



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

6 2013
Số 432

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM THAM DỰ KÌ THI IMO 2013

<https://tieulun.hopto.org>

CUỘC THI

ĐỒ VUI NGÀY HÈ 2013

Đợt 2



LTS. Toán học và Tuổi trẻ số 431, tháng 5 năm 2013 đã giới thiệu ba bài toán vui Đợt 1. Lần này chúng tôi xin giới thiệu tiếp ba bài toán vui mới. Bạn hãy gửi lời giải ba bài này về Tòa soạn trước ngày 31.8.2013 (theo dấu Bưu điện). Lời giải ba bài Đợt 1 sẽ đăng trong TH&TT số 435 (tháng 9. 2013). Lời giải ba bài Đợt 2 và danh sách các bạn đoạt giải sẽ đăng trong TH&TT số 436 (tháng 10.2013). Mong các bạn trẻ yêu toán hưởng ứng.

Bài 4. XẾP SÁCH

Trên bàn học của bạn Tâm đặt hai chồng sách giáo khoa. Chồng sách thứ nhất xếp từ trên xuống dưới là Toán, Lí, Hóa, chồng sách thứ hai xếp từ trên xuống dưới là Văn, Sử, Địa. Để khi học đỡ căng thẳng bạn Tâm muốn xếp lại sáu quyển sách đó thành một chồng sách xen kẽ giữa các môn Tự nhiên và Xã hội, theo thứ tự từ trên xuống dưới là Toán, Sử, Lí, Văn, Hóa, Địa. Biết rằng bàn học chỉ đủ chỗ cho ba chồng sách đặt cạnh nhau. Mỗi lần đưa một quyển sách từ chồng sách này sang chồng sách khác được coi là một lần chuyển sách. Bạn hãy giúp bạn Tâm chuyển các quyển sách để đạt được mong muốn trên sao cho số lần chuyển sách là ít nhất theo ý bạn.



DAN QUỲNH

Bài 5. LÁT GẠCH

Để lát nền một sân chơi nhỏ, bạn Trang định mua hai loại gạch hoa A và B, mỗi viên có kích thước $2\text{ dm} \times 6\text{ dm}$ gồm ba ô vuông. Trên viên gạch loại A có hoa ở ô vuông nằm giữa viên gạch, còn trên viên gạch loại B có hoa ở hai ô vuông không nằm giữa viên gạch như hình vẽ. Bạn Trang muốn rằng trên sân mỗi ô vuông có hoa nằm kề (theo cạnh) chỉ với các ô vuông không hoa và mỗi ô vuông không hoa nằm kề (theo cạnh) chỉ với các ô vuông có hoa.

a) Bạn hãy giúp bạn Trang nêu ra một cách lát nền sân chơi có kích thước $22\text{ dm} \times 36\text{ dm}$ và cho biết cần dùng bao nhiêu viên gạch loại A và bao nhiêu viên gạch loại B?

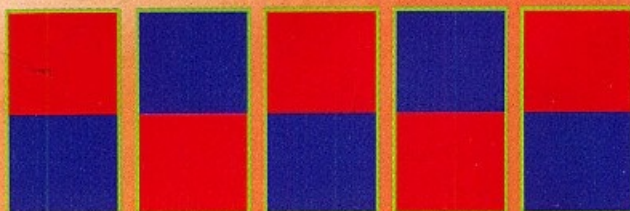
b) Để lát nền sân chơi có kích thước $22\text{ dm} \times 30\text{ dm}$ thì số viên gạch loại A có bằng số viên gạch loại B không? Vì sao?



PHI PHI

Bài 6. QUAY THẺ THẺ NÀO?

Có 2013 tấm thẻ giống nhau, mỗi thẻ có một nửa tô màu đỏ, một nửa tô màu xanh. Lúc đầu các tấm thẻ này được xếp thành hàng ngang trong đó có 19 tấm thẻ có phần trên màu đỏ. Cứ mỗi lần ta lại quay ngược 100 tấm thẻ bất kì. Hỏi có thể sau một số lần quay như vậy tất cả các phần trên của thẻ đều tô màu xanh được không? Tất cả các phần trên của thẻ đều tô màu đỏ được không? Nếu quay được bạn hãy tìm phương án có lần quay ít nhất.



THANH LOAN



TÍNH CHẤT. Trong tam giác cân ABC ($AB = AC$) thì $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$.

Đây là một tính chất khá hay mà việc sử dụng nó sẽ làm cho lời giải ngắn gọn hơn nhiều và đôi khi không cần phải vẽ thêm hình phụ. Sau đây là một số bài toán minh họa.

★ **Bài toán 1. (Lớp 7)** Cho tam giác nhọn ABC . Gọi O là giao điểm các đường trung trực của ba cạnh BC, CA, AB . Kẻ AH vuông góc với BC tại H . Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải. (h.1)

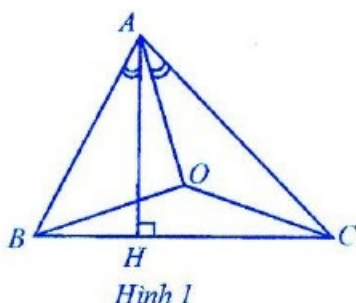
Do O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC nên $OA = OB = OC$.

Tam giác OBC cân tại O nên

$$\widehat{OBC} = \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2}.$$

Tam giác OAB cân tại O nên

$$\widehat{OBA} = \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2}.$$



Tam giác OAC cân tại O nên $\widehat{OAC} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2}$.

Tam giác ABC nhọn nên điểm O nằm trong tam giác đó, suy ra

$$\begin{aligned} \widehat{BAH} &= 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - (\widehat{OBC} + \widehat{OBA}) \\ &= 90^\circ - \left(\frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2} \right) \\ &= 90^\circ - \frac{\widehat{AOC}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2}. \end{aligned}$$

Do đó $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$. $\square$

★ **Bài toán 2. (Lớp 7)** Cho tam giác nhọn ABC với các đường cao BE, CF . Chứng minh rằng $\widehat{BEF} = \widehat{BCF}$.

Lời giải. (h.2) Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $\widehat{MFB} = \widehat{MBF}$. Lại có

$$\widehat{MFB} + \widehat{MFC} = 90^\circ;$$

$$\widehat{MBF} + \widehat{MCF} = 90^\circ$$

nên $\widehat{MFC} = \widehat{MCF}$,
suy ra $MC = MF = MB$.

Tương tự

$$ME = MB = MC.$$

Do các tam giác MBF, MEF và MCE cân tại

$$M \text{ nên } \widehat{MBF} = \frac{180^\circ - \widehat{BMF}}{2};$$

$$\widehat{MEF} = \frac{180^\circ - \widehat{EMF}}{2}; \quad \widehat{MEC} = \frac{180^\circ - \widehat{CME}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \widehat{CBF} + \widehat{CEF} &= \widehat{MBF} + \widehat{MEC} + \widehat{MEF} \\ &= \frac{180^\circ - \widehat{BMF}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{CME}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{EMF}}{2} = 180^\circ. \end{aligned}$$

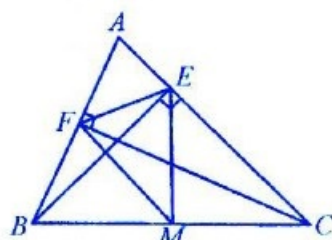
Suy ra $\widehat{CBF} + \widehat{BEF} = 90^\circ$, mà $\widehat{CBF} + \widehat{BCF} = 90^\circ$ nên $\widehat{BEF} = \widehat{BCF}$ (đpcm). $\square$

★ **Bài toán 3. (Lớp 7)** Cho tam giác nhọn ABC . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B lấy điểm D sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

Lời giải. (h.3)

Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC thì O nằm trong tam giác ABC và $OA = OB = OC$. Do các tam giác OBC, OAC

$$\text{cân tại } O \text{ nên } \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2}; \quad \widehat{OCA} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2}.$$

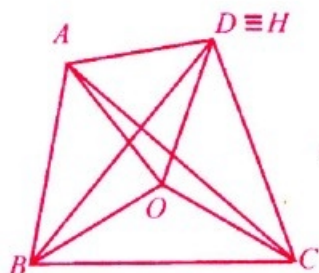


Hình 2

Suy ra

$$\begin{aligned}\widehat{ACB} &= \widehat{OCA} + \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2} \\ &= \frac{\widehat{AOB}}{2} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} \quad (1)\end{aligned}$$

Trên tia OD lấy điểm H sao cho $OH = OA$.



Hình 3

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } \widehat{AHB} &= \widehat{AHO} - \widehat{BHO} \\ &= \frac{180^\circ - \widehat{AOH}}{2} - \frac{180^\circ - \widehat{BOH}}{2} = \frac{\widehat{AOB}}{2} \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{AHB}$ nên $H \equiv D$.

Từ đó $OD = OA = OB = OC$.

$$\begin{aligned}\text{Tương tự ta có } \widehat{BAC} &= \frac{\widehat{BOC}}{2}; \quad \widehat{BDC} = \frac{\widehat{BOC}}{2} \\ \Rightarrow \widehat{BAC} &= \widehat{BDC}. \quad \square\end{aligned}$$

☆ Bài toán 4. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Tia phân giác của góc BAC cắt BC tại D , cắt đường tròn tại E khác A . Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB .

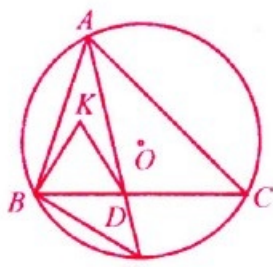
Lời giải. (h.4)

Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB .

Trong tam giác KBD cân tại K ta có

$$\begin{aligned}\widehat{KBD} &= \frac{180^\circ - \widehat{BKD}}{2} \\ &= \frac{180^\circ - 2\widehat{BAD}}{2} \Rightarrow \widehat{KBD} = 90^\circ - \widehat{BAD}.\end{aligned}$$

Lại có $\widehat{EAB} = \widehat{EAC} \Rightarrow \widehat{EB} = \widehat{EC} \Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{EBC}$



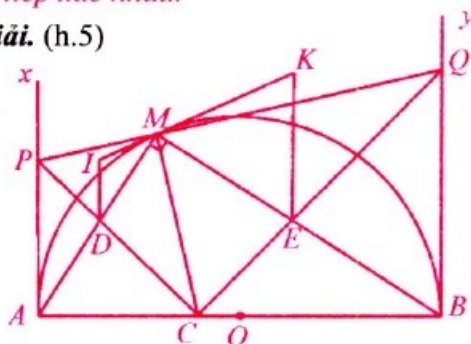
Hình 4

$$\Rightarrow \widehat{KBE} = \widehat{KBD} + \widehat{EBC} = 90^\circ - \widehat{BAD} + \widehat{BAD} = 90^\circ$$

hay $BE \perp KB$, suy ra BE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB . $\square$

☆ Bài toán 5. (Lớp 9) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn bờ AB kẻ các tiếp tuyến Ax, By . C là điểm nằm giữa O và A . M là điểm nằm trên nửa đường tròn (M khác A , và B). Đường thẳng qua M vuông góc với MC cắt Ax tại P , đường thẳng qua C vuông góc với CP cắt By tại Q . Gọi D là giao điểm của CP và MA , E là giao điểm của CQ và MB . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MDP và đường tròn ngoại tiếp tam giác MEQ tiếp xúc nhau.

Lời giải. (h.5)



Hình 5

Gọi I, K theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDP và MEQ .

$$\text{Tam giác } MKE \text{ cân tại } K \text{ nên } \widehat{KME} = \frac{180^\circ - \widehat{MKE}}{2}$$

$$= \frac{180^\circ - 2\widehat{MQE}}{2} = 90^\circ - \widehat{MQE}.$$

Tam giác MID cân tại I nên

$$\widehat{IMD} = \frac{180^\circ - \widehat{MID}}{2} = \frac{180^\circ - 2\widehat{MPD}}{2} = 90^\circ - \widehat{MPD}.$$

Tứ giác $MPAC$ nội tiếp nên $\widehat{MCD} = \widehat{MAP}$, mà $\widehat{MBC} = \widehat{MAP}$ (cùng chắn $\widehat{MA}$) suy ra $\widehat{MCD} = \widehat{MBC} \Rightarrow \widehat{MCQ} = \widehat{MBQ}$. Do đó tứ giác $MCBQ$ nội tiếp, dẫn đến $\widehat{MQE} = \widehat{MBC}$.

$$\begin{aligned}\text{Từ đó } \widehat{IMD} + \widehat{DME} + \widehat{KME} &= 90^\circ - \widehat{MPD} + 90^\circ + 90^\circ - \widehat{MQE} \\ &= 270^\circ - (\widehat{MAC} + \widehat{MBC}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{IMK} = 180^\circ.\end{aligned}$$

(Xem tiếp trang 26)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, ĐÀ NẴNG

NĂM HỌC 2012-2013

(Đề thi đăng trên TH&TT số 431, tháng 5 năm 2013)

Câu 1. a) $\Delta' = (m-1)^2 + 1 > 0, \forall m$.

$$x_1 + x_2 = 2(m-1), x_1 x_2 = -1.$$

$$\text{Ta có } |x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow m = 1.$$

b) Theo hệ thức Viète ta có

$$y_1 + y_2 = 7; y_1 y_2 = 1 (y_1 > 0, y_2 > 0).$$

$$\text{Khi đó } x_1 x_2 = \sqrt{y_1 y_2} (\sqrt{y_1 y_2} + 3)^2 = 16;$$

$$x_1 + x_2 = (\sqrt{y_1 y_2} + 3)(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}) = 4(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}).$$

Mà $(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2})^2 = y_1 + y_2 + 2\sqrt{y_1 y_2} = 9$, suy ra $x_1 + x_2 = 12$. Vậy x_1, x_2 là nghiệm của PT bậc hai $X^2 - 12X + 16 = 0$.

Câu 2. a) Phân chia thành 4 trường hợp: $x \leq 0, y \leq 0; x > 0, y > 0; x > 0, y \leq 0; x \leq 0, y > 0$. Tìm được $(x; y) = (0; 0); (x; y) = (2; 2)$.

b) ĐK $x \leq 40$.

$$\text{Đặt } a = \sqrt{40-x}; b = \sqrt{45-x}; c = \sqrt{72-x} (a, b, c \geq 0).$$

Ta có hệ PT

$$\begin{cases} 40 - a^2 = ab + bc + ca \\ 45 - b^2 = ab + bc + ca \\ 72 - c^2 = ab + bc + ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(c+a) = 40 \\ (b+c)(a+b) = 45 \\ (c+a)(b+c) = 72. \end{cases}$$

Tìm được $(a; b; c) = (2; 3; 6)$. Do đó $x = 60$.

Câu 3. a) Áp dụng BĐT $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

$$\text{và đặt } a = \sqrt{(x+z)^2 + (y-t)^2}; b = \sqrt{(x-z)^2 + (y+t)^2}.$$

$$\text{Ta có } VT^2 = (a+b)^2$$

$$\leq 2((x+z)^2 + (y-t)^2 + (x-z)^2 + (y+t)^2) \\ = 4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \leq 4.$$

Suy ra đpcm.

$$\text{b) Từ } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2012} = 2\sqrt{503} \quad (1)$$

$$\text{suy ra } \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x-y}{2.503} \sqrt{503} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} \sqrt{x} = a\sqrt{503} \\ \sqrt{y} = b\sqrt{503} \end{cases} \text{ với } a, b \in \mathbb{Q}$$

$$\text{và } a+b=2.$$

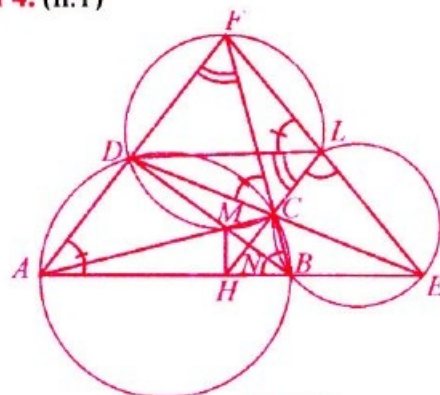
$$\text{Do } x, y \in \mathbb{N} \text{ nên } \begin{cases} x = 503a^2 \\ y = 503b^2 \end{cases} \text{ với } a, b \in \mathbb{N} \text{ và}$$

$$a+b=2.$$

$$\text{Suy ra } (a; b) = (0; 2); (1; 1); (2; 0).$$

$$\text{Vì vậy } (x; y) = (0; 2012); (503; 503); (2012; 0).$$

Câu 4. (h.1)



Hình 1

a) Từ tứ giác BCMH nội tiếp đường tròn đường kính AB và $CM \perp CB$, suy ra CM và CB là hai phân giác trong và ngoài của góc C trong tam giác CDN. Do đó $\frac{MD}{MN} = \frac{CD}{CN} = \frac{BD}{BN}$.

$$\text{Vậy } \frac{DB}{DM} \cdot \frac{NM}{NB} = \frac{BD}{BN} \cdot \frac{MN}{MD} = \frac{BD}{BN} \cdot \frac{BN}{BD} = 1 \text{ (đpcm).}$$

b) Ta có $\widehat{DLC} = \widehat{AFB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{DC}$); $\widehat{CLE} = \widehat{ABF}$ (cùng bù với $\widehat{CBE}$); $\widehat{FLD} = \widehat{DCF}$ (cùng chắn $\widehat{DF}$); $\widehat{DCF} = \widehat{FAB}$ (cùng bù với $\widehat{BCD}$).

Vậy $\widehat{FLE} = \widehat{FLD} + \widehat{DLC} + \widehat{CLE} = \widehat{FAB} + \widehat{AFB} + \widehat{ABF} = 180^\circ$ nên ba điểm E, F, L thẳng hàng.

Câu 5. (h.2) Gọi h_a, h_b thứ tự là độ dài các đường cao vẽ từ A, B; r là bán kính đường tròn

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG

NĂM HỌC 2012-2013

(Dùng cho thí sinh thi vào lớp 10 chuyên Toán hoặc chuyên Tin)

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$a^2(b-2c)+b^2(c-a)+2c^2(a-b)+abc.$$

2) Cho x, y thỏa mãn

$$x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$A = x^4 + x^3y + 3x^2 + xy - 2y^2 + 1.$$

Câu 2. (2 điểm)

1) Giải phương trình

$$(x^2 - 4x + 11)(x^4 - 8x^2 + 21) = 35.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012}) = 2012 \\ x^2 + z^2 - 4(y + z) + 8 = 0. \end{cases}$$

Câu 3. (2 điểm)

1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $(n^2 + n + 1)$ không chia hết cho 9.

2) Xét phương trình $x^2 - m^2x + 2m + 2 = 0$ (1) (ẩn x). Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình (1) có nghiệm nguyên.

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O . Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (O) với các cạnh AB, AC, BC ; BO cắt EF tại I . M là điểm di chuyển trên đoạn CE .

1) Tính số đo góc BIF .

2) Gọi H là giao điểm của BM và EF . Chứng minh rằng nếu $AM = AB$ thì tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

3) Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của đường tròn (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF . Xác định vị trí của điểm M để độ dài đoạn thẳng PQ lớn nhất.

Câu 5. (1 điểm)

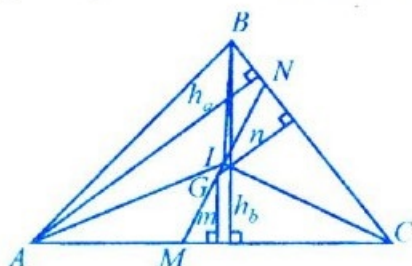
Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = (a + b + c + 3) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right).$$

ĐÀO MINH TÂN (Hải Dương)

Sưu tầm và giới thiệu

nội tiếp tam giác ABC . $IG \cap AC = M; IG \cap BC = N$.



Hình 2

Do $IG \perp IC$ nên $CM = CN$. Gọi m, n lần lượt là độ dài đường cao hạ từ G của hai tam giác GMC và GNC . Ta có

$$S_{CMN} = S_{GMC} + S_{GNC} = \frac{1}{2}(m+n)CM \quad (1)$$

$$\text{Lại có } S_{CMN} = 2S_{IMC} = r \cdot CM \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } m+n=2r \Rightarrow h_a+h_b=6r \quad (3)$$

$$h_a+h_b = \frac{(a+b+c)r}{a} + \frac{(a+b+c)r}{b} = \frac{a+b}{ab}(a+b+c)r \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$6ab = (a+b)(a+b+c) \text{ (đpcm).}$$

NGUYỄN DUY THÁI SƠN (ĐHSP Đà Nẵng)

THÁI TRUNG (Sở GD & ĐT Đà Nẵng)



Bài toán phép đếm thường xuất hiện trong kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng trong những năm gần đây và không ít học sinh tỏ ra lúng túng khi gặp bài toán này. Trong bài viết chúng tôi sẽ đề cập đến cách thức để giải quyết loại toán này.

I. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

★ Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng hoán vị của n phần tử, chúng ta thường dựa trên dấu hiệu đặc trưng sau:

- Tất cả n phần tử đều có mặt.
- Mỗi phần tử chỉ xuất hiện một lần.
- Có sự phân biệt thứ tự giữa các phần tử.
- Số cách xếp n phần tử là số hoán vị của n phần tử đó: $P_n = n!$

★ Để nhận dạng bài toán đếm có sử dụng chỉnh hợp chập k của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu sau:

- Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
- Có sự phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.
- Số cách chọn k phần tử có phân biệt thứ tự từ n phần tử là $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$.

★ Để nhận dạng bài toán đếm có sử dụng tổ hợp chập k của n phần tử, chúng ta thường dựa trên dấu hiệu sau:

- Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
- Không phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.
- Số cách chọn k phần tử không phân biệt

thứ tự từ n phần tử là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Bài toán đếm liên quan đến thực tế

1. Bài toán phép đếm có sự sắp xếp

★ **Thí dụ 1.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 7 bạn

học sinh A, B, C, D, E, F, G vào một chiếc ghế dài sao cho

- Bạn D ngồi chính giữa?
- Hai bạn A và G ngồi ở hai đầu ghế?

Lời giải. a) Xếp D ngồi chính giữa:

Có 1 cách.

Xếp A, B, C, E, F, G vào 6 chỗ còn lại:

Có 6! cách.

Vậy có $1 \times 6! = 720$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu.

b) Xếp hai bạn A và G ngồi ở hai đầu ghế:

Có 2! cách.

Xếp B, C, D, E, F vào 5 chỗ còn lại:

Có 5! cách.

Vậy có $2! \times 5! = 240$ cách xếp thỏa mãn. □

2. Bài toán phép đếm không có sự sắp xếp

★ **Thí dụ 2.** Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A , 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C . Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Lời giải. Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh đã cho là $C_{12}^4 = 495$.

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

- Lớp A có 2 học sinh; các lớp B, C mỗi lớp 1 học sinh:

Chọn 2 học sinh trong 5 học sinh lớp A có C_5^2 cách.

Chọn 1 học sinh trong 4 học sinh lớp B có C_4^1 cách.

Chọn 1 học sinh trong 3 học sinh lớp C có C_3^1 cách.

Suy ra số cách chọn là $C_3^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 120$ (cách).

• Lớp B có 2 học sinh; các lớp A, C mỗi lớp 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 = 90$.

• Lớp C có 2 học sinh; các lớp A, B mỗi lớp 1 học sinh: Số cách chọn là $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 60$.

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là

$$120 + 90 + 60 = 270 \text{ (cách).}$$

Vậy số cách chọn 4 học sinh thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên là

$$495 - 270 = 225 \text{ (cách). } \square$$

DẠNG 2. Bài toán đếm liên quan đến số tự nhiên

1. Tính số các số tự nhiên liên quan đến so sánh các số, các chữ số

★ **Thí dụ 3.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau và số đó

a) Lớn hơn 400 ?

b) Không nhỏ hơn 666 ?

c) Nhỏ hơn 345 ?

Lời giải. Gọi số cần lập là $x = \overline{a_1 a_2 a_3}$.

a) Vì $x > 400$ nên $a_1 \geq 4$; suy ra a_1 có 6 cách chọn, $\overline{a_2 a_3}$ có A_8^2 cách chọn.

Vậy có tất cả $6 \times A_8^2 = 336$ (số).

b) Gọi số cần lập là $x = \overline{a_1 a_2 a_3}$.

Từ $x \geq 666$ suy ra $a_1 \geq 6$, ta có các trường hợp (TH) sau:

• TH1. Với $a_1 \in \{7; 8; 9\}$: Khi đó a_2, a_3 chọn tùy ý.

Ta có a_1 có 3 cách chọn; $\overline{a_2 a_3}$ có A_8^2 cách chọn. Suy ra có $3 \cdot A_8^2 = 168$ (số).

• TH2. Với $a_1 = 6$: Khi đó $a_2 > 6$, a_3 chọn tùy ý. Ta có $a_2 \in \{7; 8; 9\}$ suy ra a_2 có 3 cách chọn; a_3 có 7 cách chọn. Suy ra có $3 \times 7 = 21$ (số).

Vậy có tất cả $168 + 21 = 189$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Vì $x < 345$ nên $a_1 \in \{1; 2; 3\}$, ta có các trường hợp sau:

• TH1. Với $a_1 \in \{1; 2\}$: Khi đó a_2, a_3 chọn tùy ý. Do đó a_1 có 2 cách chọn; $\overline{a_2 a_3}$ có $A_8^2 = 56$ cách chọn.

Suy ra có $2 \times 56 = 112$ (số).

• TH2. Với $a_1 = 3$: Khi đó $a_2 \in \{1; 2; 4\}$. Xây ra hai khả năng (KN):

KN1. Nếu $a_2 \in \{1; 2\}$ thì a_3 tùy ý.

Do đó a_2 có 2 cách chọn, a_3 có 7 cách chọn

Suy ra có $2 \times 7 = 14$ (số).

KN2. Nếu $a_2 = 4$ thì $a_3 < 5$ nên $a_3 \in \{1; 2\}$.

Do đó có 2 số cần lập.

Vậy có tất cả $112 + 14 + 2 = 128$ (số) thỏa mãn yêu cầu đề bài. $\square$

2. Tính số các số tự nhiên liên quan đến tính chia hết

★ **Thí dụ 4.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có năm chữ số khác nhau thỏa mãn

a) Số đó là số chẵn?

b) Số đó chia hết cho 5?

Lời giải. Gọi số cần lập là $x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$, $a_1 \neq 0$.

a) Vì x là số chẵn nên $a_5 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

• TH1. Với $a_5 = 0$: Khi đó a_1 có 9 cách chọn, $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có A_8^3 cách chọn.

Suy ra có $9 \cdot A_8^3 = 3024$ (số).

• TH2. Với $a_5 \neq 0$: Khi đó a_5 có 4 cách chọn, a_1 có 8 cách chọn, $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có A_8^3 cách chọn.

Suy ra có $4 \times 8 \times A_8^3 = 10752$ (số).

Vậy có tất cả $3024 + 10752 = 13776$ (số) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Vì x chia hết cho 5 nên $a_5 \in \{0; 5\}$.

• TH1. Với $a_5 = 0$: Khi đó a_1 có 9 cách chọn, $\overline{a_2 a_3 a_4}$ có A_8^3 cách chọn.

Suy ra có $9 \times A_8^3 = 3024$ số.

• TH2. Với $a_5 = 5$: Khi đó a_1 có 8 cách chọn, $\overline{a_2a_3a_4}$ có A_8^3 cách chọn.

Suy ra có $8 \times A_8^3 = 2688$ (số).

Vậy có tất cả $3024 + 2688 = 5712$ (số) thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

3. Tính số các số tự nhiên ràng buộc sự có mặt của các chữ số

★ **Thí dụ 5.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có năm chữ số khác nhau trong đó

a) Nhất thiết phải có mặt chữ số 3?

b) Nhất thiết phải có mặt hai chữ số 2 và 4?

Lời giải. Gọi số có năm chữ số là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, số tạo thành có 5 chữ số ở 5 vị trí.

a) Xếp chữ số 3 vào một trong 5 vị trí: Có 5 cách xếp.

Lấy 4 chữ số trong 5 chữ số xếp vào 4 vị trí còn lại: Có A_4^4 cách.

Vậy có $5 \times A_4^4 = 600$ (số) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Xếp các chữ số 2 và 4 vào 5 vị trí: Có A_5^2 cách.

Lấy 3 chữ số trong 4 chữ số xếp vào 3 vị trí còn lại: Có A_4^3 cách.

Vậy có tất cả $A_5^2 \cdot A_4^3 = 480$ (số) thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

4. Tính số các số tự nhiên có chứa các chữ số lặp lại

★ **Thí dụ 6.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số, trong đó chữ số 0 có mặt đúng hai lần, chữ số 1 có mặt đúng một lần và hai chữ số còn lại khác nhau?

Lời giải. Gọi số có năm chữ số là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, số tạo thành có 5 chữ số ở 5 vị trí.

Chọn hai vị trí xếp chữ số 0: Có C_5^2 cách.

Chọn một vị trí xếp chữ số 1: Có 3 cách.

Chọn 2 chữ số trong 8 chữ số (10 chữ số trừ đi 2 chữ số là 0 và 1) xếp vào 2 vị trí còn lại có A_8^2 cách.

Vậy có tất cả $C_5^2 \times 3 \times A_8^2 = 1008$ (số). $\square$

5. Bài toán đếm liên quan đến tổng các chữ số và tính tổng các số tự nhiên

★ **Thí dụ 7.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.

Lời giải. Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần lập.

Theo giả thiết $a_3 + a_4 + a_5 = 8$.

Suy ra $a_3, a_4, a_5 \in \{1; 2; 5\}$ hoặc

$a_3, a_4, a_5 \in \{1; 3; 4\}$.

• Với $a_3, a_4, a_5 \in \{1; 2; 5\}$:

Ta có 3! cách chọn $\overline{a_3a_4a_5}$.

Chọn 3 chữ số a_1, a_2 và a_6 trong $9 - 3 = 6$ chữ số: Có A_6^3 (cách).

Vậy có $3! \times A_6^3 = 720$ (số).

• Với $a_3, a_4, a_5 \in \{1; 3; 4\}$:

Tương tự cũng có 720 số thỏa mãn.

Vậy có tất cả $720 + 720 = 1440$ (số) thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

DẠNG 3. Bài toán đếm liên quan đến hình học

★ **Thí dụ 8.** Trong mặt phẳng cho 20 đường thẳng phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ song song với nhau từng đôi một và 30 đường thẳng phân biệt $b_1, b_2, \dots, b_{30}$ cùng vuông góc với các đường thẳng a_i ($i = 1, 20$). Tính số hình chữ nhật được tạo nên từ 50 đường thẳng nói trên.

Lời giải. Ta thấy cứ bốn đường thẳng (gồm hai đường thẳng a_i, a_j ($1 \leq i \neq j \leq 20$) và hai đường thẳng b_m, b_n ($1 \leq m \neq n \leq 30$)) cắt nhau tạo thành một hình chữ nhật. Ngược lại, mỗi hình chữ nhật đều được tạo thành từ bốn đường thẳng gồm hai đường thẳng a_i, a_j và hai đường thẳng b_m, b_n .

Do đó số hình chữ nhật cần tìm bằng số bộ bốn đường thẳng gồm hai đường thẳng a_i, a_j và hai đường thẳng b_m, b_n .

Có C_{20}^2 cách chọn hai đường thẳng a_i, a_j và C_{30}^2 cách chọn hai đường thẳng b_m, b_n . Vậy có tất cả $C_{20}^2 \times C_{30}^2 = 82650$ hình chữ nhật. $\square$

★ **Thí dụ 9.** Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp trong đường tròn tâm O . Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ gấp 20 lần so với số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Tìm n ?

Lời giải. Số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ là C_{2n}^3 .

Ta thấy ứng với hai đường chéo đi qua tâm O của đa giác $A_1A_2...A_{2n}$ cho tương ứng một hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 điểm trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ và ngược lại mỗi hình chữ nhật như vậy sẽ cho tương ứng hai đường chéo đi qua tâm O của đa giác. Mà số đường chéo đi qua tâm của đa giác là n nên số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm bằng C_{2n}^2 .

Theo giả thiết

$$C_{2n}^3 = 20C_{2n}^2 \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \frac{20n(n-1)}{2} \\ \Leftrightarrow n = 8. \square$$

BÀI TẬP

1. Lớp 11A có 40 học sinh trong đó có 22 nam và 18 nữ. Cô giáo chủ nhiệm muốn chọn ra một Ban cán sự gồm một lớp trưởng, một bí thư, một lớp phó văn nghệ, một lớp phó lao động. Hỏi có bao nhiêu cách chọn Ban cán sự lớp nếu

- Ban cán sự được chọn bất kì?
- Ban cán sự gồm toàn học sinh nam?
- Lớp trưởng phải là học sinh nam và lớp phó văn nghệ phải là học sinh nữ?

2. Một thầy giáo có 10 cuốn sách khác nhau trong đó có 4 cuốn sách Toán, 3 cuốn sách Lí và 3 cuốn sách Hóa. Thầy muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 học sinh A, B, C, D, E mỗi em một cuốn.

Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng nếu

a) Chỉ tặng cho học sinh các cuốn sách thuộc hai thể loại Toán và Hóa?

b) Có ít nhất 1 cuốn sách Toán được tặng?

c) Sau khi tặng sách xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn?

3. Một Đội Văn nghệ có 18 người gồm 10 nam và 8 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một nhóm đồng ca gồm 6 người, biết rằng

- Trong nhóm đó toàn nữ?
- Trong nhóm đó có đúng 2 nam?
- Trong nhóm đó có ít nhất 5 nữ?
- Trong nhóm đó có ít nhất 1 nam?

4. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 chữ số cuối một đơn vị?

5. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau sao cho

- Hai chữ số 2 và 3 đứng cạnh nhau?
- Hai chữ số 4 và 5 không đứng cạnh nhau?

6. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số lẻ?

7. Trong mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 4$), trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì, không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi điểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại. Hỏi số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau là bao nhiêu?

8. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên d_1 lấy 10 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 25 điểm nói trên?

9. Tìm số giao điểm tối đa của

- 10 đường thẳng phân biệt.
- 6 đường tròn phân biệt.
- 10 đường thẳng và 6 đường tròn trên.

Các bạn nhớ đặt mua TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÉ cho Quý III, ĐẶC SAN SỐ 8 và CÁC SẢN PHẨM CỦA TÒA SOẠN tại các Cơ sở Bưu điện trên cả nước

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 8

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) Lưu ý $m > 0$ thì $y_{CD} = y(-1) = \frac{3m}{2}$;

$$y_{CT} = y(m-1) = -\frac{1}{2}(m+2)(m+1)^2 + 1.$$

Từ giả thiết tìm được $m = 1$; $m = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2}$.

Câu 2. ĐK $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Đưa PT đã cho về

$$\text{dạng } (\tan x - 1)\sin^2 x + 3(\cos x - \sin x)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(2\cos 2x + 1) = 0.$$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 3. ĐK $\begin{cases} 2+x > 0, 18-x \geq 0 \\ 4-\sqrt[4]{18-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 18.$

BPT đã cho tương đương với

$$\log_2 \sqrt{2+x} \leq \log_2 (4 - \sqrt[4]{18-x})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+x} \leq 4 - \sqrt[4]{18-x}.$$

Đặt $t = \sqrt[4]{18-x}$ ($0 \leq t < \sqrt[4]{20}$). Giải BPT ẩn t , tìm được $2 \leq t \leq 4$. Kết hợp ĐK ta thấy nghiệm BPT đã cho là $-2 < x \leq 2$.

Câu 4. Đặt $\sqrt{3+e^x} = t$. Khi đó

$$I = 2 \int \frac{tdt}{2t^2+3t+1} = 2 \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2t+1} \right) dt = \ln \frac{80}{63}.$$

Câu 5. • $V_{S.ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

• Gọi $O = AC \cap BD$. Trong (OAC) kẻ $OI \perp SA$ thì OI là đường vuông góc chung của SA và

$$BD. \text{ Từ đó } d(SA, BD) = OI = \frac{3\sqrt{5}a}{10}.$$

Câu 6. $2x+4y+2z \leq (x^2+1)+(y^2+4)+(z^2+1)$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 6 \leq 3y + 6 \Rightarrow 2x + y + 2z \leq 6.$$

Với hai số dương a, b , từ BĐT Cauchy có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}. \text{ Từ đó}$$

$$P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{y}{2}+1\right)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}$$

$$\geq \frac{8}{\left(x+1+\frac{y}{2}+1\right)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \geq \frac{64 \times 4}{(2x+y+2z+10)^2} \geq \frac{64 \times 4}{(6+10)^2} = 1.$$

Min $P = 1$, đạt được khi $x=1$; $y=2$; $z=1$.

Câu 7a. $A(-11; 6)$; $B(0; 8)$; $C(10; 3)$; $D(-1; 1)$.

Câu 8a. Có hai đường thẳng thỏa mãn đề bài

$$\text{là } \Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}; \Delta_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}.$$

Câu 9a. Ta có $4C_{n+1}^3 + 2C_n^2 = A_n^3$ ($n \geq 3$) $\Leftrightarrow n=11$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{11} &= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (x^2)^{11-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-2)^k x^{22-3k}. \end{aligned}$$

Số hạng chứa x^7 là số hạng ứng với k sao cho $22-3k=7 \Leftrightarrow k=5$.

Vậy hệ số của x^7 là $C_{11}^5 (-2)^5 = -14784$.

Câu 7b. Có hai đường thẳng thỏa mãn đề bài là $\Delta_1: x+y=0$; $\Delta_2: x+7y-6=0$.

Câu 8b. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng

$$17x+5y-19z-17=0.$$

Câu 9b. Số các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập E là $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Số các số không có mặt chữ số 5 là $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Số các số có mặt chữ số 5 là $60 - 24 = 36$.

Gọi A là biến cố: "Hai số được viết lên bảng đều có mặt chữ số 5"; B là biến cố: "Hai số được viết lên bảng đều không có mặt chữ số 5". Khi đó A và B xung khắc. Theo quy tắc cộng xác suất ta có

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{C_{36}^1 \cdot C_{36}^1}{C_{60}^1 \cdot C_{60}^1} + \frac{C_{24}^1 \cdot C_{24}^1}{C_{60}^1 \cdot C_{60}^1} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{13}{25}.$$

Xác suất cần tìm là

$$1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}.$$

LÊ XUÂN SƠN, TỪ ĐỨC THẢO
(GV THPT chuyên ĐH Vinh) giới thiệu

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 9

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Lập phương trình tiếp tuyến của (C), biết rằng tiếp tuyến cùng với hai đường tiệm cận tạo thành một tam giác có chu vi là $6 + 2\sqrt{5}$.

Câu 2 (1 điểm). Giải phương trình

$$\frac{(\sin x - \sqrt{3} \cos 2x)(2 \cos 2x + 1)}{(2 \cos x - 1)^2} = \sin 2x + \sin x.$$

Câu 3 (1 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \\ \sqrt{2x - 1} + 1 = y(x - 3). \end{cases}$$

Câu 4 (1 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{x^2 e^{\sqrt{\ln x}} + 1}{x^3} dx$.

Câu 5 (1 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC , N là giao điểm của AC và DM , H là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Biết góc giữa

SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α , với $\tan \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Tính thể tích khối chóp $S.ABMN$ và khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SMD) .

Câu 6 (1 điểm). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b + c}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + c + a}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a + b}}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a. (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1; 3)$, trọng tâm $G(2; 2)$. Biết điểm B , điểm C lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x + 3y - 3 = 0$ và $d_2: x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A có hệ số góc dương sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến đường thẳng Δ là lớn nhất.

Câu 8a. (1 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$;

$\Delta': \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{-3}$ và điểm $M(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; \frac{8}{3})$. Chứng tỏ rằng các đường thẳng Δ , Δ' và M nằm trong cùng một mặt phẳng. Lập phương trình đường thẳng qua M cắt các đường thẳng Δ và Δ' lần lượt tại A, B thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Câu 9a. (1 điểm). Trong một cái hộp đựng 20 viên bi gồm 12 bi đỏ khác nhau và 8 bi xanh khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 7 viên, tính xác suất để 7 viên bi chọn ra có không quá 2 bi đỏ.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b. (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ và điểm $M(4; 8)$. Lập phương trình các tiếp tuyến của đường tròn (C) kẻ từ M . Gọi hai tiếp điểm là A và B . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai tiếp tuyến trên và cung nhỏ AB .

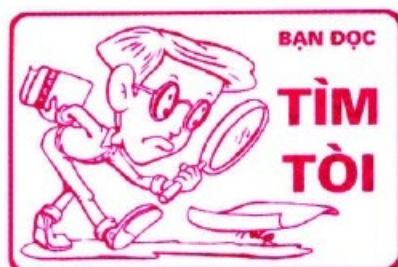
Câu 8b. (1 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$;

$\Delta': \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ và điểm $I(3; 4; 2)$. Giả sử mặt phẳng (P) chứa I , song song với đường thẳng Δ sao cho khoảng cách giữa đường thẳng Δ và (P) là lớn nhất. Tính góc giữa đường thẳng Δ' và mặt phẳng (P) .

Câu 9b. (1 điểm). Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $P(x) = (1 + x + x^3 + x^4)^n$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn

$$\frac{1}{n+1} C_n^0 - \frac{1}{n} C_n^1 + \frac{1}{n-1} C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = -\frac{1}{2014}.$$

ĐẶNG HỮU DÂN, TỪ HỮU SƠN
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)



VỀ MỘT BÀI TOÁN CHỌN ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM DỰ THI IMO 2012

VŨ ĐÌNH HÒA

(GV Trường ĐHSP Hà Nội)

Nhân kì thi chọn Đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 54, chúng tôi muốn trao đổi với các bạn về một bài toán trong đề thi chọn Đội tuyển năm 2012.

★ Bài toán 1. (Bài 2 Việt Nam - TST 2012)

Trên một cánh đồng hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ô vuông (gồm m hàng và n cột) người ta đặt máy tưới nước vào bên trong một số các ô vuông. Mỗi máy trong một ô vuông không chỉ tưới được ô vuông này và các ô vuông có cạnh chung với nó, mà còn tưới đến được các ô vuông cùng cột với nó và cách nó đúng một ô. Hãy tính số máy ít nhất để có thể tưới được toàn bộ cánh đồng trong hai trường hợp sau:

1) $m = 4$;

2) $m = 3$.

Bài toán này được đánh giá là bài toán thú vị nhất kì thi này.

Bài toán đòi hỏi các bạn khảo sát các trường hợp của n một cách kĩ lưỡng và từ đó rút ra quy luật toán học chính xác và tìm cách lí giải nó. Bài toán có nhiều lời giải khác nhau. Sau đây xin giới thiệu lời giải ngắn gọn và độc đáo của bạn Nguyễn Hùng Tâm (Lớp 12 Trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam).

Lời giải. Kí hiệu số máy tưới nước ít nhất là

$$S(m) \text{ thì } S(4) = n; S(3) = \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil + 1.$$

		×		
		×		
×				×
		×		

Hình 1. Với $k = 2$ cột trống và 2 máy phụ trên cột 3.

Trước hết kí hiệu k là số cột không có máy tưới nước nào cả. Nếu trên một cột nào đó có

không ít hơn 2 máy thì ta gọi một máy trong số đó là máy chính, các máy còn lại là máy phụ. Kí hiệu l là số các máy phụ.

1) Khi $m = 4$. Xét một cách đặt máy tưới nước khắp cánh đồng. Nếu không có cột nào trống thì ta cần tất cả n máy. Nếu có cột trống thì tổng số máy phụ hai cột láng giềng của cột trống này không nhỏ hơn 2. Ngoài ra mỗi máy phụ kề với ≤ 2 cột trống, cho nên $l \geq k$, do đó số máy tưới nước phải sử dụng $\geq (n-k)+l \geq n$. Mặt khác, với n máy, ta có thể tưới nước khắp cánh đồng bằng cách đặt trên mỗi cột một máy tưới nước ở vị trí hàng thứ hai.

2) Khi $m = 3$. Tổng số máy phụ trên các cột láng giềng với cột trống ≥ 1 . Do mỗi máy phụ kề với ≤ 2 cột trống. Từ đó ta có

$$l \geq \frac{k}{2} \quad (1); S(3) = (n-k) + l \geq n - \frac{k}{2} \quad (2)$$

Mỗi máy chỉ tưới được ≤ 5 ô, nên nếu gọi S là số các bộ (a, b) với a là máy và b là ô được tưới bởi a , thì $5.S(3) \geq S$. Mặt khác, tất cả các ô của cánh đồng (có $3 \times n$ ô) đều được tưới, ngoài ra, các ô trên cột có máy phụ (có $3 \times l$ ô) đều được tưới bởi cả máy chính và các máy phụ, nên $S \geq 3n + 3l$. Vậy $5.S(3) \geq S \geq 3n + 3l$

$$\Rightarrow 5.S(3) \geq 3n + \frac{3k}{2} \quad (\text{do (1)}) \quad (3)$$

Đem nhân hai vế của (2) với 3 và cộng theo vế với (3) được $8.S(3) \geq 6n \Rightarrow S(3) \geq \frac{3n}{4}$. Ở đây

không xảy ra đẳng thức, vì khi đó n chia hết cho 4 và mỗi máy phải tưới đúng 5 ô vuông, tức là có thể xảy ra khi cột đầu tiên trống và tổng số máy phụ ở các cột láng giềng của cột trống đúng bằng 1, là điều không thỏa mãn để tưới hết các ô của cột trống đầu tiên được.

(Xem tiếp trang 15)



Vào năm 1832, *Bertrand* phát biểu một bổ đề về số nguyên tố rằng “Giữa hai số n và $2n$ với n là số nguyên dương, luôn tồn tại ít nhất một số nguyên tố p ” và ông đã chứng minh được bổ đề đúng với mọi $n < 3000000$ nhưng chưa kết luận được nó thực sự đúng với mọi n hay không, chú ý rằng: Với $n = 1$ thì lấy $p = 2$, còn với $n > 1$ thì $n < p < 2n$. Vào năm 1850, *Chebyshev* đã có một phép chứng minh sử dụng phương pháp giải tích cho bổ đề trên. Đến năm 1932, *Erdos* đã đưa ra một chứng minh đơn giản hơn, chỉ sử dụng các kiến thức và đánh giá sơ cấp. Dưới đây, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu cách chứng minh này.

1. CÁC BỔ ĐỀ PHỤ

Gọi $v_p(n)$ là số mũ lớn nhất của số nguyên tố p trong phân tích tiêu chuẩn của số nguyên dương n . Khi đó, với mọi $a, b \in \mathbb{Z}^+$ thì $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ và nếu $a:b$ thì $v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$.

Bổ đề 1. Với mỗi số nguyên dương n , nếu không có số nguyên tố nào nằm giữa n và $2n$ thì tất cả các ước nguyên tố của C_{2n}^n sẽ nằm trong khoảng từ 2 đến $\frac{2n}{3}$.

Chứng minh. Xét giá trị $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!}$. Với p là số nguyên tố nào đó thỏa mãn $\frac{2n}{3} < p \leq n$ thì

$$\begin{aligned} v_p(C_{2n}^n) &= v_p\left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right) \\ &= v_p((2n)!) - 2v_p(n!) = 2 - 2 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

nghĩa là C_{2n}^n không có ước nguyên tố p nào thỏa mãn $\frac{2n}{3} < p \leq n$.

Do đó, nếu tồn tại số nguyên dương n mà không tồn tại số nguyên tố p nào với $n < p \leq 2n$ thì tất cả các ước nguyên tố của

C_{2n}^n sẽ nằm trong khoảng từ 2 đến $\frac{2n}{3}$. $\square$

Bổ đề 2. Với n là số nguyên dương, nếu p là ước nguyên tố của C_{2n}^n thì $p^{v_p(C_{2n}^n)} \leq 2n$.

Chứng minh. Gọi $r(n)$ là số nguyên dương thỏa mãn $p^{r(n)} \leq 2n < p^{r(n)+1}$, rõ ràng $r(n)$ tồn tại và duy nhất.

Áp dụng bất đẳng thức (BDT) $0 \leq [2x] - 2[x] \leq 1$ với mọi số thực x , ta có

$$\begin{aligned} v_p(C_{2n}^n) &= v_p\left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right) = v_p((2n)!) - 2v_p(n!) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{2n}{p^i} \right] - 2 \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right] = \sum_{i=1}^{r(p)} \left[\frac{2n}{p^i} \right] - 2 \sum_{i=1}^{r(p)} \left[\frac{n}{p^i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{r(p)} \left(\left[\frac{2n}{p^i} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^i} \right] \right) \leq \sum_{i=1}^{r(p)} 1 = r(p). \end{aligned}$$

Do đó $p^{v_p(C_{2n}^n)} \leq p^{r(p)} \leq 2n$. $\square$

Bổ đề 3. Với mỗi số nguyên dương n thì tích của tất cả các số nguyên tố không vượt quá n sẽ không vượt quá 4^n .

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$ (p là số nguyên tố) (*)

- Với $n = 2$ hoặc $n = 3$ thì (*) hiển nhiên đúng.
- Xét n là số chẵn ($n > 2$) và giả sử (*) đúng đến $n-1$. Vì n là hợp số nên

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq n-1} p \leq 4^{n-1} < 4^n.$$

• Xét n là số lẻ ($n > 3$) và giả sử (*) đúng đến $n-1$. Đặt $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Khi đó

$\prod_{p \leq m+1} p \leq 4^{m+1}$; $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$ là tích các số nguyên tố p thỏa mãn $m+2 \leq p \leq 2m+1$ nên sẽ là ước của $(m+2)(m+3)\dots(2m+1) = \frac{(2m+1)!}{(m+1)!} = C_{2m+1}^m$.

Do đó

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^{m+1} \cdot \frac{(2m+1)!}{(m+1)!} = 4^{m+1} \cdot C_{2m+1}^m.$$

Ta có $\sum_{i=0}^{2m+1} C_{2m+1}^i = 2^{2m+1}$ và $C_{2m+1}^m = C_{2m+1}^{m+1}$, nên $2C_{2m+1}^{m+1} \leq 2^{2m+1} \Leftrightarrow C_{2m+1}^{m+1} \leq 4^m$.

Do đó

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^{m+1} \cdot C_{2m+1}^{m+1} \leq 4^{m+1} \cdot 4^m = 4^{2m+1} = 4^n.$$

Suy ra (*) cũng đúng với n . Vậy theo nguyên lý quy nạp, (*) đúng với mọi số nguyên dương n . $\square$

Bổ đề 4. Với mọi số nguyên dương n thì

$$C_{2n}^n \geq \frac{4^n}{2n+1}.$$

Chứng minh. Ta cũng sẽ chứng minh Bổ đề này bằng quy nạp.

• Với $n=1$, Bổ đề hiển nhiên đúng.

• Giả sử Bổ đề đúng đến $n=k \geq 1$, tức là

$$C_{2k}^k \geq \frac{4^k}{2k+1}, \text{ ta cần chứng minh rằng}$$

$$C_{2k+2}^{k+1} \geq \frac{4^{k+1}}{2k+3}. \text{ Thật vậy}$$

$$\begin{aligned} C_{2k+2}^{k+1} &= \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} = \frac{(2k)!}{k!k!} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \\ &\geq \frac{4^k}{2k+1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} > \frac{4 \cdot 4^k}{2k+2} > \frac{4^{k+1}}{2k+3}. \end{aligned}$$

Do đó Bổ đề đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, Bổ đề được chứng minh. $\square$

2. CHỨNG MINH BỔ ĐỀ BERTRAND

Cách 1 (dùng phương pháp phản chứng của Erdos)

• Xét dãy số nguyên tố 2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, trong đó mỗi số hạng liền sau là số nguyên tố lớn nhất nhỏ hơn hai lần số hạng liền trước.

Khi đó với mọi $n < 1024$ thì trong tập hợp $\{n+1, n+2, n+3, \dots, 2n-1, 2n\}$ luôn chứa ít nhất một số nguyên tố của dãy trên. Vì nếu ngược lại, tồn tại một tập hợp không thỏa mãn điều kiện vừa nêu, ta gọi p là số nguyên tố thuộc dãy trên và gần với $n+1$ nhất, do $p \notin \{n+1, n+2, n+3, \dots, 2n-1, 2n\}$ nên $p < n+1 \Rightarrow p \leq n \Rightarrow 2p \leq 2n$, tức là số nguyên tố liền sau của p sẽ nhỏ hơn $2n$, nghĩa là nó sẽ thuộc $\{n+1, n+2, n+3, \dots, 2n-1, 2n\}$, mâu thuẫn. Vậy Bổ đề Bertrand đúng với mọi $n < 1024$.

• Ta xét $n \geq 1024$. Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho không có số nguyên tố nào nằm giữa n và $2n$. Với nhận xét trên thì $n \geq 1024$, theo Bổ đề 1 thì mọi ước nguyên tố của C_{2n}^n sẽ nằm giữa 2 và $\frac{2n}{3}$. Ở đây chỉ xét

ước nguyên tố của C_{2n}^n nên kí hiệu $v_p = v_p(C_{2n}^n)$. Theo các Bổ đề 2, 3 và 4, ta có

$$\begin{aligned} \frac{4^n}{2n+1} &\leq C_{2n}^n = \prod_{2 \leq p \leq \frac{2n}{3}} p^{v_p} \leq \prod_{2 \leq p \leq \sqrt{2n}} p^{v_p} \cdot \prod_{\sqrt{2n} \leq p \leq \frac{2n}{3}} p \\ &\leq \prod_{2 \leq p \leq \sqrt{2n}} p^{v_p} \cdot \prod_{2 \leq p \leq \frac{2n}{3}} p \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2n}{3}} \end{aligned}$$

(chú ý rằng $\prod_{1 \leq p \leq \sqrt{2n}} p^{v_p} \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$, suy ra từ số

các ước nguyên tố p của C_{2n}^n mà $p \leq \sqrt{2n}$ thì nhỏ hơn $\sqrt{2n}$ và $p^{v_p} \leq 2n$ theo Bổ đề 2). Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{4^n}{2n+1} &\leq (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2n}{3}} \Leftrightarrow 4^{\frac{n}{3}} \leq (2n+1) \cdot (2n)^{\sqrt{2n}} \\ &\Leftrightarrow \frac{2n}{3} \leq \log_2(2n+1) + \sqrt{2n} \cdot \log_2(2n) \quad (**) \end{aligned}$$

Xét $n = 1024$, BĐT (**) trở thành

$$\frac{2048}{3} \leq \log_2 2049 + \sqrt{2048} \cdot \log_2 2048,$$

nhưng $\frac{2048}{3} > 682$ và

$$\log_2 2049 + \sqrt{2048} \cdot \log_2 2048 < 12 + 32 \cdot \frac{3}{2} \cdot 11 = 540 < 682.$$

Do đó BĐT (**) không đúng với $n = 1024$ và dễ thấy rằng về trái tăng nhanh hơn về phải nên BĐT (**) cũng không đúng với mọi $n > 1024$. Điều mâu thuẫn này dẫn đến điều giả sử ban đầu là sai. Vậy với mọi số tự nhiên dương n , tồn tại ít nhất một số nguyên tố p thỏa mãn $n < p \leq 2n$ (đpcm). $\square$

Cách 2 (dùng phương pháp quy nạp trực tiếp)

Trường hợp $1 < n \leq 164$ có thể thử trực tiếp được như cách 1.

Giả sử khẳng định đúng với số nguyên dương $n \geq 164$ nào đó, ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng với mọi n .

Theo giả thiết quy nạp, tồn tại số nguyên tố p sao cho $n-1 < p < 2n-2$, ta sẽ chứng minh tồn tại một số nguyên tố nào đó thuộc $(n; 2n]$.

Nếu $p > n$ thì giữa n và $2n-2$ có một số nguyên tố, khẳng định được chứng minh.

Nếu $p = n$ thì n là số nguyên tố. Gọi q là số nguyên tố bất kì thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Giả sử k là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $q^k \leq 2n$ hay $k = [\log_q 2n]$.

Theo Bổ đề 2 thì $v_p(C_{2n}^n) \leq k$, còn theo Bổ đề 1 thì C_{2n}^n không chia hết cho bất cứ số nguyên tố nào thuộc $\left(\frac{2n}{3}; n\right]$. Ta chia tập hợp các số nguyên

tổ trong khoảng từ 1 đến $\frac{2n}{3}$ thành các nhóm

- Nhóm 1 thuộc $\left(\sqrt{2n}; \frac{2n}{3}\right]$: Với mỗi số nguyên tố q thuộc khoảng này thì $[\log_q 2n] = 1$.

- Nhóm 2 thuộc $\left(\sqrt[3]{2n}; \sqrt{2n}\right]$: Với mỗi số nguyên tố q thuộc khoảng này thì $[\log_q 2n] = 2$.

...

- Nhóm k thuộc $\left(2; \sqrt[k]{2n}\right]$: Với mỗi số nguyên tố q thuộc khoảng này thì $[\log_q 2n] = k$.

Kí hiệu $f(t)$ là tích các số nguyên tố phân biệt không vượt quá t và P_n là tích của tất cả các số nguyên tố (kể cả lũy thừa) không vượt quá n của số C_{2n}^n . Ta có

$$P_n \leq f\left(\frac{2n}{3}\right) f(\sqrt{2n}) f(\sqrt[3]{2n}) \dots f(\sqrt[k]{2n})$$

$$\leq 4^{\frac{2n}{3} + \sqrt{2n} + \sqrt[3]{2n} + \dots + \sqrt[k]{2n}}. \text{ Với } n > 164, \text{ ta thấy}$$

$$\sqrt[4]{2n} + \sqrt[5]{2n} + \dots + \sqrt[k]{2n} < (k-3)\sqrt[4]{2n}.$$

Dùng phương pháp hàm số, chứng minh được

$(2n)^{\frac{9}{31}} > k-3$ với $n \geq 164$, như sau

Xét hàm số $y(n) = (2n)^{\frac{9}{31}} - \log_2 2n + 3, n \geq 164$ có

$$y'(n) = \frac{18}{31(2n)^{\frac{22}{31}}} - \frac{2}{2n \ln 2} = \frac{2}{(2n)^{\frac{22}{31}}} \left(\frac{9}{31} - \frac{1}{(2n)^{\frac{9}{31}} \ln 2} \right)$$

Dễ thấy với $n \geq 164$ thì $y'(n) > 0$ nên hàm số $y(n)$ đồng biến, do đó

$$y(n) \geq y(164) > 0 \text{ suy ra } (2n)^{\frac{9}{31}} > \log_2 2n - 3 \geq k-3.$$

$$\text{Suy ra } (k-3)\sqrt[4]{2n} < (2n)^{\frac{9}{31}} \cdot (2n)^{\frac{1}{4}} = (2n)^{\frac{67}{124}} \text{ hay}$$

$$P_n \leq 4^{\frac{2n}{3} + \sqrt{2n} + \sqrt[3]{2n} + (2n)^{\frac{67}{124}}} < 4^{\frac{26}{27}n}.$$

Ta chứng minh $C_{2n}^n > 4^{\frac{26}{27}n}$ với $n \geq 164$.

Thật vậy, ta có $C_{100}^{50} > (3,8)^{50}$, mà $3,8 > 4^{\frac{26}{27}}$

nên $C_{100}^{50} > 4^{\frac{50 \cdot 26}{27}}$, lại theo BĐT

$$\frac{C_{2n+2}^{n+1}}{C_{2n}^n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} > 4^{\frac{26}{27}}$$

đúng với mọi $n \geq 50$ nên suy ra

$$C_{102}^{50} > 4^{27} \cdot C_{100}^{50} > 4^{27} \cdot 4^{50} \cdot \frac{26}{27} = 4^{51} \cdot \frac{26}{27}.$$

Và cứ thế, ta được $C_{2n}^n > 4^{\frac{26}{27}n}$ với mọi $n \geq 50$,

hay nói riêng $C_{2n}^n > 4^{\frac{26}{27}n}$ với mọi $n \geq 164$.

Do đó $P_n < C_{2n}^n$ với mọi $n \geq 164$.

Suy ra C_{2n}^n còn có ước nguyên tố lớn hơn n , gọi đó là q . Ta thấy $(2n)!$ chia hết cho q và $q > n$ nên trong tập hợp $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ có chứa một số nguyên tố q , khẳng định đúng. Do đó, khẳng định đúng với $n+1$.

Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định cũng đúng với mọi số nguyên dương n . Ta có đpcm. $\square$

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 thì $n!$ không là số chính phương.

2. Chứng minh rằng nếu $n \geq 2k$ với $n, k \in \mathbb{N}^*$ thì số C_n^k luôn có ước nguyên tố lớn hơn k .

3. Chứng minh rằng mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của các số nguyên tố phân biệt hoặc một số nguyên tố với 1.

4. Chứng minh rằng nếu gọi p_n là số nguyên tố thứ n thì $p_{n+1}^2 < p_1 p_2 p_3 \dots p_n$.

5. Hỏi có tồn tại hay không một dãy hữu hạn các số nguyên dương $a_{2011} > a_{2010} > \dots > a_2 > a_1$

với $a_1 = 2011$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1) Bất kì số nguyên nào thuộc khoảng $(2011; a_{2011})$ và không thuộc dãy trên cũng đều là hợp số.

2) $A = \frac{2012}{a_1} + \frac{2012}{a_2} + \dots + \frac{2012}{a_{2011}}$ là số nguyên?

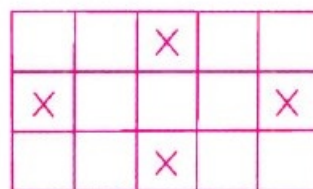
6. Giả sử rằng giả thuyết Goldbach đúng, tức là mỗi số chẵn lớn hơn 2 đều có thể viết dưới dạng tổng của hai số nguyên tố nào đó, hãy chứng minh Bổ đề Bertrand.

VỀ MỘT BÀI TOÁN ... (Tiếp trang 11)

Do đó ta phải có $S(3) \geq \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil + 1$.

Mặt khác ta thấy có thể dùng $\left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil + 1$ máy tưới

hết cánh đồng $3 \times n$ ô vuông một cách đơn giản như trong hình 2 chỉ ra.



Hình 2. Bố trí $\left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil + 1$ máy tưới hết cánh đồng

$3 \times n$ ô vuông.

Ghép hình chữ nhật 3×5 như trong hình 2 khi có một hình chữ nhật $3 \times 5t$ với $5t \geq n$. Ta cắt ra tính từ cột đầu tiên tới cột thứ n để có hình chữ nhật $3 \times n$. Nếu cột cuối cùng không có máy nào (ứng với $n = 4t + 2$ hoặc $n = 4t$), thì ta chỉ việc thêm

một máy tưới vào cột trống này để đủ $\left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil + 1$

máy tưới. Dễ thấy các máy này tưới hết được cánh đồng $3 \times n$. $\square$

Bằng cách vận dụng những nguyên tắc toán rời rạc được sử dụng trong bài toán trên (nguyên lý khởi đầu cực trị, đếm bằng hai cách khác nhau,...), mời các bạn thử sức bằng cách giải các bài toán sau:

❖ Bài toán 2. (IMO 2001). Cho trước một số nguyên lẻ n lớn hơn 1 và các số nguyên $k_1, k_2, \dots, k_n$. Với mỗi hoán vị $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ trong số $n!$ hoán vị của $1, 2, \dots, n$, ta đặt

$$S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i. \text{ Chứng minh rằng tồn tại hai hoán vị } b \text{ và } c, b \neq c, \text{ sao cho } n! \text{ là một ước số của } S(b) - S(c).$$

❖ Bài toán 3. (IMO 1998). Trong một kì thi có a thí sinh và b giám khảo (với b lẻ, $b \geq 3$). Mỗi giám khảo đánh giá từng thí sinh và cho kết luận thí sinh đó đỗ hay trượt. Giả sử k là một số thỏa mãn điều kiện: Với hai giám khảo bất kì, số thí sinh mà họ cho kết luận giống nhau nhiều nhất là k .

Chứng minh rằng $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/432. (Lớp 6) Cho 2013 số tự nhiên từ 1 đến 2013 xếp theo thứ tự tùy ý. Lấy số thứ nhất trừ 1, lấy số thứ hai trừ 2, lấy số thứ ba trừ 3, ..., lấy số thứ 2013 trừ 2013. Hỏi tích của 2013 số mới lập được là số lẻ hay số chẵn?

VŨ HỒNG LƯỢNG

(GV THPT Yên Dương, Tam Đảo, Vĩnh Phúc)

Bài T2/432. (Lớp 7) Cho tam giác nhọn ABC có điểm O là giao của ba đường trung trực. Tia AO cắt cạnh BC tại D . Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $DE = DB$, $DF = DC$. Chứng minh rằng DA là tia phân giác của góc EDF .

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN

(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/432. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b ($a \geq 2, b \geq 2$) và $a + b$ là bội của 4 thỏa mãn $\frac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{1}{2}$.

LƯƠNG VĂN BÁ

(GV THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T4/432. Tìm x, y thỏa mãn

$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 2 \\ x^3 + 2y^2 \leq y^3 + 2x. \end{cases}$$

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/432. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Trên đường tròn (O) lấy điểm C (C khác A và B). P là điểm thuộc đường kính AB sao cho $BP = AC$. Kẻ PH vuông góc với AC

tại H . Phân giác trong của góc CAB cắt đường tròn (O) tại E và cắt PH tại F . Đường thẳng CF cắt đường tròn (O) ở N . Chứng minh rằng CN đi qua trung điểm của AP .

KIỀU ĐÌNH PHÚ

(GV THCS Sông Thao, Cẩm Khê, Phú Thọ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/432. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b+c} + \frac{3}{a+b+c}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{c+a} + \frac{3}{a+b+c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} + \frac{2}{a+b} + \frac{3}{a+b+c}\right)^2 \geq \frac{81}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

LÊ VĂN QUÝ

(GV THPT Bình Sơn, Quảng Ngãi)

Bài T7/432. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh AB, AC theo thứ tự tại P, Q và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại S . Hai đường thẳng SP, SQ cắt lại đường tròn (O) theo thứ tự tại M, N . Gọi E, D, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của S trên các đường thẳng AM, MN, NA . Chứng minh rằng $DE = DF$.

NGUYỄN VĂN NHIỆM

(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T8/432. Giả sử a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện đa thức

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$$

có ít nhất một nghiệm thực. Tìm tất cả các bộ $(a; b; c)$ để $a^2 + b^2 + c^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

TRẦN NAM DŨNG

(GV ĐH KHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/432. Cho a và b là hai số thực thỏa mãn $a^p - b^p$ là số nguyên dương với mọi số nguyên tố p . Chứng minh rằng a và b đều là số nguyên.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/432. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{1+a} \\ \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_n} + 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

trong đó $a \in \mathbb{R}, a \neq -1$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $P_n = u_1 u_2 \dots u_n$. Tính giá trị của biểu thức $aS_n + P_n$.

TRỊNH XUÂN TÌNH

(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T11/432. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

a) f là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}^+$;

b) $f(2x) = 2012^{-x} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$;

với $\mathbb{R}^+ = (0; +\infty)$.

TỪ HỮU SƠN

(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Bài T12/432. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . AD là đường kính của (O) . E là điểm thuộc tia đối tia DA . Đường thẳng qua E vuông góc với AD cắt BC tại T . Dựng tiếp tuyến TP của (O) sao cho P và A nằm khác phía đối với BC ; AP cắt TE tại Q . Gọi M là trung điểm của AQ ; TM cắt AB, AC lần lượt tại X, Y . Chứng minh rằng M là trung điểm của XY .

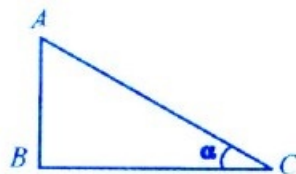
TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/432. Vật 1 được thả không vận tốc đầu từ đỉnh A của một máng nghiêng AC có

góc nghiêng α so với phương ngang. Cùng lúc đó, từ điểm B cùng độ cao với C ($BA \perp BC$)



người ta ném vật 2 với vận tốc đầu v_0 . Biết rằng hai vật đồng thời gặp nhau tại C và khi ấy chúng có cùng độ lớn vận tốc. Cho $AB = h = 1\text{m}$, $g = 10\text{ m/s}^2$, bỏ qua mọi ma sát. Hãy xác định

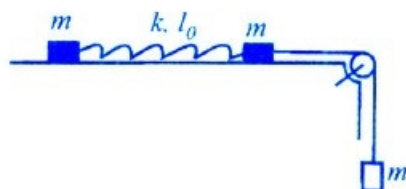
a) Góc α và góc ném β của vật 2.

b) Vận tốc ban đầu v_0 của vật 2.

NGUYỄN NHẬT HUY

(Hà Nội)

Bài L2/432. Trên mặt bàn nhẵn nằm ngang, người ta đặt hai khối hộp nhỏ như nhau, khối lượng m , nối với nhau bằng lò xo nhẹ có độ cứng k , chiều dài lò xo khi không biến dạng là l_0 . Khối hộp bên phải nối với một vật nặng cũng có khối lượng m bằng sợi dây nhẹ, không giãn vắt qua ròng rọc nhẹ (hình vẽ).



Tại thời điểm nào đó, người ta thả vật nặng và hệ bắt đầu chuyển động không vận tốc.

Tìm khoảng cách cực tiểu và cực đại giữa hai khối hộp. Sau bao lâu kể từ khi thả vật nặng thì khoảng cách đó cực tiểu? cực đại?

TRẦN KHÁNH HẢI

(Thừa Thiên - Huế)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/432. (For 6th grade) The first 2013 natural numbers from 1 to 2013 are written in a line in some order. Subtract one from the first number, two from the second ... and 2013 from the 2013th number. Is the product of the resulting 2013 numbers odd or even?

T2/432. (For 7th grade) Let ABC be an acute triangle with orthocenter O . AO meets BC at D . Pointes E and F are on sides AB and AC

respectively such that $DE = DB$, $DF = DC$. Prove that DA is the angle bisector of angle EDF .

T3/432. Find all positive integers a, b ($a \geq 2, b \geq 2$) so that $a + b$ is a multiple of 4 and $\frac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{1}{2}$.

T4/432. Find x, y such that $\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 2 \\ x^3 + 2y^2 \leq y^3 + 2x \end{cases}$
(Xem tiếp trang 26)



★ **Bài T1/428.** Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c (có thể bằng nhau) sao cho
 $abc < ab + bc + ca$.

Lời giải. Vì a, b, c có vai trò như nhau nên ta giả sử $a \leq b \leq c$. Từ đó $ab + bc + ca \leq 3bc$. Theo giả thiết có $abc < ab + bc + ca$ (1)
 nên $abc < 3bc$ suy ra $a < 3$; mà a là số nguyên tố, nên $a = 2$. Thay $a = 2$ vào (1) ta được

$$2bc < 2b + 2c + bc \Leftrightarrow bc < 2(b + c) \quad (2)$$

Vì $b \leq c$ nên $bc < 4c$, suy ra $b < 4$. Vì b là số nguyên tố, nên chỉ có thể $b = 2$ hoặc $b = 3$.

• Với $b = 2$, thay vào (2) được $2c < 4 + 2c$, điều này đúng với c là số nguyên tố tùy ý.

• Với $b = 3$, thay vào (2) được $3c < 6 + 2c$, suy ra $c < 6$. Vì c là số nguyên tố nên $c = 3$ hoặc $c = 5$ đều thỏa mãn giả thiết.

Kết luận: Các bộ ba số thỏa mãn đề bài là $(2; 2; c)$, $(2; 3; 3)$, $(2; 3; 5)$, trong đó c là số nguyên tố tùy ý và các hoán vị của chúng. □

➤ **Nhận xét.** Một số bạn xét các số nghịch đảo của a, b, c nên trình bày dài hơn. Các bạn có lời giải đúng và trình bày sáng sủa là:

Phú Thọ: Nguyễn Dương Hoàng Anh, Trần Minh Hiếu, Nguyễn Thành Vinh, Lê Nguyễn Quỳnh Trang, 6C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Triệu Chí Công, Thạch Tiến Quảng, Quận Thị Thu Huyền, 6A2, Nguyễn Thị Thương, 6A1, Đỗ Trọng Tấn, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Văn Quyền, 6A1, Trần Văn

Tuân, Kim Đình Hợp, 6A5, THCS Yên Lạc, Nguyễn Khánh Linh, Nguyễn Ngọc Xuân Huy, Nguyễn Thành Vinh, Trần Thanh Huyền, Nguyễn Tường Vy, Nguyễn Ngọc Bảo Linh, 6A1, THCS và THPT Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; **Hà Nội:** Tạ Lê Ngọc Sáng, 6E, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam; **Nghệ An:** Phan Đàm Tùng Lâm, 6A3, THCS Trà Lĩnh, Con Cuông; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Đại Dương, 6B, THCS Nguyễn Kim Vang, Văn Quang Duy, Cao Nữ Xuân Lan, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, Nguyễn Phan Trà My, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/428.** Cho tam giác ABC vuông tại

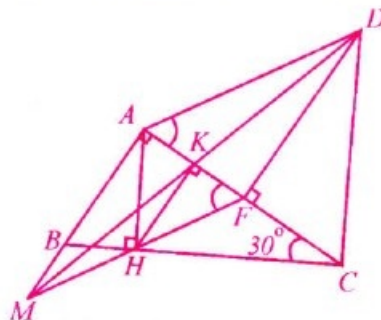
A với đường cao AH , $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Dựng tam giác đều ACD (D và B khác phía đối với AC). Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AC . Đường thẳng qua H và song song với AD cắt AB kéo dài tại M . Chứng minh rằng ba điểm D, K, M thẳng hàng.

Lời giải. (Hình vẽ) Gọi F là trung điểm của AC thì $DF \perp AC$. Nối H với F ta có $\widehat{CAH} = 60^\circ$, $AH = \frac{AC}{2}$ nên AHF là tam giác đều

suy ra $\widehat{AFH} = \widehat{CAD} = 60^\circ$ nên $HF \parallel AD$ (1)

Lại có $MH \parallel AD$ (2)

Từ (1) và (2) ta có ba điểm M, H, F thẳng hàng.



Mặt khác $HK \perp AC$, do đó $AK = KF$.

Mà $\triangle AMF = \triangle FDA$ (g.c.g) cho nên $AM = DF$.

Từ đó $\triangle AMK = \triangle FDK$ (c.g.c), dẫn đến

$\widehat{AKM} = \widehat{DKF}$. Do đó

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCD PHONG TRẢO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẬP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÉ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

$$\widehat{DKM} = \widehat{DKF} + \widehat{FKM} = \widehat{AKM} + \widehat{FKM} \\ = \widehat{AKF} = 180^\circ.$$

Vậy ba điểm D, K, M thẳng hàng. $\square$

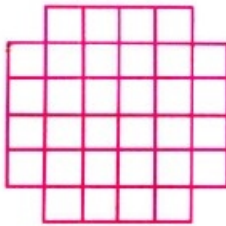
► **Nhận xét.** 1) Bài toán này có nhiều cách giải. Lưu ý một số bạn khi viết hai tam giác bằng nhau không đúng thứ tự các đỉnh tương ứng.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn:

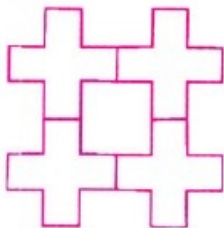
Phú Thọ: Nguyễn Văn Thuận, 7/8; Nguyễn Tiến Long, 7A1, THCS Lâm Thao; **Khổng Tú Uyên,** 7A, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Nghệ An:** Nguyễn Thùy Linh, Nguyễn Thị Hằng, Dương Xuân Long, Đặng Quang Quân, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Phạm Thị Thu Trang, Nguyễn Lệ Giang, Trần Thị Hương Ly, Lê Thị Thu Uyên, Trần Minh Hiếu, Trần Thị Tường Vy, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** Phạm Thiên Trang, Võ Quang Phú Thời, Nguyễn Tấn Phúc, Nguyễn Thị Hạ Vy, Nguyễn Thị Hạnh, 7A; Nguyễn Tấn Duy, 7B, THCS Hành Phước; Nguyễn Đại Dương, 7B, THCS Kim Vang, Nghĩa Hành; Trần Thị Mỹ Ninh, Nguyễn Phan Trà My, 7A, Võ Công Phát, 7C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

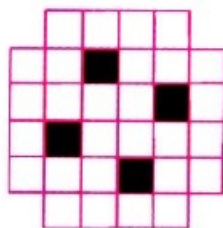
★ **Bài T3/428.** Xét bàn cờ có dạng hình vuông 6×6 ô vuông bị khoét đi 4 ô ở 4 góc (hình vẽ). Hãy tính số ô vuông nhỏ nhất có thể tô đen sao cho 5 ô vuông tùy ý tạo thành một hình dấu + luôn có ít nhất 1 ô được tô đen.



Lời giải. Vì có thể cắt từ bàn cờ ra 4 hình dấu + đôi một không có ô nào chung như hình 1 nên số ô cần tô đen không nhỏ hơn 4. Mặt khác, ta có thể tô đen 4 ô như trong hình 2. Khi đó ta thấy hình dấu + tùy ý nào cũng có ít nhất 1 ô đen. Vậy số ô đen ít nhất cần tô là 4.



Hình 1



Hình 2

► **Nhận xét.** Đây là bài toán tô màu. Điều mấu chốt là xác định được 4 hình dấu + không có ô nào chung để khẳng định số ô cần tô đen không nhỏ hơn 4.

Có rất ít bạn tham gia giải bài này. Các bạn có lời giải đúng là:

Hà Nam: Đỗ Đăng Dương, 9A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/428.** Cho a, b, c là các số thực nằm trong đoạn $[1; 2]$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 2(ab + bc + ca) \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt[3]{a^2} = x, \sqrt[3]{b^2} = y, \sqrt[3]{c^2} = z$

$(x, y, z \in [1; \sqrt[3]{4}])$ thì

$$a^2 = x^3, b^2 = y^3, c^2 = z^3 \text{ và } a = \sqrt{x^3}, b = \sqrt{y^3}, c = \sqrt{z^3}.$$

Khi đó BĐT (1) cần chứng minh trở thành

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3 y^3} + \sqrt{y^3 z^3} + \sqrt{z^3 x^3}) \quad (2)$$

Do vai trò x, y, z như nhau nên không giảm tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z \geq 1$. Ta luôn có

$$x(x-y)^2 + z(y-z)^2 + (z+x-y)(x-y)(y-z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$$

$$\geq xy(x+y) + yz(z+y) + zx(z+x) \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm ta có $xy(x+y) \geq xy(2\sqrt{xy}) = 2\sqrt{x^3 y^3}$.

$$\text{Tương tự } yz(y+z) \geq 2\sqrt{y^3 z^3}; \quad zx(z+x) \geq 2\sqrt{z^3 x^3}.$$

$$\text{Vì vậy } xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

$$\geq 2(\sqrt{x^3 y^3} + \sqrt{y^3 z^3} + \sqrt{z^3 x^3}) \quad (4)$$

Từ BĐT (3) và (4) suy ra BĐT (2). Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. Do đó BĐT (1) đã được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. $\square$

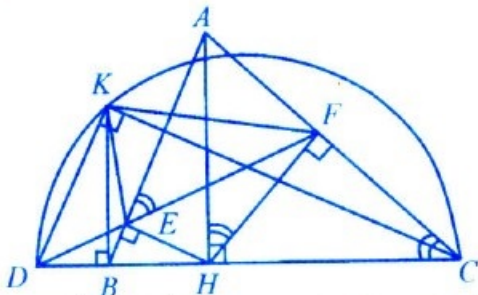
► **Nhận xét.** Đa số các bạn tham gia giải bài này đều đưa ra được nhận xét bài toán chỉ cần điều kiện a, b, c là các số thực không âm là đủ. TUYÊN DƯƠNG các bạn sau có lời giải tốt.

Hà Nội: Vũ Tuấn Hiền, 9D, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam; **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Thuận, 8A3, THCS Lâm Thao; **Kiểm Thế Hưng,** 8C, THCS Thị trấn Sông Thao, Cẩm Khê; **Hà Nam:** Nguyễn Thanh Tùng, 9A1, THCS Nguyễn Khuyến, Bình Lục; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/428.** Cho tam giác không vuông ABC ($AB < AC$) với đường cao AH . Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB và AC . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại D . Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính CD . Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với CD cắt nửa đường tròn trên tại K . Chứng minh rằng DK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KEF .

Lời giải. (Hình vẽ)



Từ giả thiết ta thấy tứ giác $AEHF$ nội tiếp, nên $\widehat{AFE} = \widehat{AHF} = \widehat{ACB}$. Suy ra tứ giác $BEFC$ nội tiếp, dẫn đến

$$\widehat{DEB} = \widehat{DCF} \Rightarrow \triangle DEB \sim \triangle DCF \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{DB}{DF}, \text{ hay } DB \cdot DC = DE \cdot DF.$$

Mặt khác $DK^2 = DB \cdot DC$, do đó $DK^2 = DE \cdot DF$

$$\Rightarrow \frac{DE}{DK} = \frac{DK}{DF}. \text{ Từ đây ta có}$$

$$\triangle DEK \sim \triangle DKF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{DKE} = \widehat{DFK}.$$

Vậy DK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KEF . $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn hơn cả:

Phú Thọ: Đinh Minh Hà, 8A1, Nguyễn Đức Thuận, 8A3, Nguyễn Tiến Dũng, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Mùng, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nam:** Đỗ Đăng Dương, Nguyễn Hoàng Giang, Hoàng Đức Mạnh, 9A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Hà Tĩnh:** Trần Đoàn Trang, 9C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Bình Định:** Phan Thanh Hào, 9A1, THCS Bùi Thị Xuân, Trương Minh Nhật Quang, 9A3, THCS Lương Thế Vinh, TP. Quy Nhơn; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T6/428.** Cho phương trình

$ax^3 - x^2 + ax - b = 0$ ($a \neq 0, a \neq b$) có ba nghiệm thực dương. Hãy tìm giá trị lớn nhất

$$\text{của biểu thức } P = \frac{11a^2 - 3\sqrt{3}ab - \frac{1}{3}}{9b - 10(\sqrt{3}a - 1)}.$$

Lời giải. Gọi p, q, r là ba nghiệm của phương trình $ax^3 - x^2 + ax - b = 0$ (*)

Áp dụng hệ thức Viète cho (*) ta thu được

$$p + q + r = \frac{1}{a} \quad (1) \quad pq + qr + rp = 1 \quad (2)$$

$$pqr = \frac{b}{a} \quad (3) \text{ Từ (2) gọi ý cho ta đặt}$$

$$p = \tan \frac{A}{2}; q = \tan \frac{B}{2}; r = \tan \frac{C}{2}; A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A + B + C = \pi.$$

$$\text{Từ (1) suy ra } \frac{1}{a} = \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

Từ (1) và (3) suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1+b}{a} &= \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \\ &\geq \frac{10\sqrt{3}}{9} \text{ (Xem Bài T8/286, TH&TT số 290,} \end{aligned}$$

$$\text{tháng 8 năm 2001) dẫn đến } b \geq \frac{10\sqrt{3}}{9}a - 1.$$

$$\text{Từ đó } 9b - 10(\sqrt{3}a - 1) > 0.$$

$$\text{Để thấy } P \leq \frac{11a^2 - 3\sqrt{3}a\left(\frac{10\sqrt{3}}{9}a - 1\right) - \frac{1}{3}}{9\left(\frac{10\sqrt{3}}{9}a - 1\right) - 10(\sqrt{3}a - 1)}$$

$$= a^2 + 3\sqrt{3}a - \frac{1}{3} = \left(a^2 - \frac{1}{3}\right) + 3(\sqrt{3}a - 1) + 3.$$

$$\text{Từ (4) suy ra } a^2 - \frac{1}{3} \leq 0; \sqrt{3}a - 1 \leq 0 \text{ (lưu ý } a > 0). \text{ Do đó } P \leq 3. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và}$$

chỉ khi $a = \frac{1}{\sqrt{3}}; b = \frac{1}{9}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 3. $\square$

► **Nhận xét.** Một số bạn cũng cho lời giải đúng bằng cách ước lượng trội để từ đó có thể thay cho việc đi tìm GTLN của P ta đi tìm GTLN của một hàm số một biến rồi suy ra kết quả GTLN của P cũng bằng 3. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thanh Hoá: Bùi Công Tuấn, 10A4, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hoá; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Sơn, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP.Vinh; **Tiền Giang:** Nguyễn Minh Chánh, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Cà Mau:** Lưu Giang Nam, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, TP. Cà Mau.

TẠ NGỌC TRÍ

★ Bài T7/428. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x - \frac{1}{4}} + \sqrt{y - \frac{1}{4}} = \sqrt{3} \\ \sqrt{y - \frac{1}{16}} + \sqrt{z - \frac{1}{16}} = \sqrt{3} \\ \sqrt{z - \frac{9}{16}} + \sqrt{x - \frac{9}{16}} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq \frac{9}{16}; y \geq \frac{1}{4}; z \geq \frac{9}{16}$.

Đặt $a = x - \frac{19}{12}; b = y - \frac{7}{12}; c = z - \frac{13}{12}$.

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{a + \frac{4}{3}} + \sqrt{b + \frac{1}{3}} = \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\sqrt{b + \frac{25}{48}} + \sqrt{c + \frac{49}{48}} = \sqrt{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{c + \frac{25}{48}} + \sqrt{a + \frac{49}{48}} = \sqrt{3} \quad (3)$$

Để ý rằng $\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3}$ và $\sqrt{\frac{25}{48}} + \sqrt{\frac{49}{48}} = \sqrt{3}$.

Ta có

Nếu $a > 0, b > 0$ thì $\sqrt{a + \frac{4}{3}} + \sqrt{b + \frac{1}{3}} > \sqrt{3}$;

Nếu $a < 0, b < 0$ thì $\sqrt{a + \frac{4}{3}} + \sqrt{b + \frac{1}{3}} < \sqrt{3}$.

Trong cả hai trường hợp, phương trình (1) không thỏa mãn. Suy ra $ab \leq 0$.

Cũng tương tự, từ các phương trình (2), (3) suy ra $bc \leq 0; ca \leq 0$.

Do đó $(abc)^2 \leq 0 \Rightarrow abc = 0$. Dễ thấy, nếu một trong ba số a, b, c bằng 0 thì từ hệ suy ra hai số còn lại bằng 0.

Từ đó tìm được nghiệm duy nhất của HPT đã cho là $(x; y; z) = \left(\frac{19}{12}; \frac{7}{12}; \frac{13}{12}\right)$. $\square$

► **Nhận xét.** Có thể giải bài toán bằng các cách sử dụng phương pháp hình học: Xét tam giác đều ABC cạnh bằng $\sqrt{3}$; chọn điểm P trong tam giác có khoảng

cách tới ba cạnh AB, BC, CA lần lượt bằng $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$;

kẻ PM, PN, PK tương ứng vuông góc với các cạnh AB, BC, CA ; sử dụng các hệ thức trong tam giác và từ các hệ thức $MA + MB = \sqrt{3}; NB + NC = \sqrt{3}; KC + KA = \sqrt{3}$ suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho như trên. Tuy nhiên làm như vậy cũng dài và phức tạp. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Hữu Nhân, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Thái Bình:** Trịnh Thị Thùy Dương, Nguyễn Hải Linh Chi, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** Lê Kim Nhã, Lê Hồng Đức, Trần Phương Thảo, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Cà Mau:** Lưu Giang Nam, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T8/428.** Cho hai hằng số thực a, b thỏa mãn $ab > 0$. Xét dãy số (u_n) với $n=1, 2, 3, \dots$ được cho bởi $u_1 = a, u_{n+1} = u_n + bu_n^2$

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$.

Lời giải. Nhận xét rằng nếu $a > 0$ thì $b > 0$ và chứng minh bằng quy nạp theo $n = 1, 2, 3, \dots$ thì $u_n > 0 \forall n$; nếu $a < 0$ thì $b < 0$ và $u_n < 0 \forall n = 1, 2, 3, \dots$. Chú ý nếu dãy số (u_n) được xác định đối với hai số a, b thì dãy số $(-u_n)$ được xác định đối với hai số $-a, -b$ và với dãy số

$(-u_n)$ thì tổng $\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}}$ không thay

đổi giá trị. Do đó không mất tính tổng quát, ta chỉ cần giải bài toán với một trường hợp, chẳng hạn $a > 0, b > 0$.

Ta có $u_{n+1} = u_n + b.u_n^2$ với $\forall n = 1, 2, 3, \dots$. Suy ra $u_1 < u_2 < u_3 < \dots$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ vì phương trình giới hạn $u = u + b.u^2$ không có nghiệm $u \in \mathbb{R}^+$. Bởi vậy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{u_k^2}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^n \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k u_{k+1}} \\ &= \frac{1}{b} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right) = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right).\end{aligned}$$

$$\text{Nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{1}{b u_1} = \frac{1}{ab}.$$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán giới hạn dãy số dạng cơ bản. Hoan nghênh các bạn học sinh lớp 10 sau có lời giải đúng:

Hà Nam: Bạch Xuân Đạo, 10T, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý; **Hưng Yên:** Trần Bá Trung, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Phạm Thị Mỹ Duyên, Hoàng Xuân Khánh, Dương Thị Thủy Quỳnh, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Phạm Trung Dũng, Thái Doãn Hùng, Đặng Đình Lâm, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Việt Hà, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Đặng Ngọc Tuấn, 10T, THPT chuyên Quảng Bình; **Tiền Giang:** Nguyễn Ngọc Minh Tú, 10T, THPT chuyên Tiền Giang.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T9/428.** Tìm tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện: Tồn tại đa thức $f(x)$ với các hệ số đều nguyên và có bậc lớn hơn 1 sao cho với mọi số nguyên tố p và với mọi số tự nhiên a, b ta có nếu p là ước của $(ab - k)$ thì p là ước của $(f(a)f(b) - k)$.

Lời giải. (Theo các bạn Lê Hồng Đức, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**, Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**).

Với $k = 1$, dễ kiểm tra đa thức $f(x) = x^n$, $n > 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Với $k > 1$, ta có nhận xét sau:

Nếu p là số nguyên tố và $(a, p) = 1$ thì tồn tại $b \in \mathbb{N}$ để $ab \equiv k \pmod{p}$ và

$$g(a) \equiv a^n f(b) \pmod{p} \quad (1)$$

trong đó $f(x) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} x^{n-i}$, $a_i \in \mathbb{Z}$;

$$g(x) = x^n f\left(\frac{k}{x}\right) = x^n \sum_{i=0}^n a_{n-i} \frac{k^{n-i}}{x^{n-i}} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} k^{n-i} x^i \quad (2)$$

Thật vậy, vì $(a, p) = 1$ nên tồn tại $b \in \mathbb{N}$ để $ab \equiv k \pmod{p}$. Khi đó từ (2) ta có

$$\begin{aligned}g(a) &= \sum_{i=0}^n a_{n-i} k^{n-i} a^i \equiv \sum_{i=0}^n a_{n-i} (ab)^{n-i} a^i \pmod{p} \\ &= a^n \sum_{i=0}^n a_{n-i} b^{n-i} = a^n f(b).\end{aligned}$$

Nhận xét trên đã được chứng minh.

$$\text{Từ (1)} \quad g(a)f(a) \equiv a^n f(b)f(a) \equiv ka^n \pmod{p}$$

$$\Rightarrow g(a)f(a) - ka^n \equiv 0 \pmod{p}, \forall a \text{ mà } (a, p) = 1 \quad (3)$$

Nếu chọn $p > \max_{1 \leq a \leq 3n} |g(a)f(a) - ka^n|$, $p > 3n$

thì với mọi $1 \leq a \leq 3n$ ta có

$$g(a)f(a) - ka^n = 0.$$

Vì $\deg(g(x)f(x) - kx^n) \leq 2n$ nên ta suy ra

$$g(x)f(x) = kx^n, \forall x \quad (4)$$

Vì $\deg f = n$ nên $g(x) = \text{const.}$

Do công thức của $g(x)$ nên $g(x) = a_n k^n$.

Do (4) nên $g(1)f(1) = k \Rightarrow k : g(1) \Rightarrow k : a_n k^n$, điều này vô lý vì $n > 1$.

Vậy $k = 1$ là giá trị duy nhất cần tìm. □

► **Nhận xét.** Chỉ có sáu bạn tham gia giải bài này và có bốn bạn có đáp số đúng ($k = 1$) nhưng lập luận còn chưa chặt chẽ và đầy đủ.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/428.** Cho $a_i \in [0; \alpha]$ ($i = \overline{1, n}$), ($\alpha > 0$).

Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^n (\alpha - a_i) \leq \alpha^n \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S_i + \alpha} \right) \quad (1)$$

trong đó $S_i = \sum_{k=1}^n a_k - a_i$ với mọi $i = \overline{1, n}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Không mất tính tổng quát, coi $a_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, thì $S_i \geq S_1$ hay

$$\frac{a_i}{S_i + \alpha} \geq \frac{a_i}{S_1 + \alpha} \text{ với mọi } i \in \{2, \dots, n\}.$$

Vậy để chứng minh (1), ta đi chứng minh

$$\prod_{i=1}^n (\alpha - a_i) \leq \alpha^n \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S_1 + \alpha} \right)$$

$$= \alpha^n \left(\frac{S_1 - \sum_{i=1}^n a_i + \alpha}{S_1 + \alpha} \right) = \alpha^n \left(\frac{\alpha - a_1}{S_1 + \alpha} \right).$$

Hay $\prod_{i=1}^n (\alpha - a_i)(S_1 + \alpha) \leq \alpha^n (\alpha - a_1) \quad (2)$

Khi $a_1 = \alpha$ thì BĐT (2) hiển nhiên đúng.

Xét $0 \leq a_1 < \alpha$, thì

$$(2) \Leftrightarrow \prod_{i=2}^n (\alpha - a_i)(S_1 + \alpha) \leq \alpha^n \quad (3)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho n số không âm, ta có

$$\prod_{i=2}^n (\alpha - a_i)(S_1 + \alpha) \leq \left(\frac{\sum_{i=2}^n (\alpha - a_i) + S_1 + \alpha}{n} \right)^n$$

$$= \left(\frac{n\alpha + S_1 - \sum_{i=2}^n a_i}{n} \right)^n = \alpha^n.$$

Vậy BĐT (3) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \alpha$. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là dạng toán áp dụng BĐT Cauchy. Có nhiều bạn gửi lời giải đến tòa soạn và đa số đều giải theo cách trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Văn Long, 10A2, THPT Yên Lạc, Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, Nguyễn Hữu Cường, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Nguyên:** Nguyễn Văn Tuấn, 11A11, THPT Đồng Hỷ; **Thái Bình:** Nguyễn Đình An, Trịnh Thị Thủy Dương, Nguyễn Hải Linh Chi, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; **Hải Phòng:** Lê Huỳnh Đạt, 10 Tin, THPT chuyên Trần Phú; **Bình Định:** Huỳnh Mạnh Diễn, 11T1, THPT Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T11/428.** Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. Tia Ox song song với AB và cắt BC tại D , tia Oy song song với BC và cắt CA tại E , tia Oz song song với CA và cắt AB tại F . Chứng minh rằng

a) $S_{DEF} \leq \frac{1}{3} S_{ABC}$;

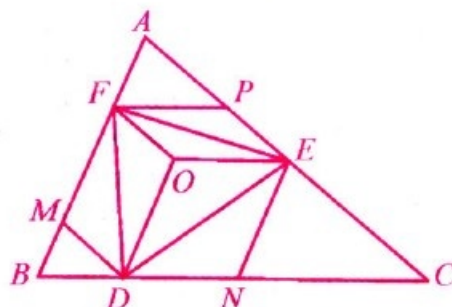
b) $OD \cdot OE \cdot OF \leq \frac{1}{27} \cdot AB \cdot BC \cdot CA$.

Lời giải. (Hình vẽ) Giả sử các đường thẳng qua D, E, F lần lượt song song với CA, AB, BC và cắt AB, BC, CA tại M, N, P . Đặt $S_{ABC} = S, S_{AFP} = S_1, S_{BMD} = S_2, S_{CNE} = S_3$.

a) Vì các tứ giác $ODNE, OEPF, OFMD$ là hình bình hành nên $S_{DEF} = \frac{1}{2} S_{DNEPFM}$. Từ đó,

BĐT cần chứng minh tương đương với

$$S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3} S.$$



Do $\triangle AFP \sim \triangle MBD \sim \triangle ENC \sim \triangle ABC$ nên

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{FP}{BC} \right)^2 = \left(\frac{OE}{BC} \right)^2 = \left(\frac{DN}{BC} \right)^2.$$

Tương tự $\frac{S_2}{S} = \left(\frac{BD}{BC} \right)^2, \frac{S_3}{S} = \left(\frac{NC}{BC} \right)^2.$

Sử dụng BĐT $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$

Suy ra

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \left(\frac{BD}{BC} \right)^2 + \left(\frac{DN}{BC} \right)^2 + \left(\frac{NC}{BC} \right)^2$$

$$\geq \frac{1}{3} \left(\frac{BD}{BC} + \frac{DN}{BC} + \frac{NC}{BC} \right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O là trọng tâm tam giác ABC .

b) Sử dụng BĐT Cauchy ta có

$$\frac{OD}{AB} \cdot \frac{OE}{BC} \cdot \frac{OF}{CA} = \frac{\sqrt{S_1} \cdot \sqrt{S_2} \cdot \sqrt{S_3}}{\sqrt{S} \cdot \sqrt{S} \cdot \sqrt{S}} \leq \frac{1}{27} \left(\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} \right)^3$$

$$= \frac{1}{27} \left(\frac{BD + DN + NC}{BC} \right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O là trọng tâm tam giác ABC . $\square$

► **Nhận xét.** Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Văn Long, 10A2, THPT Yên Lạc;
Hưng Yên: Nguyễn Long Duy, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Việt Hà, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** Hoàng Xuân Khánh, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1; **Quảng Ngãi:** Tống Thành Nguyễn, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T12/428.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B . Điểm C cố định thuộc (O) và điểm D cố định thuộc (O') . P di chuyển trên tia đối của tia BA . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC, PBD theo thứ tự cắt BD, BC tại điểm thứ hai E, F . Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng EF luôn thuộc đường thẳng cố định khi P di chuyển.

Lời giải. Trước hết ta có ba bổ đề sau:

Bổ đề 1. Cho hai đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau tại A, B . Đường thẳng m đi qua B theo thứ tự cắt $(O), (O')$ lần thứ hai tại M, M' . Đường thẳng n đi qua B và theo thứ tự cắt $(O), (O')$ lần thứ hai tại N, N' . Khi đó các tam giác AMM' và ANN' đồng dạng cùng hướng.

Bổ đề 2. Nếu các điểm A, B, C thẳng hàng; các điểm A', B', C' thẳng hàng và các tam giác OAB, OAC theo thứ tự đồng dạng cùng hướng với các tam giác $O'A'B', O'A'C'$ thì

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Bổ đề 3. Nếu các điểm A, B, C thẳng hàng; các điểm A', B', C' thẳng hàng và

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

thì trung điểm của các đoạn AA', BB', CC' cùng thuộc một đường thẳng.

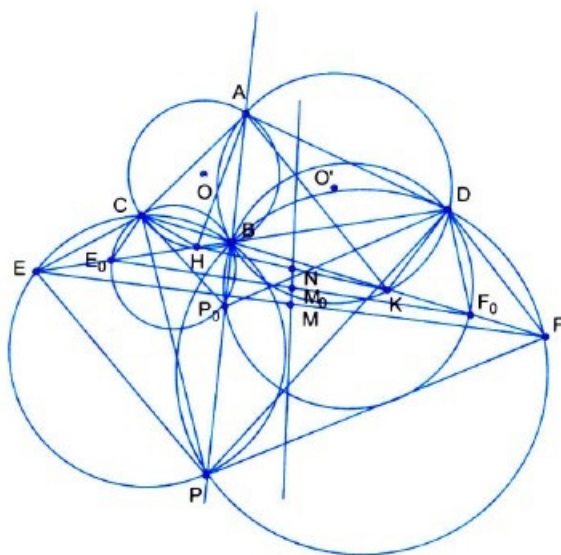
Bạn đọc tự chứng minh ba bổ đề trên.

Trở lại giải bài toán **T12/428**.

Gọi H, K theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BD, BC với các đường tròn $(O), (O')$. Rõ ràng các điểm H, K cố định.

Lấy điểm P_0 cố định trên AB .

Đường tròn ngoại tiếp các tam giác P_0BC, P_0BD theo thứ tự cắt BD, BC lần thứ hai tại E_0, F_0 , khi đó E_0, F_0 là các điểm cố định. Gọi N, M_0, M theo thứ tự là trung điểm của HK, E_0F_0, EF (hình vẽ).



Theo Bổ đề 1, các tam giác CHE_0, CHE theo thứ tự đồng dạng cùng hướng với các tam giác CAP_0, CAP .

Do đó theo Bổ đề 2 có $\frac{HE_0}{HE} = \frac{AP_0}{AP}$.

Tương tự $\frac{KF_0}{KF} = \frac{AP_0}{AP}$.

Vậy $\frac{HE_0}{HE} = \frac{KF_0}{KF}$.

Do đó, theo Bổ đề 3 có N, M_0, M thẳng hàng.

Nói cách khác M luôn thuộc đường thẳng cố định, đó là đường thẳng NM_0 . □

► **Nhận xét.** 1) Bài toán vẫn đúng khi điểm P di chuyển trên đường thẳng AB (khác điểm B).

2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tương đối tốt:

Vĩnh Phúc: Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** Nguyễn Hải Linh Chi, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; **Nam Định:** Vũ Tuấn Anh, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Lê Hồng Đức, Lê Kim Nhã, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Bình Định:** Đoàn Hữu Thành, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/428.** Đặt điện áp $u = 400 \cos 100\pi t$ (u tính bằng V, t tính bằng s) vào hai đầu đoạn mạch AB gồm điện trở thuần 50Ω mắc nối tiếp với đoạn mạch X. Cường độ dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch là 2A. Biết ở thời điểm t , điện áp tức thời giữa hai đầu AB có giá trị 400V; ở thời điểm $t + \frac{1}{400}$ (s),

cường độ dòng điện tức thời qua đoạn mạch bằng không và đang giảm. Hỏi công suất tiêu thụ điện của đoạn mạch X là bao nhiêu?

Lời giải. Giả sử biểu thức của dòng điện có dạng $i = 2\sqrt{2} \cos(100\pi t - \varphi)$. Ở thời điểm t , hiệu điện thế có giá trị 400V nên

$$\cos 100\pi t = 1 \Rightarrow \sin 100\pi t = 0 \quad (1)$$

Ở thời điểm $\left(t + \frac{1}{400}\right)$ s, theo bài thì cường độ dòng điện bằng không, nên

$$\cos\left(100\pi\left(t + \frac{1}{400}\right) - \varphi\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 100\pi t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) - \sin 100\pi t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

Vậy u chậm pha hơn i một góc $\frac{\pi}{4}$.

Công suất tiêu thụ trên đoạn mạch X là

$$P_X = P - P_R = UI \cos \varphi - I^2 R.$$

Thay số ta được $P_X = 200 \text{ W}$. □

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Hòa Bình: Đặng Hữu Hiếu, 12Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa:** Lê Thị Quỳnh, 11C1, THPT Hoàng Hóa IV; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Thùy Linh, 10A1, THPT Hương Khê.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/428.** Trên trục chính của một thấu kính có điểm sáng S cách quang tâm 30cm. Di chuyển thấu kính ra xa vật với vận tốc không đổi $v = 5 \text{ cm/s}$.

a) Tính tiêu cự của thấu kính, biết rằng khi thấu kính di chuyển được 2 giây thì vận tốc ảnh của S bắt đầu đổi chiều.

b) Chứng minh lúc đó khoảng cách từ ảnh đến vật ngắn nhất.

Lời giải. a) Gọi khoảng cách của vật và ảnh khi chưa di chuyển là d_0 và $d'_0 = \frac{df}{d-f}$ (1)

Sau khi thấu kính di chuyển được t giây thì khoảng cách tương ứng của vật và ảnh là

$$d_t = d_0 + 5t \text{ và } d'_t = \frac{(d_0 + 5t)f}{d_0 + 5t - f} \quad (2)$$

Sau t giây ảnh di chuyển được quãng đường

$$S = (d_0 + d'_0) - (d_t + d'_t)$$

$$\Rightarrow S = \frac{30f}{30-f} - 5t - \frac{30+5t}{30+5t-f} \quad (3)$$

Khi $t = 2 \text{ s}$ thì vận tốc của ảnh đổi chiều, tại thời điểm đó thì $v = 0$.

Vì $v = s'$, lấy đạo hàm phương trình (3) sau đó thay $t = 2 \text{ s}$ ta tính được $f = 20 \text{ cm}$.

b) Khoảng cách giữa vật và ảnh tại mọi vị trí

$$L = d_t + d'_t = \frac{d_t^2}{d_t - f}.$$

Từ (2) ta thấy khi $t = 2 \text{ s}$ thì $d_t = 40 \text{ cm}$. Khi đó $L' = 0$.

Vậy tại thời điểm $t = 2 \text{ s}$ thì khoảng cách giữa vật và ảnh cực tiểu và $L_{\min} = 4f = 80 \text{ cm}$. □

► **Nhận xét.** Các bạn gửi bài đến Toà soạn đều có lời giải đúng.

Câu a): Bằng cách tính khoảng cách sau khi dịch chuyển giữa vật và ảnh rồi tính ra biểu thức của vận tốc. Thay $t = 2 \text{ s}$ vào biểu thức vận tốc và tính được $f = 20 \text{ cm}$. Trong số các lời giải, cách giải của bạn Nguyễn Nhật Hân, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi giải bằng cách tính tọa độ ảnh, từ đó tính ra tiêu cự của thấu kính là cách giải hay.

Câu b): Các bạn có lời giải giống nhau là tính khoảng cách L giữa vật và ảnh, chứng minh tại thời điểm $t = 2 \text{ s}$ thì $L_{\min} = 4f$.

ĐẶNG THANH HẢI

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Trên TH&TT số 431, tháng 5 năm 2013, dòng 8 từ dưới lên, cột trái xin đọc lại như sau

Cho 100 số nguyên dương đầu tiên...

Thành thật xin lỗi bạn đọc

TH&TT

PROBLEMS...(Tiếp trang 17)

T5/432. Given a circle centered at O , and diameter AB . Point C , different from A and B , is chosen on circle (O) . Point P on AB such that $BP = AC$. The perpendicular from P to AC meet AC at H . The internal angle bisector of angle CAB intersects circle (O) at E and intersects PH at F . CF meets circle (O) at N . Prove that CN passes through the midpoint of AP .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/432. Let a, b, c be positive real numbers. Prove the following inequality:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b+c} + \frac{3}{a+b+c}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{c+a} + \frac{3}{a+b+c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} + \frac{2}{a+b} + \frac{3}{a+b+c}\right)^2 \geq \frac{81}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

T7/432. Triangle ABC is inscribed in circle (O) , another circle (O') touches AB, AC at P, Q respectively and touches circle (O) internally at S . The lines SP, SQ intersect (O) at other points M, N . Points E, D, F are the perpendicular feet of point S on AM, MN, NA respectively. Prove that $DE = DF$.

T8/432. The real numbers a, b, c satisfy the condition that the polynomial

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$$

has at least one real root. Determine all triple $(a; b; c)$ such that $a^2 + b^2 + c^2$ is smallest possible.

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/432. Let a and b be two real numbers such that $a^p - b^p$ is a positive integers for all prime number p . Prove that a and b are integers.

T10/432. The sequence (u_n) is given

$$\text{recursively as follows: } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{1+a} \\ \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_n} + 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

where $a \in \mathbb{R}, a \neq -1$.

Let $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, P_n = u_1 u_2 \dots u_n$.

Determine the value of the following expression $aS_n + P_n$.

T11/432. Determine all functions $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that

a) f is a decreasing function on $\mathbb{R}^+$;

b) $f(2x) = 2012^{-x} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$;

where $\mathbb{R}^+ = (0; +\infty)$.

T12/432. Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) . AD is a diameter of (O) . Point E belongs to the opposite ray of ray DA . The perpendicular through E to AD meets BC at T . TP is a tangent line to (O) such that P and A are on opposite sides of BC ; AP meets TE at Q . M is the midpoint of AQ ; TM meets AB, AC at X, Y respectively. Prove that M is the midpoint of XY .

SỬ DỤNG MỘT TÍNH CHẤT...(Tiếp trang 2)

Do đó ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Vậy đường tròn tâm I và đường tròn tâm K tiếp xúc nhau tại M . $\square$

BÀI TẬP

1. (Lớp 7) Cho tam giác ABC cân tại A . Các tia phân giác của góc ABC và góc ACB cắt AC, AB theo thứ tự tại F, E . Chứng minh rằng $EF \parallel BC$.

2. (Lớp 7) Cho tam giác ABC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A lấy điểm D sao cho $\widehat{BFC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$. Chứng minh rằng $\widehat{BCA} = \widehat{BDA}$.

3. (Lớp 7) Cho góc nhọn xOy . Vẽ tia Oz nằm

trong góc xOy sao cho $\widehat{xOz} = \frac{\widehat{yOz}}{2}$. Qua A trên tia Ox kẻ AH vuông góc với Ox tại H . AH cắt Oz tại B . Trên tia Bz lấy D sao cho $BD = BA$. Chứng minh rằng tam giác AOD cân.

4. (Lớp 7) Cho tam giác đều ABC . Trên cạnh AB, BC thứ tự lấy các điểm E, F sao cho $AE = \frac{1}{2}EB; BF = \frac{1}{2}FC$. AF cắt CE tại I . BI cắt EF tại H . Chứng minh rằng CH vuông góc với AB .

5. (Lớp 9) Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB và OCD tiếp xúc nhau.

HINTS AND ANSWERS TO HANOI OPEN MATHEMATICS COMPETITION 2013

(Problems presented in the No. 431 issued in May 2013)

SERNIOR SECTION

Q1. Answer (E).

Q2. Note that

$$f(x) = |x| + \left| \frac{1}{2013} - x \right| \geq |x| + \left| \frac{1}{2013} - |x| \right| \geq \frac{1}{2013}.$$

And $f(x) = \frac{1}{2013}$ for $x = \frac{1}{2013}$. Answer (B).

Q3. Note that $4x^3 + 3x = 2$, then $8x^3 + 6x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Answer (C).

Q4. Note that $[(n+1)\alpha] \leq [n\alpha + 1] = [n\alpha] + 1$ for all $n \in \mathbb{N}$. Hence $[(n+1)\alpha] - [n\alpha] \leq 1$ for all $n \in \mathbb{N}$. Answer (E).

Q5. Answer (C).

Q6. We have $C_{2013}^k = C_{2013}^{2013-k}$ and $C_{2013}^k < C_{2013}^q$ ($0 \leq k < q \leq 1006$). This implies

If $a = 1006$ there is'nt n .

If $a \in \{0, 1, 2, \dots, 1005\}$, then $n \in \{a+1, a+2, \dots, 2012-a\}$.

Q7. (Fig 1)

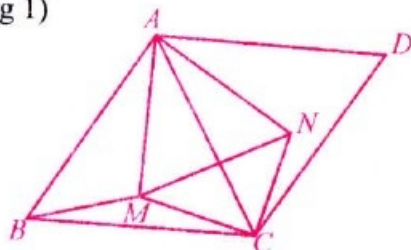


Figure 1

Putting $MA = a$; $MB = b$; $MC = c$. Then $a^2 = b^2 + c^2$. It is easy to check that $\triangle ANC = \triangle AMB$ then $NC = MB = b$.

In $\triangle MCN$ we find $NC^2 + MC^2 = b^2 + c^2 = a^2 = MN^2$, so $\widehat{MCN} = 90^\circ$. Hence

$$\widehat{MBC} + \widehat{MCB} = \widehat{NCD} + \widehat{MCB} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

It follows $\widehat{BMC} = 150^\circ$.

Q8. (Fig 2)



Figure 2

Write S_{ABC} := Area of ABC . Since $S_{ABC} = S_{ABE}$ ($= a$) then $CE \parallel AB$. $S_{BCD} = S_{ECD}$ follows $BE \parallel CD$. Similarly, we find $BD \parallel AE$, $DE \parallel AC$.

Let O be the common point of BD and CE . Put $S_{BOC} = x$. Since $ABOE$ is a parallelogram then $S_{ABE} = S_{BOE} = a$. Hence

$$2 = S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{BOE} + S_{CDE} + S_{BOC} = 3a + x.$$

$$\text{Thus } a = \frac{2-x}{3}.$$

Note that $\frac{S_{BOC}}{S_{DOC}} = \frac{S_{BOE}}{S_{DOE}} = \frac{S_{BOC} + S_{BOE}}{S_{DOC} + S_{DOE}}$ then we

have $\frac{a}{x} = \frac{x+a}{a} \Rightarrow 5x^2 - 10x + 4 = 0$. It follows

$$x = \frac{5 - \sqrt{5}}{5}; S_{ABC} = a = \frac{5 + \sqrt{5}}{15}.$$

Q9. Suppose that t_1, t_2, t_3 are three distinct real roots of $P(t)$. We have $P(t) = (t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$.

Then

$$P(Q(x)) = (Q(x)-t_1)(Q(x)-t_2)(Q(x)-t_3),$$

where $Q(x) := x^2 + x + 2013$ and $Q(x) - t_i \neq 0$, $i=1, 2, 3$, for all $x \in \mathbb{R}$.

Calculating the discriminants of $Q(x) - t_i$, we get $\Delta_i = 1 - 4(2013 - t_i) < 0$ and $2013 - t_i > \frac{1}{4}$.

Therefore

$$P(2013) = (2013 - t_1)(2013 - t_2)(2013 - t_3) \\ > \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}.$$

Q10. Let a, b be the side-lengths of the rectangle. Consider the case of all rectangles such that there exists a $p = 2(a + b)$ possessing the property $0 < p < 16$ with a given area S . Using the inequality $p \geq 4\sqrt{S}$, we find

$$M = \frac{16 - p}{p^2 + 2p} \leq \frac{16 - 4\sqrt{S}}{(4\sqrt{S})^2 + 2 \cdot 4\sqrt{S}} = \frac{4 - \sqrt{S}}{4S + 2\sqrt{S}}.$$

The equality holds iff $a = b$, i.e. $ABCD$ is a square.

Note that, if for all side-lengths of rectangles $p > 16$, then $M(p) = \frac{16 - p}{p^2 + 2p} < 0$ and for that case, there is no largest value of M . Indeed, it is easy to see that for every $M_0 < 0$, always there exists p such that $M(p) = \frac{16 - p}{p^2 + 2p} > M_0$.

Q11. The identity

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + 4px^3 + 6x^2 + 4qx + 1$ holds for all real numbers x means that $p = \frac{a+b+c+d}{4}$, $abcd = 1$. The AM - GM inequality gives $p \geq 1$ and $\min p = 1$ when $a = b = c = d = 1$.

On the other hand, $\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6} = 1$

and $\frac{abc+abd+acd+bcd}{4} = q$.

From the inequality

$$\left(\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}\right)^3 \geq \left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}\right)^2,$$

we find $q \leq 1$ and $\max q = 1$ when $a = b = c = d = 1$.

Q12. Consider the polynomial

$$Q(x) = 2x^2 - 1 - f(x).$$

Note that $\deg Q(x) \leq 2$ and $Q(-1) = 1 - f(-1) \geq 0$, $Q(0) = -1 - f(0) \leq 0$, $Q(1) = 1 - f(1) \geq 0$.

Then the equation $Q(x) = 0$ has at least two real roots in $[-1; 1]$. On the other hand,

$$Q(\sqrt{2}) = 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 1 - f(\sqrt{2}) = 0.$$

So $Q(x) \equiv 0$. It means that $f(x) = 2x^2 - 1$ and $f(\sqrt{2013}) = 2 \cdot 2013 - 1 = 4025$.

Q13. Using the inequalities

$$\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \frac{1}{\frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2}} \leq \frac{1}{2}; \quad \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \frac{1}{\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x}} \leq \frac{1}{2}.$$

Hence, for every root (x, y) of the system, we

$$\text{find } \begin{cases} xy = 1 \\ 1 = \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} + \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \leq 1. \end{cases}$$

So x, y must satisfy the system $\begin{cases} xy = 1 \\ \frac{x}{y^2} = \frac{y^2}{x} \\ \frac{x^2}{y} = \frac{y}{x^2} \end{cases}$

and then $x = y = 1$. Indeed, $(x; y) = (1; 1)$ satisfies the given system.

Q14. Rewrite the system in the form

$$\begin{cases} (x+1)(x-1)^2 = -\frac{1}{3}(y+1) \\ (y+1)(y-1)^2 = -\frac{1}{3}(z+1) \\ (z+1)(z-1)^2 = -\frac{1}{3}(x+1). \end{cases}$$

We find

$$(x+1)(y+1)(z+1) \left((x-1)^2 (y-1)^2 (z-1)^2 + \frac{1}{3} \right) = 0.$$

It follows $(x; y; z) = (-1; -1; -1)$ is a unique solution of the given system.

Q15. Write $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

(Xem tiếp trang 30)

TUYỂN CHỌN HỌC SINH....(Tiếp trang bìa 4)**Ngày thi thứ hai, 6.4.2013**

Bài 4. (7 điểm). Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{k}{a+b+c+1} \geq 3 + \frac{k}{4}.$$

Bài 5. (7 điểm). Cho tam giác nhọn ABC không cân, góc $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh BC , H là trực tâm và D, E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ A, B, C của tam giác ABC . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P , đường thẳng PH cắt đường thẳng IF tại Q .

a) Chứng minh rằng $\widehat{IQH} = \widehat{AIE}$.

b) Gọi K là trực tâm tam giác AEF và kí hiệu (J) là đường tròn ngoại tiếp tam giác DPK với tâm là J . Đường thẳng CK cắt (J) tại G ($G \neq K$), đường thẳng GI cắt (J) tại M ($M \neq G$) và đường thẳng CJ cắt đường tròn đường kính BC tại N ($N \neq C$). Chứng minh rằng bốn điểm C, G, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Bài 6. (7 điểm). Cho trước khối lập phương kích thước $10 \times 10 \times 10$ tạo thành từ 1000 khối lập phương đơn vị màu trắng được gán tọa độ (x, y, z) với $1 \leq x, y, z \leq 10$. Bạn An và bạn Bình chơi một trò chơi như sau: An thay một số dài hình hộp chữ nhật màu trắng kích thước $1 \times 1 \times 10$ (có thể theo bất kì chiều nào) bằng các dải màu đen, sao cho các dải màu đen đôi một không có điểm chung, kể cả trên biên. Bình phải xác định vị trí các dải màu đen được thay vào bằng cách chọn tọa độ một số khối lập phương đơn vị để hỏi An xem chúng màu gì. Hỏi Bình cần chọn tọa độ ít nhất bao nhiêu khối lập phương đơn vị để sau khi An trả lời, Bình luôn có thể xác định được vị trí của tất cả các dải màu đen?

1.2. DANH SÁCH HỌC SINH ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2013

Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp Quốc gia hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định chọn 9 học sinh có điểm thi cao nhất (có tên dưới đây) vào đội dự tuyển Quốc gia dự thi IMO 2013:

1. *Phạm Tuấn Huy*, lớp 11 Trường PTNK, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, **29,5 điểm**;
2. *Hoàng Đỗ Kiên*, lớp 12 Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, Tỉnh Vĩnh Phúc, **26,5 điểm**;
3. *Trần Đăng Phúc*, lớp 12 Trường THPT chuyên Tự nhiên, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội, **23,5 điểm**;
4. *Cần Trần Thành Trung*, lớp 12 Trường PTNK, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, **23,25 điểm**;
5. *Võ Anh Đức*, lớp 12 Trường THPT chuyên Hà Tĩnh, Tỉnh Hà Tĩnh, **23 điểm**;
6. *Trần Văn Thái*, lớp 12 Trường THPT chuyên Thái Bình, Tỉnh Thái Bình, **23 điểm**;
7. *Nguyễn Huy Tùng*, lớp 11 Trường THPT chuyên Trần Phú, TP. Hải Phòng, **23 điểm**;
8. *Đinh Lê Công*, lớp 12 Trường THPT chuyên, Đại học Vinh, **22,5 điểm**;
9. *Phan Văn Tin*, lớp 12 Trường THPT chuyên, Đại học Sư phạm Hà Nội, **22 điểm**.

Ngày 2.5.2013, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập 9 học sinh có tên nêu trên về Hà Nội tham dự lớp tập huấn chuyên môn do Trường Đại học Sư phạm Hà Nội chủ trì theo sự ủy quyền và dưới sự giám sát của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

2. TUYỂN CHỌN HỌC SINH VÀO ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2013

2.1. PHƯƠNG THỨC TUYỂN CHỌN

Việc xét chọn học sinh vào đội tuyển Quốc gia dự thi IMO 2013 do Hội đồng xét chọn đội tuyển Quốc gia chính thức (dưới đây gọi tắt là Hội đồng) chịu trách nhiệm thực hiện, theo nguyên tắc “đảm bảo công bằng, khách quan, chính xác” và dựa trên các tiêu chí sau:

- Điểm bình quân các bài kiểm tra trong quá trình tập huấn (tối thiểu 3 bài);
- Nếu điểm bình quân các bài kiểm tra như nhau thì xét thêm tính chuyên cần, thái độ học tập và ý thức chấp hành kỉ luật của học sinh trong quá trình tập huấn;

• Trường hợp cả hai tiêu chí trên đều như nhau thì căn cứ để xét chọn là kết quả của kì thi chọn học sinh vào đội dự tuyển Quốc gia dự thi IMO 2013.

Với tư cách thủ trưởng đơn vị chủ trì tập huấn đội dự tuyển Quốc gia dự thi IMO 2013, Hiệu trưởng Trường Đại học Sư phạm Hà Nội được Lãnh đạo Bộ Giáo dục và Đào tạo giao nhiệm vụ ra Quyết định thành lập Hội đồng. Thành phần của Hội đồng gồm:

- Chủ tịch: Hiệu trưởng hoặc Phó Hiệu trưởng Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;
- Phó Chủ tịch thường trực: Chủ nhiệm khoa Toán Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;
- Phó Chủ tịch: Trưởng đoàn cán bộ, học sinh Việt Nam dự thi IMO 2013.
- Ủy viên: Các chuyên gia đã tập huấn học sinh đội dự tuyển (ít nhất 5 người).

2.2. KẾT QUẢ TUYỂN CHỌN

Căn cứ đề nghị của Hội đồng, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định 6 học sinh có tên dưới đây là thành viên của đội tuyển Quốc gia dự thi IMO 2013:

1. *Phạm Tuấn Huy*, lớp 11, Trường PTNK, Đại học Quốc gia TP.Hồ Chí Minh.
2. *Hoàng Đỗ Kiên*, lớp 12, Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, Tỉnh Vĩnh Phúc.
3. *Trần Đăng Phúc*, lớp 12, Trường THPT chuyên Tự nhiên, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.
4. *Cần Trần Thành Trung*, lớp 12, Trường PTNK, Đại học Quốc gia TP.Hồ Chí Minh.
5. *Võ Anh Đức*, lớp 12, Trường THPT chuyên Hà Tĩnh, Tỉnh Hà Tĩnh.
6. *Đinh Lê Công*, lớp 12, Trường THPT chuyên Đại học Vinh.

LTS. *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ nhiệt liệt chúc mừng 6 học sinh đã được tuyển chọn vào đội tuyển Quốc gia môn Toán. Chúc các em giữ gìn sức khỏe, nỗ lực học tập và trau dồi kiến thức để chuẩn bị tốt nhất cho kì thi IMO 2013 được tổ chức từ ngày 18 đến ngày 28.7.2013 tại Santa Marta, Colombia.*

HINTS AND ANSWERS (Tiếp trang 28)

• If $c = 0$ then $f(x) = \alpha x + \beta \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{N}^*$. It follows $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ and $\alpha = \frac{P}{Q}, \beta = \frac{M}{N}$, where $P,$

$$Q, M, N \in \mathbb{Z}. \text{ Thus, } f(x) = \frac{PNx + QM}{0x + QN}.$$

• If $a = 0, b = 0$ then $f(x) = 0$.

• If $a = 0, b \neq 0$ then $f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta} \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{N}^*$.

It follows $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ and $\alpha = \frac{P}{Q}, \beta = \frac{M}{N}$, where

$$P, Q, M, N \in \mathbb{Z} \text{ then } f(x) = \frac{0x + QN}{PNx + QM}.$$

• If $a \neq 0, c \neq 0, ad - bc = 0$ then $f(x) \equiv \frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$.

• Now consider the case $a \neq 0, c \neq 0, ad - bc \neq 0$.

By the assumption, $f(1) = \frac{P_1}{Q_1}, P_1, Q_1 \in \mathbb{Z}$. Write

$$f(x) - f(1) = \frac{x-1}{\gamma x + \delta} \quad (*)$$

then $\gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ and $\gamma = \frac{M_1}{N_1}, \delta = \frac{M_2}{N_2}$, where

$M_1, M_2, N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$. Putting the values of $f(1), \gamma, \delta$ in the formula (*), we find

$$\frac{\alpha x + b}{cx + d} = \frac{(Q_1 N_1 N_2 + P_1 M_1 N_2)x + P_1 M_1 N_2 - Q_1 N_1 N_2}{M_1 N_2 x + N_1 M_2}.$$

JUNIOR SECTION

Questions	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Answers	(A)	(E)	(E)	(D)	(B)

Q7. $S_{DEF} = \frac{9\sqrt{3}}{16} \text{ cm}^2.$

Q8. $S_{ABCDE} = 5 + \sqrt{5} \text{ cm}^2.$

Q9. $(x, y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$

Q13. $(x, y) = (2; -3).$

Q14. $(x, y, z) = (1; 1; 1).$

NGUYEN VAN MAU
(Hanoi Mathematical Society)



Giải đáp

LẮP ĐẶT ĐÈN MÀU

(Đề đăng trên TH&TT số 428, tháng 2 năm 2013)

Để đặt đường dây điện chúng ta cần chú ý các điều sau.

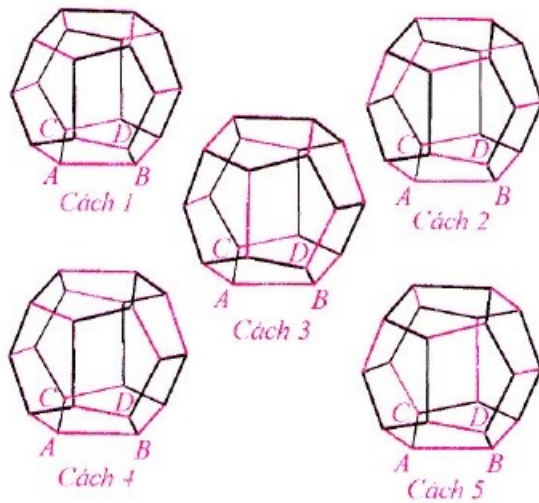
1) Mỗi đỉnh là điểm chung của ba cạnh, nếu đường dây đi đến và đi ra khỏi đỉnh X trên hai cạnh thì xóa được cạnh thứ ba của đỉnh X .

2) Xóa các cạnh có đỉnh A và đỉnh B , chỉ để lại các cạnh AC và BD .

3) Trong một hình ngũ giác chỉ xảy ra một trong hai trường hợp:

* Hoặc một đường dây đi qua bốn cạnh liên tiếp nối năm đỉnh thì xóa được cạnh thứ năm.

* Hoặc một đường dây đi qua hai cạnh liên tiếp nối ba đỉnh, còn đường dây khác đi qua một cạnh nối hai đỉnh còn lại thì xóa được hai cạnh không có dây đi qua. Từ đó có năm cách đặt đường dây điện như hình bên thỏa mãn đề ra.



PHI PHI

LỄ PHÁT THƯỞNG HỌC SINH ĐOẠT GIẢI HOMC NĂM 2013



Ngày 19.5.2013, tại Hội trường lớn của Trường THPT Chu Văn An, Hà Nội, Hội Toán học Hà Nội phối hợp với Sở GD - ĐT Hà Nội đã tổ chức lễ tuyên dương khen thưởng học sinh đoạt giải trong Kỳ thi Olympic Toán Hà Nội mở rộng (HOMC) lần thứ X.

Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội NGND GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu và Giám đốc Sở GD - ĐT Hà Nội NGƯT ThS Nguyễn Hữu Độ đã chủ trì buổi lễ. 364 học sinh đoạt giải của 21 tỉnh thành (tại Hội đồng thi Hà Nội) trên tổng số 428 giải của toàn quốc đã có mặt tại buổi lễ, được nhận phần thưởng, Giấy khen của Sở GD - ĐT Hà Nội và Giấy

khen của Hội Toán học Hà Nội, trong đó có 35 giải Nhất, 93 giải Nhì, 123 giải Ba và 113 giải Khuyến khích. Các Thủ khoa của kì thi này gồm các em:

Phùng Vũ Đắc Anh (THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội); Nguyễn Nhất Phương (THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); Thái Bá Tuấn (THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An); Hoàng Thị Minh Anh (THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc); Bùi Đức Thành (THCS Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc); Nguyễn Đức Thuận (THCS Lâm Thao, Phú Thọ).

Lãnh đạo các Sở GD - ĐT, các trường có học sinh đoạt giải đã tới dự để động viên, khích lệ các em. Nhân dịp này, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ gửi 35 tặng phẩm cho 35 em đoạt giải Nhất.

Buổi lễ được tổ chức đúng ngày sinh của Bác Hồ kính yêu đã thực sự gây xúc động tới các em học sinh giỏi, cũng như các đại biểu tham dự buổi lễ.

Tin và ảnh: THẨM NGỌC KHUÊ (Hội Toán học Hà Nội)



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 432 (6.2013)

Tòa soạn: 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: 04.35121606

Email: toanhocvotruvietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Tổng biên tập kiêm

Phó Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary School

Phạm Văn Bình - Sử dụng một tính chất của tam giác cân để giải toán

3 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, năm học 2012 – 2013.

4 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2012 – 2013.

5 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation

Đậu Thanh Kỳ - Các bài toán về phép đếm.

9 Hướng dẫn giải Đề số 8

10 Thử sức trước kì thi - Đề số 9

11 Bạn đọc tìm tòi

Vũ Đình Hòa - Về một bài toán chọn Đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2012.

12 Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp

Lê Phúc Lữ - Bổ đề Bertrand về các số nguyên tố.

16 Đề ra kì này – Problems in This Issue

T1/432, ..., T12/432, L1/432, L2/432.

18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems

Giải các bài của số 428.

27 Nguyễn Văn Mậu - Hints and Answers to Hanoi Open Mathematics Competition 2013.

31 Giải trí toán học

Ảnh Bìa 1: Đội tuyển Việt Nam tham dự Kì thi IMO 2013 (Từ trái sang phải): Đình Lê Công, Võ Anh Đức, Phạm Tuấn Huy, Hoàng Đỗ Kiên, Trần Đăng Phúc, Cấn Trần Thành Trung.

Biên tập: NGUYỄN PHÚC

Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THU

Mỹ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Chế bản: NGUYỄN THỊ TRANG

<https://tieulun.hopto.org>

TUYỂN CHỌN HỌC SINH VÀO ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA

DỰ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ NĂM 2013 (IMO 2013)

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD, Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Nhằm đổi mới công tác thi nói chung và phương thức tuyển chọn các đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Quốc tế và Khu vực các môn văn hóa (ĐTQG) nói riêng, bắt đầu từ năm nay Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định tiến hành tuyển chọn các ĐTQG qua hai giai đoạn:

Giai đoạn 1: Tổ chức thi chọn học sinh vào các đội dự tuyển Quốc gia;

Giai đoạn 2: Tổ chức tập huấn học sinh các đội dự tuyển và căn cứ kết quả tập huấn, tuyển chọn học sinh vào các ĐTQG.

1. KÌ THI CHỌN HỌC SINH VÀO ĐỘI DỰ TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2013

Kì thi chọn học sinh vào đội dự tuyển Quốc gia dự thi IMO 2013 đã được tổ chức tại Hà Nội trong hai ngày 5 và 6.4.2013. Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp Quốc gia hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập 45 học sinh tham dự kì thi, gồm 44 học sinh có điểm thi cao nhất trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán THPT năm 2013 và 1 học sinh không tham dự kì thi vừa nêu nhưng đã tham dự IMO 2012. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh được đề nghị giải ba bài toán trong thời gian 270 phút; điểm tối đa của mỗi ngày thi là 21 điểm.

1.1. ĐỀ THI

Ngày thi thứ nhất, 5.4.2013

Bài 1. (7 điểm). Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ với các cặp cạnh đối không song song. Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD . Đường phân giác trong góc AEB cắt AB , CD , AD , BC lần lượt tại M , N , P , Q .

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMP , BMQ , CNQ , DNP có đúng một điểm chung K .

b) Kí hiệu O và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Đặt $m = \min\{AC, BD\}$. Chứng minh rằng

$$OK \leq \frac{2R^2}{\sqrt{4R^2 - m^2}}.$$

Bài 2. (7 điểm)

a) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $2012n + 1$ và $2013n + 1$ đều là số chính phương.

b) Chứng minh rằng nếu m, n là hai số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $mn + 1$ và $(m + 1)n + 1$ đều là số chính phương thì n chia hết cho $8(2m + 1)$.

Bài 3. (7 điểm). Cho trước số nguyên dương n . Kí hiệu $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên và $S = \{0; 1; \dots; 2n + 1\}$. Xét các hàm số

$$f: \mathbb{Z} \times S \rightarrow [0; 1]$$

thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $f(x, 0) = f(x, 2n + 1) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$;

ii) $f(x - 1, y) + f(x + 1, y) + f(x, y - 1) + f(x, y + 1) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \{1; 2; \dots; 2n\}$.

Gọi F là tập hợp các hàm số như vậy. Với mỗi hàm số $f \in F$, kí hiệu $V(f)$ là tập giá trị của f .

a) Chứng minh rằng tập F có vô hạn phần tử.

b) Chứng minh rằng với mỗi $f \in F$, tập $V(f)$ có hữu hạn phần tử.

c) Tìm giá trị lớn nhất của $|V(f)|$ với $f \in F$.

(Kí hiệu $X \times Y$ là tích Đề các của hai tập X và Y ; $|A|$ là số phần tử của tập hữu hạn A).

(Xem tiếp trang 29)