



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

2 2014
Số 440

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 51

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

EBOOK SOS
Wherever You Go



Mừng Đảng - Mừng Xuân

<https://tieulun.hopto.org>



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 440 (2.2014)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: toanhocvatuoi@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Tổng biên tập kiêm
Phó Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHÁC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở - For Lower Secondary School**
Vũ Hồng Phong - Vận dụng một tính chất của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.
- 3 **Hướng dẫn giải Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 9 tỉnh Bình Định năm học 2012 - 2013.**
- 4 **Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 9 tỉnh Hà Tĩnh năm học 2012 - 2013.**
- 5 **Chuẩn bị thi vào đại học - University Entrance Preparation**
Nguyễn Quang Thi - Các dạng toán thường gặp về elip.
- 8 **Thử sức trước kì thi - Đề số 6**
- 9 **Hướng dẫn giải Đề số 5**
- 11 **Bạn đọc tìm tòi**
Nguyễn Minh Hà - Về một bài toán dự tuyển IMO 1976.
- 15 **Vũ Quang Minh** - Bất đẳng thức "nhỏ" và công hiệu "to".
- 16 **Đề ra kì này - Problems in This Issue**
T1/440, ..., T12/440, L1/440, L2/440.
- 18 **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của Số 436.
- 29 **Toán học và đời sống**
Trần Đình Viện - Toán học và Âm nhạc.
- 31 **Giải trí toán học**

Ảnh Bìa 1: Đội tuyển Việt Nam tham dự Kì thi IMO 2013 (Từ trái sang phải): *Đình Lê Công, Võ Anh Đức, Phạm Tuấn Huy, Hoàng Đỗ Kiên, Trần Đăng Phúc, Cấn Trần Thành Trung.*

Biên tập: NGUYỄN PHÚC

Trĩ sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Chế bản: NGUYỄN THỊ TRANG



VẬN DỤNG MỘT TÍNH CHẤT CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

VŨ HỒNG PHONG

(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bằng phương pháp cộng đại số ta dễ dàng chứng minh được tính chất sau.

Tính chất. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (*)$$

với x, y là các ẩn số; $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ là các tham số. Nếu $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ thì hệ PT (*) có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases} \quad (**)$$

Như vậy x và y đều biểu thị qua các tham số bởi hệ thức (**).

Do đó nếu trong bài toán có hai hệ thức bậc nhất đối với hai ẩn nào đó thì ta có thể áp dụng kết quả trên để giải quyết bài toán. Sau đây là một số thí dụ

★Thí dụ 1. Cho x, y, m là các số thực thoả mãn

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x - 2my = \frac{2m^3}{m^2 + 1} \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải. Ta coi (1) là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y với m là tham số. Khi đó x và y đều biểu thị được theo m . Thật vậy, do

$$a_1b_2 - a_2b_1 = m \cdot (-2m) - 1 \cdot 1 = -2m^2 - 1 \neq 0$$

nên áp dụng công thức (**) ta có

$$\begin{cases} x = \frac{1 \cdot (-2m) - \frac{2m^3}{m^2 + 1} \cdot 1}{-2m^2 - 1} = \frac{2m}{m^2 + 1} \\ y = \frac{m \cdot \frac{2m^3}{m^2 + 1} - 1 \cdot 1}{-2m^2 - 1} = \frac{1 - m^2}{m^2 + 1} \end{cases}$$

Suy ra

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2m}{m^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{1 - m^2}{m^2 + 1} \right)^2 = \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{(m^2 + 1)^2} = 1. \quad \square$$

★Thí dụ 2. Cho x, y, z là các số thực thoả mãn

$$\begin{cases} xz + yz + 2y = 1 \\ 2xz + yz + x + 3y = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy(1 + z)$.

Lời giải. Ta giảm số biến của biểu thức P bằng cách biến đổi (1) về dạng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y với z là tham số, được

$$\begin{cases} zx + (z + 2)y = 1 \\ (2z + 1)x + (z + 3)y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } a_1b_2 - a_2b_1 &= z(z + 3) - (2z + 1)(z + 2) \\ &= -z^2 - 2z - 2 = -(z + 1)^2 - 1 \neq 0 \end{aligned}$$

nên áp dụng công thức (**) ta có

$$\begin{cases} x = \frac{1 \cdot (z + 3) - 2(z + 2)}{-z^2 - 2z - 2} = \frac{z + 1}{z^2 + 2z + 2} \\ y = \frac{z \cdot 2 - (2z + 1) \cdot 1}{-z^2 - 2z - 2} = \frac{1}{z^2 + 2z + 2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } P = xy(1 + z) = \frac{(z + 1)^2}{((z + 1)^2 + 1)^2}. \text{ Do}$$

$$((z + 1)^2 - 1)^2 \geq 0 \text{ nên } (z + 1)^2 \leq \frac{1}{4}((z + 1)^2 + 1)^2.$$

Mặt khác $(z + 1)^2 \geq 0$, nên

$$0 \leq P = \frac{(z + 1)^2}{((z + 1)^2 + 1)^2} \leq \frac{1}{4}. \text{ Vậy GTNN của}$$

P là 0 khi và chỉ khi $(x; y; z) = (0; 1; -1)$;

GTLN của P là $\frac{1}{4}$ khi và chỉ khi

$$(x; y; z) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right); \left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; -2 \right) \right\}. \quad \square$$

★Thí dụ 3. Cho x, y là các số thực thoả mãn

$$(3x+7y+1)^2 + (x+4y+1)^2 \leq 9.$$

Chứng minh rằng $-\frac{14}{5} \leq x+y \leq \frac{16}{5}$.

Lời giải. Do $3x+7y+1$ và $x+4y+1$ là các biểu thức bậc nhất đối với x, y nên để đơn giản giả thiết ta coi 2 biểu thức lần lượt là a, b thì x, y đều biểu thị được theo a và b .

Thật vậy: Đặt $3x+7y+1=a; x+4y+1=b$, ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y sau

$$\begin{cases} 3x+7y=a-1 \\ x+4y=b-1 \end{cases} \quad (1)$$

Do $3.4-1.7=5 \neq 0$ nên áp dụng công thức (**) thì hệ PT (1) có nghiệm

$$\begin{cases} x = \frac{4a-7b+3}{5} \\ y = \frac{3b-a-2}{5} \end{cases}$$

Khi đó ta có $a^2+b^2 \leq 9, x+y = \frac{3a-4b+1}{5}$.

Mặt khác, ta luôn có $0 \leq (mq-np)^2$

$$\Leftrightarrow (mp+nq)^2 \leq (m^2+n^2)(p^2+q^2)$$

$$\Leftrightarrow |mp+nq| \leq \sqrt{(m^2+n^2)(p^2+q^2)} \quad (2)$$

Áp dụng BĐT (2) ta có

$$|3a-4b| \leq \sqrt{(3^2+(-4)^2)(a^2+b^2)} \leq \sqrt{25.9} = 15$$

$\Leftrightarrow -15 \leq 3a-4b \leq 15$. Suy ra

$$\frac{-14}{5} = \frac{-15+1}{5} \leq x+y = \frac{3a-4b+1}{5} \leq \frac{15+1}{5} = \frac{16}{5}. \quad \square$$

★Thí dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2y+1)^3} + 4\sqrt{(2x-y+5)^3} = 1 \\ \frac{\sqrt{x+2y+1} + 2\sqrt{2x-y+5}}{5x+11} = 9x-2y+21. \end{cases}$$

Lời giải. Ta thấy $x+2y+1$ và $2x-y+5$ là các biểu thức bậc nhất đối với x và y nên có thể giải hệ phương trình bằng cách đặt

$$\sqrt{x+2y+1} = a \geq 0, \quad \sqrt{2x-y+5} = b \geq 0$$

khi đó x, y đều biểu diễn được theo a và b . Ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y

$$\begin{cases} x+2y+1=a^2 \\ 2x-y+5=b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2+2b^2-11}{5} \\ y = \frac{2a^2-b^2+3}{5} \end{cases} \quad (1)$$

Do đó $5x+11=a^2+2b^2$,

$$9x-2y+21=a^2+4b^2.$$

Thay vào hệ phương trình đã cho ta được

$$\begin{cases} a^3+4b^3=1 \\ \frac{a+2b}{a^2+2b^2} = a^2+4b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+4b^3=1 \\ a+2b=(a^2+2b^2)(a^2+4b^2) \end{cases} \quad (2)$$

Nhân vế với vế các phương trình của hệ (2) được

$$(a+2b)(a^3+4b^3) = (a^2+2b^2)(a^2+4b^2)$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b)(a-2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ hoặc } b=0 \text{ hoặc } a=b \text{ hoặc } a=2b.$$

Thay từng trường hợp này vào hệ (2) ta được nghiệm $(a; b)$ là

$$\left(0; \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right), (1; 0), \left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}; \sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right), \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \sqrt[3]{\frac{1}{12}}\right).$$

Với $(a; b)$ tìm được thay vào hệ (1) ta được các nghiệm $(x; y)$ của hệ PT đã cho là

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-11}{5}; -\frac{3-\sqrt[3]{\frac{1}{16}}}{5}\right), (-2; 1),$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{27}{25}}-11}{5}; \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{25}}+3}{5}\right), \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}-11}{5}; \frac{\sqrt[3]{\frac{343}{144}}+3}{5}\right). \quad \square$$

★Thí dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{x^2+7} + y\sqrt{2y^2+1} = xy+2y^2 \\ 2x\sqrt{x^2+7} + (x+y)\sqrt{2y^2+1} = 3xy-x^2. \end{cases}$$

Lời giải. Ta có thể đưa hệ phương trình đã cho về hệ phương trình bậc nhất với hai ẩn mới bằng cách đặt $\sqrt{x^2+7}=u; \sqrt{2y^2+1}=v$.

Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} (x+y)u + yv = xy+2y^2 \\ 2xu + (x+y)v = 3xy-x^2 \end{cases} \quad (1)$$

(Xem tiếp trang 14)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9

TỈNH BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2012 - 2013

Bài 1. a) $A = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}} + \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{3} + 3 + \sqrt{3}}{9 - 3} = \sqrt{2}.$$

b) Đặt $S = x + y, P = xy$, HPT đã cho trở thành

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 11 \\ S + P = 3 + 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S - 17 - 8\sqrt{2} = 0 \quad (1) \\ S + P = 3 + 4\sqrt{2} \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có $\Delta' = 2(2\sqrt{2} + 1)^2$ nên có hai nghiệm là $S_1 = 3 + \sqrt{2}; S_2 = -5 - \sqrt{2}$, thay vào (2) ta tính được $P_1 = 3\sqrt{2}; P_2 = 8 + 5\sqrt{2}$.

Như vậy x, y là các nghiệm của các phương trình bậc hai $t^2 - S_1t + P_1 = 0; t^2 - S_2t + P_2 = 0$. Phương trình đầu có hai nghiệm $t_1 = \sqrt{2}; t_2 = 3$ còn phương trình sau vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(\sqrt{2}; 3)$ và $(3; \sqrt{2})$.

Câu 2. a) Theo nguyên lý Dirichlet, trong 8 số tự nhiên bất kì luôn tồn tại 2 số tự nhiên có cùng số dư trong phép chia cho 7, do đó hiệu của 2 số này chia hết cho 7. Gọi 2 số đó là $\overline{abc}$ và $\overline{xyz}$. Hai số này viết liền nhau ta được số $\overline{abcxyz}$. Ta sẽ chứng minh $\overline{abcxyz} : 7$. Thật vậy $\overline{abcxyz} = 1000\overline{abc} + \overline{xyz} = 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{xyz})$. Do $1001\overline{abc} : 7; (\overline{abc} - \overline{xyz}) : 7 \Rightarrow \overline{abcxyz} : 7$.

b) • Ta có $x^2 + y^2 - xy = 4 \Leftrightarrow xy = x^2 + y^2 - 4$;
 $P = x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2(x^2 + y^2 - 4)$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 8$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \pm 2$, khi đó P đạt giá trị lớn nhất bằng 8.

• Ta có $x^2 + y^2 - xy = 4 \Leftrightarrow xy = \frac{(x + y)^2 - 4}{3}$;

$$P = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$= (x + y)^2 - 2 \cdot \frac{(x + y)^2 - 4}{3} = \frac{(x + y)^2 + 8}{3} \geq \frac{8}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = -y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Khi đó P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{8}{3}$.

Bài 3. a) Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của hai đồ thị (d) và (P) là

$$-x^2 = mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0 \quad (*)$$

Phương trình $(*)$ có $\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m nên $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ đpcm.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo hệ thức Viète ta có $x_1 + x_2 = -m; x_1x_2 = -1$.

Suy ra $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = m^2 + 4$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = m^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| \geq 2$$

(đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = 0$).

Bài 4. Gọi F, K lần lượt là trung điểm của AC, AD ; G là giao điểm của CD, BF thì

G là trọng tâm của ΔABC ; CK, DF đi qua E .

Ta có $\frac{CE}{CK} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow EG \parallel AB$. Mặt khác, D là trung điểm của AB nên $DO \perp AB$. Suy ra $DO \perp EG$. (1)

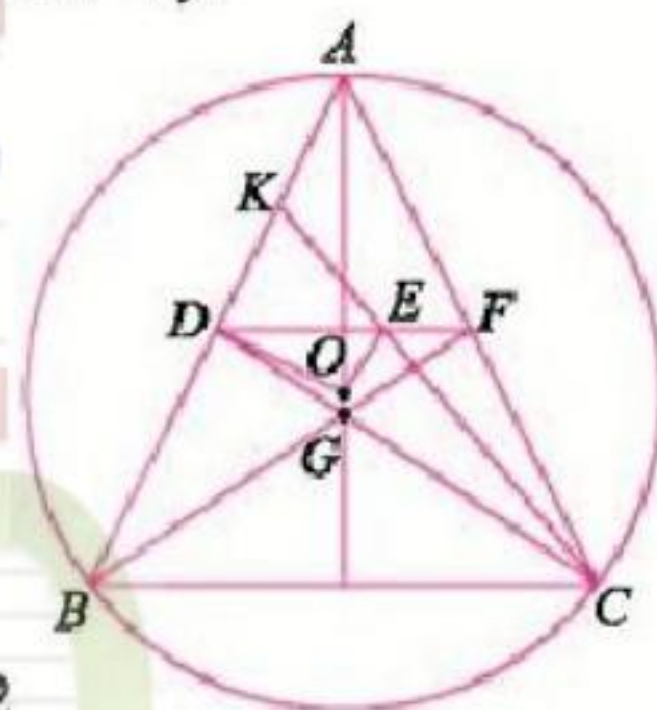
Vì ΔABC cân tại A nên A, O, G thẳng hàng, ta chứng minh được $GO \perp DE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra O là trực tâm của ΔDEG , suy ra $EO \perp CD$.

Bài 5. a) Tứ giác $CPQD$ là tứ giác nội tiếp do $\widehat{ADC} = \widehat{CPQ} (= \widehat{CBA})$.

b) • Đường tròn ngoại tiếp ΔCDP cũng là đường tròn (E) ngoại tiếp tứ giác $CDQP$. Gọi I, K là giao điểm của (E) với đường thẳng AB . Từ tính chất của tứ giác nội tiếp ta có $\Delta AIC \sim \Delta APK$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AI}{AP} = \frac{AC}{AK} \Leftrightarrow AI \cdot AK = AC \cdot AP \quad (1)$$



ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH HÀ TĨNH

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1. a) Tính giá trị của biểu thức

$$M = (x - y)^3 + 3(x - y)(xy + 1)$$

biết $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$;

$$y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}.$$

b) Giải phương trình $\frac{2x}{x^2-x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{5}{3}$.

Bài 2. a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9. \end{cases}$$

b) Tìm các số tự nhiên a, b, c phân biệt sao cho biểu thức sau nhận giá trị nguyên

$$P = \frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc}.$$

Bài 3. Tam giác ABC có chu vi bằng 1; các cạnh a, b, c thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \frac{3}{2}.$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi D là trung điểm của cạnh BC . Lấy điểm M bất kì trên đoạn AD (M không trùng với A). Gọi N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M xuống các cạnh AB, AC và H là hình chiếu vuông góc của N xuống đường thẳng PD .

a) Chứng minh AH vuông góc với BH .

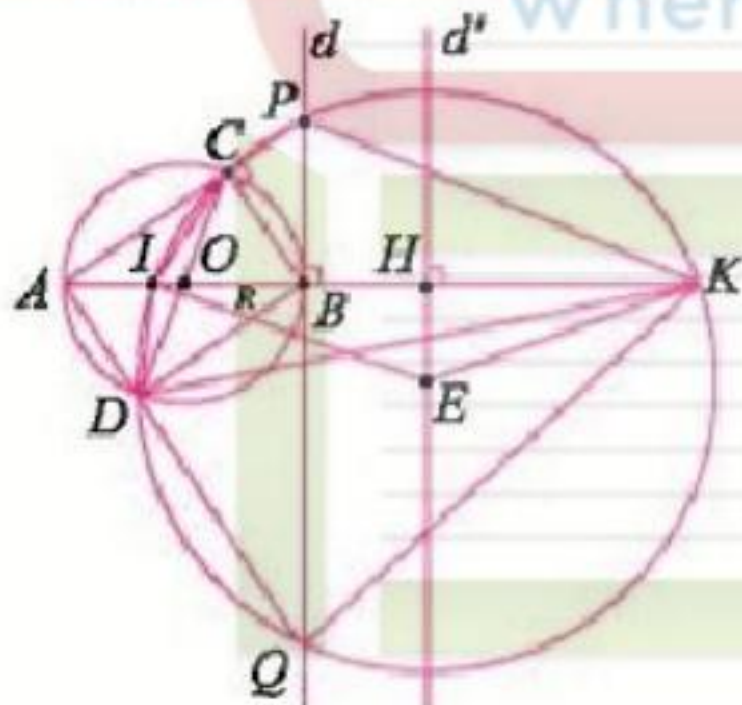
b) Đường thẳng qua B song song với AD cắt đường trung trực của AB tại I . Chứng minh ba điểm H, N, I thẳng hàng.

Bài 5. Các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = \frac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)} + \frac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)} + \frac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}.$$

LÊ BÁ HOÀNG

(Phòng GD-ĐT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)



Mặt khác $\triangle ABP$ vuông tại B , suy ra

$$AC \cdot AP = AB^2 = 4R^2$$

Từ (1), (2) suy ra $AI \cdot AK = 4R^2$

Tương tự ta có $\triangle OIC \sim \triangle ODK$ (g.g)

$$\Rightarrow OI \cdot OK = OC \cdot OD = R^2$$

$$\Rightarrow (AO - AI)(AK - AO) = R^2$$

$$\Rightarrow (R - AI)(AK - R) = R^2$$

$$\Rightarrow R(AK + AI) - AI \cdot AK - R^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R(AK + AI) - 4R^2 = 2R^2$$

$$\Rightarrow R(AK + AI) = 6R^2 \Rightarrow AK + AI = 6R$$

(2)

(3)

(4)

Từ (3) và (4) suy ra độ dài của AI, AK ($AI < AK$) là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - 6Rx + 4R^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 3R \pm R\sqrt{5}.$$

Do đó $AI = (3 - \sqrt{5})R$; $AK = (3 + \sqrt{5})R$, suy ra I và K là hai điểm cố định thuộc tia AB .

• Vì E cách đều I và K nên E thuộc đường trung trực (d') của IK , (d') cố định, $(d' \parallel d)$.

Gọi H là giao điểm của (d') với tia AB , ta có H là trung điểm của IK nên

$$AH = \frac{AI + AK}{2} = \frac{(3 - \sqrt{5})R + (3 + \sqrt{5})R}{2} = 3R$$

$$\Rightarrow BH = AH - AB = 3R - 2R = R.$$

Vậy khi đường kính CD của (O, R) di động (CD không trùng với AB) thì tâm E của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDP di động trên đường thẳng cố định $(d') \parallel d$ đi qua điểm H nằm trên tia đối của tia BA và $BH = R$.

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)



CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP về elip

NGUYỄN QUANG THI
(GV THPT Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Chúng ta biết rằng, những năm gần đây các dạng toán về elip thường xuất hiện trong đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng. Lượng bài tập về elip tương đối phong phú đa dạng, trong phạm vi của bài viết này, chúng tôi đưa ra một số dạng toán về elip có kèm theo thí dụ minh họa.

1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình (PT) chính tắc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0). \text{ Khi đó}$$

+ Tọa độ các đỉnh:

$$A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b).$$

+ Tâm sai $e = \frac{c}{a} < 1$.

+ Tọa độ các tiêu điểm

$$F_1(-c; 0), F_2(c; 0), c^2 = a^2 - b^2.$$

+ Phương trình hai đường chuẩn $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$.

+ Độ dài các trục: trục lớn $2a$, trục nhỏ $2b$.

+ Góc tọa độ O là tâm đối xứng của (E) . Các trục Ox, Oy là hai trục đối xứng của (E) .

2. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1. Xác định các yếu tố của elip

★Thí dụ 1. a) Xác định tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm, phương trình hai đường chuẩn và tính độ dài các trục của elip

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{100}.$$

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0).$$

Tính tâm sai của (E) biết khoảng cách giữa hai đỉnh trên hai trục bằng độ dài tiêu cự.

Lời giải. a) Ta có

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1. \text{ Khi đó}$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{4} \\ b^2 = \frac{1}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{21}}{10}.$$

+ Tọa độ các đỉnh

$$A_1\left(-\frac{1}{2}; 0\right), A_2\left(\frac{1}{2}; 0\right), B_1\left(0; -\frac{1}{5}\right), B_2\left(0; \frac{1}{5}\right).$$

+ Tọa độ các tiêu điểm $F_1\left(-\frac{\sqrt{21}}{10}; 0\right), F_2\left(\frac{\sqrt{21}}{10}; 0\right).$

+ Phương trình hai đường chuẩn

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{5\sqrt{21}}{42}.$$

+ Độ dài các trục:

$$\text{Trục lớn } 2a = 1, \text{ trục nhỏ } 2b = \frac{2}{5}.$$

b) Lấy các đỉnh trên hai trục là $A_2(a; 0), B_2(0; b)$. Theo giả thiết ta có $A_2B_2 = F_1F_2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2c \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4c^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 5c^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{2}c^2.$$

$$\text{Do đó } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{\frac{5}{2}c^2} = \frac{2}{5}. \text{ Vậy } e = \frac{\sqrt{10}}{5}. \square$$

DẠNG 2. Lập phương trình chính tắc của elip dựa vào một số điều kiện của bài toán

★Thí dụ 2. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng

a) (E) có một đỉnh $A(-5; 0)$ và (E) tiếp xúc với đường thẳng $(d): 4\sqrt{3}x + 5y - 40 = 0$.

b) (E) có một đỉnh là $A_1(-5;0)$ và phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có dạng $x^2 + y^2 = 34$.

Lời giải. a) Ta có $a = 5 \Rightarrow b^2 + c^2 = 25$.
Do (E) tiếp xúc với (d) suy ra

$$(4\sqrt{3})^2 \cdot 5^2 + 5^2 b^2 = 40^2 \Rightarrow b^2 = 16.$$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

b) Ta có $a = 5$ và điểm $(5; b) \in (C)$
 $\Rightarrow 5^2 + b^2 = 34 \Rightarrow b^2 = 9$.

Vậy PT chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. $\square$

DẠNG 3. Tìm tọa độ điểm M trên elip thỏa mãn điều kiện nào đó

★ **Thí dụ 3.** a) Tìm tọa độ điểm M trên elip (E): $9x^2 + 25y^2 = 225$ sao cho $MF_1 = 2MF_2$ (F_1 là tiêu điểm bên trái, F_2 là tiêu điểm bên phải của (E)).

b) Tìm tọa độ điểm M trên elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ biết M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 120° .

Lời giải. a) Gọi điểm $M(x_0, y_0) \in (E)$, suy ra

$$9x_0^2 + 25y_0^2 = 225 \quad (1)$$

Ta có $MF_1 = a + \frac{c}{a}x_0 = 5 + \frac{4}{5}x_0$,

$$MF_2 = a - \frac{c}{a}x_0 = 5 - \frac{4}{5}x_0.$$

Theo giả thiết $MF_1 = 2MF_2$

$$\Leftrightarrow 5 + \frac{4}{5}x_0 = 2\left(5 - \frac{4}{5}x_0\right) \Rightarrow x_0 = \frac{25}{12}.$$

Kết hợp với (1) suy ra $y_0 = \pm \frac{\sqrt{119}}{4}$.

Vậy có hai điểm cần tìm là

$$M_1\left(\frac{25}{12}; -\frac{\sqrt{119}}{4}\right), M_2\left(\frac{25}{12}; \frac{\sqrt{119}}{4}\right).$$

b) Gọi điểm $M(x_0, y_0) \in (E)$, suy ra

$$\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \quad (2)$$

Điểm M nhìn hai tiêu điểm F_1, F_2 dưới một góc 120° nên theo định lý cosin ta có

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1MF_2 \cos 120^\circ,$$

với $F_1F_2^2 = (2c)^2 = 32, MF_1 = 3 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x_0$,

$$MF_2 = 3 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x_0. \text{ Suy ra } x_0 = \pm \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

Thay vào (2) ta được $y_0 = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Vậy có bốn điểm cần tìm là

$$M_1\left(\frac{3\sqrt{10}}{4}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right), M_2\left(-\frac{3\sqrt{10}}{4}; -\frac{\sqrt{6}}{4}\right), \\ M_3\left(\frac{3\sqrt{10}}{4}; -\frac{\sqrt{6}}{4}\right), M_4\left(-\frac{3\sqrt{10}}{4}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right). \quad \square$$

★ **Thí dụ 4.** a) Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

b) Tìm hai điểm M, N trên elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ sao cho tam giác AMN vuông cân tại A (với A là một đỉnh của (E) có hoành độ dương).

Lời giải.

a) Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, theo giả thiết ta có $x_A = x_B > 0$ và $y_B = -y_A$. Ta có

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(O, AB) = |x_A y_A| \\ = 2\sqrt{\frac{x_A^2}{4} \cdot \frac{y_A^2}{1}} \leq \frac{x_A^2}{4} + \frac{y_A^2}{1} = 1$$

(theo BĐT Cauchy và do $A \in (E)$). Suy ra

$$\max S_{OAB} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_A^2}{4} + \frac{y_A^2}{1} = 1 \\ \frac{x_A^2}{4} = \frac{y_A^2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \sqrt{2} \\ y_A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), B\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{hoặc } A\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), B\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

b) Ta có đỉnh $A(4;0)$. Xét hai điểm M, N trên (E) sao cho tam giác AMN vuông cân tại A . Suy ra $M(x_0; y_0), N(x_0; -y_0)$

và $\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{4} = 1$ (ĐK $x_0 \neq 4$).

Ta có $\overrightarrow{AM} = (x_0 - 4; y_0), \overrightarrow{AN} = (x_0 - 4; -y_0)$.

Do đó $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 4)^2 - y_0^2 = 0$.

Ta có hệ $\begin{cases} \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \\ (x_0 - 4)^2 - y_0^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{12}{5} \\ y_0 = \pm \frac{8}{5} \end{cases}$.

Vậy $M\left(\frac{12}{5}; \frac{8}{5}\right), N\left(\frac{12}{5}; -\frac{8}{5}\right)$

hoặc $M\left(\frac{12}{5}; -\frac{8}{5}\right), N\left(\frac{12}{5}; \frac{8}{5}\right)$. $\square$

DẠNG 4. Chứng minh tính chất của đường elip

★Thí dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ cho elip

$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Hai điểm P và Q trên (E) sao cho tam giác OPQ vuông tại O . Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên PQ . Chứng minh rằng khi P và Q thay đổi thì K chạy trên một đường tròn tâm O cố định và viết phương trình đường tròn đó.

Lời giải

• Nếu P và Q trùng với các đỉnh của (E) thì

$$\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}.$$

• Xét P và Q không trùng với các đỉnh của (E) . Giả sử PT của đường thẳng OP là $y = kx$, thì PT của đường thẳng OQ là $y = -\frac{1}{k}x$ ($k \neq 0$).

Toạ độ của P là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{36}{4+9k^2} \\ y^2 = \frac{36k^2}{4+9k^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow OP^2 = \frac{36(1+k^2)}{4+9k^2}.$$

Toạ độ của Q là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{k}x \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{36k^2}{9+4k^2} \\ y^2 = \frac{36}{9+4k^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow OQ^2 = \frac{36(1+k^2)}{9+4k^2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} = \frac{13(1+k^2)}{36(1+k^2)} = \frac{13}{36}.$$

Vậy với mọi P, Q thuộc (E) ($OP \perp OQ$) thì

$$\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} = \frac{13}{36}.$$

Mặt khác, $\triangle OPQ$ vuông tại O có OK là đường

cao, nên $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} = \frac{13}{36} \Rightarrow OK^2 = \frac{36}{13}$.

Vậy K nằm trên đường tròn (C) tâm O , bán

kinh $R = \frac{6}{\sqrt{13}}$, PT của (C) là $x^2 + y^2 = \frac{36}{13}$. $\square$

DẠNG 5. Viết phương trình tiếp tuyến với elip

★Thí dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho

elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Viết phương

trình tiếp tuyến (Δ) với (E) , biết (Δ) cắt các đường thẳng $x = \pm a$ tại P, Q sao cho tam giác FPQ có diện tích nhỏ nhất (F là tiêu điểm bên phải của (E)).

Lời giải. F có toạ độ $(c; 0)$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp

điểm ($|x_0| < a$), suy ra (Δ) có PT: $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Do (Δ) cắt các đường thẳng $x = \pm a$ tại P và Q , suy ra

$$P\left(a; \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right)\right), Q\left(-a; \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right)\right) \quad (y_0 \neq 0).$$

Ta có $y_P \cdot y_Q = b^2$, $\overrightarrow{FP} = (a - c; y_P)$,

$\overrightarrow{FQ} = (-a - c; y_Q)$ và $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0$, suy ra $\triangle FPQ$

vuông tại F . Do đó $S_{FPQ} = \frac{1}{2} FP \cdot FQ$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2b^4 + (a+c)^2 y_P^2 + (a-c)^2 y_Q^2}.$$

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 6

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 điểm). Cho đường cong (C_m) có phương trình $y = mx^3 - 3(m-2)x + m - 5$ (m là tham số).

- 1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên khi $m = 1$.
- 2) Chứng minh rằng với mọi tham số m đường cong (C_m) luôn luôn cắt một đường thẳng cố định tại ba điểm cố định.

Câu 2 (1 điểm). Giải phương trình

$$4\sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x = \tan x \cdot \tan 2x \cdot \cos 6x.$$

Câu 3 (1 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - y + 3\sqrt{1+y} = 0 \\ 4\sqrt{(1+x)(1+y)} - 6\sqrt{1+x} + 1 = 0. \end{cases}$$

Câu 4 (1 điểm). Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x (\tan^2 x + \ln(\cos x)) dx.$$

Câu 5 (1 điểm). Xét tứ diện $ABCD$ có

$$AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$$

$$\text{và } a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $ABCD$.

Câu 6 (1 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c}$$

trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $2c + b = abc$.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1; 2)$, trọng tâm $G(1; 1)$ và trực tâm $H\left(\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Hãy xác định tọa độ hai đỉnh B và C của tam giác ABC .

Câu 8a (1 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC với $A(1; 0; 0)$, $B(3; 2; 2)$, $C(-2; 0; 3)$. Lập phương trình mặt cầu (C) đi qua A và lần lượt cắt hai cạnh AB, AC của tam giác ABC tại hai điểm E, F sao cho $AE = \sqrt{3}$, $AF = \sqrt{2}$.

Câu 9a (1 điểm). Gọi E là tập các số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ ($a \neq 0$) sao cho ba chữ số a, b, c khác nhau theo thứ tự đó tăng dần. Tính xác suất để lấy ra trong tập E một phân tử là số chẵn.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $(d_1): x + y - 1 = 0$, $(d_2): x - y + 1 = 0$.

Lập phương trình đường tròn (C) cắt (d_1) tại A và (d_2) tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC là tam giác đều có diện tích bằng $24\sqrt{3}$ (đvdt).

Câu 8b (1 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC có đỉnh $A(1; 2; 0)$, trọng tâm $G(1; 1; 0)$ và trực tâm $H\left(\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; 0\right)$. Hãy xác định tọa độ hai đỉnh B và C của tam giác ABC .

Câu 9b (1 điểm). Giải phương trình

$$(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 2^{1+x}.$$

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh,
Tuy Hòa, Phú Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C) . Yêu cầu bài toán tương đương với hệ số góc của tiếp tuyến $k = \frac{3}{4}$ hoặc $k = -\frac{3}{4}$. Có hai điểm thoả mãn đề bài là $M_1\left(0; \frac{5}{2}\right)$ và $M_2\left(4; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 2. PT đã cho tương đương với

$$2\cos^3 x - 2\cos x + 2\sin x \cos^2 x + \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\cos x \sin^2 x + 2\sin x \cos^2 x + \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 - \sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 3. Đặt $a = \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$, $b = \sqrt{x^2 + 1}$ thì $2b^2 - a^2 = 1 - 3x$. PT đã cho được viết lại dưới dạng $a - 2b = -\sqrt{2b^2 - a^2}$
 $\Rightarrow 2a^2 - 4ab + 2b^2 = 0 \Rightarrow a = b$
 $\Rightarrow x = 0; x = -3$. Thử lại ta thấy đây là hai nghiệm PT đã cho.

Câu 4. Ta có

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x (\sin x - \cos x) dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{\sin x + \cos x}.$$

$$\text{Đặt } u = \frac{1}{\sin x + \cos x}; \quad v' = e^x$$

$$\Rightarrow u' = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}; \quad v = e^x.$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{e^x}{2(\sin x + \cos x)} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1).$$

Câu 5. • Đáp số. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3}{4}$ (đvtt).

• Dụng hình bình hành $ABCD$, khi đó

$$\begin{aligned} d(AB', BC') &= d(AB', (BC'D)) = d(A; (BC'D)) \\ &= d(C, (BC'D)). \text{ Vì } AC \perp (BC'D), \text{ nên gọi } H \text{ là} \\ &\text{hình chiếu của } C \text{ lên } C'O \text{ (} O = AC \cap BD \text{) thì} \\ d(C, (BC'D)) &= CH = \frac{a\sqrt{39}}{13}. \end{aligned}$$

Câu 6. Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$,

$$\text{nên } P \geq 4(a+b+c)^2 + \frac{27}{a+b+c} = 4t^2 + \frac{27}{t}$$

(với $t = a + b + c > 0$).

Khảo sát hàm số $f(t) = 4t^2 + \frac{27}{t}$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy $\min P = 27$.

Câu 7a. Gọi $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$.

$$\text{Từ } A, B \in (E) \text{ suy ra } \frac{x_A^2 - x_B^2}{16} + \frac{y_A^2 - y_B^2}{9} = 0.$$

Từ giả thiết I là trung điểm của AB , ta có

$$x_A + x_B = 2; \quad y_A + y_B = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x_A - x_B}{8} + \frac{4(y_A - y_B)}{9} = 0. \text{ Do đó VTPT}$$

của AB có tọa độ $\left(\frac{1}{8}; \frac{4}{9}\right)$, hay VTPT của AB

$$\text{là } \vec{n}(9; 32). \text{ PT (d): } 9x + 32y - 73 = 0.$$

Câu 8a. Khai thác các giả thiết: Điểm M thuộc mặt cầu đường kính AB ; M thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn AB ; $M \in (P)$, tìm được $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Câu 9a. Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức z , thì M thuộc đường tròn (C) : $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 26$,

$$\text{suy ra } \begin{cases} x = -4 + \sqrt{26} \cdot \sin t \\ y = 3 + \sqrt{26} \cdot \cos t \end{cases}$$

Các dạng toán ... (Tiếp trang 7)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(a+c)^2 y_P^2 + (a-c)^2 y_Q^2 \geq 2\sqrt{(a+c)^2 y_P^2 \cdot (a-c)^2 y_Q^2} \\ = 2(a+c)|y_P| \cdot (a-c)|y_Q| = 2b^4.$$

$$\text{Suy ra } S_{PFQ} \geq \frac{1}{2}\sqrt{4b^4} = b^2 \text{ hay } \min S_{PFQ} = b^2$$

$$\text{khi } (a+c)^2 y_P^2 = (a-c)^2 y_Q^2 \Leftrightarrow x_0 = c.$$

Vậy có hai tiếp tuyến

$$(\Delta_1): cx - ay - a^2 = 0, (\Delta_2): cx + ay - a^2 = 0. \square$$

Áp dụng. Cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Viết

phương trình tiếp tuyến (Δ) với (E) biết

(Δ) cắt các đường thẳng $x = \pm 3$ tại P, Q sao cho tam giác FPQ có diện tích nhỏ nhất (với F là tiêu điểm bên phải của (E)).

Theo lập luận trên, ta có hai tiếp tuyến

$$(\Delta_1): \sqrt{5}x - 3y - 9 = 0, (\Delta_2): \sqrt{5}x + 3y - 9 = 0$$

(với $c = \sqrt{5}, a = 3$).

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 51 - 2\sqrt{26}(4\sin t - 3\cos t) \geq 51 - 10\sqrt{26}.$$

Số phức cần tìm

$$z = -4 + \frac{4\sqrt{26}}{5} + \left(3 - \frac{3\sqrt{26}}{5}\right)i.$$

Câu 7b. Gọi vector pháp tuyến của CD là

$$\vec{n}(a; b) (a^2 + b^2 > 0) \text{ thì}$$

$$\text{PT của } CD: a(x-3) + b(y-5) = 0;$$

$$\text{PT của } AD: b(x+3) - a(y+1) = 0.$$

Từ $d(P; CD) = d(R, AD)$ suy ra

$$|a + 4b| = |2a - 3b|, \text{ hay } a = 7b \text{ hoặc } 3a = -b$$

(Bạn đọc tiếp tục giải quyết).

Câu 8b. Có hai mặt phẳng thoả mãn đề bài

$$(P_1): x - y = 0; (P_2): x - z = 0.$$

BÀI TẬP

1. Tìm tâm sai của elip (E) , biết mỗi đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

2. Lập phương trình chính tắc của (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của (E) cùng nằm trên một đường tròn.

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip

$$(E): x^2 + 9y^2 = 9. \text{ Tìm điểm } M \in (E) \text{ sao cho}$$

$$\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{MF_2} = \frac{6}{F_1F_2} \quad (F_1, F_2 \text{ là tiêu điểm của } (E)).$$

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ và đường thẳng}$$

$$(d): x - 2y + 12 = 0.$$

Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) là: lớn nhất; nhỏ nhất.

5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip

$$(E): x^2 + 2y^2 = 2 \text{ và đường thẳng}$$

$$(d): 3x - 2y - 3 = 0.$$

Đường thẳng (d) cắt (E) tại hai điểm M, N . Tìm tọa độ điểm $P \in (E)$ sao cho tam giác PMN có diện tích lớn nhất.

Câu 9b. Gọi M, F_1, F_2 lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z, -2, 2$ thì F_1 và F_2 cố định.

Từ $|z-2| + |z+2| = 6$ ta có $MF_1 + MF_2 = 6$, suy ra M thuộc đường elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 ; độ dài trục lớn $2a = 6$.

$$\text{PT chính tắc của } (E) \text{ là } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

$$\text{hay } 5x^2 + 9y^2 = 45.$$

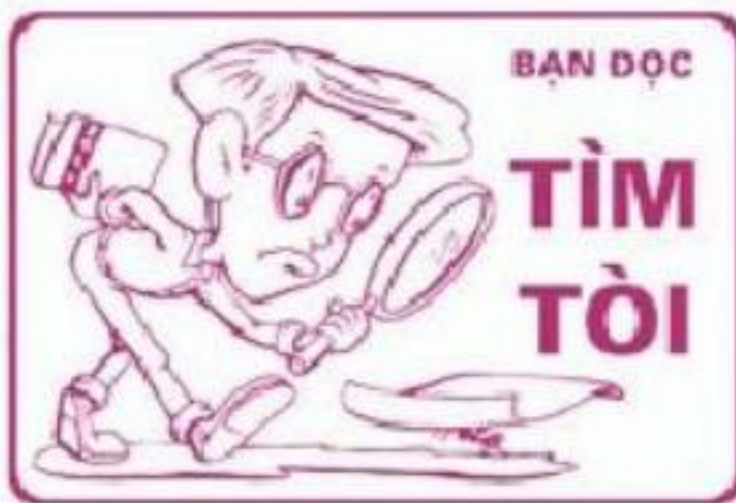
$$\text{Đặt } P = x^2 + y^2 \text{ thì } 45 - 9P = -4x^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow P \geq 5. \text{ Vậy môđun } z \text{ nhỏ nhất là } \sqrt{5}, \text{ suy ra}$$

$$z = \sqrt{5}i \text{ hoặc } z = -\sqrt{5}i.$$

ĐÀO VĂN CHÁNH

(GV THPT Trần Quốc Tuấn, Phú Yên)



Về một bài toán DỰ TUYỂN IMO 1976

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Trong kì thi IMO 1976 có một bài toán dự tuyển khá hay.

Bài toán 1. Các đường phân giác AA' , BB' , CC' của tam giác ABC đồng quy tại I .

Chứng minh rằng nếu bán kính đường tròn nội tiếp của bốn trong sáu tam giác IAB' , IAC' , IBC' , IBA' , ICA' , ICB' bằng nhau thì tam giác ABC đều.

Liệu có thể thay "bốn" bởi "ba" hay không? Một cách tự nhiên, bài toán sau được đặt ra.

Bài toán 2. Các đường phân giác AA' , BB' , CC' của tam giác ABC đồng quy tại I .

Chứng minh rằng nếu bán kính đường tròn nội tiếp của ba trong sáu tam giác IAB' , IAC' , IBC' , IBA' , ICA' , ICB' bằng nhau thì tam giác ABC đều.

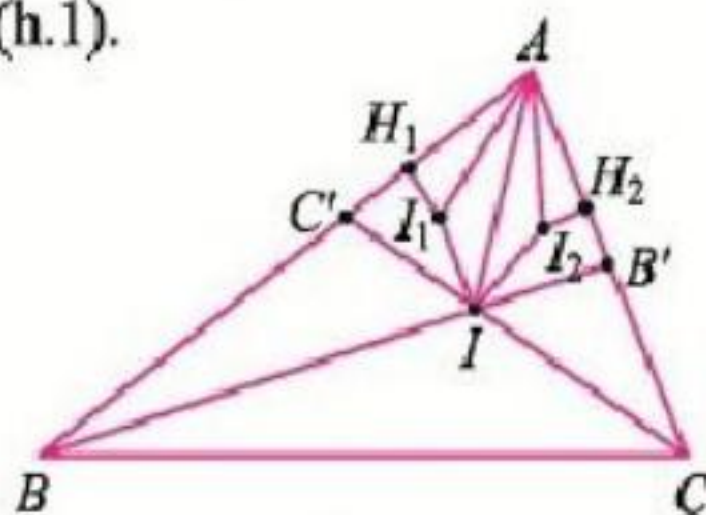
Bài báo này xin giới thiệu lời giải bài toán 2.

Để thuận tiện, trong bài báo này các kí hiệu $r(XYZ)$, $d(X, \Delta)$ và (X, r) theo thứ tự chỉ bán kính đường tròn nội tiếp tam giác XYZ khoảng cách từ điểm X tới đường thẳng Δ và đường tròn tâm X bán kính r .

Lời giải bài toán 2

★Bổ đề 1. Các đường phân giác BB' , CC' của tam giác ABC cắt nhau tại I . Nếu $r(IAC') = r(IAB')$ thì $AB = AC$.

Chứng minh. Gọi I_1, I_2 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác IAC' , IAB' ; H_1, H_2 theo thứ tự là hình chiếu của I_1, I_2 trên AB, AC (h.1).



Hình 1

Ta có $I_1H_1 = r(IAC') = r(IAB') = I_2H_2$;

$$\widehat{I_1AH_1} = \frac{1}{2}\widehat{IAB} = \frac{1}{2}\widehat{IAC} = \widehat{I_2AH_2}.$$

Do đó $\triangle AI_1H_1 = \triangle AI_2H_2 \Rightarrow AI_1 = AI_2$.

Kết hợp với $\widehat{IAI_1} = \frac{1}{2}\widehat{IAB} = \frac{1}{2}\widehat{IAC} = \widehat{IAI_2}$,

suy ra $\triangle IAI_1 = \triangle IAI_2$.

Do đó $\widehat{AIC'} = 2\widehat{AI_1I} = 2\widehat{AI_2I} = \widehat{AIB'}$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \widehat{ACB} &= 2\widehat{ACI} = 2(\widehat{AIC'} - \widehat{IAC}) \\ &= 2(\widehat{AIB'} - \widehat{IAB}) = 2\widehat{ABI} = \widehat{ABC}. \end{aligned}$$

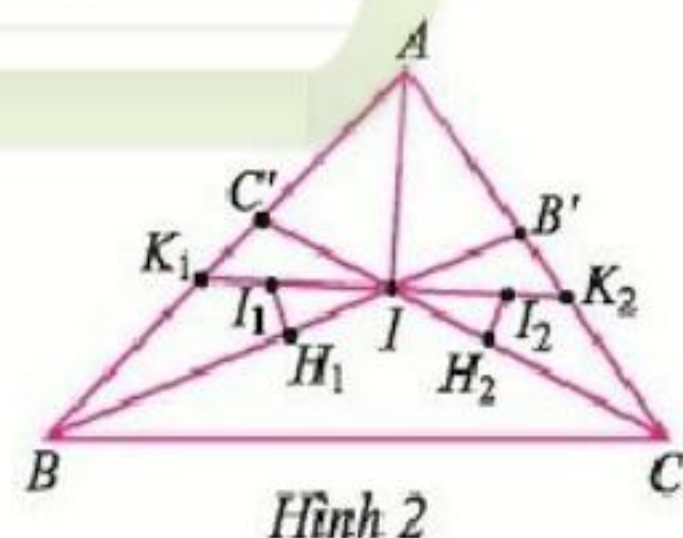
Từ đó suy ra $AB = AC$ (đpcm).

★Bổ đề 2. Các đường phân giác BB' , CC' của tam giác ABC cắt nhau tại I . Nếu $r(IBC') = r(ICB')$ thì $AB = AC$.

Chứng minh. Gọi I_1, I_2 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác IBC' , ICB' ; H_1, H_2 theo thứ tự là hình chiếu của I_1, I_2 trên BB', CC' ; K_1, K_2 thứ tự là giao điểm của I_1I_2 với AB, AC (h.2).

Ta có $I_1H_1 = r(IBC') = r(ICB') = I_2H_2$;

$$\widehat{I_1IH_1} = \widehat{I_1IC'} = \widehat{I_2IH_2}.$$



Hình 2

Do đó $\triangle I_1H_1I = \triangle I_2H_2I \Rightarrow I_1I = I_2I$.

$$\begin{aligned} \text{Kết hợp với } d(I_1, AB) &= r(IBC') = r(ICB') \\ &= d(I_2, AC); d(I, AB) = d(I, AC), \end{aligned}$$

theo định lí Thales, ta có

$$K_1I = \frac{I_1I}{\frac{I_1I}{K_1I}} = \frac{I_1I}{1 - \frac{K_1I_1}{K_1I}} = \frac{I_1I}{1 - \frac{d(I_1, AB)}{d(I, AB)}}$$

$$= \frac{I_2 I}{1 - \frac{d(I_2, AC)}{d(I, AC)}} = \frac{I_2 I}{1 - \frac{K_2 I_2}{K_2 I}} = \frac{I_2 I}{\frac{I_2 I}{K_2 I}} = K_2 I.$$

Từ $\widehat{IAK_1} = \widehat{IAK_2}$, suy ra $\widehat{AK_1 I} = \widehat{AK_2 I}$.

Kết hợp với $\widehat{K_1 IB} = \widehat{I_1 IH_1} = \widehat{I_2 IH_2} = \widehat{K_2 IC}$, ta có

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &= 2\widehat{K_1 BI} = 2(\widehat{AK_1 I} - \widehat{K_1 IB}) \\ &= 2(\widehat{AK_2 I} - \widehat{K_2 IC}) = 2\widehat{K_2 CI} = \widehat{ACB} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

★ Bỏ đề 3. Nếu r, h_a theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp và độ dài đường cao hạ từ A của tam giác ABC thì $\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1 - \frac{2r}{h_a}$.

Chứng minh. Vì $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$;

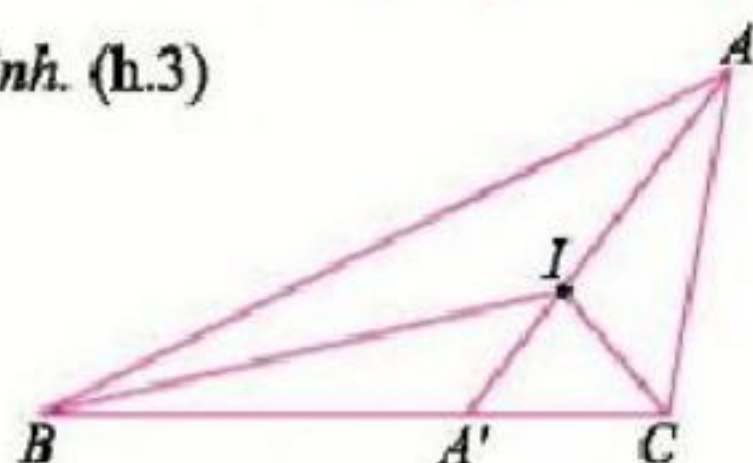
$h_a = 2R \sin B \sin C$, ta có

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2r}{h_a} &= 1 - \frac{2 \cdot 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{2R \sin B \sin C} \\ &= 1 - \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

★ Bỏ đề 4. Các đường phân giác BB', CC' của tam giác ABC cắt nhau tại I . Khi đó

$$r(IBA') = r(ICA') \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1. \end{cases}$$

Chứng minh. (h.3)



Hình 3

Dễ thấy $\widehat{IA'B} = \frac{A}{2} + C$; $\widehat{IA'C} = \frac{A}{2} + B$.

Từ Bỏ đề 3, chú ý rằng $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$, các điều kiện sau tương đương:

- 1) $r(IBA') = r(ICA')$.
- 2) $\tan \frac{B}{4} \tan \left(\frac{A}{4} + \frac{C}{2} \right) = \tan \frac{C}{4} \tan \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{2} \right)$.
- 3) $\sin \frac{B}{4} \cos \frac{C}{4} \sin \left(\frac{A}{4} + \frac{C}{2} \right) \cos \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{2} \right) = \sin \frac{C}{4} \cos \frac{B}{4} \sin \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{2} \right) \cos \left(\frac{A}{4} + \frac{C}{2} \right)$.
- 4) $\left(\sin \frac{B+C}{4} + \sin \frac{B-C}{4} \right) \left(\sin \frac{A+B+C}{2} + \sin \frac{C-B}{2} \right) = \left(\sin \frac{C+B}{4} + \sin \frac{C-B}{4} \right) \left(\sin \frac{A+B+C}{2} + \sin \frac{B-C}{2} \right)$.
- 5) $\left(\sin \frac{B+C}{4} + \sin \frac{B-C}{4} \right) \left(1 - \sin \frac{B-C}{2} \right) = \left(\sin \frac{B+C}{4} - \sin \frac{B-C}{4} \right) \left(1 + \sin \frac{B-C}{2} \right)$.
- 6) $\sin \frac{B+C}{4} \sin \frac{B-C}{2} - \sin \frac{B-C}{4} = 0$.
- 7) $\sin \frac{B-C}{4} \left(2 \sin \frac{B+C}{4} \cos \frac{B-C}{4} - 1 \right) = 0$.
- 8) $\sin \frac{B-C}{4} \left(\sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - 1 \right) = 0$.
- 9) $\begin{cases} \sin \frac{B-C}{4} = 0 \\ \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - 1 = 0. \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} B = C \\ \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 \end{cases} \quad (\text{đpcm}).$

★ Bỏ đề 5. Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và A' là giao điểm của AI và BC

thì $\frac{IA'}{IA} = \frac{BC}{BA+CA}$.

Chứng minh. (h.3)

Vì $\frac{IA'}{IA} = \frac{BA'}{BA}$; $\frac{IA'}{IA} = \frac{CA'}{CA}$, nên

$$\frac{IA'}{IA} = \frac{BA' + CA'}{BA + CA} = \frac{BC}{BA + CA}$$

Trở lại giải bài toán 2.

• Trường hợp 1. $r(LAC') = r(LAB') = r(IBA')$.

Vì $r(LAC') = r(LAB') = r(IBA')$

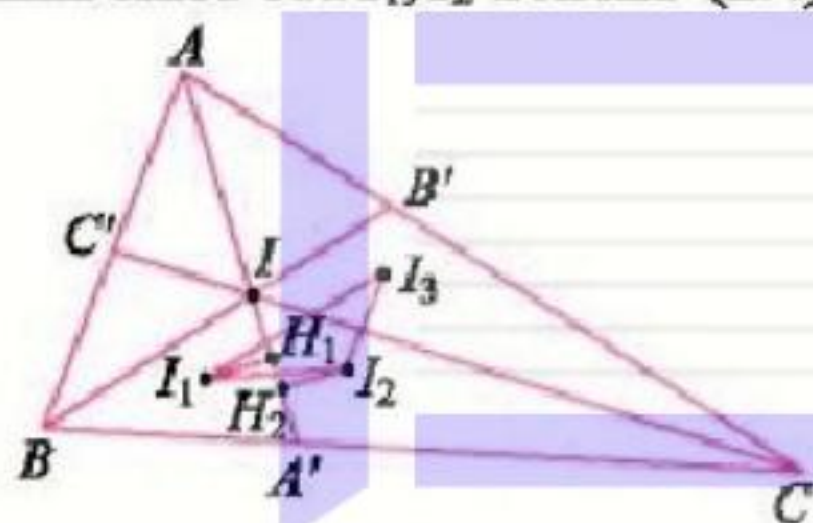
nên $r(LAC') = r(LAB')$; $r(LAB') = r(IBA')$.

Theo Bổ đề 1, $AB = AC$, theo Bổ đề 2, $CA = CB$.

Điều đó có nghĩa là tam giác ABC đều.

• Trường hợp 2. $r(IBA') = r(ICA') = r(ICB')$.

Gọi I_1, I_2, I_3 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác IBA', ICA', ICB' ; H_1, H_2 theo thứ tự là hình chiếu của I_1, I_2 trên AA' (h.4).



Hình 4

Đặt $r(IBA') = r(ICA') = r(ICB') = r_0$.

Vì $d(I_1, BC) = r_0 = d(I_2, BC)$;

$d(I_1, BB') = r_0 = d(I_3, BB')$,

nên $I_1I_2 \parallel BC$; $I_1I_3 \parallel BB'$ (1)

Vì $r(ICA') = r(ICB')$ nên theo Bổ đề 1, $CB = CA$.

Kết hợp với $\widehat{ICA} = \widehat{ICB}$, ta có $I_2I_3 \perp CI$; $AB \perp CI$.

Điều đó có nghĩa là $I_2I_3 \parallel AB$ (2)

Từ (1) và (2), chú ý rằng $\widehat{CBI} = \widehat{ABI}$, suy ra

$$\widehat{I_2I_1I_3} = \widehat{CBI} = \widehat{ABI} = \widehat{I_2I_3I_1}.$$

Do đó tam giác $I_1I_2I_3$ cân tại I_2 .

Vậy $2r_0 = I_2I_3 = I_2I_1 \geq I_1H_1 + I_2H_2 = r_0 + r_0 = 2r_0$.

Điều đó có nghĩa là $I_2I_1 \perp AA'$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra $BC \perp AA'$. Do đó $AB = AC$, Vậy tam giác ABC đều.

• Trường hợp 3. $r(IBA') = r(ICA') = r(LAB')$.

Vì $r(IBA') = r(ICA') = r(LAB')$,

nên $r(LAB') = r(IBA')$; $r(IBA') = r(ICA')$.

Theo Bổ đề 2, $A = B$ và theo Bổ đề 3,

$$\begin{cases} B = C \\ \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1. \end{cases}$$

Nếu $A = B$; $B = C$ thì tam giác ABC đều.

Nếu $A = B$; $\sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1$

thì do $\frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2} = 90^\circ - A$,

ta có $\sin \frac{A}{2} = 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$.

Suy ra $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy tam giác ABC đều.

• Trường hợp 4. $r(LAC') = r(IBA') = r(ICB')$.

Gọi I_1, I_2, I_3 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác LAC', IBA', ICB' ; M, N, P theo thứ tự là giao điểm của II_1, II_2, II_3 với AB, BC, CA ; E, F theo thứ tự là giao điểm của MN, NP với BI, MI ; M, N, P tương ứng là số đo của các góc $\widehat{NMP}, \widehat{PNM}, \widehat{MPN}$ (h.5).

Đặt $r(LAC') = r(IBA') = r(ICB') = r_0$; $r(ABC) = r$.

Vì $d(I_1, AA') = r_0 = d(I_2, AA')$;

$d(I_2, BB') = r_0 = d(I_3, BB')$;

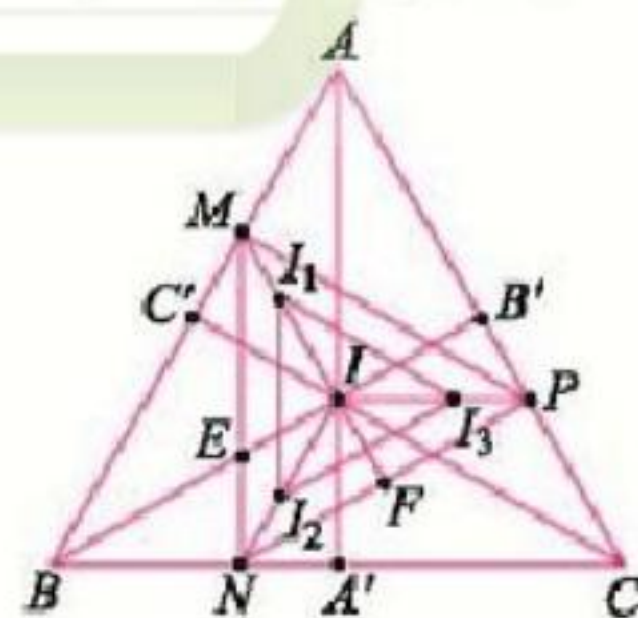
$d(I_3, CC') = r_0 = d(I_1, CC')$

nên $I_1I_2 \parallel AA'$; $I_2I_3 \parallel BB'$; $I_3I_1 \parallel CC'$;

$d(I, I_1I_2) = d(I, I_2I_3) = d(I, I_3I_1) = r_0$ (1)

Mặt khác $\frac{I_1M}{IM} = \frac{d(I_1, AB)}{d(I, AB)} = \frac{r(LAC')}{r(ABC)}$

$$= \frac{r(IBA')}{r(ABC)} = \frac{d(I_2, BC)}{d(I, BC)} = \frac{I_2N}{IN}.$$



Hình 5

Do đó $I_1I_2 \parallel MN$. Tương tự

$I_2I_3 \parallel NP$; $I_3I_1 \parallel PM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$MN \parallel AA'$; $NP \parallel BB'$; $PM \parallel CC'$ (3)

Ta có

$$d(I, MN) = \frac{d(I, MN)}{d(I, I_1 I_2)} r_0 = \frac{IM}{II_1} r_0 = \frac{r_0}{\frac{II_1}{IM}} = \frac{r_0}{1 - \frac{I_1 M}{IM}}$$

$$= \frac{r_0}{1 - \frac{d(I_1, AB)}{d(I, AB)}} = \frac{r_0}{1 - \frac{r(I_1 AC')}{r(ABC)}} = \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{r}} = \frac{rr_0}{r - r_0}.$$

Tương tự $d(I, MN) = \frac{rr_0}{r - r_0};$

$$d(I, NP) = \frac{rr_0}{r - r_0}; \quad d(I, PM) = \frac{rr_0}{r - r_0}.$$

Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MNP$ (4).

Từ (3) và (4), chú ý rằng I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, theo Bổ đề 5 suy ra

$$\frac{NP}{NM + PM} = \frac{IF}{IM} = \frac{EN}{EM} = \frac{IA'}{IA} = \frac{BC}{BA + CA}.$$

Do đó $\frac{NP}{BC} = \frac{NP + PM + MN}{BC + CA + AB}$. Tương tự

$$\frac{PM}{CA} = \frac{NP + PM + MN}{BC + CA + AB}; \quad \frac{MN}{AB} = \frac{NP + PM + MN}{BC + CA + AB}.$$

Vậy $\frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = \frac{MN}{AB}$, suy ra $\triangle MNP \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow M = A; N = B; P = C \quad (5)$$

Từ (3) suy ra $M = \widehat{AIC'} = \frac{A + C}{2};$

$$N = \widehat{BIA'} = \frac{B + A}{2}; \quad P = \widehat{CIB'} = \frac{C + B}{2} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra

$$\frac{A + C}{2} = A; \quad \frac{B + A}{2} = B; \quad \frac{C + B}{2} = C.$$

Do đó $A = B = C$. Tóm lại $\triangle ABC$ đều. $\square$

Lưu ý. Có thể xem phép chứng minh trường hợp 2 trong TTT2, số 20, trang 19, 26 và phép chứng minh trường hợp 4 trong TH&TT số 288, trang 16, 17.

Vận dụng một tính chất ... (Tiếp trang 2)

BÀI TẬP

Ta có $a_1 b_2 - a_2 b_1 = (x + y)(x + y) - 2xy = x^2 + y^2$.

Để thấy $x = y = 0$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Khi x, y không đồng thời bằng 0 ta có $a_1 b_2 - a_2 b_1 = x^2 + y^2 > 0$ nên hệ (1) có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} u = \frac{(xy + 2y^2)(x + y) - (3xy - x^2)y}{x^2 + y^2} = 2y \\ v = \frac{(x + y)(3xy - x^2) - 2x(xy + 2y^2)}{x^2 + y^2} = -x. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 7} = 2y \\ \sqrt{2y^2 + 1} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ 2y \geq 0 \\ x^2 + 7 = 4y^2 \\ 2y^2 + 1 = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0); (-3; 2)$. $\square$

1. Cho x, y, m là các số thực thoả mãn

$$\begin{cases} 2x - my = m \\ mx + y = \frac{3m^2 + 4}{m^2 + 4} \end{cases}$$

- Tìm một hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m ;
- Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3$.

2. Cho x, y là các số thực thoả mãn

$$(11x + 3y - 1)^2 + (5x + 2y + 1)^2 \leq 4.$$

Chứng minh $|x + y + 3| \leq \frac{2\sqrt{73}}{7}.$

3. Giải hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt[3]{9x + 7y + 2} + \sqrt[3]{5x + 4y - 6} = 3 \\ \sqrt[3]{(9x + 7y + 2)(5x + 4y - 6)} = 3x + 6y - 31 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (z + 1)x + (z^2 + 4z)y = z^3 + 5z^2 - 1 \\ x + (z + 3)y = z^2 + 4z - 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (x + y)\sqrt{2xy + 5} = 4xy - 3y + 1 \\ (x + 2y)\sqrt{2xy + 5} = 6xy + x - 7y - 6. \end{cases}$$

BẤT ĐẲNG THỨC "NHỎ" VÀ CÔNG HIỆU "TO"

VŨ QUANG MINH

(THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương)

Bài viết này đưa ra một ứng dụng mạnh của một bất đẳng thức (BĐT) quen thuộc với tư tưởng chủ đạo là *phương pháp cân bằng hệ số*.

⊙ Bất đẳng thức cơ sở. Với hai số x, y không âm ta có

$$x^3 + y^3 \geq y^2x + x^2y \quad (*)$$

Lời giải. Ta luôn có

$$(x - y)^2(x + y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2)(x + y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + xy^2 + x^2y - 2xy^2 + y^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2.$$

Vậy BĐT (*) được chứng minh.

Đẳng thức ở (*) xảy ra khi $x = y$. $\square$

Ta sẽ dùng BĐT (*) để giải quyết một số bài toán sau.

⊙ Bài toán 1. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^3}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^3}{c^2 + a^2 + ca} \geq \frac{a + b + c}{3} \quad (1)$$

Lời giải. Trước hết chứng minh BĐT phụ

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2 + ab} \geq \frac{2a - b}{3} \quad (2)$$

Thật vậy, do $a^2 + b^2 + ab > 0$ nên

$$\text{BĐT (2)} \Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a - b)(a^2 + b^2 + ab)$$

$$\Leftrightarrow 3a^3 \geq 2a^3 + 2ab^2 + 2a^2b - a^2b - b^3 - ab^2$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \text{ (luôn đúng bởi (*))}.$$

Tương tự ta có

$$\frac{b^3}{b^2 + c^2 + bc} \geq \frac{2b - c}{3};$$

$$\frac{c^3}{c^2 + a^2 + ca} \geq \frac{2c - a}{3}.$$

Do đó VT (1) $\geq$

$$\frac{(2a - b) + (2b - c) + (2c - a)}{3} = \frac{a + b + c}{3} \text{ (đpcm). } \square$$

Nhận xét. Bài giải trên rất ấn tượng bởi sự giản dị của nó. Nhưng điều ta thắc mắc là tại sao lại có BĐT (2)? Và đây là câu trả lời:

Nếu quan sát BĐT (2) ta sẽ thấy có dạng

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2 + ab} \geq ax + by$$

$$\Leftrightarrow a^3 \geq (a^2 + b^2 + ab)(ax + by)$$

$$\text{(do } a^2 + b^2 + ab > 0)$$

$$\Leftrightarrow a^3 \geq xa^3 + yb^3 + (x + y)(a^2b + ab^2)$$

$$\Leftrightarrow (1 - x)a^3 + (-y)b^3 \geq (x + y)(a^2b + ab^2).$$

Quan sát BĐT (*) ta cần chọn x, y sao cho

$$1 - x = -y = x + y \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = \frac{-1}{3}.$$

Đó là lí do ta có BĐT (2).

Xét một thí dụ phức tạp hơn nhưng cũng áp dụng tư tưởng đó.

⊙ Bài toán 2. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{19b^3 - a^3}{ab + 5b^2} + \frac{19c^3 - b^3}{bc + 5c^2} + \frac{19a^3 - c^3}{ca + 5a^2} \leq 3(a + b + c).$$

Nhận xét. Ta chọn x, y sao cho

$$\frac{19b^3 - a^3}{ab + 5b^2} \leq xa + yb$$

$$\Leftrightarrow 19b^3 - a^3 \leq (ab + 5b^2)(xa + yb)$$

$$(\text{do } ab + 5b^2 > 0).$$

$$\Leftrightarrow 19b^3 - a^3 \leq 5yb^3 + xa^2b + (5x + y)ab^2$$

$$\Leftrightarrow (19 - 5y)b^3 - a^3 \leq xa^2b + (5x + y)ab^2.$$

Quan sát BĐT (*), x, y cần thoả mãn điều kiện

$$19 - 5y = -1 = x = 5x + y.$$

$$\Leftrightarrow x = -1; y = 4.$$

Lời giải. Trước hết chứng minh BĐT

$$\frac{19b^3 - a^3}{ab + 5b^2} \leq 4b - a.$$

(Nhờ biến đổi tương đương dẫn đến BĐT (*)).

Tương tự có

$$\frac{19b^3 - a^3}{bc + 5c^2} \leq 4c - b; \quad \frac{1a^3 - c^3}{ca + 5a^2} \leq 4a - b.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên ta được BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. $\square$

Ta xét một thí dụ rất công kênh sau.

Bài toán 3. Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{3a^3 + 7b^3}{2a + 3b} + \frac{3b^3 + 7c^3}{2b + 3c} + \frac{3c^3 + 7a^3}{2c + 3a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca).$$

Nhận xét. Vế phải tồn tại ab, bc, ca như vậy trong cách chọn BĐT phụ cũng phải tồn tại lượng này. Ta chọn x, y sao cho

$$\frac{3a^3 + 7b^3}{2a + 3b} \geq xa^2 + yb^2 - ab$$

(không cần thêm biến z cho ab vì vế phải ta đã biết chắc $z = -1$).

$$\Leftrightarrow 3a^3 + 7b^3 \geq (xa^2 + yb^2 - ab)(2a + 3b)$$

$$\Leftrightarrow (3 - 2x)a^3 + (7 - 3y)b^3 \geq (2y - 3)ab^2 + (3x - 2)a^2b.$$

Quan sát BĐT (*) thì x, y phải thoả mãn điều kiện $3 - 2x = 7 - 3y = 2y - 3 = 3x - 2$.

Ta tìm được $x = 1; y = 2$.

Dễ dàng kiểm tra

$$\frac{3a^3 + 7b^3}{2a + 3b} \geq a^2 + 2b^2 - ab.$$

Công việc bây giờ đã dễ dàng để dẫn tới điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 4. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{4a^3 + 5b^3 - 3a^2b + 10ab^2}{3a + b} + \frac{4b^3 + 5c^3 - 3b^2c + 10bc^2}{3b + c} + \frac{4c^3 + 5a^3 - 3c^2a + 10ca^2}{3c + a}$$

$$\geq 5(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca).$$

Nhận xét. BĐT trên đủ làm "yếu tim" bất cứ ai không biết đến vũ khí lợi hại mà chúng ta đang xét đến. Chỉ cần chọn x, y sao cho

$$\frac{4a^3 + 5b^3 - 3a^2b + 10ab^2}{3a + b} \geq xa^2 + yb^2 - ab$$

và quan sát BĐT (*) để cân bằng hệ số, ta dễ dàng tìm ra $x = 1; y = 4$. Từ đó tìm ra BĐT phụ, nhờ đó bài toán được giải quyết nhanh gọn.

Không dài dòng, rất độc đáo và hiệu quả là điều tôi thích ở phương pháp này. Từ lời giải các bạn hoàn toàn có thể tự sáng tạo cho mình các BĐT khác đẹp và khó hơn. Chúc các bạn thành công !

BÀI TẬP

Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$1) \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq a + b + c;$$

$$2) \frac{41a^3 - b^3}{ab + 7a^2} + \frac{41b^3 - c^3}{bc + 7b^2} + \frac{41c^3 - a^3}{ca + 7c^2} \leq 5(a + b + c);$$

$$3) \frac{29a^3 - b^3}{6a^2 + ab} + \frac{29b^3 - c^3}{6b^2 + bc} + \frac{29c^3 - a^3}{6c^2 + ca} \leq 4(a + b + c).$$



CÁC LỚP THCS

Bài T1/440 (lớp 6). Hãy so sánh P và Q , biết

$$P = \frac{20}{30} + \frac{20}{70} + \frac{20}{126} + \dots + \frac{20}{798};$$

$$Q = \left(\frac{31}{2} \cdot \frac{32}{2} \cdot \frac{33}{2} \dots \frac{60}{2} \right) : (1.3.5 \dots 59).$$

LẠI QUANG THỌ

(GV THCS Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài T2/440 (lớp 7). Cho 2014 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2014}$ và một đường tròn bán kính 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại điểm M trên đường tròn sao cho $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2014} \geq 2014$.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN

(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

Bài T3/440. Chứng minh rằng

$$n^4 - 5n^3 - 2n^2 - 10n + 4$$

không chia hết cho 49 với mỗi số tự nhiên n .

CAO VĂN DŨNG

(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài T4/440. Giả sử R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của $\widehat{ACB}$ lần lượt cắt đường thẳng AB ở E và F . Chứng minh rằng nếu $CE = CF$ thì $AC^2 + BC^2 = 4R^2$.

LÊ THANH BÌNH

(GV THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T5/440. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x \left(1 + \frac{1}{x^2 - y^2} \right) = 5 \\ 2(x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{(x^2 - y^2)^2} \right) = \frac{17}{2} \end{cases}$$

BÙI CÔNG TUẤN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/440. Xác định hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số nguyên thoả mãn $f(0) = 2014$, $f(2014) = 0$ và $f(2^n)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

PHAN MẠNH HÀ

(GV THPT Nam Yên Thành, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T7/440. Cho ba số thực dương x, y, z thay đổi thoả mãn $xy = 1 + z(x + y)$. Tìm giá trị lớn

nhất của $P = \frac{2xy(xy+1)}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{z}{1+z^2}$.

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)

Bài T8/440. Cho tam giác nhọn ABC , ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác đồng quy tại H . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là

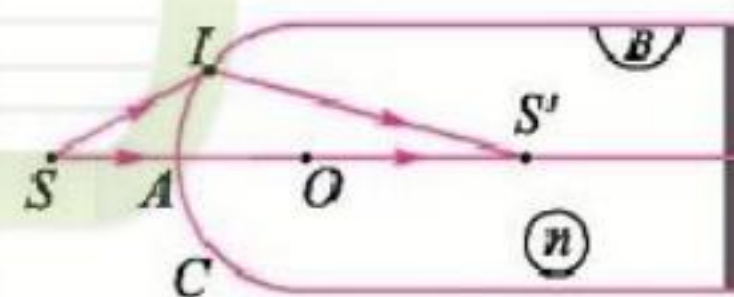
$$HA^2 + HB^2 + HC^2 = 4(HA_1^2 + HB_1^2 + HC_1^2).$$

NGUYỄN VIỆT HÀ

(SV lớp 1A, khoá 51, khoa Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/440. Một ống nghiệm thủy tinh mỏng, đáy là một nửa mặt cầu C có bán kính $R = 15\text{cm}$, chứa đầy chất lỏng trong suốt chiết suất $n' = 1,6$. Ống được nút kín và đặt nằm ngang. Một điểm sáng S đặt trên trục đối xứng AO và cách A là 240cm . Hãy xác định vị trí ảnh S' của S được tạo bởi các tia sáng xuất phát từ S không nghiêng quá so với trục AO .



NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

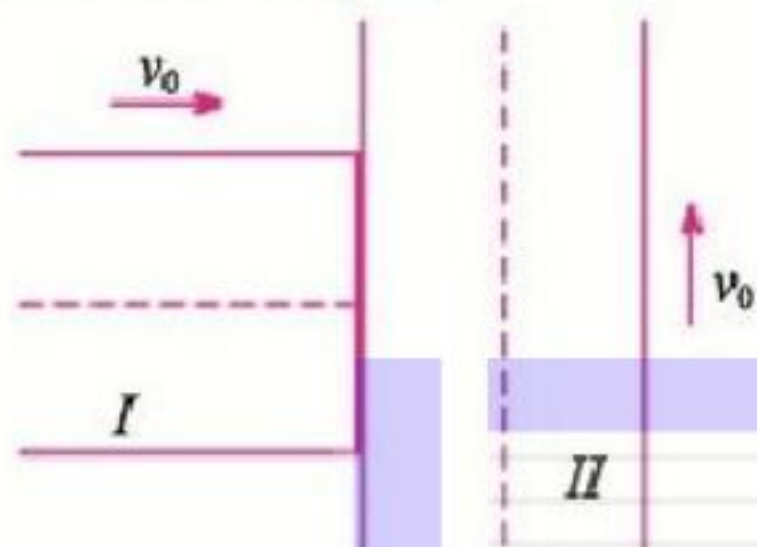
Bài L2/440. Một quả bóng được thả rơi từ độ cao $h = 2\text{m}$ so với sàn nằm ngang. Sau mỗi va chạm, bóng bảo toàn $k = 81\%$ cơ năng. Hỏi sau thời gian bao lâu thì bóng dừng lại? Trong thời gian đó bóng đi được quãng đường bằng bao nhiêu?

TRẦN KHÁNH HẢI

(GV THPT Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế)

(Xem tiếp trang 30)

Bài L2/436. Các chi tiết máy sau khi sản xuất được chuyển ra ngoài nhờ hai băng tải chuyển động vuông góc với cùng tốc độ v_0 . Sau khi các chi tiết máy tới băng tải I, chúng trượt vào chính giữa băng tải II. Nếu tốc độ của băng tải II tăng lên n lần thì tốc độ của băng tải I phải tăng lên bằng bao nhiêu để các chi tiết máy vẫn trượt đến chính giữa băng tải II (kích thước các chi tiết đó có thể bỏ qua)?



Lời giải. Chọn hệ quy chiếu gắn với băng tải II. Gọi d là độ rộng của băng tải II; vận tốc của các băng tải trước khi tăng tốc độ là $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ ($|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v_0$; $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$). Vận tốc của chi tiết máy đối với băng tải II khi trượt vào băng tải II là: $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Vì góc giữa hai vector $\vec{v}_{1,2}$ và $\vec{v}_2$ là $\alpha = 45^\circ$ nên $v_{1,2} = \sqrt{2}v_0$. Khi trượt trên băng tải II, chi tiết máy chịu tác dụng của lực ma sát. Khi chi tiết máy dừng lại giữa băng tải II, theo định lý động năng ta có

$$\mu mg \cdot \frac{d}{2 \sin \alpha} = mv_0^2 \quad (1)$$

trong đó: μ là hệ số ma sát.

Khi tăng tốc độ băng tải II lên n lần, vận tốc của chi tiết máy khi vào băng tải II là

$$v_{1,2}' = \sqrt{v_x^2 + n^2 v_0^2} \quad (2)$$

trong đó v_x là vận tốc cần tìm; góc giữa $\vec{v}_{1,2}'$ và $\vec{v}_2$ là

$$\sin \alpha_1 = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + n^2 v_0^2}} \quad (3)$$

Tương tự, điều kiện để chi tiết máy trượt vào giữa băng tải II là

$$\mu mg \cdot \frac{d}{2 \sin \alpha_1} = m(v_x^2 + n^2 v_0^2) \quad (4)$$

Từ các phương trình trên ta tìm được

$$v_x = v_0 \sqrt{\frac{\sqrt{n^4 + 8} - n^2}{2}}$$

Vậy tốc độ của băng tải I phải tăng lên

$$\sqrt{\frac{\sqrt{n^4 + 8} - n^2}{2}} \text{ lần.}$$

➤ **Nhận xét.** Trong số các bạn gửi bài, bạn *Lê Xuân Bảo*, 12A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nghệ An có lời giải đúng và ngắn gọn. Các bạn sau cũng có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Mạnh Dân*, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; Nghệ An: *Nguyễn Việt Tuấn*, 12A5, THPT chuyên ĐH Vinh;

ĐẶNG THANH HẢI

THÔNG BÁO

KẾ HOẠCH PHÁT HÀNH ĐẶC SAN 2014

- Năm 2014 Tạp chí TH&TT xuất bản 6 số Đặc san vào các tháng 1, 3, 4 và 10.
 - Đặc san số 10 phát hành vào tháng 1, Đặc san số 11 phát hành vào tháng 3.
 - Từ Quý II, mỗi số đặc san sẽ dành trọn nội dung cho một bậc học:
 - Đặc san số 12 (cho THCS) và Đặc san số 13 (cho THPT) phát hành vào tháng 4.
 - Đặc san số 14 (cho THCS) và Đặc san số 15 (cho THPT) phát hành vào tháng 10.

Bạn đọc có thể đặt mua các số Đặc san này tại các cơ sở Bưu điện trong cả nước theo Mã số C.168.1. hoặc liên hệ theo địa chỉ ghi trên bìa 1 của Tạp chí, Đặc san.
- Mời bạn đọc đặt mua Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và các ấn phẩm của Tạp chí tại các cơ sở Bưu điện trên cả nước.



Bài T1/436 (Lớp 6). Cho số

$$n = 1234567891011...99100$$

(các dấu chấm chỉ tất cả những số từ 12 đến 98 viết tiếp sau số 11 và trước số 99 theo thứ tự từ nhỏ đến lớn). Phải xóa bỏ 100 chữ số nào để các chữ số còn lại (vẫn giữ nguyên thứ tự như trước) tạo thành một số lớn nhất?

Lời giải

Số $n = 1234567891011...99100$ chứa 9 số gồm một chữ số, 90 số gồm hai chữ số và một số gồm ba chữ số nên có tất cả là $9 + 180 + 3 = 192$ chữ số. Ta cần xóa 100 chữ số để còn lại số gồm 92 chữ số.

Để số còn lại là lớn nhất sau mỗi lần xóa một chữ số thì chữ số ở hàng đầu trái giữ lại là chữ số lớn hơn chữ số bị xóa.

Trong các số gồm một chữ số từ 1 đến 9 ta cần xóa đi 8 chữ số từ 1 đến 8 để giữ lại một chữ số 9. Trong các số có hai chữ số từ 10 đến 49, để giữ lại bốn chữ số 9, ta cần xóa $19 \times 4 = 76$ chữ số. Như thế ta đã xóa $8 + 76 = 84$ chữ số.

Số còn lại có dạng

$$999995051525354555657585960...100.$$

Ta sẽ xóa tiếp $100 - 84 = 16$ chữ số để chữ số đầu trái (không kể các chữ số 9) là lớn nhất.

Muốn thế cần giữ lại chữ số 7 và xóa đi 15 chữ số là 505152535455565. Ta sẽ xóa tiếp một chữ số trong số 585960...100 để chữ số đầu trái lớn nhất, tức là xóa chữ số 5 ở đầu trái của số vừa nêu. Vậy sau khi xóa 100 chữ số của số ban đầu thì số còn lại lớn nhất gồm 92 chữ số có dạng

$$9999978596061...99100. \square$$

➤ **Nhận xét.** Một số bạn trình bày không chặt chẽ. Các bạn giải đúng bài này là:

Nghệ An: Nguyễn Đình Tuấn, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Võ Đình Nguyên, 6A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà.

VIỆT HẢI

Bài T2/436 (Lớp 7). Tìm các số nguyên x, y, z sao cho $(x-y)^3 + 3(y-z)^2 + 5|z-x| = 35$.

Lời giải. Xét tổng $(x-y) + (y-z) + (z-x) = 0$.

Tổng trên là một số chẵn nên trong ba số $x-y, y-z, z-x$ hoặc cùng là số chẵn hoặc có hai số lẻ và một số chẵn.

• **Trường hợp 1.** Cả ba số $x-y, y-z, z-x$ cùng là số chẵn. Khi đó

$$VT = (x-y)^3 + 3(y-z)^2 + 5|z-x|$$

là một số chẵn.

• **Trường hợp 2.** Trong ba số $x-y, y-z, z-x$ có hai số lẻ và một số chẵn. Khi đó VT là tổng của hai số lẻ và một số chẵn, nên VT là số chẵn.

Như vậy, trong mọi trường hợp, VT của đẳng thức đã cho luôn là số chẵn, còn VP là số lẻ, nên không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Bài toán này tương đối dễ, chỉ cần nắm vững các tính chất chẵn, lẻ của số nguyên cùng với các phép tính. Một số bạn chia trường hợp không hợp lý hoặc lập luận thiếu logic.

CÔNG TY CỔ PHẦN GMO RUNSYSTEM, BCD PHONG TRÀO THI ĐUA 'XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC' VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRÉ
Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên Tạp chí



2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn:

Phú Thọ: Lê Nguyễn Quỳnh Trang, 7C, THCS Văn Lang, Việt Trì, Trần Quốc Lập, Nguyễn Quốc Trung, Trần Ngọc Hiếu, 7A3, Hoàng Công An, 7A4, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Khánh Linh, Đỗ Minh Trung, Đoàn Minh Thư, 7A1, THCS&THPT Hai Bà Trưng, Phúc Yên; **Nghệ An:** Cao Khắc Tân, Ngô Thị Ngọc Anh, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nguyễn Đình Tuấn, 6C, Trần Lê Hiệp, 7A, Lê Huy Thực, 7D, Nguyễn Thị Hằng, Phạm Trần Ánh, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Phương Duyên, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Đại Dương, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/436. Với những giá trị nào của a thì các số $a + \sqrt{15}$ và $\frac{1}{a} - \sqrt{15}$ đều là các số nguyên?

Lời giải. Đặt

$$a + \sqrt{15} = x; \frac{1}{a} - \sqrt{15} = y; x, y \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Suy ra } a = x - \sqrt{15}, \frac{1}{a} = y + 15 \quad (a \neq 0).$$

$$\text{Do đó } (x - \sqrt{15})(y + 15) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{15}(x - y) = 16 - xy \quad (1)$$

$$\text{Nếu } x \neq y \text{ thì từ (1) ta có } \sqrt{15} = \frac{16 - xy}{x - y}, \text{ vô lí}$$

$$\text{vì } \sqrt{15} \text{ là số vô tỉ, } \frac{16 - xy}{x - y} \text{ là số hữu tỉ.}$$

$$\text{Vậy } x = y. \text{ Thay vào (1) ta được } x = y = 4 \text{ hoặc } x = y = -4. \text{ Từ đó } a = 4 - \sqrt{15} \text{ hoặc } a = -4 - \sqrt{15}.$$

Hai giá trị này đều thỏa mãn bài toán.

$$\text{Vậy } a \in \{-4 - \sqrt{15}; 4 - \sqrt{15}\}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Hầu hết các bạn đều giải đúng bài toán với cách giải tương tự như trên. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

Phú Thọ: Nguyễn Minh Chiến, Chữ Thị Ánh, Nguyễn Văn Tuấn, 8A3, Quận Đức Mạnh, Phạm Anh Quân, Nguyễn Đức Thuận, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Thanh Hương, 9A, Nguyễn Đình Khiêm, 9B, THCS Yên Phong; **Hà Nam:** Trịnh Văn Hào Sơn, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; Trần Diệu Linh, 9A,

THCS Nguyễn Hữu Tiên, Duy Tiên; Thanh Hoá: Đặng Quang Anh, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** Võ Việt Anh, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Phạm Quang Toàn, Cao Hữu Đạt, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Quảng Nam:** Lê Phước Định, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Bình Định:** Nguyễn Bảo Trân, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/436.** Giải phương trình

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{2x+6} + \sqrt{6x-5} = x^2 - 2x - 5 \quad (*)$$

Lời giải. Tập xác định $\frac{5}{6} \leq x \leq 6$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{6-x}-1 + \sqrt{2x+6}-4 + \sqrt{6x-5}-5 = x^2 - 2x - 15.$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-x}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{2x-10}{\sqrt{2x+6}+4} + \frac{6x-30}{\sqrt{6x-5}+5} = (x+3)(x-5)$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{-1}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} + \frac{6}{\sqrt{6x-5}+5} - x - 3 \right) = 0.$$

Với $\frac{5}{6} \leq x \leq 6$ ta có

$$\frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} + \frac{6}{\sqrt{6x-5}+5} - 3 < \frac{2}{4} + \frac{6}{5} - 3 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} + \frac{6}{\sqrt{6x-5}+5} - x - 3 < 0$$

$$\Rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \in \left[\frac{5}{6}; 6 \right].$$

Vậy PT (*) có nghiệm duy nhất là $x = 5$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Điều mấu chốt của bài toán là nhận được nghiệm $x = 5$, từ đó ta tìm cách biến đổi phương trình về dạng tích có nhân tử $x - 5$.

2) Trong lời giải trên, ta có thể biến đổi

$$\frac{-1}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} + \frac{6}{\sqrt{6x-5}+5} - x - 3$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} - 1 + \frac{6}{\sqrt{6x-5}+5} - 2 - x$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6-x}+1} - \frac{\sqrt{2x+6}+2}{\sqrt{2x+6}+4} - \frac{2\sqrt{6x-5}+4}{\sqrt{6x-5}+5} - x < 0.$$

3) Phương trình (*) có thể biến đổi về dạng tích có nhân tử $x - 5$ như sau

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{6-x}-1 + \sqrt{2x+6}-6 - (x-1) + \sqrt{6x-5}-x = (x-5)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (5-x) \left(\frac{1}{\sqrt{6-x+1}} + \frac{x+1}{\sqrt{2x+6+x-1}} + \frac{x-1}{\sqrt{6x-5+x}} + x+1 \right) = 0.$$

Ở lời giải này, khi xét thêm điều kiện để phương trình có nghiệm ($x^2 - 2x - 5 \geq 0$), ta có thể làm chặt hơn điều kiện đối với x ($x > 1$), khi đó ta nhận thấy ngay

$$\frac{1}{\sqrt{6-x+1}} + \frac{x+1}{\sqrt{2x+6+x-1}} + \frac{x-1}{\sqrt{6x-5+x}} + x+1 > 0.$$

4) Các bạn có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Chu Mai Anh, 9A1, THCS Yên Lạc; Phú Thọ: Lê Thanh Tùng, 8A, THCS Văn Lang, Việt Trì; Tạ Anh Dũng, 8A3; Nguyễn Phương Linh, 9A3; Nguyễn Hữu Nghĩa, 9A1, THCS Lâm Thao; Hà Nội: Lê Duy Anh, 9A, THCS Nguyễn Huy Tường, Đông Anh; Hà Nam: Nguyễn Thị Thanh Nhân, 8A, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; Đỗ Việt Anh, 8C, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; Nghệ An: Phạm Quang Toàn; Cao Hữu Đạt, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; Nguyễn Thuỳ Dung, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Hà Tĩnh: Nguyễn Phương Duyên, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; Quảng Nam: Lê Phước Định, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; Bình Định: Nguyễn Bảo Trân, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn; Võ Thế Nguyên, 8A6, THCS Thị trấn Phú Mỹ; TP. Hồ Chí Minh: Lạc Thương Thương, 8A4, Trần Kim Thạch, 9A5, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; Vĩnh Long: Đoàn Hoàng Gia Bảo, 9/11, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vĩnh Long.

NGUYỄN ANH QUÂN

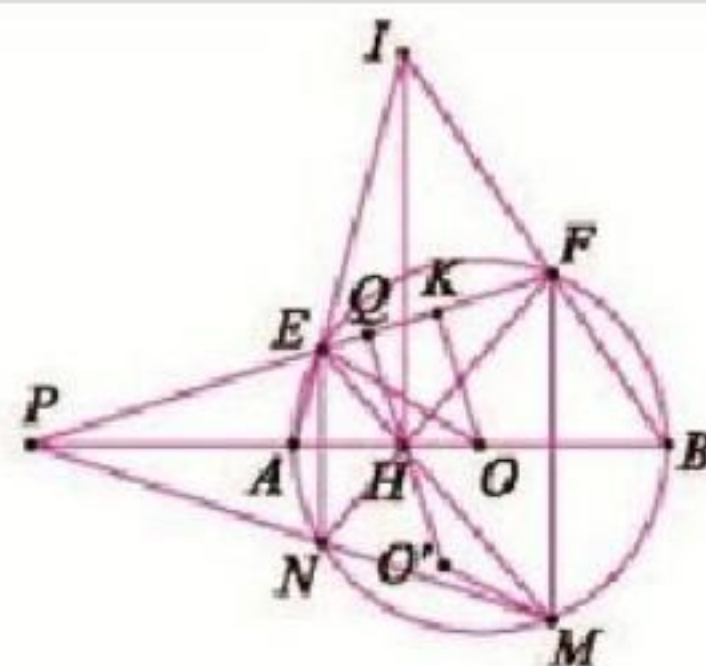
★ Bài T5/436. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Từ điểm I nằm ngoài đường tròn kẻ IH vuông góc với AB (H nằm giữa O và A). IA, IB cắt (O) lần lượt tại E và F ; EF cắt AB tại P , EH cắt (O) tại điểm thứ hai M , PM cắt (O) tại điểm thứ hai N . Gọi K là trung điểm EF , O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN . Chứng minh rằng $O'H \parallel OK$.

Lời giải. Ta có $\widehat{IHB} = \widehat{BEI} = 90^\circ$ nên tứ giác $BHEI$ nội tiếp, suy ra

$$\widehat{OEP} = 180^\circ - \widehat{OEF} = 180^\circ - \left(\frac{180^\circ - \widehat{EOF}}{2} \right)$$

$$= 90^\circ + \widehat{EBF} = 90^\circ + \widehat{EHI} = \widehat{EHO}.$$

Vậy $\triangle OPE \sim \triangle OEH$, nên $\widehat{EPO} = \widehat{HEO}$.



Mà $\widehat{HEO} = \widehat{HMO}$, suy ra $\widehat{EPO} = \widehat{EMO}$.

Do đó tứ giác $PEOM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OPE} = \widehat{OPM}$.

Suy ra PF và PM đối xứng nhau qua PO .

Mặt khác, PO là trục đối xứng của đường tròn (O) , suy ra N, F tương ứng đối xứng với E, M qua PO , nên N, H, F thẳng hàng.

Gọi Q là giao điểm của $O'H$ với PE , ta có

$$90^\circ = \widehat{HNM} + \widehat{O'HM} = \widehat{HEQ} + \widehat{EHQ}$$

suy ra $O'H \perp EF$.

Mà $OK \perp EF$ (do K là trung điểm EF), dẫn tới $O'H \parallel OK$. $\square$

➤ Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt.

Phú Thọ: Nguyễn Đức Thuận, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vinh Phúc:** Nguyễn Hữu Huy, 9A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** Phạm Quang Toàn, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Quảng Nam:** Lê Phước Định, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Bình Định:** Nguyễn Bảo Trân, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T6/436. Chứng minh rằng với tam giác ABC bất kì ta luôn có

$$\left(\frac{h_a}{l_a} - \sin \frac{A}{2} \right) \left(\frac{h_b}{l_b} - \sin \frac{B}{2} \right) \left(\frac{h_c}{l_c} - \sin \frac{C}{2} \right) \leq \frac{r}{4R},$$

trong đó h_a, h_b, h_c và l_a, l_b, l_c tương ứng là độ dài đường cao và độ dài đường phân giác trong kẻ từ A, B, C ; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải. Giả sử AA' là đường phân giác trong góc A và p là nửa chu vi của tam giác ABC (bạn đọc tự vẽ hình).

Ta có $S_{ABC} = S_{ABA'} + S_{AA'C}$, suy ra

$$\frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} (b+c) l_a \sin \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{h_a}{l_a} = \frac{b+c}{a} \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{h_a}{l_a} - \sin \frac{A}{2} = \left(\frac{b+c}{a} - 1 \right) \sin \frac{A}{2} = \frac{2(p-a)}{a} \sin \frac{A}{2}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{h_b}{l_b} - \sin \frac{B}{2} = \frac{2(p-b)}{b} \sin \frac{B}{2};$$

$$\frac{h_c}{l_c} - \sin \frac{C}{2} = \frac{2(p-c)}{c} \sin \frac{C}{2}.$$

ta được

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h_a}{l_a} - \sin \frac{A}{2} \right) \left(\frac{h_b}{l_b} - \sin \frac{B}{2} \right) \left(\frac{h_c}{l_c} - \sin \frac{C}{2} \right) \\ &= \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Sử dụng các hệ thức quen thuộc

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c);$$

$$S = pr; \quad S = \frac{abc}{4R}$$

$$\text{và} \quad \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \quad (1)$$

ta được

$$\begin{aligned} & \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ & \leq \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{S}{4Rp} = \frac{r}{4R}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\left(\frac{h_a}{l_a} - \sin \frac{A}{2} \right) \left(\frac{h_b}{l_b} - \sin \frac{B}{2} \right) \left(\frac{h_c}{l_c} - \sin \frac{C}{2} \right) \leq \frac{r}{4R}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. $\square$

► **Nhận xét.** Có thể giải bài toán bằng cách chứng minh rằng

$$\frac{h_a}{l_a} - \sin \frac{A}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2};$$

$$\frac{h_b}{l_b} - \sin \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}; \quad \frac{h_c}{l_c} - \sin \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$\text{và} \quad \frac{r}{4R} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ để đưa BĐT ở đề bài về}$$

$$\text{BĐT (1) hoặc } (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

Việc chứng minh BĐT (1) tóm tắt như sau

$$(1) \Leftrightarrow 4 \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \sin \frac{C}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{C}{2} - 4 \cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1 \geq 0. \text{ BĐT này đúng.}$$

Tuyên dương các bạn sau đây có bài giải tốt:

Thái Nguyên: Nguyễn Văn Tuyến, 12A1, THPT Đồng Hỷ, TP Thái Nguyên; **Bắc Ninh:** Phạm Văn Chính, 12A9, THPT Yên Phong 2, H. Yên Phong; **Nghệ An:** Tăng Trung Hiếu, 11A1, THPT Thái Hoà, TX Thái Hoà; **Quảng Trị:** Trương Minh Quân, Nguyễn Thị Phương Hoài, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Gia Lai:** Vũ Văn Quý, 12A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Trần Nguyễn Try, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Pleiku; **Đắk Lắk:** Trần Thúy Hiền, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du; **Tiền Giang:** Nguyễn Minh Thành, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang, TP. Mỹ Tho; **Bến Tre:** Từ Nhật Quang, Dương Thị Ngọc Châu, Nguyễn Duy Linh, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Vĩnh Long:** Trần Quốc Huy, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **TP Vĩnh Long:** Long An: Phạm Minh Hậu, Nguyễn Minh Tia, 11T1, THPT chuyên Long An; **Kiên Giang:** Danh Trần Trí, 12T, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá; **Cà Mau:** Lê Minh Phương, 12 Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, TP. Cà Mau.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/436. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = \alpha$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính thể tích của hình chóp, biết rằng tam giác SAB cân tại S và tam giác SBC vuông.

Lời giải.

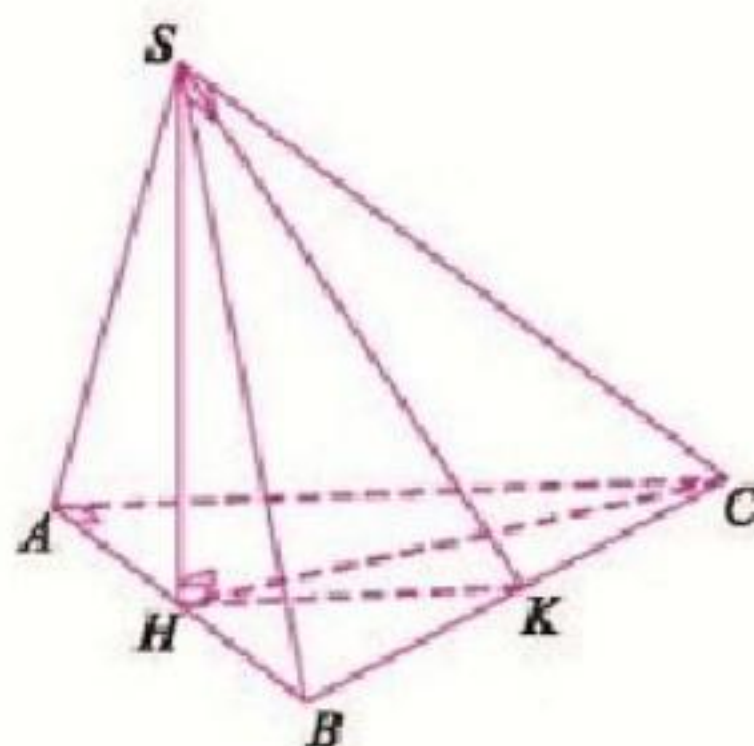
Gọi H là trung điểm cạnh AB . Từ giả thiết đề bài ta có $SH \perp (ABC)$.

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH \quad (1)$$

Tam giác ABC vuông tại A , có

$$AB = 2a \sin \alpha; \quad AC = 2a \cos \alpha,$$

$$\text{nên } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = a^2 \sin 2\alpha \quad (2)$$



• Nếu $\widehat{SBC} = 90^\circ$, thì theo định lí ba đường vuông góc ta thấy $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (điều này không xảy ra, vì $\widehat{ABC} < 90^\circ$).

• $\widehat{SCB} = 90^\circ$, thì theo định lí ba đường vuông góc $\widehat{HCB} = 90^\circ$ (điều này cũng không xảy ra, vì $\widehat{HCB} < 90^\circ$).

Từ đó tam giác SBC phải vuông tại S . Gọi K là trung điểm cạnh BC thì

$$SK = \frac{1}{2}BC = a; \quad HK = \frac{1}{2}AC = a \cdot \cos \alpha.$$

Xét tam giác vuông SHK ta có

$$SH^2 = SK^2 - HK^2 = a^2(1 - \cos^2 \alpha) = a^2 \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow SH = a \cdot \sin \alpha \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta thu được

$$V_{S.ABC} = \frac{2}{3} a^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \text{ (đvtt)}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Số lời giải cho bài toán này gửi về Toà soạn rất nhiều. Tất cả các bạn tham gia đều cho đáp số đúng. Sau đây là những bạn có lời giải gọn hơn cả.

Bắc Ninh: Phạm Văn Chính, 12A9, THPT Yên Phong Số 2, Yên Trung; **Hung Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hoá:** Lê Anh Cường, 10A2, THPT Lương Đức Bằng; **Trịnh Ngọc Anh,** 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Trần Trung Đức,** 11A6, THPT Đào Duy Từ; **Lê Thế Sơn,** 12A8, THPT Bỉm Sơn; **Nghệ An:** Lê Hồng Hạnh, Nguyễn Đình Tạo, Nguyễn Thanh Thuý Khuyến, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Nguyễn Doãn Hiếu,** Hồ Xuân Hùng, Võ Minh Hiếu, 10T1, THPT Đô Lương 1, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** Võ Thế Duy, 11A1, THPT Số 1 Phù Mỹ; **Nguyễn Văn Hải,** 11B, THPT Tây Sơn; **Phú Yên:** Đoàn Phú Thiện, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hoà; **Bến Tre:** Bùi Ngọc Phương Dung, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/436. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^8 y^8 + y^4 = 2x & (1) \\ 1 + x = x(1 + y)\sqrt{xy} & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

ĐKXĐ: $xy \geq 0$. Từ PT (1) suy ra $x \geq 0$.

Nếu $x = 0$ thì PT (2) trở thành $1 = 0$ (vô lí).

Vậy $x > 0$, do đó $y \geq 0$.

Biến đổi PT (2) thành

$$x(\sqrt{xy} - 1) + xy\sqrt{xy} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{xy} - 1)(xy + \sqrt{xy} + x + 1) = 0$$

Do $x > 0, xy \geq 0$ nên $xy + \sqrt{xy} + x + 1 > 0$, suy

$$\text{ra } \sqrt{xy} - 1 = 0 \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \quad (3)$$

Thay (3) vào PT (1) ta được

$$1 + y^4 = \frac{2}{y} \Leftrightarrow y^5 + y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 2) = 0 \quad (4)$$

Do $y \geq 0$ nên $y^4 + y^3 + y^2 + y + 2 > 0$

nên PT (4) $\Leftrightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ (thỏa mãn $y \geq 0$).

Suy ra $x = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Mấu chốt của bài là tìm được mối liên hệ $xy = 1$.

Có thể tìm bằng cách biến đổi PT (2) thành

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1}{x}} = (1 + y)\sqrt{y} \quad (*)$$

rồi xét hàm số $f(t) = (1 + t)\sqrt{t}$

có $f'(t) = \frac{1 + 3t}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên

$(0; +\infty)$ nên $(*) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y$.

2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Yên Bái: Phạm Ngọc Sơn, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Phú Thọ:** Nguyễn Thuý Quỳnh, 9A2, THCS Giầy Phong Châu; **Vũ Thuý Linh,** 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Quốc Trung, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** Thân Thị Quỳnh, Dương Văn Thắng, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nội:** Nguyễn Hữu Khoé, 11 Toán 2, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hung Yên:** Nguyễn Thị Hương Giang, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Trần Bá Trung,

THPT chuyên Hưng Yên; Hải Dương: Nguyễn Phong Long, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; Hà Nam: Lê Anh Tuấn, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hoà; Nam Định: Nguyễn Đức Trung, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; Thanh Hoá: Lê Văn Hải, 11A7, THPT Lương Đắc Bằng, Trần Trí Tấn, 11A1, THPT Sầm Sơn; Nghệ An: Hoàng Thị Thảo Hiền, 9C, THCS Đặng Thai Mai, Tăng Trung Hiếu, 11A1, THPT Thái Hoà, Võ Minh Hiếu, 10T1, THPT Đô Lương 1; Hà Tĩnh: Nguyễn Thị Hoa, 10A1, THPT Cù Huy Cận, Nguyễn Văn Thế, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, Nguyễn Ly Na, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; Quảng Bình: Đoàn Quốc Đạt, 11 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; Quảng Trị: Nguyễn Trần Thanh Hằng, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; Quảng Nam: Nguyễn Vĩnh Ngọc Nữ, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Phan Minh Sơn, 10¹, THPT chuyên Bắc Quảng Nam; Đà Nẵng: Bùi Gia Huy, 12/29, THPT Phan Châu Trinh; Bình Định: Lê Minh Thuận, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Võ Thế Duy, 11A1, THPT Số 1 Phù Mỹ; Phú Yên: Đoàn Phú Thiện, 11A1, THPT Lê Hồng Phong; Đắk Lắk: Trần Thuý Hiền, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du; Gia Lai: Trần Nguyên Try, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương; TP. Hồ Chí Minh: Võ Thành Đạt, 10CT THPT Trần Đại Nghĩa; Cần Thơ: Võ Trường Sơn, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; Vĩnh Long: Đoàn Hoàng Gia Bảo, 9/11, THCS Lê Quý Đôn, Trần Cao Khiêm, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; Long An: Châu Hoà Nhân, 11T2, THPT chuyên Long An; Tiền Giang: Nguyễn Nhật Trường, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; Đồng Tháp: Dương Minh Chánh, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; Đồng Nai: Ôn Từ Quốc Đạt, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; Bến Tre: Nguyễn Xuân Đại, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; Sóc Trăng: Lâm Bửu Hưng, 10A1T, Vương Hoài Thanh, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; Cà Mau: Lê Minh Phước, 12 Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T9/436. Cho số $A = 2013^{30n^2+4n+2013}$ với $n \in \mathbb{N}$. Gọi X là tập hợp mà các phần tử là số dư khi chia A cho 21 với mọi số tự nhiên n . Hãy xác định tập hợp X .

Lời giải. (Theo bạn Trần Nguyên Try, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai).

Ta có $2013 \equiv 18 \pmod{21} \Rightarrow 2013^3 \equiv 18^3 \equiv 15 \pmod{21}$. Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$15^k - 15 = 15(15^{k-1} - 1) : 15 \cdot 14 = 210 : 21$$

do đó $15^k \equiv 15 \pmod{21}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $2013^{3k} \equiv 15^k \equiv 15 \pmod{21} \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Do đó

$$A = 2013^{3(10n^2+n+671)+n} \equiv 15 \cdot 2013^n \pmod{21}.$$

• Nếu $n = 3m$ thì $A \equiv 15^2 \equiv 15 \pmod{21}$.

• Nếu $n = 3m + 1$ thì

$$A \equiv 15^2 \cdot 2013 \equiv 15 \cdot 18 \equiv 18 \pmod{21}.$$

• Nếu $n = 3m + 2$ thì

$$A \equiv 15^2 \cdot 2013^2 \equiv 15 \cdot 2013^2 \equiv 15 \cdot 18^2 \equiv 9 \pmod{21}.$$

Vậy $X = \{9; 15; 18\}$. $\square$

► Nhận xét. Bài toán này được nhiều bạn tham gia giải và giải bằng nhiều cách khác nhau. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Phú Thọ: Nguyễn Thuý Quỳnh, 9A2, THCS Giầy Phong Châu, Phú Ninh; Thanh Hoá: Nguyễn Tiến Đạt, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; Bắc Giang: Nguyễn Thị Trang, 10T, THPT chuyên Bắc Giang; Hà Nam: Hà Thanh Xuân, 11T, THPT chuyên Biên Hoà; Nghệ An: Phạm Quang Toàn, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; Hà Tĩnh: Lê Văn Trường, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; Quảng Nam: Phan Minh Sơn, 10¹, THPT chuyên Bắc Quảng Nam; Long An: Lê Thành Nghĩa, 11T1, THPT chuyên Long An; Cần Thơ: Phan Lê Nhật Tân, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; Vĩnh Long: Vũ Đào Anh Tuấn, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/436. Cho dãy số tự nhiên (x_n) với

$$x_1 = 2, x_{n+1} = \left\lceil \frac{3}{2}x_n \right\rceil, \forall n = 1, 2, 3, \dots, \text{ ở đó kí hiệu}$$

$[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Chứng minh rằng trong dãy (x_n) có vô hạn số chẵn và vô hạn số lẻ.

Lời giải.

Nhận xét. Nếu a là số nguyên dương, $a \geq 2$ thì $\frac{3a}{2} \geq \frac{2a+2}{2} = a+1$. Suy ra $\left\lceil \frac{3a}{2} \right\rceil \geq a+1 > a$.

Do đó ta có $2 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots$

Xét m là số nguyên dương tùy ý. Có hai trường hợp xảy ra:

• Trường hợp 1.

x_m là số chẵn, $x_m = 2^u \cdot v$, $u, v \in \mathbb{N}^*$, v lẻ.

Khi đó $x_{m+1} = \left\lfloor \frac{3x_m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3 \cdot 2^u \cdot v}{2} \right\rfloor = 3 \cdot 2^{u-1} \cdot v$,

$x_{m+2} = 3^2 \cdot 2^{u-2} \cdot v$ (nếu $u \geq 2$), ..., $x_{m+u} = 3^u \cdot v$ là số lẻ.

• Trường hợp 2.

x_m là số lẻ, $x_m = 2^u \cdot v + 1$, $u, v \in \mathbb{N}^*$, v lẻ.

Khi đó

$$x_{m+1} = \left\lfloor \frac{3x_m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3 \cdot (2^u \cdot v + 1)}{2} \right\rfloor = 3 \cdot 2^{u-1} \cdot v + 1, \dots,$$

$x_{m+u} = 3^u \cdot v + 1$ là số chẵn.

Từ đó ta suy ra trong dãy số (x_n) có vô hạn số chẵn và vô hạn số lẻ.

► Nhận xét. Đây là bài toán dãy số số học cơ bản, đơn giản. Tất cả các bạn gửi lời giải tới Toà soạn đều thiếu nhận xét $x_n > 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hoan nghênh các bạn sau giải tốt bài toán này.

Vinh Phúc: Nguyễn Hữu Huy, 9A1, THCS Yên Lạc;
Phú Thọ: Quán Đức Bình, Phạm Anh Quân, 9A1, THCS Lâm Thao; Nghệ An: Phan Nguyên Khôi, 9A, THPT Đặng Thai Mai, TP. Vinh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/436. Cho số thực $x \geq 1$. Tìm giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt[n]{x} - 1)^n.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Với $x = 1$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt[n]{1} - 1)^n = 1$.

Xét $x > 1$. Từ bất đẳng thức $(\sqrt[n]{x} - 1)^2 > 0$, ta có

$$(2\sqrt[n]{x} - 1)^n < (\sqrt[n]{x^2})^n = x^2 \quad (1)$$

Mặt khác

$$(2\sqrt[n]{x} - 1)^n = x^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}} - 1 \right)^n = x^2 (1 + y)^n \quad (2)$$

trong đó $y = \frac{2}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}} - 1 = \frac{2\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{x^2}} - 1 > -1$.

Theo bất đẳng thức Bernoulli

$$(1 + y)^n \geq 1 + ny = 1 - n \cdot \frac{(\sqrt[n]{x} - 1)^2}{\sqrt[n]{x^2}} \quad (3)$$

Cũng theo bất đẳng thức Béc-nu-li, thì

$$x = (1 + (\sqrt[n]{x} - 1))^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{x} - 1) > n(\sqrt[n]{x} - 1).$$

$$\text{Do đó} \quad (\sqrt[n]{x} - 1)^2 < \frac{x^2}{n^2} \quad (4)$$

Kết hợp (4) với (3), ta thu được

$$(2\sqrt[n]{x} - 1)^n = x^2 (1 + y)^n \geq x^2 \left(1 - \frac{x^2}{n\sqrt[n]{x^2}} \right) \quad (5)$$

Từ (1) và (5) ta thu được

$$x^2 \left(1 - \frac{x^2}{n\sqrt[n]{x^2}} \right) < (2\sqrt[n]{x} - 1)^n < x^2 \quad (6)$$

Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{n\sqrt[n]{x^2}} \right) = x^2$ nên theo nguyên

lí kẹp, từ (6) ta được $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt[n]{x} - 1)^n = x^2$.

Kết luận. Với mọi số thực $x \geq 1$, ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt[n]{x} - 1)^n = x^2.$$

► Nhận xét. 1) Có nhiều bạn sử dụng các giới hạn liên quan đến số e và lôgarit dạng

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

cho lời giải ngắn gọn hơn. Bạn Nguyễn Văn An, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh, Lê Minh Phương, 12CT, THPT chuyên Phan Ngọc Hiền, Cà Mau cho nhận xét về việc tổng quát hoá bài toán thành chứng minh

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ((k+1)\sqrt[n]{x} - k)^n = x^{k+1}$$

với k là số nguyên dương.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng.

Yên Bái: Phạm Ngọc Sơn, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn An, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** Lê Anh Tuấn, 11T, THPT chuyên Biên Hoà; **Thanh Hóa:** Lê Thế Sơn, 12A8, THPT chuyên Bỉm Sơn; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, Trần Hậu Mạnh Cường, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Long An:** Chu Thị Thu Hiền, 12T, THPT chuyên Long An; **Đắk Lắk:** Huỳnh Trung Quân, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Gia Lai:** Trần Nguyễn Try, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **Cà Mau:** Lưu Giang Nam, Lê Minh Phương, 12CT, THPT chuyên Phan Ngọc Hiền.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/436. Cho tam giác ABC có diện tích S và P là điểm bất kì. Gọi A', B', C' là trung điểm các cạnh BC, CA, AB ; h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao tương ứng. Chứng minh rằng

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}} S \cdot \max \left\{ \frac{PA+PA'}{h_a}, \frac{PB+PB'}{h_b}, \frac{PC+PC'}{h_c} \right\}.$$

Lời giải. Gọi a, b, c theo thứ tự là độ dài các cạnh BC, CA, AB .

Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến và bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 &= PA^2 + 2 \cdot \frac{2(PB^2 + PC^2) - a^2}{4} + \frac{a^2}{2} \\ &= PA^2 + 2PA^2 + \frac{a^2}{2} = \left(\frac{a^2}{3} + PA^2 \right) + \left(\frac{a^2}{6} + 2PA^2 \right) \\ &\geq \frac{2a}{\sqrt{3}} PA + \frac{2a}{\sqrt{3}} PA' = \frac{2ah_a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{PA+PA'}{h_a} = \frac{4S}{\sqrt{3}} \cdot \frac{PA+PA'}{h_a}. \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } PA^2 + PB^2 + PC^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}} \cdot \frac{PB+PB'}{h_b};$$

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}} \cdot \frac{PC+PC'}{h_c}.$$

$$\text{Vậy } PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{4S}{\sqrt{3}} \max \left\{ \frac{PA+PA'}{h_a}, \frac{PB+PB'}{h_b}, \frac{PC+PC'}{h_c} \right\} (*). \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Bài toán này dễ, nhiều bạn tham gia giải, vẫn có bạn giải sai.

2) Nhiều bạn kết luận vội vàng "Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều và P là tâm của nó".

3) Khi cho P trùng trọng tâm G của ΔABC , chú ý rằng $\min \left\{ \frac{m_a}{h_a}, \frac{m_b}{h_b}, \frac{m_c}{h_c} \right\} \geq 1$ (m_a, m_b, m_c theo thứ tự là độ dài

các đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C của ΔABC) ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) \\ &\geq 3 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} S \max \left\{ \frac{m_a}{h_a}, \frac{m_b}{h_b}, \frac{m_c}{h_c} \right\} \geq 4\sqrt{3}S. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức (*) là sự mở rộng của bất đẳng thức quen biết $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

4) Bài toán tìm P sao cho đẳng thức xảy ra là bài toán khó.

5) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt:

Vinh Phúc: Tạ Ngọc Mai, Phan Đăng Nam, Nguyễn Hồng Ngọc, Đào Xuân Hiệp, 10A1, THPT chuyên Vĩnh

Phúc; Hưng Yên: Nguyễn Trung Hiếu, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; Quảng Bình: Đoàn Quốc Đạt, 11T, THPT chuyên Quảng Bình; Bình Định: Trần Văn Hải, 11B, THPT Tây Sơn; Phú Yên: Lê Bảo Đại, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Đoàn Phú Thiện, 11A1, THPT Lê Hồng Phong; TP. Hồ Chí Minh: Võ Thành Đại, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/436. Một khối hình nón có đường kính đáy là D và độ cao H được nhúng chìm trong nước. Trục của hình nón lập với mặt chất lỏng một góc α , khoảng cách từ mặt chất lỏng tới tâm của đáy hình nón là h . Tìm lực tác dụng lên mặt bên của khối hình nón, biết khối lượng riêng của nó là ρ .



Lời giải. Vì khối nón nằm lơ lửng trong nước nên khối lượng riêng của nó bằng khối lượng riêng của nước (k hiệu là ρ). Để thấy rằng áp lực của nước lên đáy là

$$F_d = \rho \cdot g \cdot h \cdot S = \pi \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot \frac{D^2}{4}.$$

Gọi lực tác dụng lên mặt bên của khối nón là $\vec{F}_b$.

$$\text{Ta có } \vec{F}_A = \vec{F}_d + \vec{F}_b = -m\vec{g} = -\rho\pi \frac{D^2}{4} \cdot \frac{H}{3} \cdot \vec{g}.$$

Từ hình vẽ ta có

$$\begin{aligned} F_b &= \sqrt{F_A^2 + F_d^2 + 2F_A \cdot F_d \cdot \sin \alpha} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\rho\pi D^2 H}{12} g \right)^2 + \left(\frac{\pi\rho gh D^2}{4} \right)^2 + \frac{\pi^2 \rho^2 D^4 g^2 H h}{24} \sin \alpha} \\ &= \frac{\pi D^2 \rho g}{12} \sqrt{H^2 + 6H \cdot h \sin \alpha + 9h^2}. \quad \square \end{aligned}$$

► **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng: Vinh Phúc; Nguyễn Mạnh Dân 10A3 THPT Chuyên; Nghệ An: Lê Xuân Bảo 12A3 THPT Chuyên Phan Bội Châu.

NGUYỄN XUÂN QUANG



Toán học và Âm nhạc

TRẦN ĐÌNH VIỆN
(Hà Nội)

(Tiếp kì trước)

II. GAM TRƯỜNG, GAM THỨ TRONG ÂM NHẠC

1. Định nghĩa

Thang nhạc 7 bậc, trong đó khoảng cách cao độ giữa các âm liên tiếp tính bằng 1 cung (1c) hoặc $\frac{1}{2}$ cung ($\frac{1}{2}c$) thoả mãn quy luật dưới đây được gọi là *một gam trường*, âm đầu tiên f_0 là *chủ âm*, ta gọi là **gam f_0 trường**:

$$\begin{array}{cccccccc} (f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 = 2f_0) \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 1c & 1c & \frac{1}{2}c & 1c & 1c & 1c & 1c & \frac{1}{2}c \end{array} \quad (1)$$

Nếu thoả mãn điều kiện sau đây thì gọi là *gam thứ*, âm đầu tiên gọi là *chủ âm*, ta gọi là **gam g_0 thứ**.

$$\begin{array}{cccccccc} (g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 = 2g_0) \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 1c & \frac{1}{2}c & 1c & 1c & \frac{1}{2}c & 1c & 1c & 1c \end{array} \quad (2)$$

Thí dụ. Thang nhạc 7 bậc tự nhiên đầu tiên:

(Do¹ Re¹ Mi¹ Fa¹ Sol¹ La¹ Si¹ Do²) là gam Do trường (kí hiệu là C)

$$\begin{array}{cccccccc} \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 1c & 1c & \frac{1}{2}c & 1c & 1c & 1c & 1c & \frac{1}{2}c \end{array}$$

Giữ nguyên thứ tự như vậy nhưng cho La¹ đứng đầu ta có gam La thứ (kí hiệu là A)

(La¹ Si¹ Do² Re² Mi² Fa² Sol² La²)

$$\begin{array}{cccccccc} \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 1c & \frac{1}{2}c & 1c & 1c & \frac{1}{2}c & 1c & 1c & 1c \end{array}$$

2. Dùng dấu thăng (#) để đổi gam (thay đổi chủ âm)

Do sự cần thiết khi phải lên cao hoặc hạ thấp nhưng vẫn giữ nguyên giai điệu trường (hoặc thứ), ta dùng dấu thăng (#) hoặc dấu giáng (b):

$$\begin{array}{cccccccccccc} (f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 (=2f_0)) & 2f_1 & 2f_2 & 2f_3 & 2f_4 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 1c & 1c & \frac{1}{2}c & 1c & 1c & 1c & \frac{1}{2}c & 1c & 1c & \frac{1}{2}c & 1c & 1c \end{array}$$

Thí dụ. Từ gam Do trường (Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do), nếu ta thêm dấu # vào âm Fa (Fa[#]) thì ta có gam Sol trường (G):

$$(Sol, \text{trên Si}, \text{trên Do}, \text{trên Re}, \text{trên Mi}, \text{trên Fa}^\#, Sol) \quad (3)$$

Hệ quả. Theo nhận xét trên, từ gam Sol trưởng (G), nếu ta đặt thêm dấu # vào âm Do (vẫn giữ Fa[#]) ta được gam Re trưởng (D):

(Re, Mi, Fa[#], Sol, La, Si, Do[#], Re)

Tương tự, từ gam Re trưởng, nếu cho Sol[#] ta có gam La trưởng (A),...

Dùng dấu giáng (b), ta có nhận xét sau: Từ gam trưởng f_0 nếu ta đặt dấu giáng (b) vào âm thứ sáu f_5^b thì được gam trưởng nhận âm thứ tư làm chủ âm (f_3).

Thí dụ. Từ gam Do trưởng, nếu cho Si^b ta sẽ được gam Fa trưởng (F). Tiếp tục, từ gam Fa trưởng (Si^b) nếu cho thêm một dấu giáng vào Mi^b, ta có gam Si^b trưởng có hai dấu giáng (b) là Si^b và Mi^b.

Ta không nói về gam thứ vì đã có nhận xét trên: Một gam trưởng có chủ âm là âm thứ nhất f_0 hoặc là gam thứ có chủ âm là âm thứ sáu (f_5). Từ đó ta có bảng sau đây để xác định gam trưởng, gam thứ theo các dấu thăng (#) hoặc dấu giáng (b):

Các gam theo dấu thăng (#)

Không có dấu thăng	Do trưởng (C) hoặc La thứ (Am)
1 dấu thăng (Fa [#])	Sol trưởng (G) hoặc Mi thứ (Em)
2 dấu thăng (Fa [#] , Do [#])	Re trưởng (D) hoặc Si thứ (Bm)
3 dấu thăng (Fa [#] , Do [#] , Sol [#])	La trưởng (A) hoặc Fa [#] thứ (F [#] m)
4 dấu thăng (Fa [#] , Do [#] , Sol [#] , Re [#])	Mi trưởng (E) hoặc Do [#] thứ (C [#] m)
5 dấu thăng (Fa [#] , Do [#] , Sol [#] , Re [#] , La [#])	Si trưởng (B) hoặc Sol [#] thứ (G [#] m).

Các gam theo dấu giáng (b)

1 dấu giáng (Si ^b)	Fa trưởng (F) hoặc Re thứ (Dm)
2 dấu giáng (Si ^b , Mi ^b)	Si ^b trưởng (B ^b) hoặc Sol thứ (Gm)
3 dấu giáng (Si ^b , Mi ^b , La ^b)	Mi ^b trưởng (E ^b) hoặc Do thứ (Cm)
4 dấu giáng (Si ^b , Mi ^b , La ^b , Re ^b)	La ^b trưởng (La ^b) hoặc Fa thứ (Fm).

(Kí hiệu nốt nhạc: La (A), Si (B; H), Do (C), Re (D), Mi (E), Fa (F), Sol (G)).

Chữ viết hoa là giọng "trưởng": C, D, E (Do trưởng, Re trưởng, Mi trưởng).

Chữ viết hoa có chữ m bên phải là giọng "thứ": Am, Dm, Em (La thứ, Re thứ, Mi thứ).

Áp dụng. Chuyển gam để điều chỉnh nâng cao hoặc hạ thấp cao độ một bản nhạc thích hợp với giọng hát của mình.

Thí dụ 1. Một bản nhạc gam Do trưởng (C), nếu thấy thấp quá có thể nâng lên một ton, ta chuyển lên Re trưởng (D), bản nhạc phải có hai dấu thăng F[#] và Do[#], mọi âm đều nâng lên một bậc.

Thí dụ 2. Một bản nhạc gam Do thứ (Cm) ba dấu giáng Si^b, Mi^b, La^b, cao quá muốn hạ thấp xuống 2 ton, ta chuyển sang gam La thứ (Am) bỏ tất cả dấu giáng, cho các nốt nhạc hạ xuống 2 bậc.



DIỄN SỐ

ĐÓN NĂM GIÁP NGỌ

Bạn hãy thay mỗi chữ bởi một chữ số vào các chữ dưới đây sao cho được một đẳng thức đúng, trong đó hai chữ khác nhau biểu thị hai chữ số khác nhau:

$$\text{GIÁP} + \text{NGỌ} = 2014$$

ĐAN QUỲNH
(Hà Nội)

III. PHÍM ĐÀN

Hai dây đàn cùng loại có tần số dao động tỉ lệ nghịch với chiều dài của chúng. Nguyên lí này quyết định việc chế tạo các loại phím trên đàn Ghita hoặc Mandolin. Thang nhạc của chúng ta sử dụng trong một quãng tám có 12 bậc. Khi ta bấm vào phím và gảy vào dây sẽ phát ra các âm thanh cao thấp khác nhau, bởi vì độ dài của dây đàn được điều chỉnh khi bấm vào phím đàn. Vấn đề đặt ra là vị trí các phím trên cần đàn như thế nào? Khoảng cách giữa các phím có đều không? Xét một dây bất kì của đàn Ghita cũng như Mandolin, giả sử độ dài của dây tính từ phím trên cùng đến con ngựa là $2a$, (khi không dùng tay bấm vào phím nào). Độ dài này ứng với tần số âm f_0 trong thang nhạc đều 12 bậc. Ta kí hiệu d_i ($i = 0, 1, \dots$) là độ dài của dây ứng với f_i trong thang nhạc. Ta biết rằng dãy $f_0, f_1, \dots, f_m$ là một cấp số nhân công bội $q = 2^{1/12}$ gần bằng 1,056. Theo định luật âm học, tần số dao động của âm thanh tỉ lệ nghịch với độ dài của dây. Vì vậy dãy tương ứng $a_0, a_1, \dots, a_m$ là một cấp số nhân có công bội $q' = \frac{1}{q} = 2^{-1/12}$ và $a_0 = 2a$.

Ta có $a_i = a_0 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^{i-1}$. Đặc biệt $a_{12} = a_0 \cdot (2^{-1/12})^{12} = a_0 \cdot \frac{1}{2} = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$. Phím nằm ở trung điểm của dây ứng với âm $f_{12} = 2f_0$ (f_0 lên quãng tám). Khoảng cách giữa các phím cũng không đều nhau.

Ta gọi d_i là khoảng cách giữa phím thứ $i-1$ và i , ta có $d_1 = a_0 - a_1, d_2 = a_1 - a_2, \dots$

$$d_i = a_{i-1} - a_i = a_0 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^{i-2} - a_0 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^{i-1} = a_0 \cdot (q-1) \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^{i-1} = d_0 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^{i-1} \text{ với } d_0 = a_0(q-1).$$

Suy ra dãy $d_0, d_1, \dots, d_m$, cũng là một cấp số nhân lùi có công bội là $\frac{1}{q} = 2^{-1/12} < 1$.

Tài liệu tham khảo

1. *Gam đơn giản* – GE Shilov (bản dịch viết tay của Hoàng Trọng Thái).
2. *Vật lí & Âm nhạc* – Glep Anfilov (NXB Khoa học & Kỹ thuật, Hà Nội, 1978).
3. *Nhạc lí nâng cao* – Ngô Ngọc Thắng (NXB Âm nhạc, Hà Nội, 1997).

(Tiếp trang 17)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(Tiếp)

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/440 (For 6th grade). Which number is greater? P or Q , given that

$$P = \frac{20}{30} + \frac{20}{70} + \frac{20}{126} + \dots + \frac{20}{798};$$

$$Q = \left(\frac{31}{2} \cdot \frac{32}{2} \cdot \frac{33}{2} \dots \frac{60}{2} \right) : (1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 59).$$

T2/440 (For 7th grade). Given 2014 points $A_1, A_2, \dots, A_{2014}$ and a circle with radius 1 on the plane, prove that there always exists a point M on the circle such that

$$MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2014} \geq 2014.$$

T3/440. Prove that for any natural number n ,

$$n^4 - 5n^3 - 2n^2 - 10n + 4$$

is not divisible by 49.

T4/440. Let R denote the radius of the circumcircle of a given triangle ABC . The internal and external angle bisectors of angle $\widehat{ACB}$ meet AB at E and F respectively. Prove that if $CE = CF$, then $AC^2 + BC^2 = 4R^2$.

T5/440. Solve the following system of equations

$$\begin{cases} 2x \left(1 + \frac{1}{x^2 - y^2} \right) = 5 \\ 2(x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{(x^2 - y^2)^2} \right) = \frac{17}{2}. \end{cases}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/440. Determine the function

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

where a, b, c are integers such that $f(0) = 2014$, $f(2014) = 0$ and $f(2^n)$ is a multiple of 3 for any natural number n .

T7/440. The positive real numbers x, y, z satisfy the equation $xy = 1 + z(x + y)$. Find the

greatest value of $P = \frac{2xy(xy+1)}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{z}{1+z^2}$.

T8/440. In an acute triangle ABC , the three altitudes AA_1, BB_1, CC_1 meet at H . Prove that ABC is an equilateral triangle if and only if

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 = 4(HA_1^2 + HB_1^2 + HC_1^2).$$

Translated by LE MINH HA