tiên La, Hưng Hà, Thái Bình.

B – Đền, Đình, Chùa, Miếu thờ tự

B1. Đền Nhật Chiêu, Liên Châu, Yên Lạc, Vĩnh Phúc.

B2.
- Đền Nghè, đình Vẻn, An Biên, Q. Lê Chân, Hải Phòng.
- Đền An Biên, xã Thủy An, Đông Triều, Quảng Ninh.
- Đền Lạt Sơn, Kim Bảng, Hà Nam.
- Đình Hoàng Mai, Mai Động, Q. Hoàng Mai, Hà Nội.

B3.
- Đền và chùa Tiên La, Đoan Hùng, Hưng Hà, Thái Bình.
- Đền ở Phượng Lâu, Việt Trì, Phú Thọ.
- Đền Tân La, Bảo Khê, TP. Hưng Yên.
- Đền Giếng, Đại Phú, Phi Mô, Lạng Giang, Bắc Giang.
- Đình Nhân Mỹ, Lý Nhân, Hà Nam.

B4.
- Đền Hạ Lôi, Mê Linh, Hà Nội.
- Đền Đồng Nhân, Q. Hai Bà Trưng, Hà Nội.
- Đền Hát Môn, Phúc Thọ, Hà Nội.
- Đền Vân Môn, Trung Châu, Đan Phượng, Hà Nội.
- Miếu Hùng Liệt, Phụng Công, Văn Giang, Hưng Yên.
- Miếu Bà Trắc, nam hồ Động Đình, Hồ Nam, Trung quốc. Và nhiều nơi ở nước ta.

B5. Đình Cổ Châu (Đình Dâu), Vân Hà, Đông Anh, Hà Nội.

B6.
- Đền Ông Cai, Thượng Thanh, Thanh Cao, Thanh Oai, Hà Nội.
- Miếu Mèn, Nam Nguyễn, Ba Vì, Hà Nội.

B7.
- Đền Phương Lĩnh, Thanh Vân, Thanh Ba, Phú Thọ.
- Chùa Kiến quốc, Trường Sa, chùa ở núi Thiên Đài thuộc dãy núi Ngũ Lĩnh (hai chùa này hiện thuộc Trung quốc).

B8. Đền Ta, Đông Cao, Tráng Việt, Mê Linh, Hà Nội.

B9.
- Đền Ngọc Lâm, đình Ba Nóc, Tân Mỹ, TP. Bắc Giang.
- Đền Giếng, Đại Phú, Phi Mô, Lạng Giang, Bắc Giang.

B10. Đền ở ngoại ô huyện Phong Đô, Tứ Xuyên, Trung Quốc.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 442 (4.2014)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu :

TỦ SÁCH : BIỂN, ĐẢO VIỆT NAM

TẤT CẢ VÌ BIỂN ĐẢO QUÊ HƯƠNG,
VÌ BIÊN CƯƠNG TỔ QUỐC

SOBEE

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH - THIẾT BỊ GIÁO DỤC MIỀN NAM
Điện thoại : (08) 38.358.423, Fax : (08) 38.390.727
Website : www.sobee.vn ; www.sobee.com.vn

TRƯỜNG THCS PHẠM VĂN ĐỒNG
THÀNH PHỐ HUẾ

• Địa chỉ: 12 Lâm Hoằng – Thành phố Huế • Điện thoại: 054.3826728 – 054.3897262

Trường THCS Phạm Văn Đồng - TP Huế được thành lập năm1995. Trường hiện có 76 cán bộ giáo viên, trong đó 11 Thạc sĩ, 63 Cử nhân. Lãnh đạo và đội ngũ giáo viên của Trường giàu nhiệt tình, có kinh nghiệm, trình độ chuyên môn vững vàng được lãnh đạo, chính quyền, nhân dân và học sinh yêu mến, tin tưởng. Trong quá trình xây dựng và phát triển, thầy và trò của Trường luôn nỗ lực phấn đấu thi đua dạy tốt, học tốt và tham gia tích cực mọi hoạt động của ngành và địa phương để đạt thành tích cao nhất.

• Trường luôn tích cực tham gia các hoạt động về chuyên môn, về phong trào của Thành phố, của Tỉnh như : *Hội thi Khoa học Kỹ thuật Intel Isef*, *Hội thi Thể dục thể thao*, *Hội thi Văn nghệ*,... . Nhiều giáo viên của Trường đã đạt giải Nhất, Nhì trong các cuộc thi này. Đặc biệt trong *Hội thi Giáo viên dạy giỏi* cấp Thành phố năm học 2013-2014, nhiều giáo viên của trường đã đạt giải cao, Trường được xếp giải Nhất toàn đoàn.

• Chất lượng giáo dục toàn diện và tỉ lệ tốt nghiệp THCS hằng năm của trường luôn đạt và vượt mặt bằng chung của toàn thành phố. Đội ngũ học sinh giỏi và học sinh năng khiếu của nhà trường luôn đạt thành tích cao. Trong hoạt động văn nghệ, TDTT Trường là đơn vị mạnh của thành phố. Em *Hồ Ngọc Hân*, người đã đạt giải nhất trong cuộc thi "*Đường lên đỉnh Olympia*" năm 2009 là học sinh xuất sắc về học tập, năm học 2012-2013 em *Hồ Đăng Trọng Khánh* học sinh của trường đạt Huy chương Vàng Quốc tế - Giải trẻ Đông Nam Á bộ môn Vật.

Với những cố gắng của Thầy và Trò, nhà trường đã được các cấp lãnh đạo trao tặng nhiều Giấy khen, Bằng khen và các phần thưởng cao quý khác. Riêng trong năm học 2012-2013 trường đã nhận được:

- Bằng khen *Hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ năm học* của Bộ Giáo dục & Đào tạo.

- Bằng khen *Tập thể lao động xuất sắc* của UBND Tỉnh Thừa Thiên Huế .

- Được UBND Tỉnh TT Huế công nhận *Trường đạt chuẩn Quốc gia*.

- Chi bộ đạt danh hiệu: *Trong sạch vững mạnh tiêu biểu*.

- Công đoàn đạt danh hiệu: *Công đoàn cơ sở vững mạnh* cấp Tỉnh.

- Liên đội TNTP Hồ Chí Minh đạt danh hiệu: *Vững mạnh* cấp Thành phố.

• Về cơ sở vật chất: Trường được đầu tư xây dựng mới 36 phòng học và đã đưa vào sử dụng trong năm học 2012-2013. Hiện Trường đang có kế hoạch xây dựng nhà thi đấu đa năng để có điều kiện cơ sở vật chất tốt hơn phục vụ tốt cho các hoạt động dạy và học.

Phát huy những thành tích đạt được, Trường THCS Phạm Văn Đồng sẽ nỗ lực phấn đấu nâng cao hơn nữa chất lượng giáo dục toàn diện trong năm học 2013-2014 và những năm tiếp theo.

Cô giáo **Lê Thị Thu** – Hiệu trưởng nhà trường

Đội tuyển Giáo viên Giỏi cấp thành phố nhận giải

Đội tuyển Toán 8&9 của nhà trường

Hội đồng giáo dục nhà trường

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT04M4

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2014

Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng