



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

11 2013
Số 437

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

CHÀO MỪNG NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM 20-11



KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÝ
TRÊN TẠP CHÍ NĂM HỌC 2012 - 2013



PGS. TS. NGUYỄN PHAN ĐỨC CHÍNH

NGƯỜI CHẤP CÁNH CHO NHIỀU TÀI NĂNG TOÁN HỌC



NGUYỄN Phan Đức Chính

Sắp đến ngày 20-11, nhớ lại câu nói của cố nhân "Công cha, nghĩa mẹ, ơn thầy", tôi chợt nghĩ làm sao có thể kể hết được công ơn của những người thầy đã tình nguyện làm người chèo lái, dẫn dắt các thế hệ học trò cập bờ tri thức với nhiều thành đạt và hạnh phúc.

Với tình cảm chân thành của một người học trò nhỏ nối tiếp bước chân của các thầy giảng dạy Toán học, tôi xin được nhắc đến một trong những người thầy đáng kính và thân thuộc của chúng ta: PGS. TS. NGUYỄN Phan Đức Chính.

Thầy Phan Đức Chính sinh ngày 15/9/1936 tại Sài Gòn. Quê Thầy ở Đông Ngạc, Từ Liêm, Hà Nội, một làng cổ ven sông Hồng.

Từ 1952 đến 1954, Thầy học THPT tại trường Albert Sarraut của Pháp. Năm 1956 Thầy tốt nghiệp ĐHSP Khoa học khi tròn 20 tuổi và được mời ở lại làm cán bộ giảng dạy Toán học cao cấp tại Khoa Tự nhiên của trường. Năm 1958, ĐH Tổng hợp Hà Nội được thành lập, Thầy chuyển về đó và thuộc biên chế khoa Toán-Lí. Năm 1965 Thầy bảo vệ xuất sắc Luận án Tiến sĩ Toán-Lí tại ĐHTH Lomonosov của nước Nga, dưới sự hướng dẫn của nhà toán học nổi tiếng G. E. Shylov. Tiếp tục trở về công tác tại bộ môn Giải tích, Thầy cùng các đồng nghiệp của mình đã đặt những viên gạch đầu tiên cho chuyên ngành Giải tích Toán học nói chung và Lí thuyết Giải tích hàm nói riêng. Thầy đã trực tiếp giảng dạy các môn Giải tích cơ sở, Giải tích hàm, Lí thuyết nhóm, Hàm suy rộng, Độ đo và tích phân cho sinh viên.

Thầy là một trong những người Việt Nam đầu tiên nghiên cứu Lí thuyết độ đo, Phiếm hàm tuyến tính và toán tử tuyến tính đo được trong không gian tuyến tính định chuẩn. Các kết quả chính của Thầy đã được đưa vào sách chuyên khảo: G. E. Shylov, Phan Duc Chinh. *Measure, Integral, Derivative in Linear Spaces. Nauk*, 1967 (viết bằng tiếng Nga, đã dịch ra tiếng Anh, tiếng Tiệp và được nhiều nhà toán học trích dẫn).

Là người có nhiều đóng góp quan trọng cho việc đào tạo học sinh phổ thông có năng khiếu Toán học, Thầy đã trực tiếp dạy môn Đại số cho lớp chuyên Toán đầu tiên của Việt Nam. Trong nhiều năm sau đó, Thầy vẫn tiếp tục các công việc này một cách say sưa và đạt được nhiều kết quả rực rỡ. Trong thời gian dạy khối chuyên Toán, Thầy đã đào tạo được nhiều học sinh xuất sắc, đoạt được các giải cao trong các kì thi Toán Quốc tế. Một số học sinh cũ của Thầy sau này đã trở thành những nhà khoa học giỏi, những nhà quản lí tốt, trong đó có Trần Văn Nhung, Đào Trọng Thi, Hoàng Lê Minh, Nguyễn Đông Anh, Hoàng Ngọc Hà, Phan Vũ Diễm Hằng, Nguyễn Thị Thiệu Hoa, Lê Hồng Vân...

Thầy đã từng làm Phó Tổng biên tập *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* (năm 1983) và làm Tổng Chủ biên bộ sách giáo khoa Toán THCS hiện hành.

Trong quá trình giảng dạy, Thầy trang bị cho chúng tôi không chỉ kiến thức mà còn cả phương pháp tư duy toán học chuẩn mực, khắc sâu và vận dụng sáng tạo các kiến thức cơ bản ở mỗi bài toán cụ thể. Tất cả như một chất men say được truyền từ Thầy qua chúng tôi trong từng bài giảng.

Nhiều năm nay, cứ vào dịp cuối năm Dương lịch, chúng tôi lại được gặp mặt Thầy Chính và các thầy cùng thế hệ. Những dịp thuận lợi, chúng tôi lại đến thăm Thầy tại nhà riêng. Những khi được ở bên cạnh Thầy, chúng tôi lại được Thầy truyền thêm nghị lực để bước tiếp trên con đường nghiên cứu khoa học và sự nghiệp đào tạo. Ngoài 77 tuổi nhưng với dáng vẻ hơi gầy, quắc thước, đôi mắt sáng, luôn vui nhộn, tự tin, nói chuyện thân mật, cởi mở, Thầy mãi là chỗ dựa tinh thần của chúng tôi.

Chúng tôi xin phép không liệt kê tất cả những gì Thầy Phan Đức Chính đã để lại cho chúng tôi và cho thế hệ trẻ trong suốt cuộc đời thanh bạch của mình. Chúng em xin được bày tỏ với Thầy tình cảm chân thành và lòng biết ơn sâu sắc. Chúc Thầy luôn mạnh khỏe, hạnh phúc.

ĐẶNG ĐÌNH CHÂU

Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Cơ-Tin học,
ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội



TRUNG HỌC CƠ SỞ

PHÁT HIỆN KẾT QUẢ MỚI DỰA VÀO VIỆC KẾT NỐI, MỞ RỘNG CÁC BÀI TOÁN

PHẠM TUẤN KHẢI

(Hà Nội)

Trong quá trình học tập, chúng ta thường gặp và giải rất nhiều bài toán. Các bài toán đôi khi “na ná” nhau. Tuy nhiên, có những bạn để ý thấy điều này và có những bạn thì lại không nhận ra. Điều này tạo nên “sự khác biệt”. Chúng ta cùng theo dõi bài toán sau.

❖ Bài toán 1. Cho tam giác ABC có hai đường phân giác trong là BB_1 , CC_1 và M là trung điểm của đoạn thẳng B_1C_1 . Chứng minh rằng khoảng cách từ M đến BC bằng tổng khoảng cách từ M đến AB và AC .

Lời giải. (h.1)

Ta kẻ lần lượt:

MI , B_1B_2 , C_1C_2

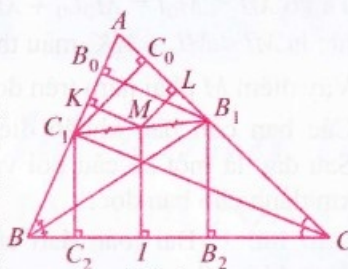
vuông góc với

BC ; MK , B_1B_0

vuông góc với

AB ; ML , C_1C_0

vuông góc với AC .



Hình 1

Theo tính chất đường phân giác của một góc ta có $B_1B_2 = B_1B_0$ và $C_1C_2 = C_1C_0$.

Ta nhận thấy MI , MK , ML lần lượt là đường trung bình của hình thang $B_1B_2C_2C_1$ và của các tam giác $C_1B_1B_0$, $B_1C_1C_0$. Suy ra

$$\begin{aligned} MK + ML &= \frac{B_1B_0 + C_1C_0}{2} \\ &= \frac{B_1B_2 + C_1C_2}{2} = MI. \quad \square \end{aligned}$$

Nếu chỉ dừng lại ở bài toán này thì chắc chắn đa số chúng ta đều không “lăn tăn” gì, nhưng một số bạn tiếp tục gặp bài toán sau.

❖ Bài toán 2. Cho tam giác ABC có hai đường phân giác trong là BB_1 , CC_1 và M là điểm nằm trên đoạn thẳng B_1C_1 thỏa mãn đẳng thức $MB_1 = 3MC_1$. Chứng minh rằng khoảng

cách từ M đến BC bằng tổng khoảng cách từ M đến AB và AC .

Lời giải

Kẻ các đường vuông góc như ở Hình 1.

Không giảm tổng

quát, giả sử

$C_1C_2 \leq B_1B_2$, kẻ

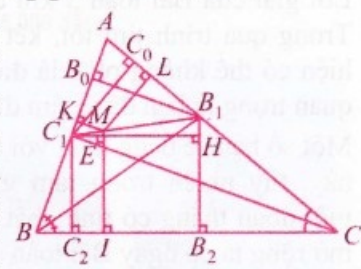
C_1H vuông góc

với B_1B_2 , C_1H

cắt MI tại E , E

thuộc đoạn thẳng

MI (h.2).



Hình 2

Tam giác C_1B_1H có $ME \parallel B_1H$ và $MB_1 = 3MC_1$

$$\text{nên } \frac{ME}{B_1H} = \frac{MC_1}{C_1B_1} = \frac{1}{4}, \text{ suy ra } ME = \frac{B_1H}{4}.$$

Tương tự với các tam giác $C_1B_1B_0$ và $B_1C_1C_0$,

$$\text{ta có } \frac{MK}{B_1B_0} = \frac{MC_1}{C_1B_1} = \frac{1}{4}; \quad \frac{ML}{C_1C_0} = \frac{MB_1}{C_1B_1} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{MK}{B_1B_2} = \frac{MK}{B_1B_0} = \frac{1}{4} \Rightarrow B_1B_2 = 4MK;$$

$$\frac{ML}{C_1C_2} = \frac{ML}{C_1C_0} = \frac{3}{4} \Rightarrow C_1C_2 = \frac{4}{3}ML.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } ME &= \frac{B_1H}{4} = \frac{B_1B_2 - C_1C_2}{4} \\ &= \frac{4MK - \frac{4}{3}ML}{4} = MK - \frac{1}{3}ML. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } MI = ME + EI = ME + C_1C_2$$

$$= MK - \frac{1}{3}ML + \frac{4}{3}ML = MK + ML. \quad \square$$

Đến đây, bạn nào sẽ “dừng lại” và bạn nào sẽ “đi tiếp”? Nếu dừng lại thì thật đáng tiếc bởi vì bạn sẽ không nhận được gì nhiều.

Chúng ta thấy hai bài toán chỉ khác nhau duy nhất ở vị trí của điểm M trên đoạn thẳng B_1C_1 . Dùng các đường kẻ phụ trong Bài toán 1 cũng nhanh chóng giúp chúng ta tìm được lời giải cho Bài toán 2. Đặc biệt, tiếp tục mở rộng suy nghĩ chúng ta phát biểu và chứng minh được ngay một kết quả tổng quát.

✪ Bài toán 3. Cho tam giác ABC có hai đường phân giác trong là BB_1 , CC_1 và M là một điểm bất kì nằm trên đoạn thẳng B_1C_1 . Chứng minh rằng khoảng cách từ M đến BC bằng tổng khoảng cách từ M đến AB và AC .

Lời giải của Bài toán 3 xin dành cho các bạn. Trong quá trình tìm tòi, kết quả mà bạn phát hiện có thể không phải là điều mới mẻ nhưng quan trọng là bạn đã tự tìm được nó.

Một số bạn sẽ bằng lòng với thành quả ban đầu này, tuy nhiên trong tam giác không chỉ có một đoạn thẳng có tính chất như trên, tiếp tục mở rộng ta có ngay Bài toán 4.

✪ Bài toán 4. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác trong là AA_1 , BB_1 , CC_1 và M là một điểm bất kì nằm trên các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng khoảng cách từ M đến một cạnh của tam giác ABC bằng tổng khoảng cách từ M đến hai cạnh còn lại.

Bây giờ, một câu hỏi tiếp theo là “bài toán đảo của Bài toán 3 có đúng không?”. Chúng ta cùng xem xét nhé.

✪ Bài toán 5. Cho tam giác ABC , điểm M nằm trong tam giác sao cho khoảng cách từ M đến BC bằng tổng khoảng cách từ M đến AB và AC . Chứng minh rằng M nằm trên đoạn thẳng B_1C_1 , trong đó BB_1 và CC_1 là hai đường phân giác trong của tam giác ABC .

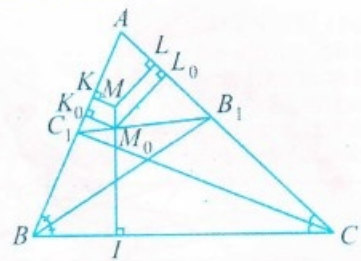
Lời giải

Giả sử điểm M không nằm trên đoạn thẳng B_1C_1 , như vậy thì M nằm trong tam giác AB_1C_1 hoặc M nằm trong tứ giác BC_1B_1C .

1) Trường hợp M nằm trong tam giác AB_1C_1 . (h.3) Ta có MI cắt B_1C_1 tại M_0 .

Lần lượt kẻ $M_0L_0 \perp AC$; $M_0K_0 \perp AB$. Khi đó $M_0L_0 > ML$; $M_0K_0 > MK$. Do $M_0 \in B_1C_1$ nên $M_0I = M_0L_0 + M_0K_0$ (Bài toán 3).

Ta có $MI > M_0I$
 $= M_0L_0 + M_0K_0$
 $> ML + MK$,
 tức là
 $MI > ML + MK$,
 mâu thuẫn với
 giả thiết.



Hình 3

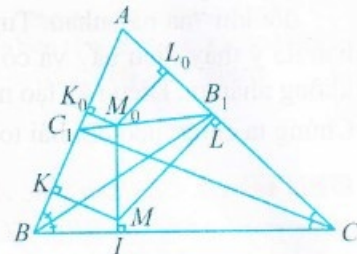
2) Trường hợp M nằm trong tứ giác BC_1B_1C . (h.4). Ta có IM kéo dài cắt B_1C_1 tại M_0 .

Lần lượt kẻ
 $M_0L_0 \perp AC$;
 $M_0K_0 \perp AB$.

Khi đó

$$M_0L_0 < ML;$$

$$M_0K_0 < MK.$$



Hình 4

Ta có $MI < M_0I = M_0L_0 + M_0K_0 < ML + MK$,
 tức là $MI < ML + MK$, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy điểm M phải nằm trên đoạn thẳng B_1C_1 .

Các bạn còn băn khoăn điều gì nữa không? Sau đây là một số câu hỏi và bài tập áp dụng xin dành cho bạn đọc.

Câu hỏi 1. Bài toán đảo của Bài toán 4 có đúng không?

Câu hỏi 2. Trên đây mới chỉ là các kết quả gắn với phân giác trong của tam giác, điều gì sẽ xảy ra khi ta xét các phân giác ngoài? Tòà soạn sẽ chờ hồi âm của các bạn.

Bài tập 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , có hai phân giác trong BB_1 , CC_1 và M là một điểm bất kì nằm trên đoạn B_1C_1 . Từ M lần lượt hạ các đường vuông góc MH , MI , ML tới BC , AB , AC . Chứng minh rằng $MH \geq 2\sqrt{MI \cdot ML}$.

Bài tập 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có hai phân giác trong BD , CE . Trên DE lấy điểm I . Biết diện tích hai tam giác AIB , AIC lần lượt là S_1 , S_2 . Tính diện tích tam giác ABC theo S_1 , S_2 .

Các bạn đã nhận ra “sự khác biệt” được nhắc đến ở đầu bài viết chưa? Chúc các bạn luôn yêu thích và học giỏi môn Toán.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH

NĂM HỌC 2013 - 2014

(Đề thi đăng trên TH&TT số 436, tháng 10 năm 2013)

Câu 1. a) Điều kiện: $y \neq 0$. HPT đã cho trở thành

$$\begin{cases} \left(x - \frac{2}{y}\right)^2 + \frac{4x}{y} = 4 \\ \left(x - \frac{2}{y}\right) - \frac{4x}{y} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{2}{y}\right)^2 + \left(x - \frac{2}{y}\right) - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{2}{y} = 1 \\ x - \frac{2}{y} = -2. \end{cases}$$

HPT đã cho có ba nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(\frac{2+2\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right), \left(\frac{2-2\sqrt{7}}{3}; \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right), (0; 1).$$

b) Điều kiện: $x \geq 0$.

Đặt $3\sqrt{x} = a$, $\sqrt{x+8} = b$ ($a \geq 0$, $b \geq 2\sqrt{2}$).

PT đã cho trở thành

$$\begin{aligned} (a-b)(4+ab) &= 2(a^2-b^2) \\ \Leftrightarrow (a-b)(a-2)(b-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=2 \end{cases} & \text{(vì } b \geq 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

PT đã cho có hai nghiệm là $x=1$; $x=\frac{4}{9}$.

Câu 2. a) **Bổ đề**

Nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Thật vậy, ta có $a+b=-c \Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3$

$$\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+3ab(-c)=-c^3 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc.$$

Trở lại bài toán.

Đặt $x-1=a$; $y-2=b$; $z-3=c$. Ta có

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^3+b^3+c^3=0 \end{cases} \text{ và } F=a^{2013}+b^{2013}+c^{2013}.$$

Áp dụng bổ đề ta có $abc=0$.

Suy ra $a=b+c=0$ hoặc $b=a+c=0$

hoặc $c=a+b=0$. Từ đó ta tính được $F=0$.

b) Ta có $x^2-4xy+6y^2+2x \geq 6$

$$\Leftrightarrow (x-2y)^2+2(y^2+x) \geq 6.$$

Ta sẽ chứng minh $y^2+x \geq 3$.

$$\text{Từ giả thiết suy ra } 2 = \frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{4}{xy}$$

$$\Rightarrow xy \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{y} \text{ (do } y > 0)$$

$$\Rightarrow y^2+x \geq y^2+\frac{2}{y} = y^2+\frac{1}{y}+\frac{1}{y} \geq 3 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2$ và $y=1$.

Câu 3. Ta có $\frac{a-b\sqrt{5}}{b-c\sqrt{5}} = \frac{m}{n}$,

trong đó $m, n \in \mathbb{Z}$; $m, n \neq 0$; $(m, n) = 1$.

$$\text{Suy ra } na - mb = (nb - mc)\sqrt{5}.$$

Vì $\sqrt{5}$ là số vô tỉ, nên $nb - mc = 0$

$$\text{và } na - mb = 0 \Rightarrow mnac = mnb^2.$$

$$\text{Vì } mn \neq 0 \text{ nên } ac = b^2. \text{ Suy ra } a^2+b^2+c^2 = (a+c)^2 - b^2 = (a+b+c)(a-b+c).$$

Theo giả thiết thì $a^2+b^2+c^2$ là số nguyên tố.

Suy ra $a-b+c=1$; $a+b+c$ là số nguyên tố.

$$\text{Mà } 1 = a-b+c \geq 2\sqrt{ac} - b = b \geq 1 \Rightarrow b=1.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} a+c=2 \\ ac=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=c=1.$$

Vậy $a=b=c=1$.

Câu 4. a) Theo tính chất của các tiếp tuyến ta có

$$\widehat{QAE} = \frac{1}{2}\widehat{CAB} = 60^\circ. \text{ Mặt khác, } \widehat{QBE} = \widehat{CBD}$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{CMB} = 60^\circ. \text{ Do đó } \widehat{QAE} = \widehat{QBE},$$

suy ra $ABEQ$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó

$$\widehat{AQE} = \widehat{ABE} = 90^\circ \Rightarrow EQ \perp AF. \text{ Hoàn toàn}$$

tương tự, ta chứng minh được $ACFP$ là tứ giác nội tiếp và $FP \perp AE$.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH THÁI BÌNH

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1. (3 điểm) Cho $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2(\sqrt{3}+1)}}$.

Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{4(x+1)x^{2013} - 2x^{2012} + 2x + 1}{2x^2 + 3x}.$$

Bài 2. (3 điểm) Giải phương trình

$$2x^2 + 2x + 1 = (2x + 3)(\sqrt{x^2 + x + 2} - 1).$$

Bài 3. (3 điểm) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn

$$2y(2x^2 + 1) - 2x(2y^2 + 1) + 1 = x^3 y^3.$$

Bài 4. (3 điểm) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Biết $P(x) > 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ và $a > 0$.

Chứng minh rằng $\frac{5a - 3b + 2c}{a - b + c} > 1$.

Bài 5. (3 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$, điểm A nằm ngoài đường tròn đó. Kẻ hai tiếp tuyến

AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Trên đường thẳng d đi qua trung điểm của AB và song song với BC , lấy điểm P . Đường tròn đường kính OP cắt đường tròn (O) tại M, N . Chứng minh rằng $PM = PN = PA$.

Bài 6. (3 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại C , có $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , lấy điểm D thuộc cung nhỏ AC . Chứng minh rằng $3BD^2 = 5AD^2 + 5CD^2$ khi và chỉ khi $DC = 2DA$.

Bài 7. (2 điểm) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$ và $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2(1-2b)}{b} + \frac{b^2(1-2c)}{c} + \frac{c^2(1-2a)}{a}.$$

NGUYỄN KHÁNH TOÀN

(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

Tam giác AEF nhận AM, EQ, FP là các đường cao nên chúng đồng quy (đpcm).

b) Ta có $\triangle APQ \sim \triangle AFE$ (g.g) theo tỉ số

$$\frac{AP}{AF} = \sin \widehat{AFP} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra tỉ số}$$

đồng dạng của hai tam giác trên là $\frac{1}{2}$. Diện

tích tam giác APQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Diện tích tam giác AFE nhỏ nhất $\Leftrightarrow FE$ nhỏ nhất.

Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với AD cắt DC, DB lần lượt tại X, Y . Ta có

$$\begin{aligned} FE &= FX + EY - (CX + BY) \\ &\geq 2\sqrt{FX \cdot EY} - 2CX \end{aligned} \quad (1)$$

Ta lại có $\triangle XFA \sim \triangle YAE$ (cùng đồng dạng với

$\triangle AFE$), suy ra $FX \cdot EY = AY \cdot AX = AX^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$EF \geq 2(AX - CX) = AX = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $FX = EY \Leftrightarrow M$ là trung điểm của cung nhỏ BC .

Khi đó $S_{APQ} = \frac{1}{4} S_{AFE} = \frac{1}{8} AM \cdot EF = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}$.

Câu 5. Nhận xét. Trong một ngũ giác đều, ba đỉnh bất kì luôn là ba đỉnh của một tam giác cân. Kí hiệu các đỉnh liên tiếp của đa giác đều 15 cạnh là $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, A_4, B_4, C_4, A_5, B_5, C_5$. Ta có ba ngũ giác đều rời nhau $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5, B_1 B_2 B_3 B_4 B_5, C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$. Vì $7 = 3 \cdot 2 + 1$ nên theo nguyên lý Dirichlet, luôn tồn tại một trong ba ngũ giác đều nêu trên chứa ít nhất 3 trong 7 đỉnh đã chọn. Áp dụng nhận xét trên ta có điều phải chứng minh.

TỪ HỮU SƠN

(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)



MỘT SỐ BÀI TOÁN

LIÊN QUAN ĐẾN VIỆC TÌM DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

NGUYỄN TRƯỜNG SƠN

(GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường là chuyên đề không thể thiếu của các sĩ tử trên con đường ôn luyện thi vào Đại học và Cao đẳng, bài viết này hi vọng giúp các em một phần trên con đường đó.

I. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành

★ **Thí dụ 1.** Cho hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3} \text{ có đồ thị (C).}$$

Tìm $m \in \left(0; \frac{5}{6}\right)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), và các đường thẳng $x=0$, $x=2$, $y=0$ có diện tích bằng 4.

Phân tích. Để làm được dạng toán này, các bạn cần nắm được công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ ($a < b$)

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Chú ý. Nếu hàm số $f(x)$ không đổi dấu trên

$$[a; b] \text{ thì } \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Lời giải. Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3}$ trên $[0; 2]$. Ta có $y' = x^2 + 2mx - 2$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - \sqrt{m^2 + 2} \\ x = -m + \sqrt{m^2 + 2} \end{cases}$$

$$\text{Do } m \in \left(0; \frac{5}{6}\right) \text{ nên } -m - \sqrt{m^2 + 2} < 0,$$

$$0 < -m + \sqrt{m^2 + 2} < 2$$

$$\text{và } y(0) = -2m - \frac{1}{3} < 0, \quad y(2) = 2m - \frac{5}{3} < 0.$$

Ta có bảng biến thiên trong $[0; 2]$

x	0	$-m + \sqrt{m^2 + 2}$	2
y'	-	0	+
y	$y(0)$		$y(2)$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $y < 0, \forall x \in (0; 2)$.

Gọi S là diện tích hình phẳng cần tìm. Ta có

$$S = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 \left| \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3} \right| dx = 4$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3} \right) dx = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m+10}{3} = 4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}. \square$$

★ **Thí dụ 2.** Tìm m để đồ thị hàm số (C) $y = x^4 - 2mx^2 + m + 2$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt và diện tích hình phẳng nằm trên trục hoành giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng diện tích hình phẳng phía dưới trục hoành giới hạn bởi (C) và trục hoành.

Lời giải. Xét hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 2$, với $x \in \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m. \end{cases}$$

• Nếu $m \leq 0$, PT $y = 0$ nếu có nghiệm sẽ có tối đa hai nghiệm. Do đó $m \leq 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Nếu $m > 0$ ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$m+2$		$+\infty$			
		$-m^2+m+2$		$-m^2+m+2$				

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy PT $y = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $y(\sqrt{m}) \cdot y(0) < 0 \Leftrightarrow (m+2)(-m^2+m+2) < 0 \Leftrightarrow m > 2$ (do $m > 0$).

Do y là hàm chẵn nên PT $y = 0$ có bốn nghiệm lần lượt là $-b; -a; a; b$ ($0 < a < b$).

Theo yêu cầu bài toán ta có

$$\int_0^a |x^4 - 2mx^2 + m + 2| dx = \int_a^b |x^4 - 2mx^2 + m + 2| dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^b (x^4 - 2mx^2 + m + 2) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^5}{5} - \frac{2mb^3}{3} + (m+2)b = 0$$

$$\Leftrightarrow b^4 = \frac{10mb^2}{3} - 5(m+2) \text{ (vì } b \neq 0 \text{)}.$$

Do b là nghiệm của PT $y = 0$, nên

$$b^4 - 2mb^2 + m + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{10mb^2}{3} - 5(m+2) - 2mb^2 + m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{3(m+2)}{m}. \text{ Từ PT (1) ta có}$$

$$\frac{9(m+2)^2}{m^2} - 6(m+2) + m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

II. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số (C) và (C')

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (C'). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị (C), (C') và hai đường thẳng

$$x = a, x = b \text{ (} a < b \text{)} \text{ là } S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

★ **Thí dụ 3.** Tìm các giá trị của tham số m , sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (C) và đường thẳng d đi qua điểm $A(-1; 0)$ với hệ số góc m giới hạn hai hình phẳng có cùng diện tích.

Lời giải

PT của đường thẳng d là $y = m(x+1)$.

Hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là nghiệm của PT

$$x^3 - 3x^2 + 4 = m(x+1) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - 4x + 4 - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Theo yêu cầu bài toán PT (2) có hai nghiệm phân biệt khác -1 .

Suy ra $\begin{cases} \Delta' = m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases}$. Lúc này PT (1) có các

nghiệm $x = -1$ và $x = 2 \pm \sqrt{m}$.

Gọi S và S' lần lượt là diện tích các hình phẳng nhận được theo thứ tự từ trái sang phải. Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(1; 2)$ làm tâm đối xứng.

Trường hợp 1. Đường thẳng d đi qua tâm đối xứng I . Suy ra $m = 1$. Khi đó

$$S = \int_{-1}^1 |x^3 - 3x^2 + 4 - (x+1)| dx = 4.$$

$$S' = \int_1^3 |x^3 - 3x^2 - x + 3| dx = 4, \text{ nên } S = S'.$$

Trường hợp 2. Đường thẳng d không đi qua tâm đối xứng I .

• Nếu $0 < m < 1$ thì $-1 < 1 < 2 - \sqrt{m} < 2 + \sqrt{m}$. Khi đó $S' < 4 < S$.

• Nếu $1 < m < 9$ thì $-1 < 2 - \sqrt{m} < 1 < 2 + \sqrt{m}$.
Khi đó $S < 4 < S'$.

• Nếu $m > 9$ thì $2 - \sqrt{m} < -1 < 2 + \sqrt{m}$.

Khi đó $S = \int_{2-\sqrt{m}}^{-1} (x^3 - 3x^2 + 4 - m(x+1)) dx$,

$$S' = - \int_{-1}^{2+\sqrt{m}} (x^3 - 3x^2 + 4 - m(x+1)) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } S - S' &= \int_{2-\sqrt{m}}^{2+\sqrt{m}} (x^3 - 3x^2 + 4 - m(x+1)) dx \\ &= -4m\sqrt{m} < 0 \end{aligned}$$

Qua các trường hợp trên ta thấy $m = 1$. $\square$

★ **Thí dụ 4.** Tìm các giá trị của tham số m dương để diện tích giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số $y = \frac{1}{m^4 + 1} (x^2 + 2mx + 3m^2)$ và

$$y = \frac{1}{m^4 + 1} (m^2 - mx) \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Lời giải. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của PT

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^4 + 1} (x^2 + 2mx + 3m^2) &= \frac{1}{m^4 + 1} (m^2 - mx) \\ \Leftrightarrow x^2 + 3mx + 2m^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m \\ x = -2m \end{cases} \end{aligned}$$

Gọi $S(m)$ là diện tích hình phẳng cần tìm. Ta có

$$\begin{aligned} S(m) &= \frac{1}{m^4 + 1} \int_{-2m}^{-m} (x^2 + 3mx + 2m^2) dx \\ &= \frac{m^3}{6(1 + m^4)} \text{ (do } m > 0); \end{aligned}$$

$$S'(m) = \frac{m^2(3 - m^4)}{6(1 + m^4)^2}; S'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[4]{3}.$$

Ta có bảng biến thiên

m	0	$\sqrt[4]{3}$	$+\infty$
$S'(m)$	+	0	-
$S(m)$	0	$\frac{\sqrt[4]{27}}{24}$	0

Vậy $S(m)$ đạt giá trị lớn nhất tại $m = \sqrt[4]{3}$. $\square$

★ **Thí dụ 5.** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số

$$(C_1): y = \frac{2}{3}x^3 - 3mx^2 - 2m^3$$

và $(C_2): y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 5m^2x$

với m là tham số dương.

a) Tìm m biết rằng $S = \frac{1}{12}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S , biết rằng $m \in [1; 3]$.

Lời giải. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của PT

$$\frac{2}{3}x^3 - 3mx^2 - 2m^3 = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 5m^2x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4mx^2 + 5m^2x - 2m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 2m \end{cases}$$

Ta có

$$S = - \int_m^{2m} (x^3 - 4mx^2 + 5m^2x - 2m^3) dx = \frac{m^4}{12}.$$

a) Theo yêu cầu bài toán có

$$\frac{m^4}{12} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow m = 1 \text{ (do } m > 0).$$

b) Ta có $1 \leq m \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{12} \leq \frac{m^4}{12} \leq \frac{27}{12}$. Vậy

$$S_{\max} = \frac{27}{4} \text{ khi } m = 3, S_{\min} = \frac{1}{12} \text{ khi } m = 1. \square$$

BÀI TẬP

1. Cho parabol $(P): y = 3x^2$ và đường thẳng d đi qua $M(1; 5)$ có hệ số góc m . Tìm m để hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích nhỏ nhất.

2. Tìm m để đồ thị hàm số

$$(C_m): y = x^2(m - 1 - x^2) + 2$$

có ba điểm cực trị. Khi đó gọi d là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm cực tiểu. Tìm m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và d bằng $\frac{4}{15}$.

(Xem tiếp trang 27)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 điểm). Cho hàm số

$$y = \frac{x}{1-x} \quad (1)$$

- 1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.
- 2) Gọi I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số (1). Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số sao cho tứ giác $OABI$ là hình thang có đáy $AB = 3OI$.

Câu 2 (1 điểm). Giải phương trình

$$(\sin x + 1)(\tan x + \sqrt{3}) + 2\cos x = 0.$$

Câu 3 (1 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{2x} + \frac{x}{y} = \frac{3x + 3\sqrt{y}}{4x^2 + 2y} \\ 4x + y = \sqrt{2x + 6} - 2\sqrt{y}. \end{cases}$$

Câu 4 (1 điểm). Tính tích phân

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 + \ln(x^2 \cdot e^x)}{(x+2)^2} dx.$$

Câu 5 (1 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $AB = 2a$, $BD = \sqrt{3}AC$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SD , góc giữa mặt phẳng (AMC) và $(ABCD)$ bằng 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa SB và CM .

Câu 6 (1 điểm). Cho x, y là các số thực thoả mãn

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 + 3x^2y^2 + 1 = 4x^2 + 5y^2.$$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2); B(3; 4)$ và đường thẳng $d: y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $\widehat{MAN} = 60^\circ$.

Câu 8a (1 điểm). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 0)$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Gọi B là giao điểm của d và (P) . Tìm toạ độ điểm C thuộc (P) sao cho tam giác ABC vuông tại B và $AC = \sqrt{230}$.

Câu 9a (1 điểm). Trong tập số phức, tìm hai số phức z_1 và z_2 thoả mãn

$$\begin{cases} 4z_1 - 3i^{2013} = iz_1 + 5 \\ \frac{z_2}{z_1} - z_1^{2013} = 4. \end{cases}$$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C . Đỉnh $A(3; -7)$, trung điểm của BC là điểm $M(-2; 3)$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF có phương trình $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$. Tìm toạ độ B và C .

Câu 8b (1 điểm). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho tam giác ABC với đỉnh $A(4; 0; 0)$, B thuộc mặt phẳng Oxy , C thuộc tia Oz . Gọi G là trọng tâm tam giác OAB . Tìm điểm M thuộc AC sao cho $OM \perp GM$, biết rằng $OB = 8$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$, thể tích khối chóp $OABC$ bằng 8 và B có hoành độ và tung độ dương.

Câu 9b (1 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3^x - 3^{2-y} + \log_2 \frac{x}{2-y} = 0 \\ y^2 + 11y - xy + 2x + 1 = 0. \end{cases}$$

HOÀNG GIA HÙNG

(GV THPT Bắc Duyên Hà, Hưng Hà, Thái Bình)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

2) PT hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) có dạng $-x^3 + 3x^2 - 2 = m(x - 2) + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - x - 2 - m = 0 (*) \end{cases}$$

Đường thẳng (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt $A(2; 2)$, B , C khi và chỉ khi PT $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_B, x_C khác 2 $\Leftrightarrow m > -\frac{9}{4}$ và $m \neq 0$. Tích các hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại B và C là

$$\begin{aligned} y'(x_B)y'(x_C) &= (-3x_B^2 + 6x_B)(-3x_C^2 + 6x_C) \\ &= 9((m+1)^2 - 1) \end{aligned}$$

(Áp dụng định lý Viète cho PT $(*)$).

Đáp số. $m = -1$.

Câu 2. PT đã cho tương đương với

$$-2\sin 2x \sin x + \sin 2x + (1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\sin x)(\sin 2x + 1) = 0.$$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi;$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 3. ĐK $-\frac{1}{2} \leq y \leq 0$.

PT thứ nhất của hệ tương đương với

$$((2y+1)-3)\sqrt{2y+1} = (-2x)^3 - 3(-2x).$$

Đặt $u = -2x, v = \sqrt{2y+1},$

PT trên trở thành $u^3 - 3u = v^3 - 3v (*)$

Vì $-\frac{1}{2} \leq y \leq 0$ nên $0 \leq v \leq 1$. Từ PT thứ hai

của hệ ta thấy $0 \leq u \leq 1$.

Nhận thấy hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ nghịch biến trên $[0; 1]$ ta suy ra PT $(*) \Leftrightarrow f(u) = f(v)$

$\Leftrightarrow u = v$. Hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(0; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; 0\right).$$

Câu 4. Ta có

$$I = \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(3 \sin x + \cos x)}{\sin^2 x} dx = \frac{1}{\ln 2} I_1.$$

Đặt $u = \ln(3 \sin x + \cos x), dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$

$$\Rightarrow I_1 = -3\ln 3 + 10\ln 2 + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos x - \sin x}{\sin x} dx.$$

Do đó $I = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{23}{2} \ln 2 - 3\ln 3 - \frac{\pi}{4} \right).$

Câu 5. • $V_{SBCM} = \frac{a^3}{3}$ (đvtt).

$$\bullet d(M, (SBC)) = \frac{3V_{S.BCM}}{S_{SBC}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 6. Từ giả thiết có

$$P = (xy + yz + 2xz)^2 - \frac{8}{xy + yz + 2xz + 3}$$

Đặt $t = xy + yz + 2xz.$

Vì $0 \leq (x+y+z)^2 = 1 + 2(xy+yz+zx)$

nên $xy + yz + 2xz \geq -\frac{1}{2} + xz$

$$\geq -\frac{1}{2} - \frac{x^2 + z^2}{2} = -1 + \frac{y^2}{2} \geq -1.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y = 0$ và $x = -z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Vậy suy ra $t \geq -1$.

Do đó GTNN của P bằng GTNN của hàm

$f(t) = t^2 - \frac{8}{t+3},$ với $t \geq -1$. Ta có

$$f'(t) = 2t + \frac{8}{(t+3)^2} = \frac{2(t+1)^2(t+4)}{(t+3)^2} \geq 0,$$

với mọi $t \geq -1$. Từ đó

$$\min_{t \geq -1} P = \min_{t \geq -1} f(t) = f(-1) = 3,$$

đạt được khi $y = 0$ và $x = -z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$

(Xem tiếp trang 14)



CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

HUỲNH TẤN CHÂU

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Ý tưởng chính của phương pháp là sử dụng công thức phương trình (PT) tiếp tuyến của một đồ thị hàm số để tìm một biểu thức trung gian trong các đánh giá bất đẳng thức (BĐT).

Đối với một số hàm số, tiếp tuyến tại một điểm nào đó của đồ thị hàm số luôn nằm trên hay nằm dưới đồ thị hàm số. Dựa vào tính chất này, ta thiết lập được một phương pháp thú vị để chứng minh BĐT, đó là phương pháp tiếp tuyến.

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên K . Khi đó tiếp tuyến tại một điểm $x_0 \in K$ có PT $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ luôn nằm trên (hoặc luôn nằm dưới) đồ thị hàm số $f(x)$, nên $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (hoặc $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$) với mọi $x \in K$. Từ tính chất này, ta thấy với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ thì $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq f'(x_0)(x_1 + x_2 + \dots + x_n - nx_0) + nf(x_0)$. Như vậy, nếu một BĐT có dạng "tổng hàm" như ở vế trái của BĐT trên, và có giả thiết $x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_0$ với đẳng thức xảy ra khi tất cả các biến x_i đều bằng nhau và bằng x_0 , thì có thể hi vọng chứng minh nó bằng phương pháp tiếp tuyến.

★Thí dụ 1. Cho bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{5+3a^2} + \frac{b}{5+3b^2} + \frac{c}{5+3c^2} + \frac{d}{5+3d^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $a, b, c, d \in [0; 4]$ PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$f(x) = \frac{x}{5+3x^2} \text{ tại } x=1 \text{ là } y = \frac{1}{32}(x+3).$$

Ta sẽ chứng minh

$$f(x) = \frac{x}{5+3x^2} \leq \frac{1}{32}(x+3), \forall x \in [0; 4].$$

bằng cách biến đổi tương đương BĐT này về dạng $(x-1)^2(x+5) \geq 0$ (luôn đúng). Từ đó

$$\begin{aligned} & \frac{a}{5+3a^2} + \frac{b}{5+3b^2} + \frac{c}{5+3c^2} + \frac{d}{5+3d^2} \\ & \leq \frac{1}{32}(a+b+c+d+12) = \frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

★Thí dụ 2. (Olympic Pháp, năm 2007)

Cho a, b, c, d là các số thực dương sao cho $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}.$$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $a, b, c, d \in (0; 1)$.

Đặt $f(x) = 6x^3 - x^2$, với $x \in (0; 1)$.

Khi đó BĐT cần chứng minh trở thành

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{1}{8}.$$

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. PT tiếp tuyến của đồ thị

hàm số $f(x)$ tại điểm $x = \frac{1}{4}$ là $y = \frac{5x-1}{8}$.

Về đồ thị hàm số thấy tiếp tuyến tại M ở dưới đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên ta sẽ chứng minh

$$f(x) \geq \frac{5x-1}{8} \Leftrightarrow 48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0.$$

BĐT này đúng vì $48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (4x-1)^2(3x+1) \geq 0, \forall x \in (0; 1).$$

Do đó $f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$

$$\geq \frac{5a+5b+5c+5d-4}{8} = \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. $\square$

★Thí dụ 3. (Olympic Trung Quốc, năm 2006)

Cho a, b, c là các số thực dương và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2} \leq 5.$$

Lời giải. Biến đổi BĐT cần chứng minh thành

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{b^2+9}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{c^2+9}{2c^2+(3-c)^2} \leq 5.$$

PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$f(x) = \frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2} \text{ tại } x=1 \text{ là } y = \frac{x+4}{3}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2} \leq \frac{x+4}{3}, \forall x \in (0;3) \quad (1)$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2} = \frac{1}{3} + \frac{2x+6}{3(x-1)^2+6}$$

$$\leq \frac{1}{3} + \frac{2x+6}{6} = \frac{x+4}{3}, \forall x \in (0;3).$$

Vậy BĐT (1) đúng. Sử dụng kết quả (1), ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a^2+9}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{b^2+9}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{c^2+9}{2c^2+(3-c)^2} \\ & \leq \frac{a+4}{3} + \frac{b+4}{3} + \frac{c+4}{3} = 5. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. $\square$

★Thí dụ 4. (Olympic Hoa Kỳ, năm 2003)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

Lời giải. Về trái của BĐT là các biểu thức cùng bậc. Không mất tổng quát, giả sử rằng $a + b + c = 1$. Khi đó BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} + \frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2} + \frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \leq 8.$$

Từ giả thiết suy ra $a, b, c \in (0;1)$.

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2} = \frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1},$$

với $x \in (0;1)$. Khi đó BĐT cần chứng minh trở thành $f(a) + f(b) + f(c) \leq 8$.

Ta dự đoán BĐT đã cho trở thành đẳng thức khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. PT tiếp tuyến của đồ thị

$$\text{hàm số } f(x) \text{ tại } x = \frac{1}{3} \text{ là } y = \frac{12x+4}{3}.$$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở dưới tiếp tuyến nên ta sẽ chứng minh

$$\frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1} \leq \frac{12x+4}{3}, \forall x \in (0;1).$$

$$\Leftrightarrow 36x^3 - 15x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^2(4x+1) \geq 0, \forall x \in (0;1).$$

BĐT này luôn đúng.

$$\text{Vậy } f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{12(a+b+c)+12}{3} = 8. \quad \square$$

★Thí dụ 5. (Olympic Nhật Bản, năm 1997)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Lời giải. Biến đổi BĐT cần chứng minh thành

$$\begin{aligned} & \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} - 1 + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} - 1 \\ & + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} - 1 \geq -\frac{12}{5} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{(b+c)a}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a)b}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b)c}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}.$$

Các phân thức ở vế trái có tử số và mẫu số đồng bậc, không mất tổng quát, giả sử $a + b + c = 3$. BĐT viết lại dưới dạng

$$\frac{(3-a)a}{a^2+(3-a)^2} + \frac{(3-b)b}{b^2+(3-b)^2} + \frac{(3-c)c}{c^2+(3-c)^2} \leq \frac{6}{5} \quad (1)$$

$$\text{Do } \frac{2(3-a)a}{a^2+(3-a)^2} = \frac{9}{2a^2-6a+9} - 1,$$

nên BĐT (1) trở thành

$$\frac{1}{2a^2-6a+9} + \frac{1}{2a^2-6a+9} + \frac{1}{2a^2-6a+9} \leq \frac{3}{5} \quad (2)$$

PT tiếp tuyến tại điểm $x = 1$ của đồ thị hàm số

$$f(x) = \frac{1}{2x^2-6x+9} \text{ là } y = \frac{2x+3}{25}.$$

Ta đi chứng minh

$$\frac{1}{2x^2-6x+9} \leq \frac{2x+3}{25}, \forall x \in (0; 3) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^3+x^3+1-3x^2) \geq 0, \forall x \in (0; 3).$$

Theo BĐT Cauchy thì bất đẳng thức trên đúng.

Áp dụng BĐT (3) ta được

$$\begin{aligned} & f(a) + f(b) + f(c) \\ & \leq \frac{(2a+3) + (2b+3) + (2c+3)}{25} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. $\square$

★Thí dụ 6. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right).$$

Lời giải. Vai trò a, b, c như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$. Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên

$a, b, c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. BĐT cần chứng minh trở thành

$$\left(\frac{4}{1-a} - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{4}{1-b} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{4}{1-c} - \frac{1}{c}\right) \leq 9$$

$$\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq 9,$$

$$\text{với } f(x) = \frac{4}{1-x} - \frac{1}{x} = \frac{5x-1}{x-x^2}, x \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Dự đoán được BĐT cần chứng minh trở thành đẳng thức khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. PT tiếp tuyến

của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm $M\left(\frac{1}{3}; 3\right)$

là $y = 18x - 3$. Ta sẽ chứng minh

$$f(x) = \frac{5x-1}{x-x^2} \leq 18x-3, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^2(2x-1) \leq 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

luôn đúng. Do đó

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq 18(a+b+c) - 9 = 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. $\square$

BÀI TẬP

1. (Olympic Bulgarian, năm 2004). Cho $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{9}{10} \leq \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} < 1.$$

2. (Olympic Russia, năm 2002). Cho $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

3. Cho $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{3}{8}$.

4. (Olympic Albania, năm 2002). Cho $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ & \geq a+b+c + \sqrt{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned}$$

5. Cho a, b, c là các số lớn hơn $-\frac{3}{4}$ và $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$.

6. Cho a, b, c, d là các số dương và $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a+2}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+2}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+2}\right)^3 + \left(\frac{d}{d+2}\right)^3 \geq \frac{4}{27}.$$

7. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a+b+c > 0$. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2} \leq \frac{1}{3};$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} \leq \frac{a^2}{2a^2(b+c)^2} + \frac{b^2}{2b^2(c+a)^2} + \frac{c^2}{2a^2(a+b)^2} \leq \frac{2}{3}.$$



LỜI GIẢI CÂU b BÀI TOÁN 6

TRONG KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

NĂM HỌC 2012 - 2013

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm học 2012 – 2013, ngày thứ hai có một bài toán hình học với nội dung như sau:

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và D là một điểm thuộc cung $\widehat{BC}$ không chứa A của (O) . Đường thẳng bất kì Δ đi qua trực tâm H của tam giác ABC và theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABH và tam giác ACH tại M và N ($M \neq H, N \neq H$).

a) Hãy xác định vị trí của Δ sao cho tam giác AMN có diện tích lớn nhất.

b) Kí hiệu d_1 là đường thẳng đi qua M và vuông góc với DB , d_2 là đường thẳng đi qua M và vuông góc với DC . Chứng minh rằng giao điểm của d_1 và d_2 luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Thế theo nguyện vọng của một số thầy cô giáo và các em học sinh chuyên toán, trong bài báo này chúng tôi xin trình bày lời giải câu b của bài toán trên.

Lời giải. Trước hết ta cần có bốn bổ đề.

Bổ đề 1. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B thuộc (O) . Khi đó

$$(O) = \left\{ M : (MA, MB) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{\pi} \right\}.$$

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC , nội tiếp đường tròn (O) . Khi đó

$$(O) = \left\{ M : (MA, MB) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi} \right\}.$$

Bổ đề 3. Nếu H là trực tâm của tam giác không vuông ABC thì

1) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC , HBC là ảnh đối xứng của nhau qua đường thẳng BC .

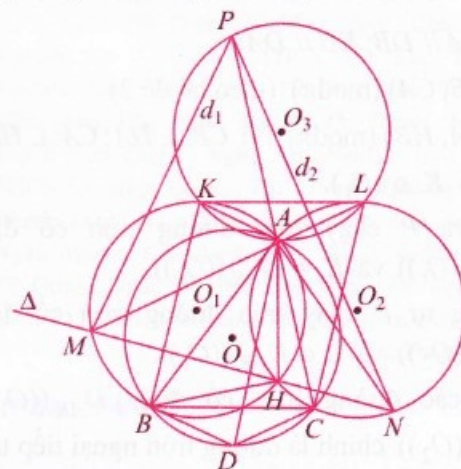
2) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABH , ACH là ảnh đối xứng của nhau qua đường thẳng AH .

Bổ đề 4. Cho hai đường tròn (O_1) , (O_2) cắt nhau tại A, B . Hai điểm M, N theo thứ tự thuộc (O_1) , (O_2) sao cho B thuộc MN . Khi đó các tam giác AMN , AO_1O_2 đồng dạng cùng hướng. Với sự hiểu biết về khái niệm hướng như chúng ta đang hiểu, chỉ có thể công nhận chứ không thể chứng minh được các bổ đề 1, 2, 4.

Bổ đề 3 khá quen thuộc, xin không trình bày cách chứng minh ở đây.

Trở lại giải câu b bài toán 6.

Dựng các hình bình hành $ADBK$, $ADCL$ (hình vẽ). Gọi O_1, O_2 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABH , ACH .



Ta thấy $(MA, MN) \equiv (MA, MH) \pmod{\pi}$

$$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1H}) \pmod{\pi} \quad (\text{theo bổ đề 1})$$

$$\equiv -\frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2H}, \overrightarrow{O_2A}) \pmod{\pi} \quad (\text{theo bổ đề 3})$$

$$\equiv -(NH, NA) \pmod{\pi} \quad (\text{theo bổ đề 1}).$$

Do đó $\triangle AMN$ cân tại A . Vậy $AM = AN$ (1)

Gọi P là giao điểm của d_1 và d_2 . Ta thấy

$$(PM, PN) \equiv (DB, DC) \pmod{\pi}$$

$$(\text{vì } PM \perp DB; PN \perp DC)$$

$$\equiv (AB, AC) \pmod{\pi} \text{ (theo bổ đề 2)}$$

$$\equiv (AB, AO) + (AO, AC) \pmod{\pi}$$

$$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO_2}) \pmod{\pi}$$

$$\text{(theo bổ đề 3)}$$

$$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}) \pmod{\pi}$$

$$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) \pmod{\pi} \text{ (theo bổ đề 4)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), theo bổ đề 1, suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP .

Kết hợp với $MN \perp DB$, $DB \parallel AK$, suy ra AK là đường trung trực của đoạn thẳng MP .

Vậy $P = D_{AK}(M)$.

Kết hợp với $M \in (O_1)$, ta thấy P chạy trên đường tròn cố định $D_{AK}((O_1))$.

Chú ý

• Ta thấy $(KA, KB) \equiv (DB, DA) \pmod{\pi}$

$$(\text{vì } KA \parallel DB; KB \parallel DA)$$

$$\equiv (CB, CA) \pmod{\pi} \text{ (theo bổ đề 2)}$$

$$\equiv (HA, HB) \pmod{\pi} \text{ (vì } CB \perp HA; CA \perp HB).$$

Do đó $K \in (O_1)$.

Suy ra P chạy trên đường tròn cố định $D_{AK}((O_1))$ và $K \in D_{AK}((O_1))$.

Tương tự P chạy trên đường tròn cố định $D_{AL}((O_2))$ và $L \in D_{AL}((O_1))$.

Vậy các đường tròn cố định $D_{AK}((O_1))$, $D_{AL}((O_2))$ chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL , đường tròn (O_3) (xem hình vẽ).

• Trong bài toán 6, các giả thiết tam giác ABC nhọn và D là một điểm thuộc cung $\widehat{BC}$ không chứa A của đường tròn (O) có thể thay bằng các giả thiết tam giác ABC không vuông và D thuộc đường tròn (O) (D khác A, B, C).

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

(Tiếp trang 9)

Câu 7a. Kẻ $BH \perp CD$ thì tứ giác $ABHD$ là hình vuông và $\widehat{CBH} = \widehat{MBA} \Rightarrow \triangle CBH = \triangle MBA$ (g.c.g) $\Rightarrow CB = MB$.

Từ đó dễ thấy $\triangle CBN = \triangle MBN$ (c.g.c), suy ra

$$d(B, CD) = d(B, MN) = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BD = 4 \quad (*)$$

Điểm D thuộc BD , nên $D(x_D; 2)$ ($x_D > 0$).

Từ (*) có $(x_D - 1)^2 = 16 \Rightarrow x_D = 5$. Vậy $D(5; 2)$.

Câu 8a. Có hai mặt phẳng thoả mãn yêu cầu đề ra với PT lần lượt là

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-1} = 1; \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{2} = 1.$$

Câu 9a. ĐK $x < -1$ hoặc $x > 1$, $x \neq 2$.

Đưa PT đã cho về dạng

$$\log(x^2 - 1) = \log(x + 1)^2 |x - 2|$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = (x + 1)^2 |x - 2|.$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = (x + 1)|x - 2| \text{ (do } x \neq -1).$$

Tập nghiệm PT đã cho là $\{\pm\sqrt{3}; 1 + \sqrt{2}\}$.

Câu 7b. Sử dụng ĐK tiếp xúc, ta thấy

$$BC: 2x + y - 9 = 0 \text{ hoặc } BC: 2x - y - 5 = 0.$$

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC , H là tiếp điểm của đường tròn với cạnh

BC . Từ hệ thức vector $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$ ta tìm được $A(-3; 0); AC(-3; 4)$.

Câu 8b. Có hai mặt phẳng thoả mãn đề bài với PT lần lượt là

$$2x - y - 2z - 3 = 0 \text{ và } 2x + 3y + 2z - 3 = 0.$$

Câu 9b. Đáp số. $z = 2 + 6i; z = \frac{7}{5} + \frac{21}{5}i$.

HUỖNH NGUYỄN LUÂN LƯU,
NGUYỄN THỊ DUY AN

(GV Trung tâm Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

TIN TỨC**HỘI THẢO QUỐC TẾ****ĐỔI MỚI VÀ HIỆN ĐẠI HÓA CHƯƠNG TRÌNH VÀ SÁCH GIÁO KHOA THEO ĐỊNH HƯỚNG PHÁT TRIỂN BỀN VỮNG**

Với mục đích tăng cường và mở rộng hợp tác với các nước trong việc nghiên cứu và phát triển SGK phục vụ đổi mới chương trình giáo dục phổ thông sau năm 2015, được sự đồng ý của Bộ GD&ĐT, trong hai ngày 30 – 31/10/2013, NXBGD Việt Nam đã tổ chức Hội thảo Quốc tế **Đổi mới và hiện đại hóa chương trình và sách giáo khoa theo định hướng phát triển bền vững** với sự tham gia của 150 đại biểu.

Dự Hội thảo có TS Vũ Ngọc Hoàng, Ủy viên TƯ Đảng, Phó Trưởng Ban Thường trực Ban Tuyên giáo TƯ; TS Nguyễn Vinh Hiển, Thứ trưởng Bộ GD&ĐT; đặc biệt có gần 30 chuyên gia giáo dục đến từ Viện Hàn lâm Khoa học Sư phạm (Ucraina), Viện Georg Eckert (Đức),

Đại học Tổng hợp Uppsala (Thụy Điển), Đại học Tổng hợp Stockholm (Thụy Điển), Đại học Tổng hợp Utrecht (Hà Lan), Đại học Central Queensland (Australia), ...

Hội thảo tập trung thảo luận 4 nội dung chính: *Những định hướng trong đổi mới và hiện đại hóa SGK phổ thông; Xây dựng, phát triển, sử dụng SGK và học liệu điện tử; Xây dựng và phát triển mô hình SGK mới và hiện đại; Đánh giá và sử dụng SGK trong nhà trường phổ thông hiện đại.* Hội thảo đã giới thiệu các thành tựu nghiên cứu trong nước và quốc tế, trao đổi kinh nghiệm giữa các nhà khoa học, nhà quản lý và các chuyên gia, từ đó tăng cường nhận thức về việc nâng cao chất lượng SGK theo định hướng đổi mới và hiện đại hóa của giáo dục hiện đại.

HỘI THẢO KHOA HỌC**CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC THEO XU HƯỚNG HỘI NHẬP QUỐC TẾ**

Nhằm góp phần thực hiện mục tiêu “Đổi mới căn bản và toàn diện” giáo dục nước nhà theo tinh thần Nghị quyết Đại hội Đảng toàn quốc lần thứ XI, trong hai ngày 5 – 6/10/2013, Hội Toán học Hà Nội, Sở GD-ĐT Nam Định và Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong đã đồng tổ chức Hội thảo khoa học **Các chuyên đề Toán chọn lọc theo xu hướng hội nhập Quốc tế** tại Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong do GS.TSKH. NGND Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội chủ trì.

Hội thảo đã được đón nhiều nhà khoa học, các chuyên gia Toán học, các cán bộ chỉ đạo chuyên môn từ các Sở GD-ĐT và các giáo viên trực tiếp bồi dưỡng học sinh chuyên Toán trong tỉnh cũng như trong toàn quốc. Đặc biệt Hội thảo còn được đón tiếp những nhà khoa

học của quê hương Nam Định như GS. TSKH Trần Văn Nhung, PGS. TS. NGND Đặng Huy Ruận. Nhân dịp này, các đại biểu đã tham quan nhà lưu niệm Cố Tổng Bí thư Trường Chinh tại làng Hành Thiện, xã Xuân Hồng, huyện Xuân Trường và Giáo phận Bùi Chu, giáo phận có nhiều xứ đạo lâu đời và gắn liền với nhiều sự kiện quan trọng liên quan đến lịch sử hình thành và phát triển Công giáo tại Việt Nam.

Với sự chuẩn bị chu đáo của Ban tổ chức, Hội thảo đã thành công tốt đẹp, góp phần động viên, khích lệ tinh thần say mê nghiên cứu cho học sinh nhà trường đồng thời để lại ấn tượng sâu đậm với các đại biểu tham dự.

PV



CÁC LỚP THCS

Bài T1/437 (Lớp 6). Cho tổng A gồm có 2013 số hạng (kí hiệu $n! = 1.2.3 \dots n$)

$$A = \frac{1}{1.1!} + \frac{1}{2.2!} + \frac{1}{3.3!} + \dots + \frac{1}{n.n!} + \dots + \frac{1}{2013.2013!}.$$

Chứng minh rằng $A < \frac{3}{2}$.

HỒ BÁ HIẾU

(GV THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

Bài T2/437 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi D là trung điểm của cạnh AC , E là điểm trên cạnh BC sao cho $BE = 2CE$. Chứng minh rằng $BD = 3ED$.

NGUYỄN ĐỨC TÂN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/437. Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn điều kiện $6(y^2 - 1) + 3(x^2 + y^2z^2) + 2(z^2 - 9x) = 0$.

BÙI VĂN CỎ
(GV THCS Lý Vĩnh, Lý Sơn, Quảng Ngãi)

Bài T4/437. Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a \neq 0$ và $2a + 3b + 6c = 0$. Tìm khoảng cách nhỏ nhất của hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T5/437. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Chứng minh rằng

$$\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + 2\widehat{ACB}.$$

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/437. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng

$$3(a + b + c) \geq \sqrt{8a^2 + 1} + \sqrt{8b^2 + 1} + \sqrt{8c^2 + 1}.$$

TRỊNH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, TP. Hà Nội)

Bài T7/437. Cho đường tròn tâm O , bán kính R ngoại tiếp tam giác ABC có các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi E là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC . Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 5R^2$ thì E nằm trên đường tròn $(O; R)$.

TRẦN XUÂN HÒA
(GV THPT Triệu Thái, Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T8/437. Giải phương trình

$$3^x - x - 1 = \log_3 \frac{(2x + 1) \log_3(2x + 1)}{x}.$$

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/437. Tìm các số nguyên dương n để phương trình sau có nghiệm nguyên dương:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 4.$$

NGUYỄN TIẾN LÂM
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/437. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta luôn có

$$\frac{\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos\left(\frac{C}{2} - \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{C}{2}} \leq 2 \left(\frac{\tan \frac{A}{2}}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{C}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{A}{2}} \right).$$

CAO HẢI VÂN
(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T11/437. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 = 34$ và $a_{n+1} = 4a_n^3 - 104a_n^2 - 107a_n$ với mọi số nguyên dương n . Tìm tất cả các số nguyên tố p thỏa mãn hai điều kiện: $p \equiv 3 \pmod{4}$ và $a_{2013} + 1$ chia hết cho p .

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T12/437. Cho năm điểm A, B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn. Gọi M là trung điểm của DE . Các đường tròn Euler của các tam giác ADE và BDE cắt nhau tại C' (khác M);

các đường tròn Euler của các tam giác BDE và CDE cắt nhau tại A' (khác M); các đường tròn Euler của các tam giác CDE và ADE cắt nhau tại B' (khác M). Chứng minh rằng các đường thẳng AA' , BB' và CC' đồng quy.

TRẦN VIỆT HÙNG
(Sở GD-ĐT Sóc Trăng)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

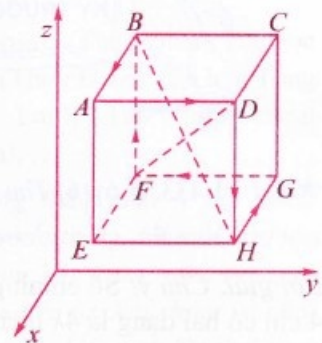
Bài L1/437. Cho cơ hệ như hình vẽ: Hai vật nhỏ có khối lượng $m_1 = m_2 = m$ nối với nhau bằng đoạn dây nhẹ không co giãn; lò xo nhẹ có độ cứng k . Người ta đưa vật m_2 theo phương thẳng đứng để dây nối giữa hai vật bị kéo căng và lò xo dãn một đoạn $\Delta l = 6\Delta l_0$



(với $\Delta l_0 = \frac{mg}{k}$) rồi thả nhẹ. Tìm độ nén cực đại của lò xo trong quá trình các vật chuyển động.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

Bài L2/437. Một khối lập phương cạnh a có dòng điện cường độ I chạy qua sáu cạnh của nó như hình vẽ. Tìm cảm ứng từ tại tâm của khối lập phương.



HOÀNG CÔNG MINH
(GV THPT Khoái Châu, Hưng Yên)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/437 (For 6th grade). Let A be the sum (where $n!$ denote the product $1.2.3 \dots n$):

$$A = \frac{1}{1.1!} + \frac{1}{2.2!} + \frac{1}{3.3!} + \dots + \frac{1}{n.n!} + \dots + \frac{1}{2013.2013!}.$$

Prove that $A < \frac{3}{2}$.

T2/437 (For 7th grade). In a right triangle ABC with right angle at A , let D be the midpoint of AC , E be the point on side BC such that $BE = 2CE$. Prove that $BD = 3ED$.

T3/437. Determine all possible triples of integers x , y , and z satisfying the equation

$$6(y^2 - 1) + 3(x^2 + y^2 z^2) + 2(z^2 - 9x) = 0.$$

T4/437. Let a, b, c be three real numbers satisfying the conditions $a \neq 0$ and $2a + 3b + 6c = 0$. Find the smallest possible distance between the two roots of equation $ax^2 + bx + c = 0$.

T5/437. Given that in a triangle ABC , $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Prove that

$$\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + 2\widehat{ACB}.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/437. Let a, b, c be positive real numbers satisfying $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Prove the inequality

$$3(a + b + c) \geq \sqrt{8a^2 + 1} + \sqrt{8b^2 + 1} + \sqrt{8c^2 + 1}.$$

T7/437. A circle centered at O and radius R circumscribes about a triangle ABC whose sides are $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Let E be the center of the Euler circle of triangle ABC . Prove that if $a^2 + b^2 + c^2 = 5R^2$ then E lies on the circle $(O; R)$.

T8/437. Solve the equation

$$3^x - x - 1 = \log_3 \frac{(2x + 1) \log_3 (2x + 1)}{x}.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPAD

T9/437. For which positive integers n will the following equation has positive integer solutions:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 4.$$

(Xem tiếp trang 27)



★ **Bài T1/433. (Lớp 6)** Tìm các số nguyên dương x, y, z thoả mãn $x^2 + y^3 + z^4 = 90$.

Lời giải. Chú ý: Số chính phương khi chia cho 4 chỉ có hai dạng là $4k$ hoặc $4h + 1$, do đó tổng hai số chính phương có ba dạng sau (với các số nguyên k, h).

- 1) $4k + 4h = 4(k + h)$
- 2) $4k + (4h + 1) = 4(k + h) + 1$
- 3) $(4k + 1) + (4h + 1) = 4(k + h) + 2$.

Từ giả thiết $x^2 + z^4 + y^3 = 90$ (1) suy ra $y^3 < 90$ và $z^4 < 90$ nên $1 \leq y \leq 4$ và $1 \leq z \leq 3$.

Xét bốn trường hợp đối với y sau:

- Với $y = 1$ thì từ (1) có $x^2 + z^4 = 89 = 4.22 + 1$. Thử với z bằng 1, 2, 3 thì không có số nguyên x nào thoả mãn.
- Với $y = 2$ thì từ (1) có $x^2 + z^4 = 82 = 4.20 + 2$, từ đó x, z đều là số lẻ. Thay $z = 1, z = 3$ tìm được tương ứng $x = 9, x = 1$.
- Với $y = 3$ thì từ (1) có $x^2 + z^4 = 63 = 4.15 + 3$, không có một trong ba dạng ở chú ý trên.
- Với $y = 4$ thì từ (1) có $x^2 + z^4 = 26 = 4.6 + 2$, từ đó x, z đều là số lẻ và $z < 3$. Thay $z = 1$ tìm được $x = 5$.

Bài toán có ba nghiệm $(x; y; z)$ là $(9; 2; 1)$, $(1; 2; 3)$, $(5; 4; 1)$. □

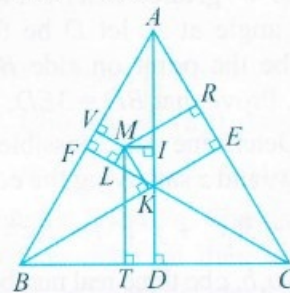
► **Nhận xét.** Đa số các bạn giải bằng cách thử trực tiếp với $1 \leq y \leq 4$ và $1 \leq z \leq 3$. Các bạn sau có lời giải đúng, trình bày gọn:

Phú Thọ: Nguyễn Dương Hoàng Anh, 6C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Nguyễn Thị Yến, 6A2, THCS Lâm Thao;
Vĩnh Phúc: Đỗ Phú Hoàng Quý, 6A1, Bùi Thị Liễu Dương, Trần Đức Duy, Nguyễn Thị Hương, Trần Thanh Tùng, Nguyễn Việt Anh, Lê Đức Mạnh, 6A5, THCS Yên Lạc, Nguyễn Thành Vinh, Phạm Tùng Linh, Trần Thanh Huyền, Phan Trần Lan Anh, 6A1, THCS và THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Nghe An:** Trịnh Thị Kim Chi, Cao Thị Hiền, Nguyễn Văn Toàn, Trần Lê Hiệp, Nguyễn Tấn Đức, Tăng Văn Minh Hùng, Vương Trần Lực, Nguyễn Văn Mạnh, Nguyễn Thị Tinh Thương, Nguyễn Thị Như Quỳnh B, 6A, Nguyễn Thuỳ Dung, 6B, Nguyễn Đình Tuấn, Nguyễn Hoàng Dương, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Võ Phương Tâm, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nguyễn Anh Tiến, 6A, THCS Nghĩa Liên, Nghĩa Đàn, Phan Đàm Tùng Lâm, 6A3, THCS Trà Lân, Con Cuông; **Quảng Ngãi:** Hoàng Thị Ngọc Diệu, 6, Huỳnh Đăng Diệu Huyền, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, Ngô Ngọc Huân, 5A, Phạm Hoàng Lan, 5B, Võ Thành Trung, 5C, TH Số 1, Hành Phước, Phan Nguyễn Thiên Định, 5A, TH Số 2, Hành Phước, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/433. (Lớp 7).** Cho tam giác đều ABC có AD, BE, CF là các đường cao. Điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC . Gọi I, K, L lần lượt là hình chiếu của M trên AD, BE, CF . Chứng minh rằng giá trị của tổng $AI + BK + CL$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

Lời giải. Ta có $AD = BE = CF = h$ (không đổi) và $AB = BC = AC$.



CÔNG TY RUNSYSTEM, BCD PHONG TRÁO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÀN HỌC VÀ TUỔI TRÉ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

Vẽ $MT \perp BC$ tại T , $MR \perp AC$ tại R ,
 $MV \perp AB$ tại V . Dễ dàng chứng minh được

$$MT = ID = AD - AI = h - AI.$$

Tương tự, $MR = h - BK$, $MV = h - CL$.

Suy ra $MT + MR + MV = 3h - (AI + BK + CL)$.

Mặt khác $S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC}$, nên

$$\frac{1}{2} BC.MT + \frac{1}{2} AC.MR + \frac{1}{2} AB.MV = \frac{1}{2} BC.AD$$

nên $MT + MR + MV = AD = h$.

Do đó $AI + BK + CL = 2h$, không đổi.

Vậy tổng $AI + BK + CL$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M . $\square$

►**Nhận xét.** Tất cả các bạn gửi bài đều định hướng đúng, đưa về bài toán quen thuộc, tuy nhiên vẫn phải chứng minh lại kết quả bài toán này (dùng phương pháp diện tích). Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

Vĩnh Phúc: Đỗ Minh Trung, 6A1, Nguyễn Khánh Linh, 7A1, THCS & THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên;
Nghệ An: Nguyễn Thị Hằng, 7B, Võ Hoài Nam, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Phạm Thiên Trang, Nguyễn Hạ Vy Vy, Vũ Thị Thi, 7A, THCS Hành Phước, Nguyễn Đại Dương, 7A, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, Nguyễn Lê Hoàng Duyên, Võ Quang Phú Thời, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, Phạm Vy Vy, Phạm Quốc Trung, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, Nguyễn Cao Bách, 7B1, THCS Nguyễn Nghiêm, TP. Quảng Ngãi.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★**Bài T3/433.** Cho a, b là các số hữu tỉ
 thoả mãn $a^{2013} + b^{2013} = 2a^{1006}b^{1006}$ (*).
 Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 2x + ab = 0$ (1) có hai nghiệm hữu tỉ.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

• Trường hợp 1. $ab = 0$, khi đó phương trình (1) trở thành

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in \mathbb{Q} \\ x = -2 \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

• Trường hợp 2. $ab \neq 0$, khi đó đẳng thức (*)

$$\Leftrightarrow \frac{a^{1007}}{b^{1006}} + \frac{b^{1007}}{a^{1006}} = 2.$$

Thay vào phương trình (1), ta có

$$x^2 + \left(\frac{a^{1007}}{b^{1006}} + \frac{b^{1007}}{a^{1006}} \right) x + ab = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a^{1007}}{b^{1006}} \right) \left(x + \frac{b^{1007}}{a^{1006}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{a^{1007}}{b^{1006}} \in \mathbb{Q} \\ x = -\frac{b^{1007}}{a^{1006}} \in \mathbb{Q} \text{ (do } a, b \in \mathbb{Q} \text{)}. \square \end{cases}$$

►**Nhận xét.** 1) Có thể giải bài toán theo một số cách khác, chẳng hạn như cách sau:

Trường hợp 1. $ab = 0$, khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$

Trường hợp 2. $ab \neq 0$, PT (1) có $\Delta' = 1 - ab$. Cần chứng minh $\Delta' = 1 - ab \geq 0$ và $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{1 - ab} \in \mathbb{Q}$ (**).

Từ (*) ta có $a^{2014} + ab^{2013} = 2a^{1007}b^{1006}$
 $\Leftrightarrow (a^{1007} - b^{1006})^2 = b^{2012} - ab^{2013}$
 $\Leftrightarrow b^{2012}(1 - ab) = (a^{1007} - b^{1006})^2$
 $\Leftrightarrow 1 - ab = \left(\frac{a^{1007} - b^{1006}}{b^{1006}} \right)^2$ thoả mãn (**).

2) Hầu hết các bạn tham gia đều giải đúng bài này.

Các bạn có lời giải ngắn gọn là:

Vĩnh Phúc: Hoàng Thị Lan, Nguyễn Thị Tú Linh, Nguyễn Hữu Huy, 8A1, Nguyễn Thị Hiền, Hoàng Thị Minh Anh, Nguyễn Khắc Việt Anh, Nguyễn Thị Hương Ly, Nguyễn Thị Thêm, Tô Minh Ngọc, Chu Mai Anh, Nguyễn Thị Tâm, 9A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** Nguyễn Thanh Bình, 9A1, Vũ Thuỳ Linh, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Thanh Hương, 9A, THCS Yên Phong; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Huy, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Nam:** Lê Phước Định, 8/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Cao Bách, 8C1, THCS Nguyễn Nghiêm, TP Quảng Ngãi; **TP. Hồ Chí Minh.** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

TRẦN HỮU NAM

★**Bài T4/433.** Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } P = (x^4 + y^4 + z^4) \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4} \right),$$

trong đó x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x + y \leq z$.

Lời giải. Với x, y dương, áp dụng BĐT Cauchy

và bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$, ta có

$$P \geq \left(\frac{(x^2 + y^2)^2}{2} + z^4 \right) \left(\frac{2}{x^2 y^2} + \frac{1}{z^4} \right) \\ \geq \left(\frac{(x + y)^4}{8} + z^4 \right) \left(\frac{32}{(x + y)^4} + \frac{1}{z^4} \right).$$

Đặt $t = \frac{(x + y)^4}{z^4}$. Vì $x + y \leq z$ nên $t \in (0; 1]$.

$$\text{Suy ra } P \geq \left(\frac{t}{8} + 1 \right) \left(\frac{32}{t} + 1 \right) = 5 + \frac{t}{8} + \frac{32}{t}.$$

$$\text{Ta lại có } 5 + \frac{t}{8} + \frac{32}{t} = 5 + \left(\frac{t}{8} + \frac{1}{8t} \right) + \left(\frac{32}{t} - \frac{1}{8t} \right) \\ = 5 + \frac{1}{8} \left(t + \frac{1}{t} \right) + \left(32 - \frac{1}{8} \right) \frac{1}{t} \geq 5 + \frac{2}{8} + \left(32 - \frac{1}{8} \right) = \frac{297}{8}.$$

Suy ra $P \geq \frac{297}{8}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ

khi $t = 1$ hay $x = y = \frac{z}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{297}{8}$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Có nhiều bạn tham gia giải bài này, đa số lời giải đều đúng.

2) Không có bạn nào có lời giải như lời giải của tác giả, Toà soạn đăng lời giải này để các bạn tham khảo.

3) Bài toán có thể khái quát hoá, các bạn hãy cùng thử sức nhé.

4) Các bạn có lời giải tốt nhất kì này là:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Thị Thêm, Tô Minh Ngọc, 9A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Quỳnh Trang, 8D, Hoàng Diệu Hằng, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** Nguyễn Dương Hoàng Anh, 6C, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Hà Nam:** Trịnh Văn Hào Sơn, 9A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; **Quảng Nam:** Lê Phước Định, 8/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Đại Dương, 8B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; **Hoà Bình:** Dương Minh Đức, 8A, THCS Kim Đồng, Tân Lạc; **Thanh Hoá:** Lê Quang Dũng, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá.

NGUYỄN ANH QUÂN

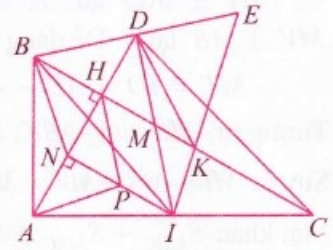
★ **Bài T5/433.** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho $HA = 2HD$. Gọi E là điểm đối xứng của B qua D ; I là trung điểm của AC ; DI và EI cắt BC lần lượt tại M và K . Chứng minh rằng $\widehat{MDK} = \widehat{MCD}$.

Lời giải. Gọi N, P thứ tự là trung điểm AH và IN . Dễ thấy $IN \parallel CH$ (tính chất đường trung

binh của $\triangle ACH$), nên $IN \perp AH$. Xét tam giác vuông ABC , ta có

$$HB \cdot HC = AH^2$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC}.$$



Vì $AH = ND = 2DH$, $HC = 2NI$ nên $\frac{BH}{DN} = \frac{HD}{NI}$.

Do đó $\triangle BDH \sim \triangle DIN$, dẫn tới $\widehat{BDH} = \widehat{DIN}$

$$\Rightarrow \widehat{BDI} = \widehat{BDN} + \widehat{NDI} = \widehat{DIN} + \widehat{NDI} = 90^\circ.$$

Từ đó tứ giác $ABDI$ nội tiếp, và E đối xứng với B qua DI , nên $\widehat{KIM} = \widehat{DIB} = \widehat{BAD} = \widehat{MCI}$.

Suy ra $\triangle IMK \sim \triangle CMI$ (g.g), ta có

$$\frac{IM}{CM} = \frac{MK}{MI} \Rightarrow MK \cdot MC = MI^2.$$

Do H là trung điểm ND và $HM \parallel NI$ nên $MD = MI$,

suy ra $MK \cdot MC = MD^2$, hay $\frac{MK}{MD} = \frac{MD}{MC}$, do đó

$\triangle MDK \sim \triangle MCD$ (c.g.c), dẫn đến $\widehat{MDK} = \widehat{MCD}$ (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn tham gia đều cho lời giải đúng. Kết quả mấu chốt là $\widehat{KIM} = \widehat{MCI}$ được nhiều bạn chứng minh bằng cách sử dụng các tam giác đồng dạng. Các bạn sau cho lời giải tốt hơn cả:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Thị Thêm, Nguyễn Thị Tú Linh, Nguyễn Hữu Huy, 8A1, Nguyễn Thị Hiền, Nguyễn Thị Tâm, Nguyễn Thị Hương Ly, 9A1, THCS Yên Lạc; **Thanh Hoá:** Lê Quang Dũng, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; Nguyễn Hữu Hoàng, 8B, THCS Trần Phú, Vạn Hoà, Nông Công; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T6/433. Giải phương trình**

$$\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{27\sqrt{2}}{8} (x - 1)^2 \sqrt{x - 1}.$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 1$.

Nhân hai vế của phương trình với $\sqrt{2}$, ta được phương trình tương đương

$$\sqrt{x + 1 + 2\sqrt{(x + 1)(x - 1)}} + x - 1 \\ = \frac{27}{4} (x - 1)^2 \sqrt{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} = \frac{27}{4}(x-1)^2 \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \frac{27}{4}(x-1)^2 \sqrt{x-1} \quad (1)$$

Nhận thấy PT (1) không thỏa mãn với $x = 1$.

Chia cả hai vế của PT (1) cho $\sqrt{x-1}$, ta được

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 = \frac{27}{4}(x-1)^2 \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ($t > 0$), suy ra $t^2 = 1 + \frac{2}{x-1}$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{1}{(t^2-1)^2}$$

PT (2) trở thành $t + 1 = \frac{27}{(t^2-1)^2}$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t^4 - 2t^2 + 1) = 27$$

$$\Leftrightarrow t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t - 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^4 + 3t^3 + 4t^2 + 6t + 13) = 0 \quad (3)$$

Vì $t > 0$ nên $t^4 + 3t^3 + 4t^2 + 6t + 13 > 0$.

Từ (3) suy ra $t = 2$.

Ta được $\frac{x+1}{x-1} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = \frac{5}{3}$. $\square$

► **Nhận xét.** Đến PT (1), có thể đặt $a = \sqrt{x+1}$;

$b = \sqrt{x-1}$, ta được một hệ PT đối với a, b . Từ PT (2), một số bạn sử dụng đạo hàm và thấy rằng vế trái (2) là hàm số nghịch biến còn vế phải là hàm số đồng biến.

Tuy nhiên, việc đưa ra nghiệm duy nhất $x = \frac{5}{3}$ là không tự nhiên. Các bạn sau có bài giải tốt:

Hoà Bình: Nguyễn Sỹ An, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, TP Hoà Bình; **Quảng Trị:** Trần Trọng Tiến, Nguyễn Thị Phương Hoài, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Sóc Trăng:** Lâm Bửu Hưng, 10A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Cà Mau:** Lê Minh Phương, 11T1, Lưu Giang Nam, 12T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiền; **Gia Lai:** Vũ Văn Quý, 11A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, TP. Pleiku; **Ninh Thuận:** Nguyễn Trần Lê Minh, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Tiền Giang:** Nguyễn Minh Thành, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

NGUYỄN ANH DŨNG

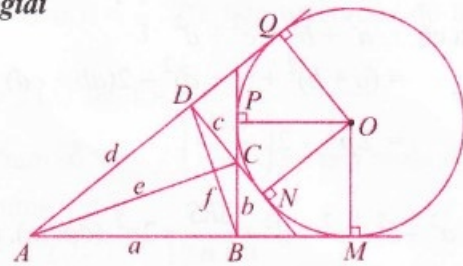
★ **Bài T7/433.** Tứ giác lồi ABCD có diện tích S nội tiếp đường tròn bán kính R và độ dài các cạnh $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e$. Giả sử tồn tại một đường tròn tiếp xúc với tia đối của các tia BA, DA, CD, CB. Chứng minh các hệ thức

a) $R = \frac{S \cdot e}{p^2 - e^2}$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{8SR}{e} = 2p^2$.

Trong đó $2p = a + b + c + d$.

Lời giải



a) Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CD, CB, DA theo thứ tự tại M, N, P, Q. Khi đó $AM = AQ, BM = BP, CN = CP, DN = DQ$. Từ đó ta thấy

$$AM = AB + BM = AB + BP = AB + BC + CP;$$

$$AQ = AD + DQ = AD + DN = AD + DC + CN.$$

Do $AM = AQ; CN = CP$ nên

$$AB + BC = AD + DC, \text{ hay } a + b = c + d = p \quad (1)$$

Đặt $BD = f$, ta có

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = S_{ABD} + S_{BCD}.$$

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{abe}{4R}; S_{ADC} = \frac{cde}{4R};$

$$S_{ABD} = \frac{adf}{4R}; S_{BCD} = \frac{bcf}{4R};$$

nên $S = S_{ABCD} = \frac{(ab + cd)e}{4R} \quad (2)$

hoặc $S = \frac{(ad + bc)f}{4R} \quad (3)$

Nhân (2) và (3) theo vế, ta được

$$16R^2 S^2 = (ab + cd)(ad + bc)ef = (ab + cd)(ad + bc)(ac + bd) \quad (4)$$

(Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp ABCD có $ef = ac + bd$).

Viết (2) dưới dạng $ab + cd = \frac{4RS}{e}$, thay vào

hệ thức (4) ta thấy

$$\begin{aligned} 4Re.S &= (ac + bd)(ad + bc) \\ &= a^2cd + abc^2 + abd^2 + cdb^2 \\ &= ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2) \\ &= ab(p^2 - 2cd) + cd(p^2 - 2ab) \\ &= p^2(ab + cd) - 4abcd = \frac{4Rp^2S}{e} - 4S^2. \end{aligned}$$

Do đó $Rp^2 = Re^2 + e.S$, hay $R = \frac{e.S}{p^2 - e^2}$.

b) Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
 $= (a + b)^2 + (c + d)^2 - 2(ab + cd)$
 $= 2p^2 - 2\left(\frac{4RS}{e}\right).$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{8RS}{e} = 2p^2$ (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Số lời giải gửi về Toà soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải đúng:

Hà Nội: Ngô Đức Hải, 11A1, THPT Quốc Oai; **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Vũ Tuấn Anh, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hoá:** Lê Thế Sơn, 12A8, THPT Bim Sơn; **Nghệ An:** Hồ Xuân Hùng, 10T1, THPT Đô Lương I; **Quảng Trị:** Trần Trọng Tiến, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T8/433.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\alpha(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) - \beta(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C).$$

Trong đó A, B, C là độ lớn ba góc của một tam giác nhọn và α, β là hai số dương cho trước.

Lời giải. Đặt

$$\begin{aligned} P &= \alpha(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \\ &\quad - \beta(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C) \\ &= 3\alpha - (\alpha(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \\ &\quad + \beta(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C)). \end{aligned}$$

• Nhận thấy $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C \\ &= 1 + \cos(A - B) \cdot \cos(A + B) + \cos^2 C \end{aligned}$$

$$= \cos^2 C - \cos C \cos(A - B) + \frac{1}{4} \cos^2(A - B)$$

$$+ \frac{1}{4} \sin^2(A - B) + \frac{3}{4}$$

$$= \left(\cos C - \frac{1}{2} \cos(A - B) \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2(A - B) + \frac{3}{4}.$$

Do đó $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$, đẳng thức

xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos C = \frac{1}{2} \cos(A - B) \\ \sin(A - B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

• Vì A, B, C là các góc nhọn nên $\cos A, \cos B, \cos C$ luôn dương. Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương, ta có

$$\cos^3 A + \cos^3 A + \frac{1}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\cos^6 A}{8}} = \frac{3}{2} \cos^2 A \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \cos^3 B + \cos^3 B + \frac{1}{8} \geq \frac{3}{2} \cos^2 B \quad (2)$$

$$\cos^3 C + \cos^3 C + \frac{1}{8} \geq \frac{3}{2} \cos^2 C \quad (3)$$

Cộng theo về các BĐT (1), (2), (3) ta được

$$\begin{aligned} &\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C \\ &\geq \frac{3}{4} (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - \frac{3}{16} \\ &\geq \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Vì vậy } P \leq 3\alpha - \left(\alpha \cdot \frac{3}{4} + \beta \cdot \frac{3}{8} \right) = \frac{9}{4} \alpha - \frac{3}{8} \beta.$$

Đẳng thức xảy ra khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. Vậy

$$\max P = \frac{9}{4} \alpha - \frac{3}{8} \beta \text{ khi tam giác } ABC \text{ đều. } \square$$

► **Nhận xét.** a) Có thể sử dụng đạo hàm để giải bài toán bằng cách xét hàm số $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2$ trên khoảng $(0; 1)$

$$\text{có } f(x) \geq -\frac{1}{16}, \text{ suy ra } \beta x^3 + \alpha x^2 \geq \left(\alpha + \frac{3}{4}\beta \right) x^2 - \frac{1}{16}\beta.$$

Rồi thay x lần lượt là $\cos A, \cos B, \cos C$ để suy ra kết quả.

b) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

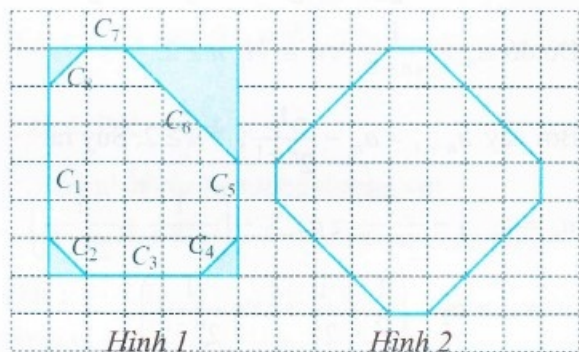
Hưng Yên: Nguyễn Long Duy, Nguyễn Trung Hiếu, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Văn Cao, 11A1, THPT Sáng Sơn; **Hà Nam:** Đặng Quang Huy, Bạch Xuân Đạo, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hoà;

Thái Nguyên: Nguyễn Văn Tuyền, 12A11 K25, THPT Đồng Hỷ; Phạm Thanh Bình, 12A1, THPT Lương Phú;
Yên Bái: Nguyễn Khánh Hoà, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Ninh Bình:** Hà Quý Anh, 10 Toán, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Nghệ An:** Tăng Trung Hiếu, 10T1, THPT Thái Hoà; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thanh Hoá:** Lê Văn Hải, 10A7, Lê Hùng Cường A, 11A7, THPT chuyên Lương Đắc Bằng, Lê Thế Sơn, 12A8, THPT Bim Sơn;
Quảng Trị: Trần Trọng Tiến, 11 Toán, Trần Đức Anh, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** Hà Thục Thanh Thiện, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Tiền Giang:** Nguyễn Minh Thành, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Ninh Thuận:** Nguyễn Trần Lê Minh, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cà Mau:** Lê Minh Phương, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T9/433.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét các bát giác lồi thoả mãn: Có tất cả các góc bằng nhau, các đỉnh có tọa độ nguyên, tồn tại cạnh song song với trục Ox, tiền biên của bát giác có 16 điểm nguyên kể cả đỉnh. Tìm diện tích lớn nhất của bát giác lồi thoả mãn điều kiện trên.

Lời giải. (Theo bạn Lê Đức Việt, 12 Toán chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hoà Bình**).



Theo giả thiết, số đo mỗi góc của bát giác là 135° . Kết hợp với giả thiết tồn tại cạnh song song với Ox nên ta bọc đa giác trong hình chữ nhật (h.1).

Gọi $C_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ là số các điểm nguyên trên các cạnh (không kể đỉnh). Ta có

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8 = 16 - 8 = 8$$

$$C_1 + C_2 + C_8 = C_4 + C_5 + C_6 \\ C_2 + C_3 + C_4 = C_6 + C_7 + C_8.$$

$$\text{Suy ra } (C_1 + C_2 + C_8) + (C_2 + C_3 + C_4) =$$

$$= \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_8 + C_4 + C_5 + C_6 + C_2 + C_3 + C_4 + C_6 + C_7 + C_8)$$

$$= \frac{1}{2}(C_1 + 2C_2 + C_3 + 2C_4 + C_5 + 2C_6 + C_7 + 2C_8)$$

$$= \frac{1}{2}(8 + C_2 + C_4 + C_6 + C_8) \quad (1)$$

Diện tích của hình chữ nhật bọc bát giác là

$$S_1 = (C_1 + C_2 + C_8 + 3)(C_2 + C_3 + C_4 + 3).$$

Diện tích của bốn tam giác vuông cân ở bốn đỉnh của hình chữ nhật là

$$S_2 = \frac{(C_2 + 1)^2}{2} + \frac{(C_4 + 1)^2}{2} + \frac{(C_6 + 1)^2}{2} + \frac{(C_8 + 1)^2}{2}.$$

Vậy diện tích của bát giác là $S = S_1 - S_2$.

Theo bất đẳng thức Cauchy

$$S_1 \leq \left(\frac{C_1 + C_2 + C_8 + C_2 + C_3 + C_4 + 6}{2} \right)^2 \\ = \left(5 + \frac{1}{4}(C_2 + C_4 + C_6 + C_8) \right)^2 \quad (\text{do (1)}).$$

Ta lại có

$$(C_2 + 1)^2 + (C_4 + 1)^2 + (C_6 + 1)^2 + (C_8 + 1)^2 \\ = (C_2^2 + C_4^2 + C_6^2 + C_8^2) + 2(C_2 + C_4 + C_6 + C_8) + 4 \\ \geq \frac{1}{4}(C_2 + C_4 + C_6 + C_8)^2 + 2(C_2 + C_4 + C_6 + C_8) + 4$$

Đặt $x = C_2 + C_4 + C_6 + C_8$, với $0 \leq x \leq 8$.

$$\text{Khi đó } S \leq \left(5 + \frac{x}{4} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4 \right) \\ = \frac{-x^2}{16} + \frac{3x}{2} + 23 = -\frac{1}{16}(x - 16)(x - 8) + 31 \leq 31$$

(do $0 \leq x \leq 8$).

Đẳng thức xảy ra khi $C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = 2$;

$C_1 = C_3 = C_5 = C_7 = 0$. Vậy $\max S = 31$. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là một bài toán hay và khó. Chỉ có 6 bạn tham gia giải và có 4 lời giải đúng. Ngoài bạn *Việt*, ba bạn có lời giải đúng là *Nguyễn Long Duy*, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Chu Thị Thu Hiền*, 12T, THPT chuyên Long An, **Long An**; *Lê Thế Sơn*, 12A8, THPT Bim Sơn, **Thanh Hoá**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/433.** *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$(x+y)f(x+y) = xf(x) + yf(y) + 2xy \quad (1)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Với $y = x$, từ (1) ta thu được

$$2xf(2x) = 2xf(x) + 2x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{hay } f(2x) = f(x) + x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Đặt $f(x) = x + g\left(\frac{x}{2}\right)$ ta thu được $g(t) = f(2t) - 2t$

là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Từ (3), suy ra $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$

Từ tính liên tục của hàm $g(x)$, suy ra

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f(x) = x + c$ với hằng số c tùy ý. Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x + c$ với hằng số c tùy ý thỏa mãn các điều kiện của bài toán. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng.

Thái Nguyên: Nguyễn Văn Tuyến, 12A11 K25, THPT Đồng Hỷ; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Văn Cao, 11A1, THPT Sáng Sơn; **Vũ Thị Quỳnh Anh,** 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hòa Bình:** Lê Đức Việt, 12CT, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn An, 11T THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** Vũ Tuấn Hiền, 10T1, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Nguyễn Đình Thịnh, 11A1, THPT Thanh Oai B; **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Long Duy, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** Lê Anh Tuấn, 11T, THPT chuyên ban Hà Nam, Bạch Xuân Đạo, Đặng Quang Huy, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam Định:** Vũ Tuấn Anh, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Lê Thế Sơn, 12A8, THPT Bim Sơn, Nguyễn Tiến Đạt, Lê Hùng Cường, 11A7, THPT chuyên Lương Đắc Bằng, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Phạm Trung Dũng, Dương Tất Thành, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Đậu Hồng Quân, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Việt Hà, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Ngô Hoàng Thanh Quang, 11T, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Ngãi:** Đặng Thịnh Huy, Trương Quang Huy, 11T2, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Trị:** Trần Đức Anh, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Đoàn Phú Thiện, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Khánh Hòa:** Đặng Quân Vương, 12A2, THPT Ngô Gia

Tự; **Lâm Đồng:** Nguyễn Ngọc Đăng Khoa, 11T1, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Gia Lai:** Trần Nguyên Try, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **Đắk Lắk:** Nguyễn Tuấn Diệp, 10T1, THPT Ngô Gia Tự, Nguyễn Như Thiệp, 12A1, THPT Trần Quốc Tuấn, Eakar; **Ninh Thuận:** Trần Lê Minh, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Long An:** Chu Thị Thu Hiền, 12T, THPT chuyên Long An; **TP. Hồ Chí Minh:** Phạm Tuấn Huy, 12T THPT Năng Khiếu, Hứa Hoàng Huy, 12A1, THPT Mạc Đĩnh Chi; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Thái Ngọc Minh, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** Nguyễn Nam Bình, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Tháp:** Nguyễn Thành Thi, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bến Tre:** Nguyễn Duy Linh, Từ Nhật Quang, 11T, THPT chuyên Bến Tre; **Cà Mau:** Lưu Giang Nam, 12T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiền.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T11/433.** *Cho dãy số (a_n) có $a_1 \in \mathbb{R}$*

và $a_{n+1} = |a_n - 2^{1-n}|, \quad \forall n \in \mathbb{N}^. \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$*

Lời giải. • Ta có $a_2 = |a_1 - 1| > 1$ nếu $a_1 > 2$ hoặc $a_1 < 0$. Trong trường hợp này

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad a_4 = a_3 - \frac{1}{4} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Giả sử $a_k > \frac{1}{2^{k-2}} \quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ thì

$$a_{k+1} = a_k - \frac{1}{2^{k-1}} > \frac{1}{2^{k-2}} - \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Do đó $a_n > \frac{1}{2^{n-2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

Bởi vậy $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \geq 2.$ Suy ra

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} - \frac{1}{2^{n-2}} = a_{n-2} - \left(\frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{n-2}} \right) \\ &= \dots = a_2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) \\ &= a_2 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}} \right) \rightarrow a_2 - 1 = |a_1 - 1| - 1 \end{aligned}$$

khi $n \rightarrow +\infty$.

• Xét trường hợp $0 \leq a_1 \leq 2$. Ta có $a_2 = |a_1 - 1|, 0 \leq a_2 \leq 1.$

Giả sử $0 \leq a_k \leq \frac{1}{2^{k-2}} \quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$. Khi đó

$$a_{k+1} = \left| a_k - \frac{1}{2^{k-1}} \right|, \quad 0 \leq a_{k+1} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Bởi vậy $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}, \forall n \geq 1$.

Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = 0$.

Kết luận

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} |a_1 - 1| - 1 & \text{nếu hoặc } a_1 > 2 \text{ hoặc } a_1 < 0 \\ 0 & \text{nếu } 0 \leq a_1 \leq 2. \quad \square \end{cases}$$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán giới hạn dãy số dạng cơ bản. Các bạn sau có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Nguyễn Văn Tuyền, 12A11 K25, THPT Đồng Hỷ; **Hà Nội:** Nguyễn Đình Thịnh, 11A1, THPT Thanh Oai B; **Hưng Yên:** Trần Bá Trung, 10T1, Nguyễn Long Duy, Nguyễn Trung Hiếu, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** Bạch Xuân Đạo, Đặng Quang Huy, Trịnh Ngọc Tú, Lê Anh Tuấn, 11T, THPT chuyên Biên Hoà; **Thanh Hoá:** Trần Thị Mỹ Linh, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; **Quảng Bình:** Ngô Hoàng Thanh Quang, 11T, THPT chuyên; **Đà Nẵng:** Nguyễn Ngọc Bảo, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Gia Lai:** Vũ Văn Quý, 11A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Trần Nguyễn Try, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **TP. Hồ Chí Minh:** Hứa Hoàng Huy, 12A1, THPT Mạc Đĩnh Chi; **Phú Yên:** Bùi Lê Ngọc Min, 12S3, THPT DL Duy Tân; **Bến Tre:** Nguyễn Duy Linh, 11T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T12/433.** Cho tam giác ABC vuông tại C và nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M chạy trên (O) và khác A, B, C ; N là điểm đối xứng của M qua AB ; P là hình chiếu của N trên AC ; MP lại cắt (O) tại Q . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Lời giải. Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ ; L là giao điểm của NP và BQ .

Ta có $\widehat{LPA} = \widehat{LQA} = 90^\circ$. Do đó đường tròn (APQ) chính là đường tròn đường kính AL .

Suy ra I là trung điểm của AL .

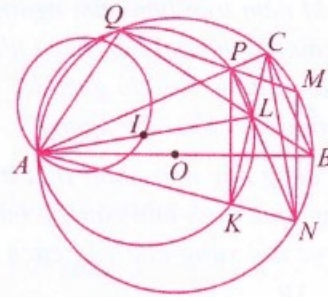
Điều đó có nghĩa là I chính là ảnh của L qua

$$\text{phép vị tự } V_A^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn $(AQPL)$ với AN . Ta có

$$\begin{aligned} (KP, KN) &\equiv (KP, KA) \equiv (QP, QA) \\ &\equiv (QM, QA) \pmod{\pi} \equiv \frac{1}{2} \widehat{MA} \equiv \frac{1}{2} \widehat{AN} \\ &\equiv (CA, CN) \equiv (CP, CN) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Do đó C, N, P, K cùng thuộc một đường tròn.



$$\begin{aligned} \text{Vậy } (KC, KL) &\equiv (KC, KP) + (KP, KL) \\ &\equiv (NC, NP) + (QP, QL) \pmod{\pi} \\ &\equiv (NC, AC) + (AC, NP) + (QM, QB) \pmod{\pi} \\ &\equiv \frac{1}{2} \widehat{NA} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \widehat{MB} \\ &\equiv \frac{1}{2} \widehat{AM} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \widehat{MB} \pmod{\pi} \\ &\equiv \frac{1}{2} \widehat{AB} + \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv 0 \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Do đó ba điểm K, C, L thẳng hàng. Suy ra

$$(CK, AK) \equiv (LK, AK) \equiv (LP, AP) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Nói cách khác $CK \perp AN$.

Kết hợp với $NP \perp AC$ và $L = CK \cap NP$, ta có $AL \perp NC$. Vậy

$$(LA, LC) \equiv (NC, NA) \equiv (BC, BA) \pmod{\pi}.$$

Điều đó có nghĩa là L thuộc đường tròn

$$(\Omega) = \{X \mid (XA, XC) \equiv (BC, BA) \pmod{\pi}\} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra I thuộc đường tròn (Ω') ,

là ảnh của (Ω) qua phép vị tự $V_A^{\frac{1}{2}}$.

Chú ý. Các cung trong lời giải trên đều là các cung định hướng. $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán này không khó nhưng chỉ có bảy bạn tham gia giải:

Hưng Yên: Nguyễn Trung Hiếu, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Trị:** Trần Đức Anh, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Nam Định:** Nguyễn Tuấn Anh, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Đậu Hồng Quân, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Ninh Thuận:** Trần Lê Minh, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vinh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Phạm Tuấn Huy, 12T, THPT Năng Khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/433.** Một quả cầu đồng chất, nhẵn, có khối lượng M nằm trên bàn nằm ngang. Người ta cắt quả cầu thành hai phần bằng nhau bằng một mặt phẳng đứng, sau đó ghép lại bằng sợi dây theo đường tròn lớn nằm ngang.

a) Tính lực căng dây nhỏ nhất. Biết trọng tâm của vật đồng chất hình bán cầu, có bán kính R nằm trên trục đối xứng của vật, cách tâm bán cầu khoảng $\frac{3R}{8}$.

b) Giải bài toán với trường hợp quả cầu được cắt thành bốn phần bằng nhau bằng hai mặt phẳng đứng.

Lời giải. a) Xét cân bằng của một bán cầu. Các lực tác dụng lên nó gồm: Trọng lực P , hai lực căng dây T , phản lực của mặt sàn N và phản lực Q của nửa bán cầu kia. Lực căng T nhỏ nhất khi phản lực Q đặt tại điểm thấp nhất.

Điều kiện cân bằng mô men lực với trục quay nằm ngang đi qua điểm tiếp xúc giữa quả cầu và mặt bàn là $2T.R = P.OG = \frac{Mg}{2} \cdot \frac{3R}{8}$.

$$\text{Suy ra } T = \frac{3}{32} Mg.$$

b) Trường hợp cắt quả cầu làm 4 phần bằng nhau, do đối xứng lực căng của dây có cùng giá trị ở mọi điểm nên đưa được về bài toán hệ vật gồm hai nửa bán cầu ghép như câu a), trong đó mỗi nửa lại là hệ gồm một phần tư quả cầu. Kết quả bài toán vẫn không thay đổi. Bạn đọc hãy tự chứng minh kết quả bài toán vẫn không đổi khi quả cầu được cắt thành n phần đều nhau. □

► **Nhận xét.** Rất tiếc bài này không có bạn nào cho lời giải hoàn chỉnh cả.

NGUYỄN XUÂN QUANG

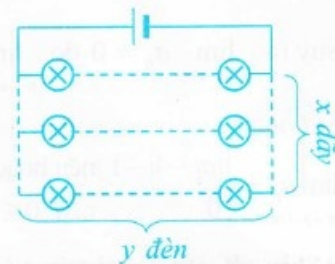
★ **Bài L2/433.** Nguồn điện có suất điện động $\mathcal{E} = 36V$, điện trở trong $r = 30\Omega$ được dùng để thắp sáng các đèn ghi $6V - 3W$.

a) Có bao nhiêu cách mắc các đèn đối xứng để chúng sáng bình thường?

b) Trong các cách mắc trên, cách nào có số đèn nhiều nhất? ít nhất?

Lời giải

a) Gọi tổng số đèn có thể mắc là N , được mắc thành x dãy, mỗi dãy có y đèn (như hình vẽ).



– Cường độ dòng điện định mức và điện trở của bóng đèn là

$$I_d = \frac{P_d}{U_d} = 0,5A; R_d = \frac{U_d^2}{P_d} = 12\Omega.$$

– Điện trở mạch ngoài $R_n = \frac{yR_d}{x} = \frac{12y}{x}$.

Cường độ dòng điện mạch chính

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_n + r} = \frac{36}{\frac{12y}{x} + 3} = \frac{12x}{4y + x} \quad (1)$$

Để đèn sáng bình thường thì dòng điện chạy qua đèn phải bằng cường độ dòng điện định mức, tức là $I_1 = 0,5A$.

Mặt khác ta có $I = xI_d = 0,5x$ (2)

Từ (1) và (2) và (3) ta rút ra $y = \frac{24 - x}{4}$.

Vì x, y phải là các số nguyên dương nên $24 - y$ là bội của 4, ta có các cách mắc như sau:

	Cách 1	Cách 2	Cách 3	Cách 4	Cách 5
x	4	8	12	16	20
y	5	4	3	2	1
N	20	32	36	32	20

Vậy có 5 cách mắc để các đèn sáng bình thường.

b) Theo các cách mắc như trên thì số bóng đèn cần dùng nhiều nhất là $N_{\max} = 36$ (bóng) và số bóng đèn cần dùng ít nhất là

$$N_{\min} = 20 \text{ (bóng)}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Thanh Hoá: Nguyễn Thị Oanh, 11C1, THPT Hoàng Hoá IV; **Nghệ An:** Tăng Trung Hiếu, 10A1, THPT Thái Hoà, TX. Thái Hoà.

ĐẶNG THANH HẢI

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(Tiếp trang 17)

T10/437. Prove that in any triangle ABC , the following inequality holds:

$$\frac{\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos\left(\frac{C}{2} - \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{C}{2}} \leq 2 \left(\frac{\tan \frac{A}{2}}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{C}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{A}{2}} \right).$$

T11/437. Let (a_n) be the sequence of real numbers such that

$$a_1 = 34 \text{ and } a_{n+1} = 4a_n^3 - 104a_n^2 - 107a_n$$

for all positive integers n . Find all prime numbers p satisfying the following two conditions: $p \equiv 3 \pmod{4}$ and $a_{2013} + 1$ is divisible by p .

T12/437. Given five points A, B, C, D, E on the same circle. Let M be the midpoint of DE . The Euler circles of triangles ADE and BDE meet at C' (different from M); the Euler circles of triangles BDE and CDE meet at A' (different from M); the Euler circles of triangles CDE and ADE meet at B' (different from M). Prove that the lines AA', BB' and CC' are concurrent.

Translated by LE MINH HA

**MỘT SỐ BÀI TOÁN ...**

(Tiếp trang 7)

3. Tìm các giá trị của tham số m , sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ và đường thẳng $d: y = m(x + 2)$ tạo thành hai hình phẳng có cùng diện tích.

4. Cho parabol $(P): y = -x^2 + 2x$ có đỉnh S và A là giao điểm khác O của (P) và trục hoành. M là điểm di động trên SA , tiếp tuyến của (P) tại M cắt Ox, Oy thứ tự tại E, F . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác con MOE và MAF .

5. Tìm tất cả các tham số m dương để diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số $y = \frac{1}{m^4 + 1}(4x^2 + 3m^2)$ và

$$y = \frac{1}{m^4 + 1}(m^2 - 6mx)$$
 đạt giá trị lớn nhất.

6. Xác định tham số a dương sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol

$$(P_1): y = \frac{4a^2 - 2ax - x^2}{1 + a^4}, (P_2): y = \frac{x^2}{1 + a^4}$$

đạt diện tích lớn nhất, tính diện tích lớn nhất đó.

7. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số

$$(C_1): y = x^3 + 8m^2x + 4m^3$$

và $(C_2): y = -2x^3 + 11mx^2$ với m là tham số

thực âm. Tìm m biết rằng $S = 7\frac{133}{324}$.

8. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m$ với đồ thị (C) . Trong trường hợp hàm số đồng biến trên tập $\mathbb{R}$, tìm m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) với hai trục Ox, Oy có diện tích bằng 1.

Kết quả cuộc thi **GIẢI TOÁN và VẬT LÝ** **TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ** NĂM HỌC 2012 – 2013

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2012 – 2013 trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2012 đến tháng 8 năm 2013. Cuộc thi lần này được nhiều bạn trẻ yêu toán cấp THCS và THPT trên cả nước tham gia giải rất sôi nổi. **Vĩnh Phúc, Phú Thọ, Nghệ An, Thái Bình, Quảng Ngãi** là những tỉnh có đông học sinh tham gia và đoạt nhiều giải cao hơn cả. Hai giải Xuất sắc môn Toán thuộc về bạn *Nguyễn Hải Linh Chi*, 11T1, THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình** và *Hoàng Đỗ Kiên*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**. Giải Nhất môn Vật lý thuộc về bạn *Huỳnh Thanh Dư*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**. Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi. Hẹn gặp lại các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2013 – 2014. Sau đây là danh sách **94** bạn đoạt giải Toán và **17** bạn đoạt giải Vật lý năm học 2012 – 2013.

MÔN TOÁN

★ Giải Xuất sắc (2 giải)

1. *Nguyễn Hải Linh Chi*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**.
2. *Hoàng Đỗ Kiên*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.

★ Giải Nhất (3 giải)

1. *Đỗ Nguyễn Vinh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh**.
2. *Nguyễn Trung Hiếu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.
3. *Trịnh Thị Thuỳ Dương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**.

★ Giải Nhì (14 giải)

1. *Nguyễn Đức Thuận*, 8A, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
2. *Lê Quang Dũng*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá, **Thanh Hoá**.
3. *Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm, **Hà Nam**.
4. *Nguyễn Tiến Dũng*, 9A, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
5. *Trần Thị Mỹ Ninh*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**.
6. *Lê Hồng Đức*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
7. *Lê Kim Nhã*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
8. *Nguyễn Văn Sơn*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.

9. *Chu Thị Thu Hiền*, 11T, THPT chuyên Long An, **Long An**.

10. *Lưu Giang Nam*, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiền, **Cà Mau**.

11. *Nguyễn Thị Việt Hà*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

12. *Phạm Văn Minh*, 12 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**.

13. *Đặng Đức Hiếu*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hoà Bình**.

14. *Lê Nhật Thăng*, 12T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**.

★ Giải Ba (23 giải)

1. *Tạ Lê Ngọc Sáng*, 6E, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, **Hà Nội**.

2. *Nguyễn Thị Hà Vy*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

3. *Võ Quang Phú Thời*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

4. *Nguyễn Đại Dương*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, **Quảng Ngãi**.

5. *Nguyễn Hữu Hoàng*, 8B, THCS Trần Phú, Nông Cống, **Thanh Hoá**.

6. *Đỗ Đăng Dương*, 9A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm, **Hà Nam**.

7. *Vũ Thị Thi*, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

8. *Nguyễn Đình Mậu*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.

9. Nguyễn Thị Trà, 9D, THCS Liên Hương, Vũ Quang, **Hà Tĩnh**.
 10. Bùi Tuấn Nam, 10 Tin, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, **Hà Nội**.
 11. Nguyễn Thị Thuỳ Linh, 10A1, THPT Hương Khê, **Hà Tĩnh**.
 12. Trần Phúc Tài, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
 13. Lê Thị Minh Thảo, 11T, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre**.
 14. Bùi Trần Hải Đăng, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.
 15. Trần Bá Trung, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.
 16. Vũ Tuấn Anh, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
 17. Trương Công Phú, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
 18. Nguyễn Văn Tuyền, 11A11, THPT Đồng Hỷ, **Thái Nguyên**.
 19. Trần Hồng Quân, 11T2, THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**.
 20. Chu Tự Tài, 12A12, THPT Diễn Châu II, **Nghệ An**.
 21. Nguyễn Thanh Hải, 12CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột, **Đắk Lắk**.
 22. Trần Trung Hiếu, 12A1, THPT Thái Hoà, TX. Thái Hoà, **Nghệ An**.
 23. Lê Hoàng Hiệp, 12A1, THPT Thái Hoà, TX. Thái Hoà, **Nghệ An**.
- ★ **Giải Khuyến khích (52 giải)**
1. Lê Nguyễn Quỳnh Trang, 6C, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**.
 2. Đỗ Minh Trung, 6A1, THCS & THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, **Vĩnh Phúc**.
 3. Nguyễn Dương Hoàng Anh, 6C, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**.
 4. Trần Minh Hiếu, 6C, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**.
 5. Nguyễn Tường Vy, 6A1, THCS & THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, **Vĩnh Phúc**.
 6. Đỗ Thị Thu Phương, 7A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
 7. Nguyễn Anh Hào, 7A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
 8. Nguyễn Tiến Long, 7A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
 9. Nguyễn Thị Thêm, 8A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
 10. Đặng Lưu Việt Quý, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
 11. Cao Thị Thuý Điểm, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
 12. Hoàng Thị Minh Anh, 8A, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
 13. Nguyễn Hữu Huy, 8A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
 14. Đinh Mạnh Hà, 8A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
 15. Nguyễn Thị Tú Linh, 8A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
 16. Nguyễn Khắc Việt Anh, 8A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
 17. Nguyễn Thị Tâm, 8A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
 18. Quán Đức Bình, 8A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
 19. Phạm Ngọc Hải, 8A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
 20. Nguyễn Bảo Trân, 8T, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh**.
 21. Nguyễn Thị Hành, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
 22. Phạm Thiên Trang, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
 23. Nguyễn Thuý Phương, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
 24. Nguyễn Thị Nga, 9A, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
 25. Nguyễn Thị Quỳnh Trang, 9A, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**.
 26. Trần Đỗ Bảo Huân, 9B, THCS Nguyễn Thị Định, Tây Hoà, **Phú Yên**.
 27. Nguyễn Quang Minh, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**.
 28. Nguyễn Thị Mừng, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**.
 29. Nguyễn Tài Thiên, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.
 30. Mạc Phương Anh, 10A1 Tin, THPT chuyên KHTN, **ĐHQG Hà Nội**.
 31. Võ Thế Duy, 10A1, THPT Số 1 Thị trấn Phù Mỹ, **Bình Định**.
 32. Nguyễn Thị Việt Hà, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

33. Phan Văn Trung, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.
34. Nguyễn Long Duy, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.
35. Lương Thế Sơn, 10 Toán, THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**.
36. Đặng Đình Lâm, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**.
37. Phạm Trung Dũng, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**.
38. Hoàng Xuân Khánh, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
39. Trần Trung Đức, 10A6, THPT Đào Duy Từ, TP. Thanh Hoá, **Thanh Hoá**.
40. Vũ Văn Dũng, 10 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**.
41. Đặng Ngọc Tuấn, 10T, THPT chuyên Quảng Bình, **Quảng Bình**.
42. Tống Thành Nguyên, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**.
43. Nguyễn Quốc Hùng, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.
44. Nguyễn Văn Cao, 11A1, THPT Sáng Sơn, Sông Lô, **Vĩnh Phúc**.
45. Nguyễn Thành Thi, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.
46. Kiều Hoàng Anh, 11A1, THPT Quốc Oai, **Hà Nội**.
47. Hồ Thị Thuý Nga, 11A1, THPT Thái Hoà, TX. Thái Hoà, **Nghệ An**.
48. Bùi Lê Ngọc Min, 11S3, THPT Dân lập Duy Tân, **Phú Yên**.
49. Nguyễn Duy Khánh, 12A1, THPT Ba Vì, **Hà Nội**.
50. Nguyễn Mậu Thành, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.
51. Nguyễn Vũ Trung Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt, **Lâm Đồng**.
52. Bùi Đình Hiếu, 12A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**.

MÔN VẬT LÝ

★ Giải Nhất (1 giải)

Huỳnh Thanh Dư, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

★ Giải Nhì (7 giải)

1. Nguyễn Thị Thuỳ Linh, 10A1, THPT Hương Khê, **Hà Tĩnh**.
2. Nguyễn Nhật Hân, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**.
3. Lê Thị Quỳnh, 11C1, THPT Hoàng Hoá IV, **Thanh Hoá**.
4. Trần Trung Hiếu, 11A1, THPT Thái Hoà, TX. Thái Hoà, **Nghệ An**.
5. Nguyễn Hoài Nam, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**.
6. Tạ Văn Tuấn, 11A1, THPT Lương Phú, **Thái Nguyên**.
7. Đặng Phúc Cường, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

★ Giải Ba (9 giải)

1. Nguyễn Hải Hậu, 10A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu, **Nghệ An**.
2. Nguyễn Viết Tuấn, 10A5, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**.
3. Trần Thị Thu Hương, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
4. Nguyễn Xuân Cường, 11T1, THPT Anh Sơn I, **Nghệ An**.
5. Trịnh An Bình, 11A1, THPT Thái Hoà, TX. Thái Hoà, **Nghệ An**.
6. Chu Tự Tài, 12A12, THPT Diễn Châu II, **Nghệ An**.
7. Nguyễn Duy Khánh, 12A1, THPT Ba Vì, **Hà Nội**.
8. Võ Việt Tân, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang**.
9. Bùi Đình Hiếu, 12A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**.

Các bạn đoạt giải nhớ gửi gấp địa chỉ mới của mình về Toà soạn để nhận Giấy Chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

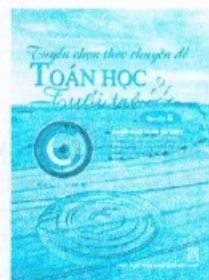


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU CÙNG BẠN ĐỌC

Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



- ★ Quyển 1. 300 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 47.500 đồng
- ★ Quyển 2. 252 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 48.900 đồng
- ★ Quyển 3. 252 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 48.900 đồng
- ★ Quyển 4. 200 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 39.500 đồng
- ★ Quyển 5. 240 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 42.500 đồng
- ★ Quyển 6. 224 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 45.000 đồng

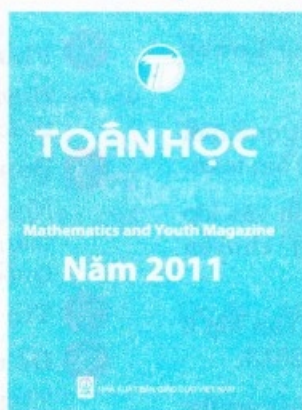


Trọn bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



Đóng tập Tạp chí cả năm 2010
Khổ 19×27cm
Giá bìa: 99 000 đồng



Đóng tập Tạp chí cả năm 2011
Khổ 19×27cm
Giá bìa: 126 000 đồng



Đóng tập Tạp chí cả năm 2012
Khổ 19×27cm
Giá bìa: 152 000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

• 187B, Giảng Võ, Hà Nội • ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)35121606 • Email: toanhocvatuoi trẻ@gmail.com

Riêng trọn bộ đóng tập Toán học và Tuổi trẻ bạn đọc cũng có thể đặt mua tại các cơ sở bưu điện trên cả nước

Số 437 (11-2013)

**TOÁN HỌC
& Tuổi trẻ 31**



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 437 (11.2013)

Tòa soạn: 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự: 04.35121606

Email: toanhocvatuoi@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1. Dành cho Trung học Cơ sở - For Lower Secondary School

Phạm Tuấn Khải - Phát hiện kết quả mới dựa vào việc kết nối, mở rộng các bài toán.

3. Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán Trường THPT chuyên Hà Tĩnh năm học 2013 - 2014.

4. Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 9 tỉnh Thái Bình năm học 2012 - 2013.

5. Chuẩn bị thi vào đại học - University Entrance Preparation

Nguyễn Trường Sơn - Một số bài toán liên quan đến việc tìm diện tích hình phẳng.

8. Thử sức trước kì thi - Đề số 3

9. Hướng dẫn giải Đề số 2

10. Phương pháp giải toán

Huỳnh Tấn Châu - Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp tiếp tuyến.

13. BẠN ĐỌC TÌM TÒI

Nguyễn Minh Hà - Lời giải Câu b Bài toán 6 trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm học 2012 - 2013.

15. Tin tức

16. Đề ra kì này - Problems in This Issue

T1/437, ..., T12/437, L1/437, L2/437.

18. Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems

Giải các bài của Số 433.

28. Kết quả cuộc thi giải Toán và Vật lí trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, năm học 2012 - 2013.

Ảnh Bìa 1. Các đại biểu dự Hội thảo Khoa học tại Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định.

Trưởng ban biên tập: NGUYỄN ANH QUÂN

Trĩ sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THU

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: KIM THANH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc



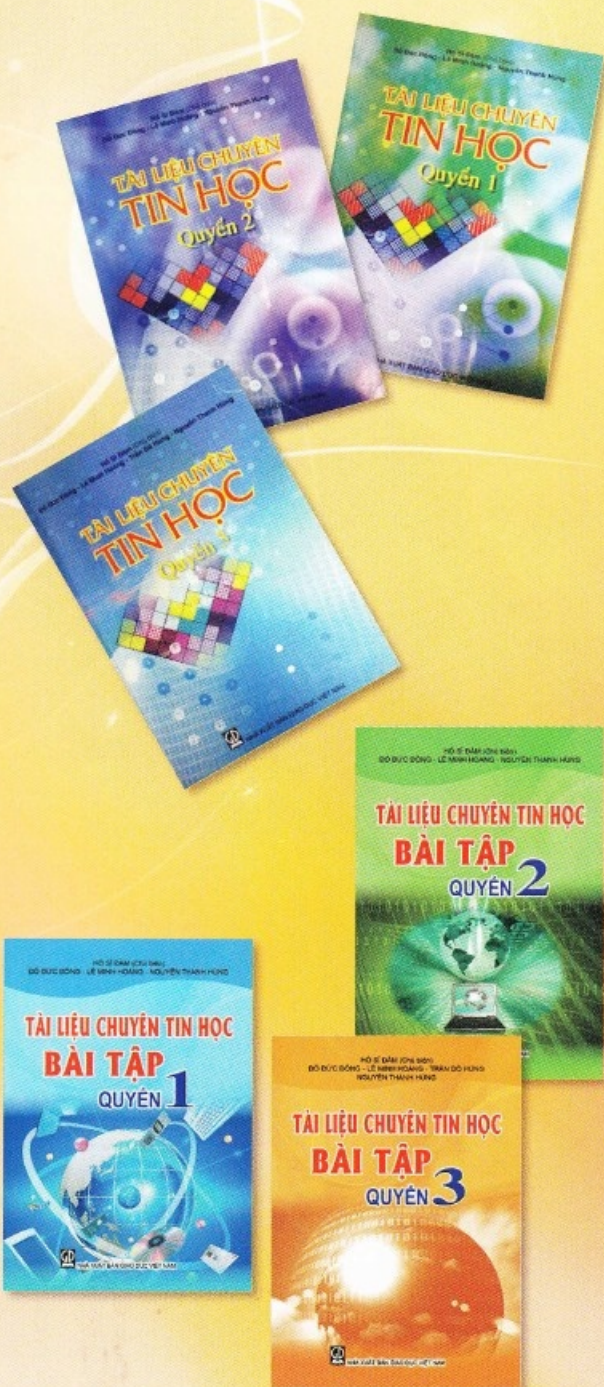
TÀI LIỆU CHUYÊN TIN HỌC

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam vừa cho ra mắt bộ sách *Tài liệu Chuyên Tin học* viết theo chương trình môn Tin học cho các lớp chuyên 10, 11, 12 do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành. Bộ sách gồm 6 cuốn, trong đó có 3 cuốn sách lí thuyết và 3 cuốn sách bài tập tương ứng.

Các sách lí thuyết (Quyển 1, Quyển 2, Quyển 3) trình bày các vấn đề cơ bản nhất về cấu trúc dữ liệu, thuật toán và cài đặt chương trình dưới dạng các chuyên đề từ cơ bản đến chuyên sâu. Sau phần lí thuyết, giới thiệu các khái niệm cơ bản, là phần áp dụng, trình bày các bài toán thường gặp, cách giải và cài đặt chương trình; cuối cùng là các bài tập.

Các sách bài tập cũng gồm hai phần: Phần Bài tập bao gồm tất cả các bài tập trong những chuyên đề của sách *Tài liệu chuyên Tin học* tương ứng và các bài tập bổ sung, sắp xếp từ dễ đến khó, từ đơn giản đến phức tạp. Phần *Hướng dẫn giải bài tập* là những hướng dẫn giúp bạn đọc tìm lời giải hoặc đoạn chương trình để tham khảo.

Với kinh nghiệm nhiều năm tham gia giảng dạy, bồi dưỡng học sinh chuyên Tin học của các trường chuyên có truyền thống và uy tín, các tác giả đã lựa chọn, biên soạn các nội dung cơ bản, thiết yếu nhất đưa vào sách. Đây sẽ là tài liệu thiết thực phục vụ cho giáo viên, học sinh các trường chuyên, lớp chọn cả Trung học phổ thông và Trung học cơ sở. Ngoài ra, bộ sách còn là tài liệu tham khảo bổ ích cho sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng tham gia các kì thi Olympic Tin học Sinh viên Toàn quốc và thi Lập trình viên Quốc tế.



Bạn đọc có thể mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị Trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam

Website bán hàng trực tuyến: www.sach24.vn

Website: www.nxbgd.vn



TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - NAM ĐỊNH

ĐƠN VỊ ANH HÙNG THỜI KÌ ĐỔI MỚI

2 LẦN ĐƯỢC TẶNG THƯỞNG HUÂN CHƯƠNG ĐỘC LẬP HẠNG NHẤT

Địa chỉ: 76 Vị Xuyên, TP. Nam Định, Tỉnh Nam Định

Website: <http://thpt-lehongphong-nd.edu.vn>

Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong Nam Định là ngôi trường có bề dày lịch sử. Tiền thân của trường là ngôi trường Thành chung Nam Định, được thành lập theo quyết định số 2455 ngày 24/8/1920 của toàn quyền Đông Dương *Mô-ri-xơ Long* (maurice Long). Trải qua những thăng trầm của lịch sử, trường đã nhiều lần thay đổi địa điểm, chia tách, sáp nhập... đến năm 1959, trường được mang tên Tổng Bí thư *Lê Hồng Phong*.

Nhiều nhà chính trị, nhà văn hóa, nhà khoa học lớn đã học tập tại trường như Tổng Bí thư Đảng Cộng sản Việt Nam *Trường Chinh*, nhà văn *Nam Cao*, nhà văn *Nguyễn Tuân*, nhà khoa học GS. VS *Nguyễn Văn Hiệu*, GS. VS. NGND *Phạm Minh Hạc*,...

Những năm đổi mới của đất nước, trường tiếp tục kế thừa và phát huy truyền thống, luôn là một trong những điểm sáng của ngành Giáo dục và Đào tạo của tỉnh Nam Định và cả nước. Chỉ tính trong 5 năm qua, trường đã có 401 lượt học sinh đoạt giải trong các kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia, tỉ lệ đoạt giải trên 95%; 14 lượt học sinh đoạt giải trong các kì thi Olympic châu Á và Quốc tế; điểm bình quân thi đại học của học sinh luôn trong top dẫn đầu toàn quốc.



Hình ảnh về Nhà Trường

Để đáp ứng yêu cầu của đất nước trong giai đoạn mới, nhà trường đã không ngừng đổi mới, nâng cao chất lượng đào tạo, chuẩn bị hành trang cho học sinh hội nhập quốc tế, trở thành công dân toàn cầu trong tương lai. Những năm qua, trường đã thí điểm dạy các môn chuyên Toán, Tin, Vật lí, Hóa học, Sinh học bằng tiếng Anh và thường xuyên mời người nước ngoài giảng dạy tiếng Anh cho giáo viên, học sinh. Ngoài các hoạt động chuyên môn, nhà trường luôn coi trọng các hoạt động tập thể, giúp học sinh phát triển năng khiếu cá nhân và rèn luyện kỹ năng cần thiết khác.

Những thành tích của nhà trường đã được Đảng, Nhà nước ghi nhận bằng nhiều phần thưởng cao quý: Danh hiệu "Đơn vị Anh hùng thời kì đổi mới"; các bộ Huân chương Lao động, Huân chương Độc lập, trong đó có 2 Huân chương Lao động hạng Nhất và 2 Huân chương Độc lập hạng Nhất.

Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định đã và đang vững bước trên con đường hội nhập, phát triển; là cái nôi tạo nguồn cho chiến lược đào tạo nhân lực chất lượng cao và nhân tài của đất nước.

HIỆU TRƯỞNG
NGUT Cao Xuân Hùng

ISSN: 0866-8035
Chi số: 12884
Mã số: 8BT11M3

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bàn đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2013

Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng