



# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

**4** 2013  
Số 430

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocvuotruong@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocvuotruong>



ToanHocVaTuoit  
re43

អ្នក បោះពុម្ព គឺ គ្រូ





# MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HÌNH HỌC

TRẦN XUÂN UY  
(Nam Định)

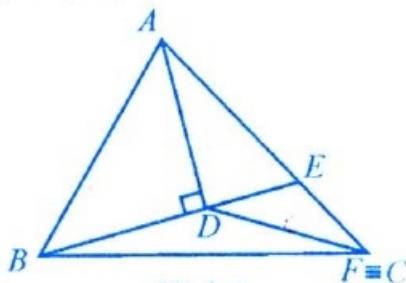
**N**ội dung của phương pháp chứng minh này là: Để chứng minh hình  $H$  có tính chất  $T$  thì ta dựng hình  $H'$  có tính chất  $T$  rồi chứng minh hình  $H'$  trùng với hình  $H$ .

Trong nhiều trường hợp, cách chứng minh này cho lời giải ngắn gọn, sáng sủa hơn những cách chứng minh khác. Sau đây là một số thí dụ.

★ **Thí dụ 1.** (Lớp 7) Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{BAC}=75^\circ$ ,  $\widehat{ABC}=60^\circ$ . Dựng tam giác  $DAB$  vuông cân đỉnh  $D$  ( $D$  nằm trong tam giác  $ABC$ ); giao điểm của  $AC$  và  $BD$  là  $E$ . Chứng minh rằng tam giác  $CDE$  cân.

**Phân tích.** Trong thí dụ này, điểm  $C$  là hình  $H$ ,  $CE = ED$  là tính chất  $T$ , ta dựng hình  $H'$  có tính chất  $T$  bằng cách lấy điểm  $F$  (hình  $H'$ ) trên tia đối của tia  $EA$  sao cho  $FE = ED$ .

**Lời giải.** (h.1)



Hình 1

Trên tia đối của tia  $EA$  lấy điểm  $F$  sao cho  $EF = ED$  thì tam giác  $FDE$  cân. Ta sẽ chứng minh  $F \equiv C$ . Thật vậy, ta thấy

$$\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 45^\circ, DA = DB, \widehat{DAE} = 30^\circ,$$

$\widehat{DEA} = 60^\circ, \widehat{EDF} = \widehat{EFD} = 30^\circ$ . Do đó tam giác  $DAF$  cân tại  $D$ , tam giác  $DBF$  cân tại  $D$ ,  $\widehat{DBF} = 15^\circ$ . Suy ra

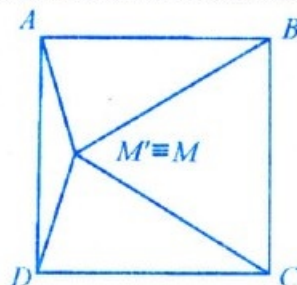
$$\widehat{ABF} = \widehat{ABD} + \widehat{DBF} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ.$$

Vậy tia  $BF$  trùng với tia  $BC$ , dẫn đến  $F \equiv C$ , tức là tam giác  $CDE$  cân.  $\square$

★ **Thí dụ 2.** (Lớp 8) Cho  $M$  là điểm trong hình vuông  $ABCD$  thỏa mãn điều kiện  $\widehat{MAD} = \widehat{MDA} = 15^\circ$ . Chứng minh rằng tam giác  $MBC$  đều.

**Phân tích.** Trong thí dụ này, điểm  $M$  là hình  $H$ , tam giác  $MBC$  đều là tính chất  $T$  của điểm  $M$ .

**Lời giải.** (h.2)



Hình 2

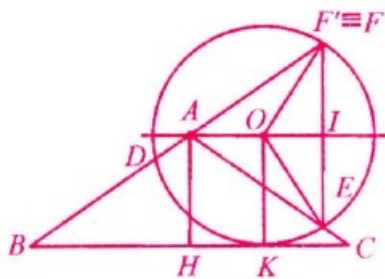
Trong hình vuông  $ABCD$ , vẽ tam giác đều  $M'BC$ . Ta sẽ chứng minh  $M \equiv M'$ . Thật vậy, từ  $M'B = BC$ ,  $\widehat{M'BC} = 60^\circ$ . Suy ra  $M'B = AB$ ,  $\widehat{M'BA} = 30^\circ, \widehat{M'AB} = 75^\circ$  nên  $\widehat{M'AD} = 15^\circ$ .

Chứng minh tương tự được  $\widehat{M'DA} = 15^\circ$ . Do đó  $M' \equiv M$ . Vậy tam giác  $MBC$  đều.  $\square$

★ **Thí dụ 3.** Cho đường tròn  $(O)$  có bán kính bằng đường cao  $AH$  của tam giác cân  $ABC$  ( $AB = AC$ ) tiếp xúc với đáy  $BC$  của tam giác ( $A$  và  $O$  cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ  $BC$ ). Đường tròn  $(O)$  cắt các đoạn thẳng  $AB$ ,  $AC$  và tia đối của tia  $AB$  theo thứ tự tại  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Chứng minh rằng hai điểm  $E$  và  $F$  đối xứng nhau qua  $AO$ .

**Lời giải.** (h.3)

Gọi  $F'$  là điểm đối xứng với  $E$  qua  $AO$ ,  $I$  là giao của  $F'E$  với  $AO$ . Ta chứng minh  $F' \equiv F$ . Thật vậy, do  $AI$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $F'E$  và  $O \in AI \Rightarrow F'O = EO \Rightarrow F' \in (O)$ .



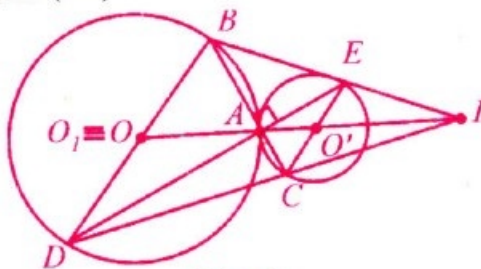
Hình 3

Từ  $A \in AI \Rightarrow AF' = AE$ . Do đó tam giác  $AEF'$  cân tại A nên  $\widehat{F'AI} = \widehat{IAE}$ . Tam giác  $ABC$  cân tại A có  $AH \perp BC \Rightarrow \widehat{CAH} = \widehat{HAB}$ . Gọi tiếp điểm của (O) với BC là K, ta chứng minh được tứ giác  $AOKH$  là hình chữ nhật nên  $\widehat{OAH} = 90^\circ$ .

Suy ra  $\widehat{F'AB} = 2(\widehat{IAE} + \widehat{CAH}) = 2\widehat{OAH} = 180^\circ$ . Vậy ba điểm B, A, F' thẳng hàng, dẫn đến  $F' \in AB$ . Như thế F' là giao điểm của đường tròn (O) với tia đối của tia AB, do đó  $F' \equiv F$ . Suy ra E và F đối xứng nhau qua AO.  $\square$

**★Thí dụ 4.** Cho hai đường tròn (O ; R), (O' ; r) có  $R > r$ , tiếp xúc với nhau tại A. Qua A vẽ hai cát tuyến vuông góc với nhau: cát tuyến thứ nhất cắt (O) tại B và cắt (O') tại C, cát tuyến thứ hai cắt (O) tại D và cắt (O') tại E. Chứng minh rằng ba đường thẳng BE, OO', DC đồng quy.

**Lời giải.** (h.4)



Hình 4

• Trường hợp hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau.

Giả sử  $I = BE \cap DC$ ;  $O_1 = O'I \cap BD$ . Ta cần chứng minh  $O_1 \equiv O$ . Thật vậy, ta có  $\widehat{BAD} = 90^\circ$  (vì  $BC \perp DE$ ) là góc nội tiếp,  $\widehat{BOD}$  là góc ở tâm cùng chắn một cung, suy ra  $\widehat{BOD} = 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ$  nên B, O, D thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta được E, O', C thẳng hàng. Vì (O), (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A nên  $A \in OO'$ , từ đó  $\widehat{ODA} = \widehat{O'EA}$ , nên  $BD \parallel EC$ .

$$\text{Từ } EO' \parallel BO_1 \Rightarrow \frac{EO'}{BO_1} = \frac{IO'}{IO_1}.$$

$$\text{Từ } O'C \parallel O_1D \Rightarrow \frac{O'C}{O_1D} = \frac{IO'}{IO_1}. \text{ Vậy}$$

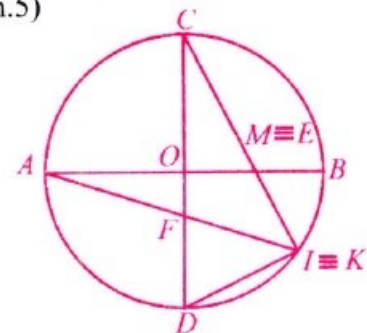
$$\frac{EO'}{BO_1} = \frac{O'C}{O_1D} \text{ mà } EO' = O'C = r \text{ nên } BO_1 = O_1D.$$

Do đó  $O_1$  là trung điểm của BD, dẫn đến  $O_1 \equiv O$  suy ra BE, OO', DC đồng quy tại I.

• Trường hợp hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong ta chứng minh tương tự.  $\square$

**★Thí dụ 5.** Các đường kính AB và CD của đường tròn (O) vuông góc với nhau. Điểm E thuộc đường kính AB sao cho  $AE : EB = 3 : 1$ ; F thuộc đường kính CD sao cho  $CF : FD = 2 : 1$ . K là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng K thuộc đường tròn (O).

**Lời giải.** (h.5)



Hình 5

Giả sử AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I, CI cắt AB tại M. Tam giác ICD vuông tại I có IF là phân giác trong nên  $\frac{CI}{ID} = \frac{CF}{FD} = \frac{2}{1}$ ;

$$\triangle COM \sim \triangle CID \Rightarrow \frac{CO}{OM} = \frac{CI}{ID} = 2 \Rightarrow CO = 2OM$$

$\Rightarrow BO = 2OM$ , hay M là trung điểm của OB.

Suy ra  $AM : MB = 3 : 1$ , do đó  $M \equiv E$ . Như thế I là giao điểm của AF và CE từ đó  $I \equiv K$ . Vậy K thuộc đường tròn (O).  $\square$

Mời bạn đọc giải các bài tập sau đây bằng phương pháp trên.

(Xem tiếp trang 8)

*Hướng dẫn giải* **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  
**MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH PHÚ THỌ**

NĂM HỌC 2011-2012

(Đề thi đăng trên TH&TT số 429, tháng 3 năm 2013)

**Câu 1.** Giả sử có số nguyên  $n$  sao cho  $n+26=x^3$ ,  $n-11=y^3$  ( $x, y \in \mathbb{N}^*$ ,  $x > y$ ). Khi đó  $x^3 - y^3 = 37 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 37$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ y^2+y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3. \end{cases}$$

Vậy  $n = 38$ .

**Câu 2.** Ta có  $\sqrt{2a^2+a-1}=0 \Rightarrow 2a^4=a^2-2a+1$   
và  $a < 1$ . Do đó

$$A = \frac{2a-3}{\sqrt{2(a-2)^2+2a^2}} = \frac{2a-3}{\sqrt{2(2-a)+2a^2}}$$

$$= \frac{2a-3}{\sqrt{2}(\sqrt{2a^2+a-1})-\sqrt{2}(2a-3)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Câu 3.** a) PT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2+3x-1 \geq 0 & (1) \\ 8x+1=(x^2+3x-1)^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x+1=(x^2+3x-1)^2 \end{cases} \quad (2)$$

Biến đổi (2)  $\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+7x+14)=0$ .  
 $\Leftrightarrow x=0$  hoặc  $x=1$ .

b) Từ HPT suy ra

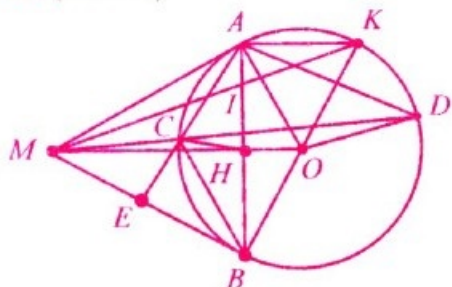
$$xy+x^2=4x^2-2y^2 \Leftrightarrow (x-y)(3x+2y)=0.$$

- Nếu  $x = y$  thì  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

- Nếu  $3x = -2y$  thì  $-\frac{y^2}{9} = 1$  (vô lí).

Vậy HPT có hai nghiệm  $(x; y)$  là  $(1; 1), (-1; -1)$ .

**Câu 4.** (hình vẽ)



a) Trong tam giác vuông  $AOM$  có  $AH \perp OM$  nên  $MA^2 = MH.MO$ . Lại có  $\triangle MAC \sim \triangle MDA$  (g.g) nên  $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$ . Suy ra

$$MH \cdot MO = MC \cdot MD \Leftrightarrow \frac{MH}{MD} = \frac{MC}{MO}. \text{ Dẫn đến}$$

$\Delta MHC \simeq \Delta MDO \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$ . Tứ giác  $OHCD$  nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $HCD$  đi qua điểm  $O$  cố định.

b) Gọi  $AC \cap MB = E$ , ta có  $\triangle EBC \sim \triangle EAB$  (g.g)

$$\text{nên } \frac{EB}{EA} = \frac{EC}{EB} \Rightarrow EA \cdot EC = EB^2 \quad (1)$$

Vì  $AD \parallel MB$  nên  $\widehat{EMC} = \widehat{MDA} = \widehat{MAC}$   
suy ra  $\triangle EMC \sim \triangle EAM$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EM}{EA} = \frac{EC}{EM} \Rightarrow EA \cdot EC = EM^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có  $EB = EM$ , nên  $AC$  đi qua trọng tâm  $G$  của tam giác  $MAB$ .

c) Vì  $OM = 2R$  nên tam giác  $MAB$  đều,  
 $\widehat{MBA} = 60^\circ, AB = R\sqrt{3}, OH = \frac{R}{2}, MH = \frac{3R}{2}, AK = R.$

Ta có  $AK \parallel MO$  nên  $\frac{IM}{IK} = \frac{MH}{AK} = \frac{3}{2} \Rightarrow IM = \frac{3}{2} IK$ .

Lại có  $\frac{IH}{IA} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{IH}{AH} = \frac{3}{5} \Rightarrow IH = \frac{3\sqrt{3}}{10}R; IA = \frac{\sqrt{3}}{5}R,$

$$IK = \sqrt{AK^2 + AI^2} = \frac{2\sqrt{7}}{5}R, \text{ do đó } IM = \frac{3\sqrt{7}}{5}R.$$

Kẻ đường kính  $MN$  của đường tròn ngoại tiếp

tam giác  $BMI$  thì  $\sin \widehat{INM} = \frac{IM}{MN} \Rightarrow MN = \frac{IM}{\sin 60^\circ}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} IM = \frac{2\sqrt{21}}{5} R. \text{ Vậy bán kính đường tròn}$$

ngoại tiếp tam giác  $BMI$  là  $\frac{\sqrt{21}}{5}R$ .

# ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TP. HÀ NỘI

NĂM HỌC 2012-2013

(Dùng cho thí sinh thi vào lớp chuyên toán hoặc chuyên tin)

(Thời gian làm bài: 150 phút)

## Câu I. (2 điểm)

1) Chứng minh rằng nếu  $n$  là số nguyên thì  $n^5 + 5n^3 - 6n$  chia hết cho 30.

2) Giả sử  $n$  là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện  $n(n+1)+6$  không chia hết cho 3. Chứng minh rằng  $2n^2 + n + 8$  không là số chính phương.

## Câu II. (3 điểm)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y - \frac{2}{x} + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 - \frac{4}{x^2} + 1 = 0. \end{cases}$$

2) Xét các số  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện  $x^2 + y^2 + z^2 = 2012$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $M = 2xy - yz - zx$ .

## Câu III. (3 điểm)

Cho đường tròn  $(O; R)$  và dây cung  $BC$  cố định ( $BC < 2R$ ). Điểm  $A$  di động trên đường tròn  $(O; R)$  sao cho tam giác  $ABC$  là tam giác nhọn. Gọi  $AD$  là đường cao và  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

1) Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc  $BHC$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại các điểm  $M, N$ . Chứng minh rằng tam giác  $AMN$  là tam giác cân.

2) Gọi  $E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $D$  trên các đường thẳng  $BH, CH$ . Chứng minh  $OA \perp EF$ .

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$  cắt đường phân giác trong của góc  $BAC$  tại  $K$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $HK$  luôn đi qua một điểm cố định.

## Câu IV. (1 điểm)

Tìm các số nguyên dương  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện  $(x+1)(y+z) = xyz + 2$ .

## Câu V. (1 điểm)

Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn bán kính 2cm. Chứng minh trong số 17 điểm  $A_1, A_2, \dots, A_{17}$  bất kì nằm trong tứ giác  $ABCD$  luôn có thể tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa hai điểm đó không lớn hơn 1cm.

VŨ QUỐC LƯƠNG (Hà Nội)

(Sưu tầm và giới thiệu)

**Câu 5.** Đặt  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$  thì  $x, y, z$  dương và  $x + y + z = 3$ . BĐT cần chứng minh trở thành  $\frac{1}{\sqrt{xy+x+y}} + \frac{1}{\sqrt{yz+y+z}} + \frac{1}{\sqrt{zx+z+x}} \geq 3$  (1)

Ta chứng minh được BĐT

$(x+y+1)^2 \geq 3(xy+x+y)$  với mọi  $x, y$ .

Đẳng thức xảy ra khi  $x = y = 1$ . Do đó

$$\frac{1}{\sqrt{xy+x+y}} \geq \frac{\sqrt{3}}{x+y+z} \quad \forall x, y > 0.$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{\sqrt{yz+y+z}} \geq \frac{\sqrt{3}}{y+z+1}; \frac{1}{\sqrt{zx+z+x}} \geq \frac{\sqrt{3}}{z+x+1}.$$

Gọi vế trái của (1) là  $A$ , ta có

$$\begin{aligned} A &\geq \sqrt{3} \left( \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \right) \\ &\geq \sqrt{3} \cdot \frac{9}{2(x+y+z)+3} = \sqrt{3} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

$$(\text{Áp dụng BĐT } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \geq \frac{9}{m+n+p} \quad \forall m, n, p > 0).$$

Đẳng thức xảy ra khi  $x = y = z = 1$  hay  $a = b = c$ .



# SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC VÀ ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

LÊ KHÁNH HƯNG  
(GV THPT chuyên ĐH Vinh)

**Đ**ề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng môn Toán trong những năm gần đây thường xuất hiện những câu khó nhằm phân loại học sinh, trong đó có dạng toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức ba biến có điều kiện. Trong bài viết này, chúng tôi xin nêu cách giải dạng toán trên theo hướng sử dụng một số BĐT cơ bản (BĐT Cauchy, BĐT Bunyakovsky, ...) và điều kiện đã cho để đưa việc đánh giá biểu thức nhiều biến về đánh giá biểu thức một biến trên  $K$  rồi sử dụng đạo hàm để khảo sát hàm số một biến này trên  $K$  để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Sau đây là một số thí dụ minh họa.

★ **Thí dụ 1.** Xét các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x \geq z$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}}$$

**Lời giải.** Ta có

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2}} + \sqrt{1 + \frac{x}{z}}$$

Đặt  $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$ . Khi đó  $abc = 1, c \geq 1$  và

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}}$$

Vì  $abc = 1, c \geq 1$  nên  $ab \leq 1$ . Ta chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}} \quad (1)$$

Thật vậy, áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \sqrt{2 \left( \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \right)}$$

Mặt khác,

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0,$$

luôn đúng với  $ab \leq 1$ .

Suy ra BĐT (1) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ .

Áp dụng BĐT (1) và giả thiết  $abc = 1$ , ta có

$$P \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{c}}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} = \frac{2\sqrt{c}+1}{\sqrt{1+c}}.$$

Xét hàm  $f(c) = \frac{2\sqrt{c}+1}{\sqrt{1+c}}$  trên  $[1; +\infty)$ . Ta có

$$f'(c) = \frac{2-\sqrt{c}}{2(1+c)\sqrt{c}\sqrt{1+c}}; f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 4.$$

Ta có bảng biến thiên

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $c$     | 1 | 4 | $+\infty$ |
| $f'(c)$ | + | 0 | -         |
| $f(c)$  |   |   |           |

Từ bảng biến thiên suy ra  $P \leq \sqrt{5}$ , đẳng thức xảy ra khi  $c = 4, a = b, abc = 1 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}, c = 4$ .

Vậy min  $P = \sqrt{5}$ , đạt được khi  $x = 2y = 4z$ . □

★ **Thí dụ 2.** Cho  $x > y > z > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{y}{x-y} + \frac{z}{y-z} + \frac{x^2}{8z(\sqrt{xz}-z)}$$

**Lời giải.** Ta có

$$P = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} + \frac{\frac{z}{y}}{1 - \frac{z}{y}} + \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^2}{8\left(\sqrt{\frac{x}{z}} - 1\right)}.$$

Đặt  $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$ . Khi đó  $0 < a, b < 1$ ,

$$c > 1, abc = 1 \text{ và } P = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c^2}{8(\sqrt{c}-1)}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} &\geq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(1-a)(1-b)}} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(1-a+1-b)} \\ &= \frac{2\sqrt{ab}}{1 - \frac{a+b}{2}} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}} \end{aligned} \quad (2)$$

Áp dụng BĐT (2) và giả thiết  $abc = 1$  ta có

$$P \geq \frac{2\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}} + \frac{c^2}{8(\sqrt{c}-1)} = \frac{2}{\sqrt{c}-1} + \frac{c^2}{8(\sqrt{c}-1)} = \frac{c^2+16}{8(\sqrt{c}-1)}.$$

Xét hàm  $g(c) = \frac{c^2+16}{8(\sqrt{c}-1)}$  trên  $(1; +\infty)$  thì

$$g'(c) = \frac{3c^2 - 4c\sqrt{c} - 16}{16\sqrt{c}(\sqrt{c}-1)^2} = \frac{(\sqrt{c}-2)(3c\sqrt{c} + 2c + 4\sqrt{c} + 8)}{16\sqrt{c}(\sqrt{c}-1)^2},$$

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 4.$$

Lập bảng biến thiên của hàm  $g(c)$  trên  $(1; +\infty)$  suy ra  $P \geq 4$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a=b, abc=1, c=4 \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}, c=4 \Leftrightarrow x=2y=4z.$$

Vậy min  $P = 4$ , đạt được khi  $x = 2y = 4z$ .  $\square$

**★Thí dụ 3.** Xét các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + xy}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + xy}} + \frac{2\sqrt{3}}{1+z}.$$

**Lời giải.** Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + xy}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + xy}} \geq \frac{2}{\sqrt{(x^2 + xy)(y^2 + xy)}}$$

$$\geq \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2 + xy}{2}}} \geq \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y$ .

Áp dụng (3) và giả thiết  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ta có

$$P \geq \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2\sqrt{3}}{z+1} = \frac{2}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{2\sqrt{3}}{z+1}.$$

Xét hàm  $f(z) = \frac{2}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{2\sqrt{3}}{z+1}$  trên  $(0; 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(z) &= \frac{2z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}} - \frac{2\sqrt{3}}{(1+z)^2} \\ &= \frac{2z(1+z)^2 - 2\sqrt{3}(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}{(1+z)^2(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}, \end{aligned}$$

$$f'(z) = 0 \Leftrightarrow 2z(1+z)^2 - 2\sqrt{3}(1-z^2)\sqrt{1-z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4z^3 - 8z^2 + 9z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2z-1)(2z^2-4z+3) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}.$$

Lập bảng biến thiên của hàm  $f(z)$  trên  $(0; 1)$

ta có  $P \geq \frac{8\sqrt{3}}{3}$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ

$$\text{khi } x=y, z=\frac{1}{2}, x^2+y^2+z^2=1 \Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{3}}{2}, z=\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{8\sqrt{3}}{3}, \text{ đạt được khi } x=y=\frac{\sqrt{3}}{2}, z=\frac{1}{2}. \square$$

**★Thí dụ 4.** Xét các số thực  $a \geq b \geq c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c=1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \frac{24}{5\sqrt{5a+5b}}.$$

**Lời giải.** Trước hết ta chứng minh BĐT

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}} \quad (4)$$

với các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a+b \geq 2c$ . Thật vậy, ta chứng minh với các số  $a, b, x, y, m, n$  thì

$$(a^3+b^3)(x^3+y^3)(m^3+n^3) \geq (axm+byn)^3 \quad (*)$$

Thật vậy áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\frac{a^3}{a^3+b^3} + \frac{x^3}{x^3+y^3} + \frac{m^3}{m^3+n^3} \geq \frac{3axm}{\sqrt[3]{(a^3+b^3)(x^3+y^3)(m^3+n^3)}}$$

$$\frac{b^3}{a^3+b^3} + \frac{y^3}{x^3+y^3} + \frac{n^3}{m^3+n^3} \geq \frac{3byn}{\sqrt[3]{(a^3+b^3)(x^3+y^3)(m^3+n^3)}}$$

Cộng theo về hai BĐT trên ta được BĐT (\*).

Áp dụng BĐT (\*) ta được

$$\left( \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} \right)^2 (a^2(b+c) + b^2(c+a)) \geq (a+b)^3.$$

$$\text{Mặt khác } ab(a+b) + c(a^2+b^2) - \frac{(a+b)^3}{4} - \frac{c(a+b)^2}{2} \\ = -\frac{(a-b)^2(a+b-2c)}{4} \leq 0. \text{ Do đó}$$

$$\left( \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} \right)^2 \geq \frac{(a+b)^3}{ab(a+b) + c(a^2+b^2)} \\ \geq \frac{(a+b)^3}{\frac{(a+b)^3}{4} + \frac{c(a+b)^2}{2}} = \frac{4(a+b)}{a+b+2c}.$$

Suy ra BĐT (4) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b$ . Áp dụng BĐT (4) và giả thiết  $a+b+c=1$ , ta có

$$P \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}} + \frac{24}{5\sqrt{5a+5b}} = \frac{2\sqrt{1-c}}{\sqrt{1+c}} + \frac{24}{5\sqrt{5}\sqrt{1-c}}.$$

$$\text{Xét hàm } f(c) = \frac{2\sqrt{1-c}}{\sqrt{1+c}} + \frac{24}{5\sqrt{5}\sqrt{1-c}} \text{ trên } \left(0; \frac{1}{3}\right].$$

$$\text{Ta có } f'(c) = \frac{-10\sqrt{5}(1-c) + 12(1+c)\sqrt{1+c}}{5\sqrt{5}(1-c^2)\sqrt{1-c^2}},$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow -10\sqrt{5}(1-c) + 12(1+c)\sqrt{1+c} = 0 \\ \Leftrightarrow 36c^3 - 17c^2 + 358c - 89 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4c-1)(9c^2-2c+89) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên hàm số } f(c) \text{ trên } \left(0; \frac{1}{3}\right]$$

$$\text{suy ra } P \geq \frac{78}{5\sqrt{15}}, \text{ đẳng thức xảy ra khi và chỉ}$$

$$\text{khi } c = \frac{1}{4}, a=b, a+b+c=1 \Leftrightarrow a=b=\frac{3}{8}, c=\frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{78}{5\sqrt{15}}, \text{ đạt được khi } a=b=\frac{3}{8}, \\ c=\frac{1}{4}. \square$$

**★Thí dụ 5.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ .  
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{4c^3}{3(c+a)^3}.$$

**Lời giải.** Ta có

$$P = \frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2} + \frac{4}{3\left(1+\frac{a}{c}\right)^3}.$$

Đặt  $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$ . Khi đó  $x, y, z$  là các số dương thỏa mãn  $xyz=1$  và

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{4}{3(1+z)^3}. \text{ Ta chứng minh } \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy} \quad (5)$$

Thật vậy, BĐT (5)  $\Leftrightarrow xy(x-y)^2 + (1-xy)^2 \geq 0$ , luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x=y=1$ . Từ BĐT (5) và  $xyz=1$  ta có

$$P \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{4}{3(1+z)^3} = \frac{z}{1+z} + \frac{4}{3(1+z)^3}.$$

$$\text{Xét hàm } f(z) = \frac{z}{1+z} + \frac{4}{3(1+z)^3} \text{ trên } (0; +\infty).$$

$$\text{Ta có } f'(z) = \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{4}{(1+z)^4} = \frac{(z-1)(z+3)}{(1+z)^4};$$

$$f'(z) = 0 \Leftrightarrow z=1 \text{ (do } z>0).$$

Lập bảng biến thiên của hàm  $f(z)$  trên  $(0; +\infty)$

ta suy ra  $P \geq \frac{2}{3}$ , đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} x=y=1 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1 \text{ hay } a=b=c.$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{2}{3}, \text{ đạt được khi } a=b=c. \square$$

Mời các bạn hãy giải các bài tập sau đây theo phương pháp trên.

**BÀI TẬP**

1. Xét các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

2. Xét các số thực  $a, b, c$  thuộc đoạn  $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ .

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}.$$

3. Xét các số thực  $x, y, z$  thuộc đoạn  $[1; 9]$  thỏa mãn  $x \geq y, x \geq z$ . Tìm giá trị lớn nhất và

giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

4. Xét các số thực  $a, b, c$  thuộc đoạn  $[0; 4]$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$$

5. Xét các số thực  $x, y, z$  thuộc đoạn  $[1; 4]$  thỏa mãn  $x \geq y, x \geq z$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \quad (\text{Câu V, khối A, 2011})$$

**MỘT PHƯƠNG PHÁP ... (Tiếp trang 2)****BÀI TẬP**

1. (Lớp 7) Cho tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $AM$ . Các tia phân giác của các góc  $AMB, AMC$  theo thứ tự cắt  $AB, AC$  tại  $E, F$ . Chứng minh rằng  $EF \parallel BC$ .

2. (Lớp 7, 8) Gọi  $H, G, O$  theo thứ tự là trực tâm, trọng tâm, giao điểm của ba đường trung trực của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $H, G, O$  thẳng hàng và  $GH = 2GO$ .

3. (Lớp 8) Hai đường chéo  $AC, BD$  của hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ) cắt nhau tại  $O$ . Hai đường thẳng  $AD, BC$  cắt nhau tại  $I$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, DC$ . Chứng minh bốn điểm  $O, I, M, N$  thẳng hàng.

4. (Lớp 8) Cho tam giác đều  $ABC$ , trên các cạnh  $AB, AC$  tương ứng lấy các điểm  $M, N$  sao cho chu vi tam giác  $AMN$  bằng nửa chu vi tam giác  $ABC$ ;  $O$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng  $\widehat{MON} = 60^\circ$ .

5. (Lớp 8) Cho hình vuông  $ABCD$ , qua giao điểm  $O$  của  $AC$  và  $BD$  kẻ đường thẳng  $a$  cắt  $AD, BC$  lần lượt tại  $E, F$ . Kẻ  $Ex \parallel AC, Fy \parallel BD$ ;  $Ex, Fy$  cắt nhau tại  $I$ . Tìm quỹ tích các điểm  $I$  khi đường thẳng  $a$  quay xung quanh điểm  $O$ .

6. Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  và một điểm  $M$  thuộc đường tròn.  $H, I, K$  theo thứ tự là hình chiếu của  $M$  trên các đường thẳng  $AB, BC, CA$ . Chứng minh rằng ba điểm  $H, I, K$  thẳng hàng.

7. Từ điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O)$  vẽ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  và cát tuyến  $AMN$  tới đường tròn. Gọi  $I$  là trung điểm của dây  $MN$ ;  $BC$  cắt  $AO, OI$  theo thứ tự tại  $D, E$ . Chứng minh năm điểm  $M, N, D, O, E$  cùng nằm trên một đường tròn.

8. Trên nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  lấy điểm  $C$ , kẻ  $CD \perp AB$ . Vẽ đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với các đoạn thẳng  $CD$  và  $AD$  tại  $E$  và  $F$ , tiếp xúc với nửa đường tròn  $(O)$  tại  $K$  ( $I$  và  $A$  cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ  $CD$ ). Chứng minh rằng ba điểm  $K, E, B$  thẳng hàng.

9. Hai đường tròn  $(O; R), (O'; r)$  tiếp xúc trong tại  $A$  ( $R > r$ ). Đường nối tâm  $OO'$  cắt hai đường tròn ấy lần lượt tại các điểm thứ hai là  $B, C$ . Chứng minh rằng tiếp tuyến chung ngoài của các đường tròn đường kính  $OO', BC$  đi qua  $A$ .

10. Giả sử đường tròn  $(O)$  nội tiếp tam giác  $ABC$  tiếp xúc với  $BC$  tại  $D$ ;  $(I)$  là đường tròn bàng tiếp tam giác  $ABC$  tương ứng với đỉnh  $A$ ,  $(I)$  tiếp xúc với  $BC$  tại  $E$ .

a) Chứng minh rằng  $BD = CE$ .

b) Vẽ tiếp tuyến với đường tròn  $(I)$  song song với  $BC$  và tiếp điểm là  $F$ , tiếp tuyến này cắt  $AB, AC$  tại  $M, N$ . Trên đoạn  $MN$  lấy  $K$  sao cho  $NK = MF$ . Chứng minh các đường thẳng  $FD, KE$  đều đi qua điểm  $A$ .

# Thử sức TRƯỚC KỶ THI

## ĐỀ SỐ 7

(Thời gian làm bài: 180 phút)

### PHẦN CHUNG

#### Câu 1 (2 điểm)

Cho hàm số

$$y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m \quad (1)$$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi  $m = 1$ .

2) Tìm  $m$  để hàm số có cực đại, cực tiểu. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ điểm

$M\left(-\frac{1}{2}; \frac{15}{4}\right)$  đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số (1).

#### Câu 2 (1 điểm)

Giải phương trình

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 - \sqrt{3}(2\cos x - 1)\sin x = 0.$$

#### Câu 3 (1 điểm)

Giải phương trình

$$4^{-|x-1|} \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{3}}(2|x-1|+2) = 0.$$

#### Câu 4 (1 điểm)

Tính tích phân  $I = \int_1^e \frac{\ln x - 1}{x^2 - \ln^2 x} dx.$

#### Câu 5 (1 điểm)

Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = a, AC = b, AD = c$  và  $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = \alpha$ . Tính thể tích khối tứ diện  $ABCD$ .

Câu 6 (1 điểm) Giả sử  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2+1}{y} + \frac{y^2+1}{z} + \frac{z^2+1}{x} - \frac{1}{x+y+z}.$$

### PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B)

#### A. Theo chương trình Chuẩn

##### Câu 7.a (1 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $P(3; 0)$  và hai đường thẳng  $d_1: 2x - y - 2 = 0$ ;  $d_2: x + y + 3 = 0$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua  $P$  cắt  $d_1, d_2$  lần lượt tại  $A$  và  $B$ . Viết phương trình của  $\Delta$  biết rằng  $PA = 2PB$ .

##### Câu 8.a (1 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hai

đường thẳng  $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=2 \end{cases}$  và  $d_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ .

Xác định  $A \in d_1$  và  $B \in d_2$  sao cho  $AB$  có độ dài ngắn nhất.

##### Câu 9.a (1 điểm)

Từ các chữ số 0, 1, 2, ..., 9, viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau đôi một. Tính xác suất để các chữ số 0, 1, 2 có mặt trong số viết được.

#### B. Theo chương trình Nâng cao

##### Câu 7.b (1 điểm)

Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho elip  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  và đường thẳng  $\Delta: \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0$  trong đó  $x_0, y_0$  là tọa độ của một điểm nằm trên  $(E)$ . Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ các tiêu điểm của  $(E)$  tới  $\Delta$  bằng  $b^2$ .

##### Câu 8.b (1 điểm)

Cho mặt phẳng  $(P): x + y + z - 1 = 0$ , điểm  $A(1; 1; -1)$  và đường thẳng  $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ .

Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  sao cho góc giữa  $\Delta$  và  $d$  là nhỏ nhất.

##### Câu 9.b (1 điểm)

Chứng minh rằng  $\sin 2x < \frac{2}{3x-x^3}$ , với  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

TRẦN VĂN HẠNH

(GV DH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

## HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 6

**Câu I. 1)** Bạn đọc tự giải.

$$2) \text{ Ta có } \begin{cases} (y-2)x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 - m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + \frac{3}{x-1} \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = m^2 \end{cases} (*)$$

(do  $x=1$  không là nghiệm của hệ).

Từ (\*) suy ra  $y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 3\}$

$\Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 2; 4\}$ . Do đó (C) có 4 điểm nguyên  $A(2;5); B(4;3); C(0;-1); D(-2;1)$ . Dễ thấy A và C; B và D đối xứng qua tâm  $I(1;2)$  của (C), nên hệ có đúng 4 nghiệm khi  $A, B \in (C)$   
 $\Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = m^2 \Leftrightarrow m^2 = 10 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{10}$ .

**Câu II. 1)** ĐK  $x \geq 3$ . Tập nghiệm của BPT đã cho là  $[4; +\infty)$ .

2) Đưa PT đã cho về dạng

$$4\cos^3 2x - 6\cos 2x + 2\cos 2x \cdot \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow \cos 2x(2(\cos^2 2x - 1) + (\cos x - 1)) = 0.$$

Đáp số.  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

$$\text{Câu III. } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{3} \sin 2x + 2\cos^2 x} \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x - \sqrt{3} \cos x)^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \sqrt{3} \cos x| \, dx.$$

Trong  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  thì  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ .

Do đó

$$I = \left| \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) \, dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) \, dx \right| = 3 - \sqrt{3}.$$

$$\text{Câu IV. } \bullet V_{A.A_1BK} = V_{C.ABA_1} = \frac{1}{3} AA_1 \cdot S_{ABC} \\ = \frac{a^3 \sqrt{15}}{3}.$$

• Lưu ý tam giác  $BKA_1$  vuông tại K.

$$d(I, (A_1BK)) = \frac{1}{2} d(A, (A_1BK)) = \frac{3V_{A.A_1BK}}{2S_{A_1BK}} = \frac{a\sqrt{5}}{6}.$$

**Câu V.** • Nếu  $x \geq 3$  hoặc  $y \geq 3$  hoặc  $z \geq 3$  thì  $P \geq 3$ .

• Nếu  $0 < x, y, z < 3$  thì

$$\frac{7}{x} + \frac{3}{y^2} + \frac{9}{z^3} > \frac{7}{3} + \frac{3}{9} + \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

nhên  $P > 3$ .

Ta có  $P = 3$  khi  $x = y = z = 3$ . Vậy min  $P = 3$ .

**Câu VI.a. 1)** Điểm A ở đầu bài phải có tọa độ  $(-1;6)$ . Đường tròn có tâm I  $(1;2)$ , bán kính  $R = 2\sqrt{5}$ . Hình chữ nhật nội tiếp trong đường tròn có tâm chính là I. Vì C đối xứng A qua I nên  $C(3;-2)$  và  $AC = 4\sqrt{5}$ .

Hạ  $BH \perp AC \ (H \in AC)$  thì  $S_{ABCD} = 2S_{ABC}$

$$= AC \cdot BH = 20 \Rightarrow BH = \frac{20}{4\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

PT đường thẳng AC có dạng  $2x + y - 4 = 0$ . Từ điều kiện  $d(B, AC) = \sqrt{5}$ , B nằm trên đường tròn (I, R) và có hoành độ âm, ta tìm được  $B(-1-\sqrt{3}; 1+2\sqrt{3})$ . Khi đó  $D(3+\sqrt{3}; 3-2\sqrt{3})$ . Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật cần tìm là  $A(-1;6); B(-1-\sqrt{3}; 1+2\sqrt{3}); C(3;-2)$  và  $D(3+\sqrt{3}; 3-2\sqrt{3})$ .

2) PT đường phân giác góc tù tạo bởi  $(d_1)$  và

$$(d_2) \text{ là } \frac{x - \frac{1}{4}}{11} = \frac{y - 1}{10} = \frac{z + \frac{10}{3}}{-2}.$$

**Câu VII.a.** Số khả năng lấy 4 bi từ hộp 12 bi là  $C_{12}^4 = 495$  (cách), suy ra  $N(\Omega) = 495$ .

Các trường hợp lấy được 4 bi trong đó số bi đỏ lớn hơn số bi vàng như sau:

• 4 bi lấy được không có bi vàng.

(Xem tiếp trang 14)



# CÁCH GIẢI MỘT DẠNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐẶC BIỆT

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

**P**hương trình hàm (PT hàm) là một loại toán hay và khó. Chính vì lẽ đó mà bài toán PT hàm thường xuất hiện trong các cuộc thi Olympic toán. Trong quá trình giảng dạy tác giả bắt gặp một dạng PT hàm khá đẹp và đặc biệt xin giới thiệu cùng bạn đọc.

**Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn**

$$f(x^m \pm y^n) = x^k f(x^{m-k}) \pm y^l f(y^{n-l}) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; \\ m, n \in \mathbb{N}^*, k, l \in \mathbb{N}, m > k, n > l.$$

Để tiến hành giải bài toán trên ta làm như sau:

• Chứng minh tính chất  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  cho hàm đã cho.

• Dựa vào đẳng thức  $f(x^m) = x^k f(x^{m-k})$  ta tính một trong những biểu thức sau theo hai cách khác nhau  $f((x+1)^m); f((x+1)^m + (x-1)^m);$

$f((x-y)^m); f((x+1)^m - x^m), \dots$  Từ đó lập PT rồi suy ra hàm  $f(x)$ .

Sau đây là một số thí dụ minh họa cho PT hàm đã nói trên.

**★Thí dụ 1. Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn**

$$f(x^2 - y) = xf(x) - f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

**Lời giải.** Cho  $x=y=0$ , từ (1) suy ra  $f(0) = 0$ .

Cho  $y=0$ , từ (1) suy ra  $f(x^2) = xf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Cho  $x=0$ , từ (1) suy ra  $f(-y) = -f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}$ , chứng tỏ  $f$  là hàm lẻ. PT hàm đã cho trở thành

$$f(x^2 - y) = f(x^2) + f(-y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Lại có } f(-x^2 + y) = f(-(x^2 - y)) = -f(x^2 - y)$$

$$= -(f(x^2) - f(y)) = f(-x^2) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{suy ra } f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Tóm lại } f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tính  $f((x+1)^2)$  theo hai cách. Ta có

$$f((x+1)^2) = f(x^2 + 2x + 1) = f(x^2) + f(2x) + f(1) \\ = xf(x) + 2f(x) + f(1) \quad (1.1)$$

$$f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1) = (x+1)(f(x) + f(1)) \\ = xf(x) + f(x) + xf(1) + f(1) \quad (1.2)$$

Từ (1.1) và (1.2) suy ra  $f(x) = xf(1)$  hay  $f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $a$  là hằng số.

Thử lại ta thấy hàm  $f(x) = ax$  thỏa mãn PT hàm đã cho. Vậy  $f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \square$

**★Thí dụ 2. Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn**

$$f(x^2 + y^2) = xf(x) + yf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

**Lời giải.** Cho  $x=0$ , từ (2) suy ra

$$f(y^2) = yf(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Cho  $y=0$ , từ (2) suy ra

$$f(x^2) = xf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó PT hàm đã cho trở thành

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f(y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \geq 0 \quad (2.1)$$

Thay  $y$  bởi  $-y$  vào (2) ta được

$$f(x^2 + y^2) = xf(x) - yf(-y).$$

$$\text{Từ đó suy ra } -yf(-y) = yf(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ chứng tỏ } f \text{ là hàm}$$

số lẻ. Do đó với mọi  $x \geq 0, y \leq 0$  ta có

$$\begin{aligned} f(x-y) &= f(x+(-y)) = f(x) + f(-y) \\ &= f(x) - f(y) \Rightarrow f(x) = f(x-y) + f(y) \\ &\Rightarrow f((x-y)+y) = f(x-y) + f(y), \text{ suy ra} \\ f(x+y) &= f(x) + f(y), \forall x \geq 0, \forall y \leq 0 \quad (2.2) \end{aligned}$$

Với mọi  $x \leq 0, y \leq 0$  ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) &= -f(-x-y) = -(f(-x) + f(-y)) \\ &= -(-f(x) - f(y)) = f(x) + f(y) \quad (2.3) \end{aligned}$$

Kết hợp (2.1), (2.2) và (2.3) ta được  $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ . Tương tự thí dụ 1, tính  $f((x+1)^2)$  theo hai cách suy ra nghiệm  $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

★ **Thí dụ 3. (USAMO 2000).** Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thoả mãn

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

**Lời giải.** Cho  $x = y$ , từ (3) suy ra  $f(0) = 0$ .

Cho  $x = 0$ , từ (3) suy ra  $f(-y^2) = -yf(y), \forall y \in \mathbb{R}$

Cho  $y = 0$ , từ (3) suy ra  $f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó PT đã cho trở thành

$$\begin{aligned} f(x^2 - y^2) &= f(x^2) + f(-y^2), \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ f(x+y) &= f(x) + f(y), \forall x \geq 0, \forall y \leq 0 \quad (3.1) \end{aligned}$$

Lại thay  $x$  bởi  $-y$  vào (3.1) ta được

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) = f(-y) + f(y), \forall y \leq 0, \text{ suy ra} \\ f(-y) &= -f(y), \forall y \leq 0. \text{ Vậy } f(-y) = -f(y), \\ &\forall y \in \mathbb{R}, \text{ chứng tỏ hàm } f \text{ lẻ. Lại có} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x-y) &= f(x+(-y)) = f(x) + f(-y) \\ &= f(x) - f(y), \forall x \geq 0, \forall y \geq 0 \\ &\Rightarrow f((x-y)+y) = f(x-y) + f(y), \forall x \geq 0, y \geq 0 \\ &\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0 \quad (3.2) \end{aligned}$$

Kết hợp (3.1), (3.2) và hàm  $f$  lẻ suy ra  $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ . Tương tự hai thí dụ trên ta được  $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Nhận xét.** Từ ba thí dụ trên ta thấy việc chỉ ra tính chất cộng tính của hàm đã cho là khó khăn hơn việc lập PT tìm hàm. Điều đó càng khó khăn hơn khi  $m, n$  là các số chẵn.

★ **Thí dụ 4. (T12/412. TH&TT).** Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thoả mãn

$$f(x^3 + y^3) = x^2 f(x) + y^2 f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4)$$

**Lời giải.** Lần lượt cho  $x = 0, y = 0$  ta được  $f(y^3) = y^2 f(y)$  và  $f(x^3) = x^2 f(x)$ . Do đó PT (4) đã cho trở thành

$$\begin{aligned} f(x^3 + y^3) &= f(x^3) + f(y^3), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tính  $f((x+1)^3 + (x-1)^3)$  theo hai cách như sau

$$\begin{aligned} f((x+1)^3 + (x-1)^3) &= f(2x^3 + 6x) = f(2x^3) + f(6x) \\ &= 2f(x^3) + 6f(x) = 2x^2 f(x) + 6f(x) \quad (4.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f((x+1)^3 + (x-1)^3) &= f((x+1)^3) + f((x-1)^3) \\ &= (x+1)^2 f(x+1) + (x-1)^2 f(x-1) \\ &= (x^2 + 2x + 1)(f(x) + f(1)) + (x^2 - 2x + 1)(f(x) - f(1)) \\ &= (2x^2 + 2)f(x) + 4xf(1) \quad (4.2) \end{aligned}$$

Từ (4.1) và (4.2) ta có

$$\begin{aligned} 2x^2 f(x) + 6f(x) &= (2x^2 + 2)f(x) + 4xf(1) \\ &\Rightarrow f(x) = f(1)x = ax, a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy hàm  $f(x) = ax$  thoả mãn PT hàm đã cho. Kết luận  $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

★ **Thí dụ 5.** Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thoả mãn

$$f(x + y^4) = f(x) + yf(y^3), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5)$$

**Lời giải.** Cho  $x = 0, y = 1$ , từ (5) suy ra  $f(0) = 0$ .

Cho  $x = 0$ , từ (5) suy ra  $f(y^4) = yf(y^3), \forall y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow -yf((-y)^3) = f((-y)^4) = f(y^4) = yf(y^3), \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(-y^3) = -f(y^3), \forall y \neq 0. \text{ Vậy } f \text{ là hàm lẻ. PT hàm đã cho được viết lại dưới dạng}$$

$f(x+y^4) = f(x) + f(y^4), \forall x, y \in \mathbb{R}$ , suy ra

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0 \quad (5.1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(-(-x-y)) = -f((-x)+(-y)) \\ &= -(f(-x) + f(-y)) = -(-f(x) - f(y)) \\ &= f(x) + f(y), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \leq 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Kết hợp (5.1) và (5.2) được

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tính  $f((x+1)^4 + (x-1)^4)$  theo hai cách:

$$\begin{aligned} f((x+1)^4 + (x-1)^4) &= f(2x^4 + 12x^2 + 2) \\ &= 2f(x^4) + 12f(x^2) + 2f(1) \\ &= 2xf'(x^3) + 12f(x^2) + 2f(1) \quad (5.3) \\ f((x+1)^4 + (x-1)^4) &= f((x+1)^4) + f((x-1)^4) \\ &= (x+1)f((x+1)^3) + (x-1)f((x-1)^3) \\ &= (x+1)f(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (x-1)f(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ &= 2xf'(x^3) + 6f(x^2) + 6xf'(x) + 2f(1) \quad (5.4) \end{aligned}$$

Từ (5.3) và (5.4) ta có

$$f(x^2) = xf'(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

Tiếp tục thay  $x$  bởi  $x+1$  vào (5.5) ta được

$$\begin{aligned} f(x^2 + 2x + 1) &= (x+1)(f(x) + f(1)) \\ \Rightarrow f(x^2) + 2f(x) + f(1) &= (x+1)f(x) + (x+1)f(1) \\ \Rightarrow f(x^2) &= (x-1)f(x) + xf(1) \quad (5.6) \end{aligned}$$

Từ (5.5), (5.6) suy ra  $xf'(x) = (x-1)f(x) + xf(1)$   
 $\Rightarrow f(x) = xf(1) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ . Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy hàm cần tìm là  $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

★ **Thí dụ 6.** Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(x^5 + y^5) = x^2 f(x^3) + y^2 f(y^3), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (6)$$

**Lời giải.** Để chứng minh được  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  
 $\forall x, y \in \mathbb{R}$  và  $f(x^5) = x^2 f(x^3) \forall x \in \mathbb{R}$ .

Bây giờ ta tính  $f((x+1)^5 + (x-1)^5)$  theo hai cách.

$$\text{Đặt } t = (x+1)^5 + (x-1)^5 = 2x^5 + 20x^3 + 10x.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(t) &= 2f(x^5) + 20f(x^3) + 10f(x) \\ &= 2x^2 f(x^3) + 20f(x^3) + 10f(x) \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } f(t) &= f((x+1)^5) + f((x-1)^5) \\ &= (x+1)^2 f((x+1)^3) + (x-1)^2 f((x-1)^3) \\ &= 2x^2 f(x^3) + 6x^2 f(x) + 12xf(x^2) + 4xf(1) \\ &\quad + 2f(x^3) + 6f(x) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Từ (6.1), (6.2) suy ra

$$\begin{aligned} 9f(x^3) + 2f(x) &= 3x^2 f(x) + 6xf(x^2) + 2xf(1), \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Trong (6.3) thay  $x$  bởi  $x+1$  ta được

$$\begin{aligned} 9f((x+1)^3) + 2f(x+1) &= 3(x+1)^2 f(x+1) \\ &\quad + 6(x+1)f((x+1)^2) + 2(x+1)f(1) \\ \Leftrightarrow 9f(x^3) + 27f(x^2) + 29f(x) + 11f(1) \\ &= 9f(x^3) + 17f(x) + 3f(1)x^2 + 18xf(x) \\ &\quad + 12f(1)x + 11f(1) + 6f(x^2) \\ \Leftrightarrow 4f(x) + 7f(x^2) &= f(1)x^2 + 6xf(x) + 4f(1)x \quad (6.4) \end{aligned}$$

Trong (6.4) lại thay  $x$  bởi  $x+1$  thì được

$$\begin{aligned} 4f(x+1) + 7f((x+1)^2) &= f(1)(x+1)^2 + 6(x+1)f(x+1) \\ &\quad + 4f(1)(x+1) \Leftrightarrow 7f(x^2) + 18f(x) + 11f(1) \\ &= f(1)x^2 + 12f(1)x + 11f(1) + 6xf(x) + 6f(x) \\ \Leftrightarrow 7f(x^2) + 12f(x) &= f(1)x^2 + 12f(1)x \\ &\quad + 6xf(x) \quad (6.5) \end{aligned}$$

Từ (6.4) và (6.5) suy ra

$$f(x) = f(1)x = ax, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn PT đã cho. Vậy nghiệm của PT là  $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Bình luận.** Qua các thí dụ trên chúng ta thấy nghiệm của PT hàm đã nêu có dạng  $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ . Từ PT tổng quát với việc chọn các giá trị cụ thể của các lũy thừa thì ta được các bài toán tương ứng.

**BÀI TẬP**

Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn một trong các phương trình sau

1.  $f(x - y^2) = f(x) - yf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

2.  $f(x^3 + y) = xf(x^2) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

3.  $f(x^3 - y^3) = xf(x^2) - yf(y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

4.  $f(x^3 - y^3) = x^2f(x) - yf(y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

5.  $f(x - y^4) = f(x) - yf(y^3), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

6.  $f(x + y^4) = f(x) + y^3f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

7.  $f(x^5 - y^5) = x^2f(x^3) - y^2f(y^3), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

8.  $f(x^6 - y^6) = x^3f(x^3) - y^3f(y^3), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

9.  $f(x^7 + y^7) = x^4f(x^3) + y^4f(y^3), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

10.  $f(x^7 - y^7) = x^5f(x^2) - y^5f(y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

**HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 6... (Tiếp trang 10)**

Lấy được 4 bi đỏ: có  $C_4^4$  cách; lấy được 1 bi đỏ, 3 bi xanh: có  $C_3^1 \cdot C_4^3$  (cách).

Lấy được 2 bi đỏ, 2 bi xanh: có  $C_2^2 \cdot C_4^2$  (cách);  
lấy được 3 bi đỏ, 1 bi xanh: có  $C_3^3 \cdot C_4^1$  (cách).

• 4 bi lấy được có đúng 1 bi vàng.

Lấy được 2 bi đỏ, 1 bi vàng, 1 bi xanh: có  $C_2^2 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1$  (cách).

Lấy được 3 bi đỏ, 1 bi vàng: có  $C_3^3 \cdot C_4^1$  (cách).

$$\text{Ta có } N(A) = C_4^4 + C_3^1 \cdot C_4^3 + C_2^2 \cdot C_4^2 + C_3^3 \cdot C_4^1 + C_2^2 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 + C_3^3 \cdot C_4^1 = 275.$$

$$\text{Do đó } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{275}{495} = \frac{5}{9}.$$

Lưu ý. Có thể tính xác suất của biến cố  $\bar{A}$ :

"Trong số 4 viên bi lấy được số bi đỏ không lớn hơn số bi vàng". Khi đó  $P(\bar{A}) = \frac{4}{9}$ , từ đó

$$P(A) = \frac{5}{9}.$$

**Câu VI.b** 1) PT (E) là  $\frac{x^2}{108} + \frac{y^2}{81} = 1$ .

2) Điểm  $B(x; y; z) \in (S)$  và tam giác  $OAB$  đều nên  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0 \\ OA^2 = OB^2 = AB^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4(x + y + z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 32 \\ (4-x)^2 + (4-y)^2 + z^2 = 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 32 \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Tìm được  $B(0; 4; 4)$  hoặc  $B(4; 0; 4)$ . Tương ứng PT mặt phẳng  $(OAB)$  là  $x - y + z = 0$  hoặc  $x - y - z = 0$ .

**Câu VII.b.** Số có 5 chữ số cần lập:  $\overline{abcde}$  ( $a \neq 0$ );  $\overline{abcde} : 3 \Leftrightarrow (a + b + c + d + e) : 3$ .

• Nếu  $(a + b + c + d) : 3$  thì chọn  $e = 0$  hoặc  $e = 3$ .

• Nếu  $(a + b + c + d)$  chia 3 dư 1 thì chọn  $e = 2$  hoặc  $e = 5$ .

• Nếu  $(a + b + c + d)$  chia 3 dư 2 thì chọn  $e = 1$  hoặc  $e = 4$ .

Như vậy mỗi số  $\overline{abcd}$  đều có 2 cách chọn  $e$  để được một số có 5 chữ số chia hết cho 3.

Số các số dạng  $\overline{abcd}$  lập được là

$$5 \times 6 \times 6 \times 6 = 1080.$$

Số các số cần tìm là  $2 \times 1080 = 2160$  (số).

**NGUYỄN THANH GIANG**

(GV THPT chuyên Hưng Yên)



**Giải đáp bài:**

## TẠI SAO BẠN NAM LẠI CƯỜI?

(Đề đăng trên THPT số 426, tháng 12 năm 2012)

Lời giải của bạn Bình phạm sai lầm ở chỗ kết luận hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ .

Rõ ràng hàm số  $g(x)$  chỉ nghịch biến trên từng khoảng  $\left( -\infty; \frac{1}{2} \right); \left( \frac{1}{2}; +\infty \right)$ . Việc bạn Bình khẳng định phương trình  $f(x) = g(x)$  có không quá một nghiệm là không chính xác, do đó đã bỏ sót mất một nghiệm của phương trình (1).

**Lời giải đúng.** Xét hai trường hợp

• Trường hợp 1. Với  $x \in \left( -\infty; \frac{1}{2} \right)$  thì hàm  $f(x)$  đồng biến, hàm  $g(x)$  nghịch biến trên  $\left( -\infty; \frac{1}{2} \right)$ . Mặt khác  $x = 0$  là một nghiệm của PT (1). Do vậy PT (1) có nghiệm duy nhất  $x = 0$  trên khoảng  $\left( -\infty; \frac{1}{2} \right)$ .

• Trường hợp 2. Với  $x \in \left( \frac{1}{2}; +\infty \right)$  thì hàm  $f(x)$  đồng biến, hàm  $g(x)$  nghịch biến trên  $\left( \frac{1}{2}; +\infty \right)$ . Ta thấy  $x = 1$  là một nghiệm của PT (1). Do đó PT (1) có nghiệm duy nhất  $x = 1$  trên khoảng  $\left( \frac{1}{2}; +\infty \right)$ .

Tóm lại, PT (1) có hai nghiệm  $x = 0, x = 1$ .

**Nhận xét.** Các bạn sau có đáp án và lời bình tốt hơn cả: Đình Châu Anh, 12A1, THPT Hồ

Xuân Hương, Quận Thanh Xuân, Hà Nội; Bùi Đình Hiếu, 12A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, Nguyễn Tiến Bằng, 12A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy, Thái Bình; Phan Xuân Đức, 11C4, THPT Nam Đàn 2, Nghệ An; Nguyễn Mậu Thành, 12 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, Hà Tĩnh; Lưu Giang Nam, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, TP. Cà Mau, Cà Mau.

NGỌC HIỂN

## VỀ LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Bạn hãy cho lời bình về lời giải một bài toán hình học giải tích sau:

Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-4}$  sao cho khoảng cách từ điểm  $A(0; -7; 13)$  đến mặt phẳng  $(\alpha)$  là lớn nhất.

**Lời giải.** Ta thấy  $B(1; -3; 4) \in d$  mà  $d \subset (\alpha)$  nên  $B \in (\alpha)$ . Gọi  $\vec{n}(a; b; c)$  (với  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ) là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$ . Khi đó PT của  $(\alpha)$  là  $a(x-1) + b(y+3) + c(z-4) = 0$ .

Ta có  $d(A, (\alpha)) = \frac{|-a-4b+9c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ . Theo BĐT Bunyakovsky thì

$$|-a-4b+9c| \leq \sqrt{(1+16+81)(a^2+b^2+c^2)}.$$

Do đó  $d(A, (\alpha)) \leq \sqrt{98}$ ;  $\max d(A, (\alpha)) = \sqrt{98}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{-1} = \frac{b}{-4} = \frac{c}{9}$ . Chọn  $a=1$  thì  $b=4$  và  $c=-9$ .

Vậy PT mặt phẳng  $(\alpha)$  là

$$(x-1) + 4(y+3) - 9(z-4) = 0,$$

hay là  $x+4y-9z+47=0$ .

Cách giải của bạn như thế nào?

NGUYỄN VĂN BÌNH

(GV THPT Số 2 Quảng Trạch, Quảng Bình)



## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/430. (Lớp 6)** Tồn tại hay không các số tự nhiên  $x, y, z$  thỏa mãn

$$5x^2 + 2016y^2 = 2017z^2$$

ĐÀO HUY TRƯỜNG

(GV THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

**Bài T2/430. (Lớp 7)** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Điểm  $O$  nằm trong tam giác  $ABC$  sao cho  $\widehat{ABO} = 30^\circ$  và  $OA = OC$ . Điểm  $E$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $\widehat{EOB} = 60^\circ$ . Tính các góc của tam giác  $ABC$ , biết rằng đường thẳng  $CO$  đi qua trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AE$ .

NGUYỄN XUÂN HÙNG

(GV THPT Hà Nội - Amsterdam)

**Bài T3/430.** Tìm các số tự nhiên  $x, y$  sao cho

$$5^x = y^4 + 4y + 1.$$

TẠ HỒNG SƠN

(Hà Nội)

**Bài T4/430.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{y-2} + \sqrt{4-z} = y^2 - 5z + 11 \\ y + \sqrt{z-2} + \sqrt{4-x} = z^2 - 5x + 11 \\ z + \sqrt{x-2} + \sqrt{4-y} = x^2 - 5y + 11. \end{cases}$$

NGUYỄN TIẾN TIẾN

(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

**Bài T5/430.** Cho đoạn thẳng  $AB = 2a$  có trung điểm là  $O$ . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  $AB$ , vẽ nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$  và nửa đường tròn tâm  $O'$  đường kính  $AO$ . Điểm  $M$  chuyển động trên nửa đường tròn  $(O')$  khác  $A$  và  $O$ . Tia  $OM$  cắt nửa đường tròn  $(O)$  tại  $C$ . Gọi  $D$  là giao điểm thứ hai của  $CA$  với nửa đường tròn  $(O')$ . Gọi  $E$  là giao điểm của tiếp tuyến tại  $C$  của nửa đường tròn  $(O)$  với tia  $OD$ . Hãy xác định vị

trí của điểm  $M$  trên nửa đường tròn  $(O')$  sao cho  $ME$  song song với  $AB$ .

KIỀU ĐÌNH PHÚ - NGUYỄN PHƯƠNG NAM

(GV THCS Sông Thao, Cẩm Khê, Phú Thọ)

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/430.** Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo  $AC, BD$  bằng nhau và vuông góc với nhau. Về phía ngoài tứ giác ta dựng các tam giác  $AMB, BNC, CPD, DQA$  đồng dạng cùng hướng với nhau. Gọi  $O_1, O_2, O_3, O_4$  lần lượt là trung điểm của  $MN, NP, PQ, QM$ . Chứng minh rằng tứ giác  $O_1O_2O_3O_4$  là hình vuông.

HỒ QUANG VINH

(Hà Nội)

**Bài T7/430.** Hãy tìm công thức tính số các số tự nhiên chia hết cho 3, mỗi số gồm 2013 chữ số lấy từ tập hợp  $X = \{3; 5; 7; 9\}$ .

LẠI THỊ HOA

(GV THPT Nam Đông Quan, Thái Bình)

**Bài T8/430.** Giải phương trình

$$\log_2 x = \log_{5-x} 3.$$

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang)

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T9/430.** Cho 4026 số nguyên dương  $a_1, a_2, \dots, a_{2013}, b_1, b_2, \dots, b_{2013}$  thỏa mãn  $b_k > 1$  với mọi  $k$  thuộc tập  $X = \{1, 2, \dots, 2013\}$ . Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương  $n$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$1) n \leq \left( \prod_{i=1}^{2013} a_i \right) \left( \prod_{i=1}^{2013} b_i \right) + 1;$$

$$2) a_k b_k^n + 1 \text{ là hợp số với mỗi } k \in X.$$

TÔ MINH HOÀNG

(Công ty Phần mềm eXo, Hà Nội)

**Bài T10/430.** Cho các số  $a, b, c \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 4abc \leq \frac{9}{32}.$$

VÕ QUỐC BÁ CẦN

(SV lớp YY0647A1, Khóa 32, ĐH Y Dược Cần Thơ)

**Bài T11/430.** Cho  $p$  là số nguyên tố sao cho  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Hãy tính

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left( \left\lfloor \frac{2k^2}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{k^2}{p} \right\rfloor \right).$$

trong đó  $[a]$  kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá  $a$ .

MAI TUẤN ANH

(GV THCS Nga Điền, Nga Sơn, Thanh Hóa)

**Bài T12/430.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $M$  không thuộc các đường thẳng  $BC, CA, AB$  và đường tròn  $(O)$ ;  $AM, BM, CM$  theo thứ tự cắt lại đường tròn  $(O)$  tại  $A_1, B_1, C_1$ . Các điểm  $A_2, B_2, C_2$  theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MBC, MCA, MAB$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  đồng quy tại một điểm thuộc đường tròn  $(O)$ .

NGUYỄN BÌNH

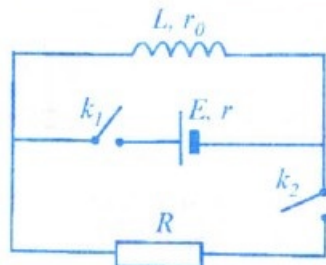
(Hà Nội)

## CÁC ĐỀ VẬT LÝ

**Bài L1/430.** Cho mạch điện như hình vẽ: nguồn điện có suất điện động  $E$ , điện trở trong  $r$ , cuộn cảm có điện trở  $r_0$  và độ tự cảm  $L$ , điện trở  $R = r = r_0 = R_0$ .

1) Lúc đầu  $k_1$  mở,  $k_2$  đóng. Tìm cường độ dòng điện qua nguồn, qua cuộn cảm và qua điện trở nếu ngay sau đó ta đóng  $k_1$ . Các dòng này bằng bao nhiêu khi mạch đã đạt trạng thái ổn định?

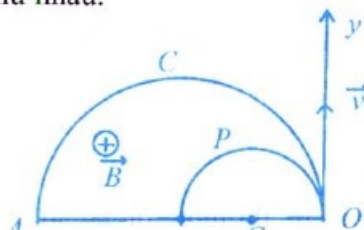
2) Lúc đầu  $k_1$  và  $k_2$  đều đóng. Nếu sau đó ta ngắt  $k_1$ . Tính điện lượng dịch chuyển qua cuộn dây khi mạch đã đạt trạng thái ổn định. Hãy chứng tỏ năng lượng từ trường của cuộn cảm đã chuyển hóa thành nhiệt trên các điện trở?



NGUYỄN MINH TUẤN

(GV THPT Yên Thành 2, Nghệ An)

**Bài L2/430.** Một hạt deuteron chuyển động trong máy cyclotron có từ trường  $B$  theo quỹ đạo tròn bán kính  $100 \text{ cm}$ . Do va chạm với bia nó vỡ thành một hạt proton và một hạt neutron mà không mất mát đáng kể về động năng. Biện luận về chuyển động tiếp theo của từng hạt. Coi rằng khối lượng của proton và neutron là như nhau.



NGUYỄN VĂN THUẬN

(GV ĐHSP Hà Nội)

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/430. (For 6<sup>th</sup> grade)** Do there exist natural numbers  $x, y, z$  such that

$$5x^2 + 2016y^{y+1} = 2017z^z?$$

**T2/430. (For 7<sup>th</sup> grade)** Point  $O$  is chosen in a right triangle  $ABC$ , right angle at  $A$ , such that  $\widehat{ABO} = 30^\circ$  and  $OA = OC$ . Point  $E$  on side  $BC$  such that  $\widehat{EOB} = 60^\circ$ . Determine the three angles of triangle  $ABC$  given that the

line  $CO$  passes through the midpoint  $I$  of the line segment  $AE$ .

**T3/430.** Find all pair of natural numbers  $x, y$  such that  $5^x = y^4 + 4y + 1$ .

**T4/430.** Solve the system of equations

$$\begin{cases} x + \sqrt{y-2} + \sqrt{4-z} = y^2 - 5z + 11 \\ y + \sqrt{z-2} + \sqrt{4-x} = z^2 - 5x + 11 \\ z + \sqrt{x-2} + \sqrt{4-y} = x^2 - 5y + 11. \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 27)



★ **Bài T1/426.** Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên  $n$  lớn hơn 4 thì tồn tại cặp số tự nhiên  $x, y$  với  $\frac{n}{2} \leq x < n$  và  $\frac{n}{2} \leq y < n$ , thỏa mãn  $x^2 - y$  chia hết cho  $n$ .

**Lời giải.** Đặt  $\frac{n}{2} \leq x < n$  và  $\frac{n}{2} \leq y < n$  là ĐK (\*).

Xét ba trường hợp sau đây

- Với  $5 \leq n \leq 8$  hay  $2^2 + 1 \leq n < 3^2$ , ta chọn  $y = 2^2$  và  $x = n - 2$ . Dễ thấy  $x$  và  $y$  thỏa mãn ĐK (\*). Ta có  $x^2 - y = (n - 2)^2 - 2^2 = n^2 - 4n + 4 - 4 = n^2 - 4n = n(n - 4)$ , số này chia hết cho  $n$ .
- Với  $n = 9$  ta chọn  $x = 5$  và  $y = 7$  thì  $x$  và  $y$  thỏa mãn ĐK (\*). Ta có  $x^2 - y = 5^2 - 7 = 18$  chia hết cho  $n = 9$ .
- Với  $n \geq 10$  thì luôn tồn tại số chính phương  $k^2$  sao cho  $k^2 + 1 \leq n \leq (k + 1)^2$ . Từ đó  $k \geq 3$  và do  $2k < k^2 < n$  nên  $k < \frac{n}{2}$ . Ta chọn  $y = k^2$  và  $x = n - k$ . Dễ thấy  $\frac{n}{2} = n - \frac{n}{2} < n - k < n$  hay  $\frac{n}{2} < x < n$ . Mặt khác  $y = k^2 < k^2 + 1 \leq n$ . Hơn nữa  $2y - n \geq 2y - (k + 1)^2 = 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) = k^2 - 2k - 1 = k(k - 2) - 1 > 0$  (do  $k \geq 3$ ) hay  $y \geq \frac{n}{2}$ .

Như vậy  $x, y$  đều thỏa mãn ĐK (\*).

Ta có  $x^2 - y = (n - k)^2 - k^2 = n^2 - 2nk + k^2 - k^2 = n^2 - 2nk = n(n - 2k)$ , số này chia hết cho  $n$ .

**Kết luận.** Với  $n > 4$  thì luôn tồn tại cặp số tự nhiên  $x, y$  sao cho  $x, y$  đều thỏa mãn ĐK (\*) và  $x^2 - y$  chia hết cho  $n$ . □

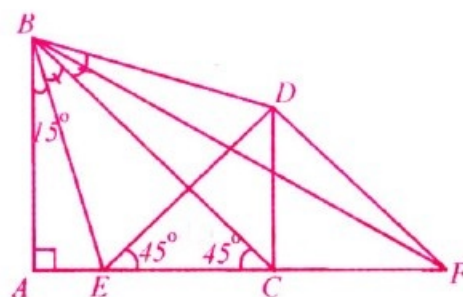
► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

**Vĩnh Phúc:** Trần Quang Đức, 6A1, Bùi Thị Liễu Dương, 6A5, THCS Yên Lạc.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/426.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Trên tia  $AC$  lấy hai điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $\widehat{ABE} = 15^\circ$  và  $CE = CF$ . Tính số đo của góc  $CBF$ .

**Lời giải.** (hình vẽ)



Trên nửa mặt phẳng bờ  $BE$  chứa điểm  $F$ , dựng tam giác đều  $BED$ . Ta có

$\widehat{EBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$   
 $\Rightarrow \widehat{CBD} = 30^\circ$ . Khi đó  $BC$  là tia phân giác góc  $EBD$  nên  $CD = CE = CF$  suy ra tam giác  $DEF$  vuông cân tại  $D$ . Lại có  $\widehat{DEF} = 180^\circ - \widehat{AEB} - \widehat{BED} = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$ . Do đó  $BC \parallel DF$  (vì  $\widehat{BCA} = \widehat{DFE} = 45^\circ$ ). Ta lại có tam giác  $DBF$  cân tại  $D$  (vì  $DB = DE = DF$ ) và  $\widehat{BDF} = \widehat{BDE} + \widehat{EDF} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$  nên  $\widehat{DFB} = \widehat{DBF} = 15^\circ$ , suy ra  $\widehat{CBF} = \widehat{DFB} = 15^\circ$ .

**CÔNG TY RUNSYSTEM, BCD PHÒNG TRÁO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẬP CHÍ TOÀN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

**Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí**

$$\widehat{CBF} = 15^\circ. \square$$

► **Nhận xét.** 1) Bài toán này có nhiều cách giải. Tất cả các bạn đều vẽ thêm hình phụ và tìm ra kết quả đúng.  
2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn hơn cả:

**Phú Thọ:** Khổng Xuân Bách, Lê Hoàng Sơn, Nguyễn Anh Hào, 7A1, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** Phạm Trần Anh, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Nguyễn Trần Hoàng, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Phước, Đỗ Thị Kim Lê, Trương Thị Mai Trâm, Nguyễn Thị Mỹ Chi, Nguyễn Thị Hạnh, 7A, Nguyễn Hiếu Ngân, Nguyễn Tân Duy, 7B, Phạm Thiên Trang, 6A, THCS Hành Phước, Nguyễn Đại Dương, 7B, THCS Kim Vang, Nghĩa Hành, Phạm Thị Vy Vy, 6A, Võ Công Phát, 7C, Võ Nguyễn Hải, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Thảo Nguyên, Phạm Thị Thu Trang, 7B, THCS Hoàng Xuân Hân, Đức Thọ; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Thị Thu Phương, 7A1, THCS Yên Lạc, Trần Quốc Đại, 7A, THCS Tam Dương.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/426.** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình  $65(x^3y^3 + x^2 + y^2) = 81(xy^3 + 1)$  (1)

**Lời giải.** (1)  $\Leftrightarrow 65x^2(xy^3 + 1) + 65y^2 = 81(xy^3 + 1)$   
 $\Leftrightarrow 65y^2 = (xy^3 + 1)(81 - 65x^2)$  (2)

Vì  $x, y \in \mathbb{N}^*$  nên  $65y^2 > 0, xy^3 + 1 > 0$ . Vậy để PT (2) có nghiệm thì  $81 - 65x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < \frac{81}{65}$ .

Kết hợp với  $x \in \mathbb{N}^*$  suy ra  $x = 1$ . Khi đó PT (1) trở thành

$$16y^3 - 65y^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (y-4)(16y^2 - y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \text{ (vì PT } 16y^2 - y - 4 = 0 \text{ không có nghiệm nguyên). Do đó } (x; y) = (1; 4) \text{ (thỏa mãn (1)). Vậy PT (1) có nghiệm nguyên dương duy nhất } (x; y) = (1; 4). \square$$

► **Nhận xét.** 1) Dùng liên phân số có thể giải bài toán trên như sau: Do  $x, y \in \mathbb{N}^*$  nên PT (1) tương đương với

$$\frac{x^3y^3 + x^2 + y^2}{xy^3 + 1} = \frac{81}{65} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{xy + \frac{1}{y^2}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{16}}$$

Từ đây ta cũng tìm được  $(x; y) = (1; 4)$ .

2) Ngoài hai cách giải trên, một số bạn giải bằng cách: phân tích, xét trường hợp rồi đánh giá,... Các cách giải đều đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

**Phú Thọ:** Phan Đức Nhật Minh, 9A, THCS Sông Thao, Cẩm Khê; Nguyễn Đức Thuận, 8A3, THCS Lâm

Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Khắc Việt Anh, Nguyễn Thị Hiền, 8A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Huân, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** Tạ Lê Ngọc Sáng, 6E, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam; **Thanh Hóa:** Nguyễn Hữu Hoàng, 8B, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Nghe An:** Phạm Việt Anh, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mai Lê, 9B, THCS Hoàng Xuân Hân, Đức Thọ; Nguyễn Thị Trà, 9D, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Phú Yên:** Trần Đỗ Bảo Huân, 9B, THCS Nguyễn Thị Định, Tây Hòa; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Mỹ Chi, Nguyễn Thúy Phương, Nguyễn Thị Hạ Vy, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, Võ Nguyễn Hải, Trần Thị Mỹ Ninh, 9A, Võ Công Phát, 9C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/426.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9x^2 + 9xy + 5x - 4y + 9\sqrt{y} = 7 \\ \sqrt{x - y + 2} + 1 = 9(x - y)^2 + \sqrt{7x - 7y}. \end{cases}$$

**Lời giải.** Điều kiện  $x \geq y \geq 0$ .

Đặt  $x - y = t$  ( $t \geq 0$ ). Khi đó PT thứ hai của hệ trở thành  $\sqrt{t+2} + 1 = 9t^2 + \sqrt{7t}$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 1 + \sqrt{7t} - \sqrt{t+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (9t^2 - 1) + \frac{2(3t-1)}{\sqrt{7t} + \sqrt{t+2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3t-1) \left( 3t+1 + \frac{2}{\sqrt{7t} + \sqrt{t+2}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \text{ (do } t \geq 0 \text{ nên } 3t+1 + \frac{2}{\sqrt{7t} + \sqrt{t+2}} > 0).$$

$$\text{Suy ra } x - y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = x - \frac{1}{3}.$$

Thay vào PT thứ nhất của hệ đã cho ta được

$$9x^2 + 9x \left( x - \frac{1}{3} \right) + 5x - 4 \left( x - \frac{1}{3} \right) + 9\sqrt{x - \frac{1}{3}} = 7$$

$$\Leftrightarrow 18x^2 - 8x + 6x - \frac{8}{3} + 9\sqrt{x - \frac{1}{3}} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(9x - 4) + \frac{2}{3}(9x - 4) + 3(\sqrt{9x - 3} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x - 4) \left( 2x + \frac{2}{3} + \frac{3}{\sqrt{9x - 3} + 1} \right) = 0.$$

$$\text{Do } x \geq y \geq 0 \text{ nên } x \geq \frac{1}{3}, \text{ suy ra } 2x + \frac{2}{3} + \frac{3}{\sqrt{9x - 3} + 1} > 0.$$

Vì vậy  $9x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$ , suy ra  $y = \frac{1}{9}$ . Hệ

có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left(\frac{4}{9}; \frac{1}{9}\right)$ .  $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Bài này có nhiều bạn tham gia giải. Một số bạn đã không đặt ẩn phụ nên phép biến đổi dài dòng và quên đặt điều kiện xác định. Có thể đặt  $\sqrt{x-y} = t$

để tìm ra  $x - y = \frac{1}{3}$ . Biến đổi PT thứ hai của hệ

$(4 - 9x)(x + y + 1) = 3(3\sqrt{y} - 1)$ . Xét các trường hợp

$y > \frac{1}{9}$ ,  $y < \frac{1}{9}$ ,  $y = \frac{1}{9}$  để tìm ra nghiệm.

2) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Phú Thọ:** Vũ Thùy Linh, 8A3, Phan Đức Nhật Minh, 9A, Trương Anh Tú, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Tú Linh, Nguyễn Khắc Việt Anh, 8A1, THCS Yên Lạc, Nguyễn Thị Quỳnh Trang, 9A, THCS Lập Thạch; **Nam Định:** Võ Thanh Thông, 9A, THCS Nghĩa Thắng; **Nghệ An:** Trần Việt Thế, 7A, THCS Châu Hội, Quỳnh Châu, Ngô Thị Trà, 9A, THCS Hòa Hiếu II, TX Thái Hòa; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Trà, 9D, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Hà Nam:** Đỗ Đăng Dương, 9A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Nguyễn Hữu Hoàng, 8B, THCS Trần Phú, Nông Công; **Quảng Ngãi:** Vũ Công Phát, 9C, Trần Thị Mỹ Ninh, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, Nguyễn Thúy Phương, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Bảo Trân, 8T1, Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Đồng Nai:** Tô Đặng Xuân Hinh, 9A3, THCS Long Phước, Long Thành; **Bến Tre:** Trần Bảo Duy, 8/3, THCS TP. Bến Tre; **Trà Vinh:** Trương Hoàng Việt, 84, THCS Thị trấn Cầu Quan, Tiểu Cần.

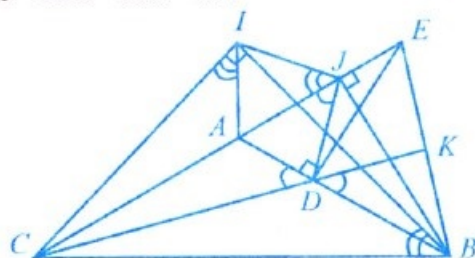
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/426.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có góc  $BAC$  tù. Giả sử trên cạnh  $AB$  có điểm  $D$  sao cho  $BC = CD\sqrt{2}$ . Qua  $D$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt  $CA$  tại  $E$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $CD$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $BE$ .

**Lời giải.** Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  $BC$  chứa điểm  $A$ , dựng tam giác  $IBC$  vuông cân tại  $I$ . Kẻ  $BJ \perp CE$  và gọi  $K$  là giao điểm của  $CD$  và  $BE$  (hình vẽ).

Vì tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , tam giác  $IBC$  vuông cân tại  $I$ , nên  $IA$  là tia phân giác của

$\widehat{BIC}$ . Dễ thấy tứ giác  $CIJB$  nội tiếp, suy ra  $\widehat{IJC} = \widehat{IBC} = \widehat{CIA} = 45^\circ$ .



Từ đó  $\triangle CAI \sim \triangle CIJ$  (g.g)  $\Rightarrow CI^2 = CA \cdot CJ$ .

Do  $CD = CI = \frac{BC\sqrt{2}}{2}$  nên  $CD^2 = CA \cdot CJ$ .

Từ đây ta thấy  $\triangle CAD \sim \triangle CDJ$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{CJD} = \widehat{ADC} = \widehat{BDK}$  (1)

Mặt khác, vì tứ giác  $BDJE$  nội tiếp nên  $\widehat{CJD} = \widehat{DBE}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{BDK} = \widehat{DBK}$ , hay tam giác  $KBD$  cân tại  $K$ . Đến đây chú ý rằng  $ED \perp AB$ , ta dễ dàng suy ra  $K$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BE$  (đpcm).  $\square$

➤ **Nhận xét.** Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt:

**Hà Nam:** Hoàng Đức Mạnh, 9A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** Nguyễn Hữu Hoàng, 8B, THCS Trần Phú, Nông Công; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T6/426.** Cho

$$S = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \sqrt[5]{\frac{5}{4}} + \dots + \sqrt[2013]{\frac{2013}{2012}}.$$

Tìm phần nguyên của  $S$ .

**Lời giải.** Nhận thấy tổng  $S$  gồm 2012 số hạng, mỗi số hạng có dạng  $\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}$  với

$k=1, 2, \dots, 2012$ . Do  $\frac{k+1}{k} > 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$  nên mỗi số hạng của  $S$  đều lớn hơn 1, suy ra  $S > 2012$ . Áp dụng BĐT Cauchy cho  $k+1$  số dương

$\frac{k+1}{k}, 1, \dots, 1$  (gồm  $k$  số 1) ta có

$${}^{k+1}\sqrt{\frac{k+1}{k}} < \left(\frac{k+1}{k} + k\right) \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{k^2+k+1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\text{hay } {}^{k+1}\sqrt{\frac{k+1}{k}} < 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (*)$$

Lần lượt cho  $k = 1, 2, \dots, 2012$  vào (\*) và cộng theo về 2012 BĐT đó ta thu được

$$\begin{aligned} S &< 2012 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} \\ &= 2013 - \frac{1}{2013} < 2013. \end{aligned}$$

Vậy  $2012 < S < 2013$  nên  $[S] = 2012$ .  $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán cơ bản nên rất nhiều bạn tham gia giải và đều cho lời giải đúng. Mấu chốt của bài toán là chỉ ra BĐT (\*), có bạn sử dụng BĐT  $(1+a)^{k+1} > 1+a(k+1)$  ( $a > 0, k \in \mathbb{N}^*$ ) để dẫn đến BĐT (\*). Một số bạn đã nêu bài toán tổng quát:

$$\text{Cho } S_n = \sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} \text{ thì } [S_n] = n.$$

2) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Hà Nội:** Mạc Phương Anh, 10A1, THPT chuyên KHTN, Nguyễn Viết Hoàng, 9A1, THCS Cầu Giấy;  
**Bắc Ninh:** Diệp Yên Hà, 11 THPT Yên Phong Số 2, Nguyễn Văn An, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh;  
**Hưng Yên:** Trần Bá Trung, Nguyễn Long Duy, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** Đỗ Đăng Dương, 9A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm, Trần Tùng Lâm, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa;  
**Nam Định:** Trần Phúc Tài, 10 Toán 1, Trần Thị Quyên, 11 Toán 1, Vũ Tuấn Anh, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Hữu Cương, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Nguyên:** Nguyễn Văn Tuyển, 11A11, THPT Lương Ngọc Quyên; **Thái Bình:** Hoàng Trung Hiếu, 10 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Hòa Bình:** Nghiêm Xuân Huy, 10 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa:** Nguyễn Thị Hà, 10A7, THPT Lương Đắc Bằng, Trần Trung Đức, 10A6, THPT Đào Duy Từ; **Nghệ An:** Đặng Đình Lâm, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Trần Văn Hùng, 10A2, THPT Đô Lương III, Tăng Trung Hiếu, 10A1, THPT Thái Hòa, Thái Văn Đạt, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mai Lê, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn; **Quảng Bình:** Trần Hữu Thuận, 11 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Ngãi:** Tống Thành Nguyên, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Nguyễn Hồng Tâm, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Kiên Giang:** Lê Hoàn Thu Nga, 11 T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Tiền Giang:** Nguyễn Thế Dũng, 10 Toán, THPT

chuyên Tiền Giang; **Đồng Nai:** Võ Thành Phát, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Quảng Nam:** Võ Quang Hưng, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Long An:** Chu Thị Thu Hiền, 11T, THPT chuyên Long An; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** Thái Ngọc Anh, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Trần Đỗ Bảo Huân, 9B, THCS Nguyễn Thị Định, Tây Hòa, Nguyễn Đình Khả, 10 Toán 2, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bạc Liêu:** Huỳnh Nguyễn Đình Như, 10T THPT chuyên Bạc Liêu; **Đắk Lắk:** Nguyễn Thanh Trường, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du; **Cà Mau:** Lê Minh Phương, 11 T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

PHÙNG HẠNH GIANG

★ **Bài T7/426.** Giả sử  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} &\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \\ &\leq \frac{3\sqrt{3}abc}{(a+b+c)\sqrt{a+b+c}}. \end{aligned}$$

**Lời giải.** Giả sử tam giác  $ABC$  có ba cạnh là  $a, b, c$  và  $p, S, R$  tương ứng là nửa chu vi, diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp của nó. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$(a+b+c)\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \leq 3\sqrt{3}abc$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq 3\sqrt{3}abc \quad (1)$$

Thay  $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S; abc = 4RS$ , ta thấy BĐT (1) tương đương với

$$\begin{aligned} &4(a+b+c)S \leq 3\sqrt{3} \cdot 4RS \\ \Leftrightarrow &\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow &\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

Lưu ý rằng nếu  $x, y \in (0; \pi)$  thì

$$\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq 2\sin \frac{x+y}{2} \quad (3)$$

(vì  $\sin \frac{x+y}{2} > 0$  và  $0 \leq \cos \frac{x-y}{2} \leq 1$ ).

Đẳng thức trong (3) xảy ra khi  $x = y$ . Từ BĐT (3) ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C + \sin \frac{\pi}{3} \leq 2 \left( \sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C+\frac{\pi}{3}}{2} \right) \leq 4 \sin \frac{\pi}{3}.$$

Từ đó suy ra (2). Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác  $ABC$  đều.  $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Hưng Yên:** Trần Mai Anh, 11 Toán 1, Bùi Gia Khánh, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Nguyên:** Phạm Thanh Bình, 11A1, THPT Lương Phú, Phú Bình; **Hà Nam:** Nguyễn Quang Huy, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Hòa Bình:** Nguyễn Sỹ An, Nguyễn Xuân Huy, 10 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, TP Hòa Bình; **Bắc Ninh:** Diệp Yên Hà, 11A, THPT Yên Phong Số 2; **Nghệ An:** Lê Kim Nhã, Trương Công Phú, Lê Hồng Đức, Nguyễn Xuân Điện, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Quảng Bình:** Đoàn Quốc Đạt, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T8/426.** Cho tứ diện  $ABCD$  có các cạnh  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc với nhau.  $M$  là điểm di động trong không gian. Cho biết  $AB = 4, AC = 8, AD = 12$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{7}MA + \sqrt{11}MB + \sqrt{23}MC + \sqrt{43}MD.$$

**Lời giải.** Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $O \equiv A, B \in Ox, C \in Oy, D \in Oz$ . Khi đó từ giả thiết  $AB = 4, AC = 8, AD = 12$  ta suy ra  $B(4; 0; 0), C(0; 8; 0), D(0; 0; 12)$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tứ diện  $ABCD$ , ta có  $G(1; 2; 3)$ . Suy ra  $GA = \sqrt{14}, GB = \sqrt{22}, GC = \sqrt{46}, GD = \sqrt{86}$ . Từ đó ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{2}P &= \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{MD} \\ &\geq \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{MD} \\ &= \overrightarrow{GA}(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \overrightarrow{GB}(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \\ &\quad + \overrightarrow{GC}(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GD}(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}) \\ &= \overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + GA^2 \\ &\quad + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\ &= GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 168. \end{aligned}$$

Suy ra  $P \geq 84\sqrt{2}$ . Vậy giá trị nhỏ nhất của  $P$  là  $84\sqrt{2}$ , đạt được khi và chỉ khi  $M \equiv G$ , hay  $M$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ .  $\square$

► **Nhận xét.** Có rất ít bạn tham gia giải bài toán trên và chỉ có bốn bạn sau cho lời giải đúng:

**Hưng Yên:** Nguyễn Thị Việt Hà, 11Toán1, Nguyễn Trung Hiếu, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** Nguyễn Hải Linh Chi, Trịnh Thị Thuý Dương, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T9/426.** Cho dãy số nguyên dương  $(a_n)$  với  $a_1 = 1, a_2 = 2$  và  $a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n, n \geq 1$ . Chứng minh rằng

1)  $a_n a_{n+2} + (-1)^n \cdot 5$  luôn luôn là một số chính phương với mọi  $n \geq 1$ .

2) Phương trình  $x^2 - 4xy - y^2 = 5$  có vô số nghiệm nguyên dương.

**Lời giải.** (Theo bạn Huỳnh Bảo Trung 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Quảng Nam**).

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ta có } a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} &= a_{n+1}^2 - a_n(a_n + 4a_{n+1}) \\ &= a_{n+1}(a_{n+1} - 4a_n) - a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 \\ &= (-1)(a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}) = \dots = (-1)^{n-1}(a_2^2 - a_1a_3). \end{aligned}$$

Dễ tính được  $a_3 = 4a_2 + a_1 = 9$ . Vậy  $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = (-1)^{n-1}(4 - 9) = (-1)^n \cdot 5$ . Do đó  $a_n a_{n+2} + (-1)^n \cdot 5 = a_{n+1}^2$  là một số chính phương.

$$\begin{aligned} 2) \text{ Từ câu 1) ta có } a_{n+1}^2 - 4a_n a_{n+1} - a_n^2 &= (-1)^n \cdot 5 \\ \Rightarrow a_{2k+1}^2 - 4a_{2k} a_{2k+1} - a_{2k}^2 &= 5, \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Do đó  $(a_{2k+1}, a_{2k})$  là các nghiệm nguyên dương của phương trình  $x^2 - 4xy - y^2 = 5$  (1)

Vì dãy  $(a_n)$  tăng nên các bộ  $(a_{2k+1}, a_{2k})$

$(k=1, 2, \dots)$  là khác nhau. Do đó phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

► **Nhận xét.** Bài này được khá nhiều bạn tham gia giải và giải đúng. Ngoài bạn Trung, các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Cà Mau:** Lưu Giang Nam, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Đồng Nai:** Phạm Công Danh, 11T3, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Thái Bình:** Nguyễn Hải Linh Chi, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** Trần Trung Hiếu, 12A1, THPT Thái Hòa; **Bắc Ninh:**

Nguyễn Văn An, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh;  
**Quảng Bình:** Đoàn Quốc Đạt, 10 Toán, THPT chuyên  
 Quảng Bình; **Hưng Yên:** Nguyễn Long Duy, 10 Toán 1,  
 THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Ngãi:** Ngô Thành  
 Đạt, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Long An:** Chu  
 Thị Thu Hiền, 11T, THPT chuyên Long An.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/426.** Cho  $a$  là một số thực thuộc  
 $(0; 1)$  và  $b$  là một số phức thỏa mãn  $|b| < 1$ .

Chứng minh bất đẳng thức  $|b| + \left| \frac{a-b}{1-ab} \right| \geq a$ .

**Lời giải.** (Theo bạn đa số các bạn).

Với  $b = \alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) thì  $\bar{b} = \alpha - i\beta$  và  
 $|b|^2 = b\bar{b} = \alpha^2 + \beta^2$ . Ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{a-b}{1-ab} \right|^2 &= \frac{|a-b|^2}{|1-ab|^2} = \frac{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})}{(1-ab)(1-\bar{a}\bar{b})} \\ &= \frac{a^2 - ab - \bar{a}\bar{b} + |b|^2}{1 - ab - \bar{a}\bar{b} + a^2|b|^2} = 1 - \frac{1 + a^2|b|^2 - a^2 - |b|^2}{1 - ab - \bar{a}\bar{b} + a^2|b|^2} \\ &= 1 - \frac{(1-a^2)(1-|b|^2)}{|1-ab|^2}. \end{aligned}$$

Để ý rằng  $|1-ab|^2 \geq (1-a|b|)^2$  (do  $|1-ab|^2 - (1-a|b|)^2 = a(2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 2\alpha) \geq 0$ ) và  
 $(1-a|b|^2) > 0$  (do  $a \in (0; 1)$  và  $|b| < 1$ ).

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \left| \frac{a-b}{1-ab} \right|^2 &= 1 - \frac{(1-a^2)(1-|b|^2)}{|1-ab|^2} \\ &\geq 1 - \frac{(1-a^2)(1-|b|^2)}{|1-a|b|^2|} = \left( \frac{a-|b|}{1-a|b|} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \left| \frac{a-b}{1-ab} \right| \geq \left| \frac{a-|b|}{1-a|b|} \right| \geq |a-|b|| \geq a-|b|,$$

$$\text{hay } |b| + \left| \frac{a-b}{1-ab} \right| \geq a.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $b = 0$  hoặc  $b = a$ . □

► **Nhận xét.** Nhiều bạn gửi lời giải đến chỉ chứng  
 minh được BĐT đúng cho các số thực, chưa xét đến  
 trường hợp  $b$  nhận giá trị phức. Các bạn sau đây có lời  
 giải đúng:

**Hải Dương:** Minh Thành Trung, 12A, THPT Kim  
 Thành; **Hà Nam:** Nguyễn Anh Tuấn, 10A1, THPT  
 chuyên Biên Hòa; **Nam Định:** Trần Phúc Tài, 10T1,

THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Nguyễn  
 Hải Linh Chi, Trần Hồng Quân, 11T, THPT chuyên  
 Thái Bình.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T11/426.** Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Chứng minh

$$\text{rằng } (\cot \alpha)^{\cos 2\alpha} \geq \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

**Lời giải.** Ta có  $\cos \alpha > 0, \sin \alpha > 0$  nên

$$\begin{aligned} (\cot \alpha)^{\cos 2\alpha} \geq \frac{1}{\sin 2\alpha} &\Leftrightarrow \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^{\cos 2\alpha} \geq \frac{1}{2\sin \alpha \cos \alpha} \\ &\Leftrightarrow 2(\cos \alpha)^{\cos 2\alpha+1} \cdot (\sin \alpha)^{1-\cos 2\alpha} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot (\cos \alpha)^{2\cos^2 \alpha} \cdot (\sin \alpha)^{2\sin^2 \alpha} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot (\cos^2 \alpha)^{1-\sin^2 \alpha} \cdot (\sin^2 \alpha)^{1-\cos^2 \alpha} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \geq (\cos^2 \alpha)^{\sin^2 \alpha} \cdot (\sin^2 \alpha)^{\cos^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow 2ab \geq a^b \cdot b^a \end{aligned} \quad (1)$$

(với  $a = \cos^2 \alpha, b = \sin^2 \alpha, a > 0, b > 0, a+b=1$ ).

Chú ý với bất kì  $k, m \in \mathbb{N}^*, n = k+m$ , áp dụng  
 bất đẳng thức Cauchy cho  $k$  số  $a$  và  $m$  số  $b$  ta  
 nhận được

$$\frac{k}{n} \cdot a + \frac{m}{n} \cdot b = \frac{k \cdot a + m \cdot b}{n} \geq \sqrt[n]{a^k \cdot b^m} = a^{\frac{k}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \quad (2)$$

Với  $x, y$  là các số thực dương bất kì,  $x+y=1$   
 thì tồn tại dãy các số hữu tỉ  $\left(\frac{k}{n}\right)$  mà  $\frac{k}{n} \rightarrow x$ .

Khi đó  $\frac{m}{n} = 1 - \frac{k}{n} \rightarrow y$ . Từ (2), chuyển qua giới  
 hạn ta có  $x \cdot a + y \cdot b \geq a^x \cdot b^y$  (3)

Xét  $x = b, y = a$  ta nhận được bất đẳng thức  
 (1). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a=b \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ . Khẳng định của bài toán đã  
 được chứng minh. □

► **Nhận xét.** 1) Bất đẳng thức (3) còn được gọi là bất  
 đẳng thức Cauchy suy rộng.

2) Tòa soạn nhận được lời giải của nhiều bạn, tất cả các  
 bạn đều có lời giải đúng. Phần lớn các bạn chứng minh  
 bất đẳng thức (1) bằng đạo hàm, khảo sát hàm số.  
 Những bạn sau có lời giải theo cách của lời giải trên:

**Hòa Bình:** Đặng Hữu Hiếu, 12T, THPT chuyên Hoàng  
 Văn Thụ; **Thái Nguyên:** Nguyễn Tiến Mạnh, 11A2,

THPT chuyên Lương Ngọc Quyến; **Hưng Yên:** Trần Bá Trung, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Trần Phúc Tài, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Nguyễn Tiến Bằng, 12A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** Trịnh Văn Cương, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Thùy Linh, 10A1, THPT Hương Khê; **Quảng Bình:** Đoàn Quốc Đạt, 10T, THPT chuyên Quảng Bình; **Đắk Lắk:** Nguyễn Thanh Hải, 12T, THPT chuyên Nguyễn Du; **Quảng Ngãi:** Phạm Tấn Phát, 11A1, THPT Phạm Văn Đồng, Mộ Đức; **Phú Yên:** Lê Ngọc Mai, 11S3, THPT Duy Tân.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T12/426.** Cho tứ diện  $ABCD$  nội tiếp mặt cầu tâm  $O$ . Điểm  $G$  không thuộc các mặt phẳng  $(BCD)$ ,  $(CDA)$ ,  $(DAB)$ ,  $(ABC)$  và mặt cầu  $(O)$ . Gọi  $X, Y, Z, T$  theo thứ tự là tâm mặt cầu ngoại tiếp của các tứ diện  $GBCD$ ,  $GCDA$ ,  $GDAB$ ,  $GABC$ . Chứng minh rằng  $G$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$  khi và chỉ khi  $O$  là trọng tâm của tứ diện  $XYZT$ .

**Lời giải.** Trong lời giải này, với tứ diện  $ABCD$ , ta kí hiệu  $S_A, S_B, S_C, S_D$  theo thứ tự là diện tích của các tam giác  $BCD, CDA, DAB, ABC$ ;  $h_A, h_B, h_C, h_D$  theo thứ tự là độ dài các đường cao hạ từ  $A, B, C, D$ ;  $V$  là thể tích.

**Bổ đề 1.** Nếu mặt cầu nội tiếp  $(I)$  của tứ diện  $ABCD$  theo thứ tự tiếp xúc với các mặt phẳng  $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$  tại  $X, Y, Z, T$  thì  $S_A \cdot \overrightarrow{IX} + S_B \cdot \overrightarrow{IY} + S_C \cdot \overrightarrow{IZ} + S_D \cdot \overrightarrow{IT} = \vec{0}$ .

Bổ đề 1 khá quen thuộc, các bạn tự chứng minh.

**Bổ đề 2.** Nếu  $G, G'$  theo thứ tự là trọng tâm của các tứ diện  $ABCD, A'B'C'D'$  thì  $A'G', B'G', C'G', D'G'$  theo thứ tự vuông góc với các mặt phẳng  $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$  khi và chỉ khi  $AG, BG, CG, DG$  theo thứ tự vuông góc với các mặt phẳng  $(B'C'D'), (C'D'A'), (D'A'B'), (A'B'C')$ .

**Chứng minh**

• **Điều kiện cần.** Giả sử mặt cầu nội tiếp  $(I)$  của tứ diện  $ABCD$  theo thứ tự tiếp xúc với các mặt phẳng  $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$  tại  $X, Y, Z, T$ .

Vì  $G'$  là trọng tâm của tứ diện  $A'B'C'D'$  nên

$$\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{G'D'} = \vec{0}.$$

Kết hợp với  $IX = IY = IZ = IT$  và  $G'A' \parallel IX, G'B' \parallel IY, G'C' \parallel IZ, G'D' \parallel IT$ , ta có

$$\delta_a G'A' \cdot \overrightarrow{IX} + \delta_b G'B' \cdot \overrightarrow{IY} + \delta_c G'C' \cdot \overrightarrow{IZ} + \delta_d G'D' \cdot \overrightarrow{IT} = \vec{0}.$$

( $\delta_a, \delta_b, \delta_c, \delta_d$  cùng bằng  $-1$  hoặc cùng bằng  $1$ ).

Từ đó, chú ý rằng ba vector bất kì trong bốn vector  $\overrightarrow{IX}, \overrightarrow{IY}, \overrightarrow{IZ}, \overrightarrow{IT}$  không đồng phẳng, theo Bổ đề 1, suy ra

$$\frac{G'A'}{S_A} = \frac{G'B'}{S_B} = \frac{G'C'}{S_C} = \frac{G'D'}{S_D} = k. \text{ Vậy}$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) (\overrightarrow{G'C'} - \overrightarrow{G'B'})$$

$$(\text{vì } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0})$$

$$= \frac{1}{4} (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{G'C'} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{G'B'})$$

$$(\text{vì } G'B' \perp (CDA); G'C' \perp (DAB))$$

$$= \frac{1}{4} (AC \cdot G'C' \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{G'C'}) - AB \cdot G'B' \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{G'B'}))$$

$$= \frac{k}{4} (S_C \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{G'C'}) - S_B \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{G'B'}))$$

$$= \frac{k}{4} (S_C \cdot h_C - S_B \cdot h_B) (\text{vì } G'C' \perp (DAB); G'B' \perp (CDA))$$

$$= \frac{k}{4} (3V - 3V) = 0. \text{ Do đó } AG \perp B'C'.$$

Chứng minh tương tự có  $AG \perp B'D',$  Suy ra  $AG \perp (B'C'D').$  Lại tương tự có  $BG \perp (C'D'A');$   $CG \perp (D'A'B');$   $DG \perp (A'B'C').$  Tóm lại  $AG, BG, CG, DG$  theo thứ tự vuông góc với các mặt phẳng  $(B'C'D'), (C'D'A'), (D'A'B'), (A'B'C').$

• **Điều kiện đủ.** Tương tự như phép chứng minh ở điều kiện cần.

Trở lại giải bài toán **T12/426.**

Vì  $X, Y, Z, T$  theo thứ tự là tâm mặt cầu ngoại tiếp của các tứ diện  $GBCD, GCDA, GDAB, GABC$  nên các bộ ba điểm  $(Y, Z, T), (Z, T, X), (T, X, Y), (X, Y, Z)$  theo thứ tự thuộc mặt phẳng trung trực của các đoạn thẳng  $AG, BG, CG, DG.$  Do đó  $AG, BG, CG, DG$  theo thứ tự vuông góc với  $(YZT), (ZTX), (TXY), (XYZ)$  (\*). Vì  $X, Y, Z, T, O$  theo thứ tự là tâm mặt cầu ngoại tiếp của các tứ diện  $GBCD,$

$GCDA, GDAB, GABC, ABCD$  nên  $OX, OY, OZ, OT$  theo thứ tự là trục đường tròn ngoại tiếp của các tam giác  $BCD, CDA, DAB, ABC$ . Do đó  $XO, YO, ZO, TO$  theo thứ tự vuông góc với  $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$  (\*\*).

• Điều kiện cần

Gọi  $O'$  là trọng tâm của tứ diện  $XYZT$  (1). Chú ý rằng  $G$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ , kết hợp với (\*), theo Bổ đề 2 suy ra  $XO', YO', ZO', TO'$  theo thứ tự vuông góc với  $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ .

Từ (\*\*) ta có  $O'$  trùng  $O$  (2). Từ (1) và (2) suy ra  $O$  là trọng tâm của tứ diện  $XYZT$ .

• Điều kiện đủ

Gọi  $G'$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$  (3). Chú ý rằng  $O$  là trọng tâm của tứ diện  $XYZT$ , kết hợp với (\*\*), theo Bổ đề 2,  $G'A, G'B, G'C, G'D$  theo thứ tự vuông góc với  $(YZX), (ZTX), (TXY), (XYZ)$ . Kết hợp với (\*), suy ra  $G'$  trùng  $G$  (4). Từ (3) và (4) suy ra  $G$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ .  $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán này khó, không có bạn nào tham gia giải.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/426.** Có hai chiếc cốc, trong đó cốc 1 đựng  $M$  gam nước đường có nồng độ  $a\%$ , ở nhiệt độ  $T = 45^\circ\text{C}$  còn cốc 2 đựng  $m$  gam nước tinh khiết ở nhiệt độ  $t = 5^\circ\text{C}$ . Người ta lấy  $n$  gam nước đường ở cốc 1 đổ vào cốc 2 và sau khi khuấy đều lại lấy  $n$  gam nước đường ở cốc 2 đổ vào cốc 1. Kết quả là hiệu nhiệt độ  $\Delta t$  giữa hai cốc là  $15^\circ\text{C}$  và nồng độ đường của cốc 1 gấp  $k = 2,5$  lần của cốc 2.

Tìm các tỉ số  $x = \frac{n}{M}$  và  $y = \frac{n}{m}$ . Nếu tăng  $n$  thì sự chênh lệch về nồng độ và về nhiệt độ giữa hai cốc sau khi pha tăng hay giảm? Từ đó rút ra kết luận gì? Giả sử khối lượng đường hòa tan nhỏ không đáng kể so với  $M$  nên có thể coi nước đường và nước tinh khiết có cùng khối lượng riêng  $d$  và có cùng nhiệt dung riêng  $c_0$ .

**Lời giải.** • **Lần 1.** Đổ  $n$  gam nước đường từ cốc 1 sang cốc 2, gọi  $t_2$  là nhiệt độ cân bằng, ta có phương trình cân bằng nhiệt

$$nc_0(45 - t_2) = mc_0(t_2 - 5) \Rightarrow \frac{n}{m} = y = \frac{t_2 - 5}{45 - t_2} \quad (1)$$

• **Lần 2.** Đổ  $n$  gam từ cốc 2 sang cốc 1, gọi nhiệt độ cân bằng là  $t_1$ , ta có

$$nc_0(t_1 - t_2) = (M - n)c_0(45 - t_1) \quad (2)$$

$$\text{Theo bài ra } t_1 - t_2 = \Delta t = 15 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra

$$\frac{n}{M} = x = \frac{30 - t_2}{45 - t_2} \quad (4)$$

Sau hai lần đổ, cốc 1 có nồng độ  $N_1$ , cốc 2 có nồng độ  $N_2$ , ta có

$$N_2 = \frac{na}{n+m} = \frac{ya}{y+1} \quad (5)$$

$$N_1 = \frac{(M-n)a + nN_2}{M} = a - ax + xN_2 \quad (6)$$

$$\text{Theo bài ra } N_1 = kN_2 = 2,5N_2 \quad (7)$$

Từ (5), (6) và (7) ta suy ra được

$$1,5y = 1 - x \quad (8)$$

Giải hệ các phương trình (1), (4), (8) ta tìm

$$\text{được } x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}; t_2 = 15^\circ\text{C}.$$

Khi  $n$  tăng thì hiệu nhiệt độ hai cốc giảm, chênh lệch nồng độ giữa hai cốc cũng giảm.  $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

**Nam Định:** Đặng Phúc Cường, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** Nguyễn Hoài Nam, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Vĩnh Phúc:** Trương Thùy Dương, 10A1, THCS & THPT Hai Bà Trưng, Phúc Yên.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/426.** Bạn ở trên một chiếc thuyền đang đứng yên trên mặt sông. Khối lượng tổng cộng của thuyền và của bạn là  $M$ . Trên thuyền có hai viên đá với khối lượng tương ứng là  $m_1$  và  $m_2$ . Cho biết  $M = 6m_1 = 12m_2$ . Muốn cho thuyền chuyển động, bạn ném đá về phía sau. Bạn ném liên tiếp từng viên một hoặc ném đồng thời cả hai viên, nhưng đều với tốc độ  $v_i$  so với thuyền. Hỏi tốc độ của thuyền là bao nhiêu nếu bạn ném

a) Hai viên đá đồng thời?

b) Viên  $m_1$  trước, viên  $m_2$  sau?

c) Viên  $m_2$  trước, viên  $m_1$  sau?

**Lời giải.** Ta có  $M = 12m_2$  và  $m_1 = 2m_2$ .

Lúc chưa ném đá, toàn hệ đứng yên nên động lượng ban đầu của hệ  $P_0 = 0$

a) Sau khi ném hai viên đá đồng thời, thuyền và người có vận tốc  $V$  so với bờ, đá có vận tốc tuyệt đối so với bờ là  $v_a$ . Theo quy tắc cộng vận tốc  $v_a = v_t + V$

Tổng động lượng của hệ sau khi ném là

$$P = MV + (m_1 + m_2)v_a = 12m_2V + 3m_2(v_t + V) \quad (1)$$

Theo định luật bảo toàn động lượng  $P = P_0 = 0$ . Thay vào (1) và rút ra  $V$ , ta được

$$V = -\frac{3v_t}{15} = -0,2v_t.$$

Dấu trừ có nghĩa là  $\vec{V}$  ngược chiều với  $\vec{v}_t$ .

b) Khi ném  $m_1$  trước thì (1) trở thành

$$(M + m_2)V + m_1(v_t + V) = 0.$$

$$\text{Rút ra } V = -\frac{m_1v_t}{M + m_1 + m_2}.$$

Động lượng  $P_0$  của thuyền, người và viên đá

$$m_2 \text{ là } P_0 = (M + m_2)V = -\frac{(M + m_2)m_1v_t}{M + m_1 + m_2}.$$

Sau khi ném nốt  $m_2$  đi thì động lượng của hệ  $M$  và  $m_2$  là

$$P' = MV' + m_2(v_t + V') = (M + m_2)V' + m_2v_t.$$

Theo định luật bảo toàn động lượng thì  $P' = P_0$ . Vậy

$$V' = -\frac{v_t}{M + m_1 + m_2} \left( m_1 + m_2 + \frac{m_1m_2}{M + m_2} \right) \quad (2)$$

Thay số  $M = 12m_2$ ,  $m_1 = 2m_2$ , ta có

$$V' = -\frac{v_t}{15} \left( 2 + 1 + \frac{2 \cdot 1}{12 + 1} \right) = -\frac{41 \cdot v_t}{195}.$$

Dấu trừ có nghĩa là  $\vec{V}'$  ngược chiều với  $\vec{v}_t$ .

c) Khi ném  $m_2$  trước,  $m_1$  sau thì trong (2) ta chỉ cần thay  $m_1$  bằng  $m_2$  và  $m_2$  bằng  $m_1$ , ta được

$$V'' = -\frac{v_t}{M + m_2 + m_1} \left( m_2 + m_1 + \frac{m_2m_1}{M + m_1} \right).$$

Thay số  $M = 12m_2$ ,  $m_1 = 2m_2$ , ta có

$$V'' = -\frac{v_t}{15} \left( 1 + 2 + \frac{1 \cdot 2}{12 + 2} \right) = -\frac{44 \cdot v_t}{15 \cdot 14} = -\frac{22}{105} v_t.$$

Dấu trừ có nghĩa là  $\vec{V}''$  ngược chiều với  $\vec{v}_t$ .  $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Ngệ An:** Chu Thị Khánh Vân, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Xuân Cường, 11T1, THPT Anh Sơn 1; **Ninh Bình:** Đoàn Nguyệt Hằng, 11B1, THPT Kim Sơn A; **Thanh Hóa:** Lê Thị Quỳnh, 11C1, THPT Hoằng Hóa IV; **Hưng Yên:** Nguyễn Hoài Nam, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Thùy Linh, 10A1, THPT Hương Khê.

NGUYỄN VĂN THUẬN

## THÔNG BÁO

★ Đón đọc **ĐẶC SAN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ SỐ 7** (phát hành vào tháng 5/2013): Đặc san dày 48 trang, khổ 19×26,5cm, Giá bìa 14.500 đồng. Bạn đọc có thể đặt mua tại các Cơ sở Bưu điện trên cả nước theo **Mã số C.168.1**, các Công ty Sách và Thiết bị trường học ở địa phương.

Mọi liên hệ với Tòa soạn xin gửi về.

**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

**187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI**

**Email: toanhocvuoitrevietnam@gmail.com**

TH&TT



## GIẢI THƯỞNG ABEL NĂM 2013



Pierre Deligne

Viện Hàn lâm Khoa học và Văn chương Na Uy đã quyết định trao giải **Giải thưởng Abel năm 2013** cho *Pierre Deligne*, Viện Nghiên cứu cao cấp Princeton, New Jersey, Hoa Kỳ vì những đóng góp trong các bài giảng hình học đại số và tác động mạnh mẽ của chúng đến lý thuyết số, lý thuyết biểu diễn và các lĩnh vực liên quan. *Pierre Deligne* là một nhà toán học xuất sắc trong việc tìm kiếm các kết nối giữa các lĩnh vực khác nhau của toán học. Nghiên cứu của ông đã dẫn đến nhiều khám phá quan trọng. Ông đã được trao Huy chương Fields (1978); Giải

thường Crafoord (1988) cùng với *Alexandre Grothendieck*; Giải Balzan trong Toán học (2004) Giải thưởng Wolf Toán học, cùng với *P. Griffiths* và *D. Mumford* (2008).

LÊ MAI (Nguồn: *Abelprize*)

### PROBLEMS...(Tiếp trang 17)

**T5/430.** Let  $AB = 2a$  be a line segment with midpoint  $O$ . Two half-circles, one with center  $O$  and diagonal  $AB$ , another with center  $O'$  and diagonal  $AO$  are drawn on the same half-plane divided by  $AB$ . Point  $M$ , different from  $A$  and  $O$ , moves on the half-circle  $(O')$ .  $OM$  meets the half-circle  $(O)$  at  $C$ . Let  $D$  be the second intersection point of  $CA$  and half-circle  $(O')$ . The tangent line at  $C$  of half-circle  $(O)$  meets  $OD$  at  $E$ . Find the position of point  $M$  on  $(O')$  such that  $ME$  is parallel to  $AB$ .

### FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/430.** Let  $ABCD$  be a quadrilateral, where the diagonals  $AC, BD$  are equal and perpendicular. The triangles  $AMB, BNC, CPD, DQA$ , similar in order, are constructed outside the given quadrilateral.  $O_1, O_2, O_3, O_4$  are the midpoints of  $MN, NP, PQ, QM$  respectively. Prove that the quadrilateral  $O_1O_2O_3O_4$  is a square.

**T7/430.** Find a formula counting the number of all 2013-digits natural numbers which are multiple of 3 and all digits are taken from the set  $X = \{3; 5; 7; 9\}$ .

**T8/430.** Solve for  $x$ .

$$\log_2 x = \log_{5-x} 3.$$

### TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

**T9/430.** The positive integers  $a_1, a_2, \dots, a_{2013}, b_1, b_2, \dots, b_{2013}$  where  $b_k > 1$  for all  $k$  are chosen

from the set  $X = \{1, 2, \dots, 2013\}$ . Prove that there exists a positive integer  $n$  satisfying the following two conditions

$$1) n \leq \left( \prod_{i=1}^{2013} a_i \right) \left( \prod_{i=1}^{2013} b_i \right) + 1;$$

2)  $a_k b_k^n + 1$  is a composite number for every  $k \in X$ .

**T10/430.** Let  $a, b, c \in \left[ 0; \frac{1}{2} \right]$  be such that

$a + b + c = 1$ . Prove the inequality

$$a^3 + b^3 + c^3 + 4abc \leq \frac{9}{32}.$$

**T11/430.** Let  $p$  be a prime number,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Determine the sum

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left( \left\lfloor \frac{2k^2}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{k^2}{p} \right\rfloor \right).$$

Where  $[a]$  denotes the largest integer not exceeding  $a$ .

**T12/430.** Let  $ABC$  be a triangle inscribed inside circle  $(O)$ . Point  $M$  not on lines  $BC, CA, AB$  as well as circle  $(O)$ ;  $AM, BM, CM$  intersect  $(O)$  at  $A_1, B_1, C_1$ ;  $A_2, B_2, C_2$  are the circumcenters of triangles  $MBC, MCA, MAB$  respectively. Prove that the lines  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  meet at a point on the circle  $(O)$ .

Translated by LE MINH HA



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC, HÀM SỐ MŨ VỚI DAO ĐỘNG CỦA ÂM THANH

NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN

(Công ty CP Gia Định, NXBGD Việt Nam)

Chúng ta đều biết âm thanh được tạo ra bởi sự dao động của một vật thể. Khi vật thể dao động sẽ tạo ra những sóng âm. Những sóng âm này lan truyền trong không gian đến tai người làm cho màng nhĩ cũng dao động cùng với tần số của sóng đó. Từ màng nhĩ những sóng âm này truyền qua hệ thần kinh của bộ não tạo nên cảm giác về âm thanh.

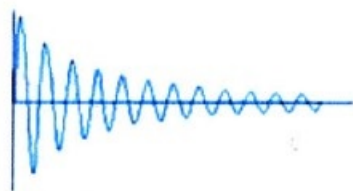
## 1. So sánh âm thanh của tiếng Guitar và tiếng đóng cửa

Để hiểu rõ hơn về âm thanh có tính nhạc và âm thanh không có tính nhạc ta xét hai âm thanh phát ra từ hai vật sau đây.

- Đồ thị của âm thanh phát ra khi đóng cửa:



- Đồ thị của tiếng đàn Guitar:



Chúng ta thấy hai âm thanh trên giống nhau ở chỗ chúng đều là dao động tắt dần. Nhưng chúng khác nhau ở chỗ: Tiếng đóng cửa tần số hỗn tạp, giập cục; trong khi tiếng đàn là một dao động có tần số khá đều. Khi tác động vào não người tiếng đàn nghe êm dịu, mang lại cảm giác dễ chịu, người ta gọi đó là âm thanh có **tính nhạc**.

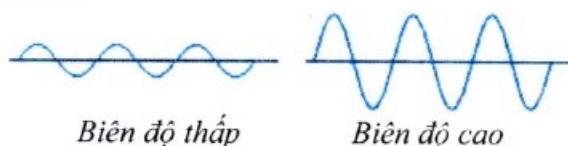
## 2. Biên độ, tần số

Trong vật lý, âm thanh có ba thuộc tính cơ bản đó là **cường độ** (độ to nhỏ), **cao độ** (độ

cao thấp) và **âm sắc**. **Cao độ** thể hiện trong vật lý bằng tần số  $f$  (frequency); **cường độ** được thể hiện bằng **biên độ**  $A$  (amplitude).

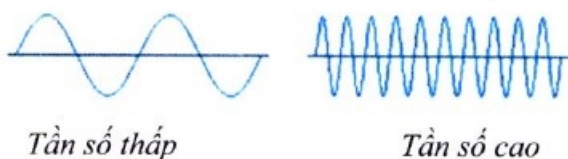
Xét một dao động âm thanh có phương trình hàm số  $x = A \sin(2\pi ft)$  với biến số  $t$ , ( $A$  là biên độ,  $f$  là tần số không đổi,  $t$  là thời gian,  $x$  là li độ)

**Biên độ** là kích cỡ của sự rung và nó xác định mức độ to nhỏ (cường độ) của âm thanh. Âm thanh rung rộng hơn có nghĩa là nó vang lên to hơn.



**Tần số** xác định cao độ của âm thanh. Tần số càng cao thì âm thanh sẽ càng cao và ngược lại.

Tần số được đo bằng số vòng của sóng âm xảy ra trong một giây. Đơn vị đo tần số là Hertz (viết tắt là Hz).



Tần số 1 Hz có nghĩa là một vòng sóng âm trong 1 giây. Tần số 10 Hz có nghĩa là trong 1 giây có 10 vòng sóng âm. Ta thấy sóng âm lúc này ngắn và sát nhau hơn.



Với âm thanh có tính nhạc, người ta có thêm một thuộc tính nữa là **trường độ**. Trong âm nhạc, **trường độ** là một khoảng thời gian cụ thể. Nó chính là độ dài của một nốt nhạc tùy thuộc vào thời gian tồn tại của sóng âm trong

không khí. **Trường độ** là một đặc tính của nốt và cũng là một trong những nền tảng của nhịp điệu.

### 3. Bí ẩn của các nốt nhạc

Ta biết rằng trong âm nhạc có 7 nốt là *la, si, đô, rê, mi, fa, sol*, kí hiệu tương ứng là *A, B, C, D, E, F, G*. Từ nốt *mi* tới *fa* và *si* tới *đô* cách nhau một tông (tone); các khoảng còn lại cách nhau 2 tông (tone). Vì vậy từ nốt *A (la)* này đến nốt *A (la)* tiếp theo có 12 nốt, đó là *A, A#, B, C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#*.

Nốt *A (la)* ở giữa cây đàn piano có tần số là 440 Hz (1 giây rung 440 vòng). Nó thường được dùng để làm chuẩn lên dây cho các nhạc cụ. Đặc biệt nốt *A* ở quãng tiếp theo có tần số 880 Hz.

**Tổng quát:** Các nốt cùng tên ở hai quãng liên tiếp nhau cách nhau một khoảng 440 Hz.

Như vậy trong một quãng có 12 nốt, thế thì tần số các nốt có chia đều tuyến tính không? Phải chăng tần số của các nốt còn lại suy ra từ tần số của nốt *A (la)* bằng một hàm

$$y = 440 + \frac{440n}{12}$$

Điều này không đúng. Các nhà khoa học đã đưa ra một công thức sau đây để tính tần số các nốt nhạc mà tai người nghe được:

$$y = 440 \times 2^{\frac{n}{12}} \text{ với } n = -21, -20, -19, \dots, 27.$$

| Nốt | Tần số | Nốt | Tần số | Nốt | Tần số | Nốt | Tần số  |
|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|---------|
| C   | 130.82 | C   | 261.63 | C   | 523.25 | C   | 1046.5  |
| C#  | 138.59 | C#  | 277.18 | C#  | 554.37 | C#  | 1108.73 |
| D   | 146.83 | D   | 293.66 | D   | 587.33 | D   | 1174.66 |
| D#  | 155.56 | D#  | 311.13 | D#  | 622.25 | D#  | 1244.51 |
| E   | 164.81 | E   | 329.63 | E   | 659.26 | E   | 1318.51 |
| F   | 174.61 | F   | 349.23 | F   | 698.46 | F   | 1396.91 |
| F#  | 185    | F#  | 369.99 | F#  | 739.99 | F#  | 1479.98 |
| G   | 196    | G   | 392    | G   | 783.99 | G   | 1567.98 |
| G#  | 207.65 | G#  | 415.3  | G#  | 830.61 | G#  | 1661.22 |
| A   | 220    | A   | 440    | A   | 880    | A   | 1760    |
| A#  | 233.08 | A#  | 466.16 | A#  | 932.33 | A#  | 1864.66 |
| B   | 246.94 | B   | 493.88 | B   | 987.77 | B   | 1975.53 |
|     |        |     |        |     |        | C   | 2093.00 |

Bài này đề cập đến tần số, biên độ của âm thanh nói chung và các nốt nhạc nói riêng. Tuy nhiên các bạn sẽ đặt câu hỏi, mỗi loại nhạc cụ thể hiện khác nhau, mỗi giọng ca có sắc thái riêng, đó là thuộc tính gì của âm thanh và điều này thể hiện trong Vật lý và Toán học như thế nào? Hẹn gặp các bạn trong một dịp khác.

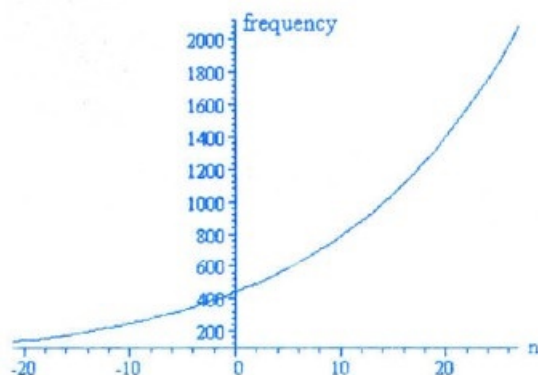
Rõ ràng qua hàm này ứng với  $n = 0$  là nốt *A (la)* và chúng ta có thể tính tần số của tất cả các nốt nhạc.

### 4. Đồ thị tần số (Dùng MAPLE)

Để thấy rõ hơn sự biến thiên của các nốt nhạc ta hãy dùng phần mềm MAPLE (một phần mềm toán học rất thông dụng) để vẽ đồ thị của hàm

$$y = 440 \times 2^{\frac{n}{12}} \text{ với giả sử } n \text{ là số thực và } -21 \leq n \leq 27.$$

Chú ý rằng ở đây trục tần số (frequency) và trục  $n$  không chia đều nhau. Phần mềm này cũng không có mũi tên ở hai trục.



### 5. Bảng tính tần số các nốt nhạc

Các bạn có thể tính tần số các nốt nhạc bằng công thức  $y = 440 \times 2^{\frac{n}{12}}$  bằng tính toán thông thường, tuy nhiên có thể dùng hàm trong Excel để tính nhanh bảng này. Dưới đây là kết quả:

# HỌC NHƯ THẾ NÀO

**NGÔ BẢO CHÂU**

(Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán)



Với tư cách khách mời của chuỗi sự kiện “Cầu nối - Cuộc đối thoại hướng đến văn hóa hòa bình” lần thứ tư tại Đông Nam Á, GS Ngô Bảo Châu - Nhà Toán học người Việt đoạt Giải thưởng Fields năm 2010 hiện giảng dạy tại Đại học Chicago (Hoa Kỳ), Giám đốc Khoa học Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán (Việt Nam) đã về nước và có nhiều chương trình thăm và nói chuyện với học sinh, sinh viên các trường học tại Việt Nam xoay quanh chủ đề khoa học, giáo

dục. Chiều ngày 13.3.2013 vừa qua, tại Hội trường Đại học Bách khoa Hà Nội đã diễn ra buổi nói chuyện của GS Ngô bảo Châu với sinh viên nhà trường về chủ đề Học tập như thế nào để có hiệu quả. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin trích đăng bài nói chuyện này tới bạn đọc (tài liệu do Phòng Hợp tác Quốc tế Đại học Bách Khoa Hà Nội cung cấp). Bạn đọc có thể xem bản đầy đủ trên website [Tiasang.com.vn](http://Tiasang.com.vn)

"Tôi rất hay được các em học sinh, sinh viên và các bậc phụ huynh hỏi về “bí quyết học tập”. Tôi thường trả lời “Không có bí quyết gì cả. Quan trọng là niềm say mê.” ...

Ngày xưa để học được chữ thánh hiền, cái quan trọng nhất là cần có chí. Cái chí để đi bắt đom đóm bỏ vào lọ làm đèn mà đọc sách thâu đêm. Trong công việc học tập bây giờ, trong việc tiếp thu kiến thức khoa học của nhân loại tưởng như vô hạn, chỉ có chí thôi chắc là không đủ... Mỗi lí thuyết khoa học được khai triển bằng tính toán, bằng lập luận từ một số nhỏ khái niệm, một số tiên đề cơ sở. Mỗi lí thuyết có logic nội tại của nó, nó không tự mâu thuẫn, nhưng những kết luận mà người ta rút ra từ nó chỉ khớp với thực tế khách quan trong một phạm vi nào đó. Theo một nghĩa nào đó, mỗi lí thuyết là một trò chơi trí tuệ, với luật chơi được xác định rõ ràng mà trong đó người chơi có thể triển khai khả năng tư duy của mình để đi đến những

kết quả nhiều khi nằm ngoài sự mong đợi ban đầu.

Rất ít khi người ta chơi trò gì một mình. Để cho cuộc chơi thực sự cuốn hút, để cho người chơi có thể thực sự triển khai mọi tiềm năng tư duy của mình để đi đến những kết quả bất ngờ, đi đến sáng tạo, cuộc chơi phải có bạn chơi và phải có trọng tài. Để minh họa quan điểm này, tôi xin đưa ra một gợi ý nhỏ, nhưng rất nghiêm túc.

Nhờ vào internet, hiện tại người ta có thể tìm được rất nhiều tài liệu học tập miễn phí ở trên mạng. Một số trường đại học có tên tuổi như MIT, Stanford còn tổ chức công bố miễn phí hầu hết các tư liệu học tập. Thay bằng việc phải bỏ ra 50 ngàn đô la một năm để đến đó học, mà không phải cứ có 50 ngàn đô la là đã được nhận vào học, bạn có thể truy cập miễn phí các tư liệu học tập, theo dõi các bài giảng video. Vậy có đúng là bạn cứ ngồi ở Hà Nội, hay TP.Hồ Chí Minh, là cũng có thể học như sinh viên ở MIT hay ở Stanford hay không.

Tôi nghĩ rằng trừ khi bạn có một ý chí sắt đá, dù có được cung cấp tất cả mọi tài liệu trên đời, dù được theo dõi miễn phí các bài giảng, ở nhà một mình bạn vẫn không thể học được. Bởi vì ngồi theo dõi bài giảng trên mạng một mình không phải là một cuộc chơi thú vị: không có địch thủ, không có đồng đội, không có lộ trình, không thấy mục tiêu, không thấy giải thưởng. Đó là những thứ không liên quan trực tiếp đến nội dung khoa học của bài giảng nhưng đó là cái mà người đi học cần để phấn đấu liên tục. Học một mình, bạn có thể tập trung cao độ trong một hai ngày cho đến một tuần. Nhưng bạn cần có tập thể, có lớp học, có thầy giáo để duy trì nỗ lực học tập.

Gợi ý của tôi là tại sao các bạn không tự tổ chức cùng học theo giáo trình được cung cấp trên mạng. Tại sao không thể dùng trực tiếp bài giảng, tư liệu học tập cung cấp miễn phí trên mạng trong các lớp học chính khoá. Các thầy không nhất thiết phải giảng cả buổi nữa, mà có thể cho sinh viên xem bài giảng trên mạng, có thể làm trước phụ đề tiếng Việt, sau đó dành thời gian để giải thích thêm, trả lời câu hỏi của sinh viên, và hướng dẫn làm bài tập. Và cuối cùng là tổ chức thi cử nghiêm túc. Tất nhiên gợi ý thì dễ, mà làm thì khó, nhưng tôi không tin là việc này không thể làm được. Kinh phí để tổ chức lớp học như thế có lẽ là không nhiều lắm, nếu so sánh với học phí 50 ngàn đô la một năm ở MIT hay Stanford.

Với gợi ý có tính suy tưởng này, tôi hi vọng làm nổi lên được sự quan trọng của việc tổ chức học tập. Học tập là một hoạt động tập thể và có tổ chức. Như đã nêu ở trên, thiếu một tập thể có tổ chức, con người nói chung không có khả năng duy trì nỗ lực của mình trong một thời gian dài. Thiếu tranh biện con người nhanh chóng lạc vào con đường chủ quan, con đường luôn dẫn đến cái đích là sự bế tắc. Bản tính con người là hiếu thắng, cái cần thiết để tạo ra sự sôi động trong tranh luận, nhưng cũng là cái làm tha hóa cuộc tranh luận, biến nó thành chiến trường để người này đè bẹp người kia. Vì vậy trong mọi cuộc chơi tập thể cần có một luật chơi lành mạnh để cho sự cạnh tranh chỉ tạo ra nỗ lực

để mỗi người vượt lên chính mình, chứ không phải là cố để thỏa mãn bản năng hiếu thắng. Và cuộc chơi cần một người trọng tài, nắm vững luật lệ và có thẩm quyền điều khiển cuộc chơi.

.....

Tôi đã nói nhiều về sự cần thiết của việc tổ chức học tập và tính kỉ luật và tính trung thực. Tính kỉ luật, tôn trọng tập thể và tính trung thực là những cái mà mỗi người phải rèn luyện để mỗi người có thể duy trì nỗ lực học tập trong cuộc chơi tập thể, mỗi người có cơ hội vượt lên chính mình nhờ vào sự cạnh tranh lành mạnh với những người cùng chơi. Bạn có thể thắc mắc rằng tôi nói về trường học hay mà như là về doanh trại quân đội. Tính kỉ luật và trung thực tất nhiên là không đủ. Cái còn thiếu chính là “niềm say mê” mà tôi nhắc đến lúc bắt đầu. Say mê đi tìm cái mới, cái chưa biết, tìm lời giải thích cho những gì còn chưa hiểu. Niềm say mê đi từ đâu đến? Thú thực là tôi không biết chắc chắn, và vì thế mà tôi giả sử rằng con người sinh ra với một bản năng hướng thượng, nói cách khác là đã có sẵn trong mình mầm mống của niềm ham mê. Tôi nghĩ rằng thực ra câu hỏi niềm ham mê sinh ra từ đâu không quan trọng bằng làm thế nào để gìn giữ niềm ham mê, và không để cho nó bị tha hóa. Niềm đam mê, tính hướng thượng hướng thiện là động cơ cho việc học tập, và chính việc học tập đích thực là cái nuôi dưỡng sự hướng thượng hướng thiện bởi những giá trị nhân văn chân thiện, chân mỹ, bởi tình yêu sự thật, và bởi niềm hạnh phúc của sự khám phá, để vượt qua biên giới giữa những gì đã biết và những gì chưa biết.

Một người bạn tôi có góp ý rằng bên cạnh sự ham mê, cần phải nêu thêm tính quả cảm nữa. Sự quả cảm là cái bạn cần để không dễ tính lười biếng, hèn nhát dủ dẫm mà quay lưng lại với sự thật. Sự quả cảm cũng là cái bạn rất cần để khi đi tìm những cái gì chưa biết. Bạn có tập thể, có đồng đội để cùng học tập, tiến bộ. Nhưng dựa vào kinh nghiệm cá nhân, tôi thấy rằng khi đã vượt qua biên giới của những gì đã biết để thực sự đuổi theo cái chưa biết, bạn rất cần tính quả cảm vì vào thời điểm đó, bạn thường phải chạy một mình, mà trong một số trường hợp bạn sẽ phải chạy một mình rất lâu.”



# Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

## Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 430 (4.2013)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com

### BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

### CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm  
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Tổng biên tập kiêm  
Phó Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam  
TS. NGUYỄN QUÝ THAO

### HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

## TRONG SỐ NÀY

#### 1 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School

Trần Xuân Uy - Một phương pháp chứng minh hình học.

#### 3 Hướng dẫn giải Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 9 Tỉnh Phú Thọ, năm học 2011 – 2012.

#### 4 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên TP. Hà Nội, năm học 2012 – 2013.

#### 5 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation

Lê Khánh Hưng - Sử dụng bất đẳng thức và đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

#### 9 Thử sức trước kì thi - Đề số 7.

#### 10 Hướng dẫn giải Đề số 6.

#### 11 Phương pháp giải toán

Kiều Đình Minh - Cách giải một dạng phương trình hàm đặc biệt.

#### 15 Sai lầm ở đâu – Where's Mistake?

#### 16 Đề ra kì này – Problems in This Issue

#### 18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems

#### 27 Lê Mai - Giải thưởng Abel năm 2013.

#### 28 Toán học với âm thanh

Nguyễn Đặng Trí Tín - Hàm số lượng giác, hàm số mũ với dao động của âm thanh.

#### 30 Ngô Bảo Châu - Học như thế nào

Biên tập: NGUYỄN PHÚC

Trĩ sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Chế bản: NGUYỄN THỊ TRANG



# NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

## CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH VÀ THIẾT BỊ GIÁO DỤC MIỀN NAM

- Địa chỉ: 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh
- Điện thoại: ĐT: (84-8)38358423; 38300312 - FAX: (84-8)38351488

**SÁCH MỚI**

## TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THCS

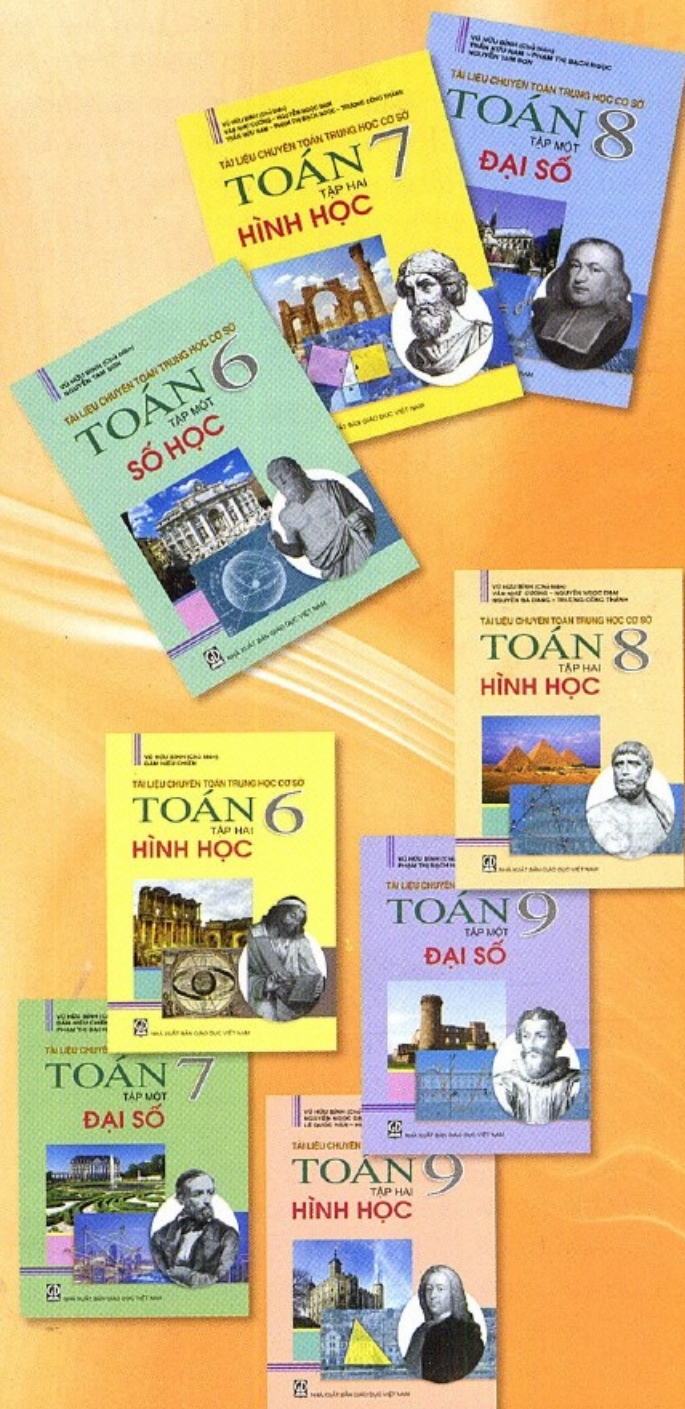
Bộ sách "Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở" có tất cả 8 cuốn, cho các lớp 6, 7, 8, 9, mỗi lớp gồm 2 tập: tập một là Đại số (ở lớp 6, tập một là Số học), tập hai là Hình học. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình Toán ở các lớp THCS.

Mỗi cuốn đều có hai phần: phần Các chuyên đề cơ bản (viết theo từng chương của SGK) và phần Một số chuyên đề nâng cao. Phần đầu trong mỗi chuyên đề là tóm tắt các kiến thức lí thuyết của chuyên đề mà HS cần nắm vững, tiếp theo giới thiệu một số ví dụ minh họa và sau đó là các bài tập đề nghị để HS luyện tập. Những chuyên đề nâng cao nhằm giúp HS hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình. Những ví dụ và các bài tập trình bày trong sách được các tác giả chọn lọc khá kĩ lưỡng, trong đó có nhiều ví dụ, bài tập là những bài thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Olympic Toán, ... Bằng việc đọc, giải những ví dụ và bài tập này, HS sẽ được mở rộng, đào sâu những kiến thức đã học, qua đó được rèn luyện khả năng tư duy Toán học. Cuối sách sẽ là phần Hướng dẫn giải cho các bài tập được đưa ra ở cuối mỗi chuyên đề.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã hoặc đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học và các trường Trung học phổ thông có uy tín, là những chuyên gia Toán ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, chẳng hạn như: NGND. Vũ Hữu Bình (chủ biên), NGƯT Nguyễn Tam Sơn, nhà giáo Đàm Hiếu Chiến, PGS.TS. Văn Như Cương, PGS.TS. Đàm Văn Nhí, TS. Phạm Thị Bạch Ngọc, PGS.TS. Lê Quốc Hán, ...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em học sinh hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, và góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.

(Địa chỉ phát hành như trên)



ISSN : 0866-8035  
Chỉ số : 12884  
Mã số : 8BT4M3

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010  
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP  
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2013

Giá: 8000 đồng  
Tám nghìn đồng

<https://www.facebook.com/letrungkienmath>