



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

3 2013
SỐ 429

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM



**KẾT QUẢ KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM 2013 - MÔN TOÁN**





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

- Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội. • ĐT: (04).362.101.96 - Fax (04).362.102.01
- MST: 0103.488.607 • TK: 1261.00.00.00.6147 Ngân hàng BIDV chi nhánh Ba Đình

Giới thiệu bộ sách

ÔN THI VÀO LỚP 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN

Nhằm giúp các em học sinh, các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh có một bộ tài liệu ôn thi vào THPT chuyên, NXBGD Việt Nam đã tổ chức biên soạn bộ sách "Ôn thi vào lớp 10 Trung học phổ thông chuyên" gồm các môn học: Toán, Vật lý, Hóa học, Sinh học, Ngữ văn, Tiếng Anh. Cuốn sách "Ôn thi vào lớp 10 Trung học phổ thông chuyên - Môn Toán" là một cuốn trong bộ sách này.

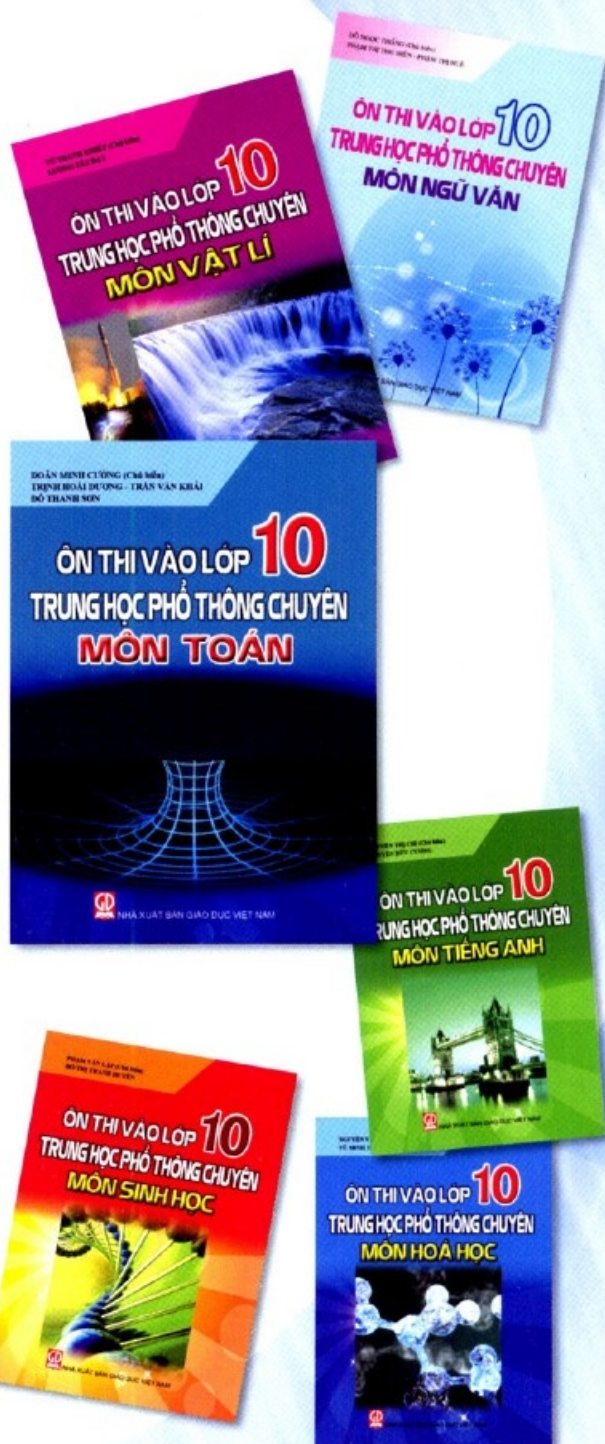
Nội dung cuốn sách gồm ba phần: *Phần thứ nhất* gồm 20 chuyên đề bao quát toàn bộ các nội dung cơ bản của môn Toán THCS và nội dung các đề thi môn Toán tuyển sinh vào các trường THPT chuyên. Mỗi chuyên đề gồm 3 nội dung: *Kiến thức cơ bản*, *Một số kỹ thuật đặc trưng và ví dụ minh họa*, và *Bài tập đề nghị*. *Phần thứ hai* giới thiệu 12 đề thi vào lớp 10 THPT chuyên của Hà Nội, Đà Nẵng,.... *Phần thứ ba* là Hướng dẫn giải các bài tập ở các chuyên đề và đáp án của các đề thi tham khảo.

Cuốn sách tập trung trình bày những nội dung điển hình nhất thuộc hai loại:

- ★ Các nội dung cơ bản sát với nội dung bài thi môn Toán Vòng 1 cho tất cả các thí sinh dự thi vào THPT chuyên.
- ★ Một số nội dung nâng cao đòi hỏi những kỹ năng đặc biệt, hướng tới bài thi môn Toán Vòng 2 cho các học sinh thi vào chuyên Toán.

Các tác giả là những giáo viên dạy Toán có nhiều kinh nghiệm của một số trường chuyên có tiếng trên cả nước tham gia biên soạn như các thầy giáo *Doãn Minh Cường* (CB) (THPT chuyên ĐHSP Hà Nội), *Đỗ Thanh Sơn* (THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội), *Trần Văn Khải* và *Trịnh Hoài Dương* (THPT chuyên Amsterdam - Hà Nội).

Hi vọng rằng, cuốn sách *Ôn thi vào lớp 10 Trung học phổ thông chuyên - Môn Toán* nói riêng và bộ sách *Ôn thi vào lớp 10 Trung học phổ thông chuyên* gồm 6 môn nói chung sẽ là tài liệu tham khảo hữu ích để các giáo viên và các em học sinh cuối cấp THCS sử dụng và chuẩn bị tốt nhất cho kì thi vào lớp 10 trường THPT chuyên sắp tới của mình.





RÈN LUYỆN KHẢ NĂNG LIÊN TƯỞNG ĐỂ SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN MỚI

LÊ QUỐC HÂN (GV ĐH Vinh, Nghệ An)
NGUYỄN THỊ NHUNG (HV Cao học 19 ĐH Vinh)

Khi dạy các em ở bậc THCS, gặp hằng đẳng thức $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4) = (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)$

chúng tôi nghĩ ngay đến kết quả.

Kết quả 1. Nếu một trong ba số a, b, c bằng tổng hai số còn lại thì ta có đẳng thức

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 \quad (1)$$

Bằng cách cộng vào hai vế của (1) biểu thức $a^4 + b^4 + c^4$, ta nhận được

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad (2)$$

Sau đó, gặp bài toán quen thuộc trong SGK Hình học lớp 9:

★BÀI TOÁN 1. Cho M là một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC . Chứng minh rằng một trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC bằng tổng của hai đoạn thẳng còn lại.

Chúng tôi liên tưởng ngay đến kết quả 1 đã nêu ở trên.

Để xác định, giả sử M nằm trên cung $\widehat{BC}$ (không chứa A). Đặt $MA = x, MB = y, MC = z$. Khi đó $x = y + z$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta thu được

★BÀI TOÁN 2. Giả sử M là điểm bất kì trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC . Đặt $MA = x, MB = y, MC = z$. Chứng minh các hệ thức

$$1) x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2;$$

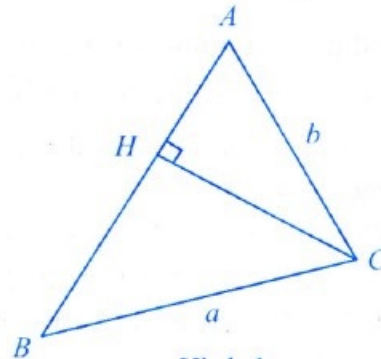
$$2) 2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Nhược điểm của các hệ thức này là chúng khá phức tạp và không liên quan đến các yếu tố xác định tam giác ABC .

Sau khi dạy Định lý Pythagore, chúng tôi chú ý đến:

Kết quả 2. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Nếu $\widehat{BAC} = 60^\circ$ thì $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

Chứng minh. Kẻ $CH \perp AB$, khi đó do $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\widehat{ACH} = 30^\circ$. Do đó $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}b$ (h.1).

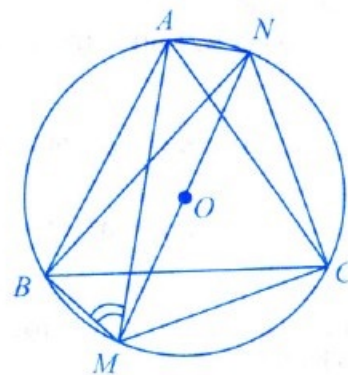


Hình 1

Trong tam giác vuông BCH có $a^2 = BH^2 + HC^2 = \left(c - \frac{b}{2}\right)^2 + b^2 - \frac{b^2}{4}$ hay $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ (đpcm).

Trở về Bài toán 2, áp dụng kết quả 2 cho các tam giác MAB, MAC với chú ý $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 60^\circ; \widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ (h.2), ta có $a^2 = x^2 + y^2 - xy; a^2 = x^2 + z^2 - xz$. Do đó

$$2a^2 = 2x^2 + y^2 + z^2 - x(y+z).$$



Hình 2

Áp dụng (3), ta thu được $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ (4)

Từ (4) và kết quả 2, ta suy ra

$$2(x^4 + y^4 + z^4) = (2a^2)^2 \text{ hay } x^4 + y^4 + z^4 = 2a^4.$$

Do đó ta thu được

BÀI TOÁN 3. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và một điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ấy. Đặt $MA=x, MB=y, MC=z$. Chứng minh rằng

1) $x^2+y^2+z^2=2a^2$; 2) $x^4+y^4+z^4=2a^4$.

Thực ra, Bài toán 3 cũng khá quen thuộc. Tuy nhiên, dựa vào định nghĩa hàm số lượng giác của góc nhọn, nó sẽ giúp ta tìm được nhiều kết quả có ích khác. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Giả sử M thuộc cung nhỏ $\widehat{BC}$ và $\widehat{MB} \leq \widehat{MC}$, đặt $\widehat{MAB}=\alpha (0^\circ < \alpha \leq 30^\circ)$, khi đó $\widehat{MAC}=60^\circ-\alpha$.

Kẻ đường kính MN . Thế thì $\widehat{MAN}=90^\circ$ và $\widehat{MNB}=\alpha$ nên $\widehat{ANM}=\widehat{ANB}+\widehat{BNM}=\widehat{ACB}+\widehat{BNM}=60^\circ+\alpha$. Do đó, trong tam giác vuông AMN có $AN=MN \cdot \sin \widehat{MNA}$ hay $x=2R \sin(60^\circ+\alpha)$. Tương tự, trong các tam giác vuông BMN và CMN , có $BM=MN \sin \widehat{BNM}$ hay $y=2R \sin \alpha$, $CM=MN \sin \widehat{CNM}$ hay $z=2R \sin(60^\circ-\alpha)$. Thay vào các hệ thức của

Bài toán 3, với chú ý $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, ta có

$$\frac{4a^2}{3}(\sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ - \alpha) + \sin^2(60^\circ + \alpha)) = 2a^2;$$

$$\frac{16a^4}{9}(\sin^4 \alpha + \sin^4(60^\circ - \alpha) + \sin^4(60^\circ + \alpha)) = 2a^4.$$

Do đó ta thu được

Kết quả 3. Nếu $\alpha; \alpha-60^\circ; 60^\circ+\alpha$ là các góc nhọn thì

1) $\sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ - \alpha) + \sin^2(60^\circ + \alpha) = \frac{3}{2}$;

2) $\sin^4 \alpha + \sin^4(60^\circ - \alpha) + \sin^4(60^\circ + \alpha) = \frac{9}{8}$.

Từ Bài toán 3, liên tưởng với các bài toán quen thuộc khác, ta sẽ thu được nhiều bài toán mới khá bất ngờ.

BÀI TOÁN 4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R và đường thẳng (d) đi qua O . Gọi x, y, z là các khoảng cách từ A, B, C đến (d) . Chứng minh rằng

1) $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$; 2) $x^4+y^4+z^4=\frac{a^4}{8}$

trong đó a là độ dài cạnh của tam giác đều ABC .

Chứng minh. 1) Gọi M và N là giao điểm của (d) với BC và AC (h.3). Đặt $\widehat{BOM}=\alpha$ ($0^\circ < \alpha \leq 30^\circ$) thì có $\widehat{CON}=60^\circ-\alpha$ và

$$\widehat{AON}=60^\circ+\alpha. \text{ Khi đó } OA=OB=OC=R=\frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$\text{ nên } x=R \sin(60^\circ+\alpha), y=R \sin \alpha, z=R \sin(60^\circ-\alpha).$$

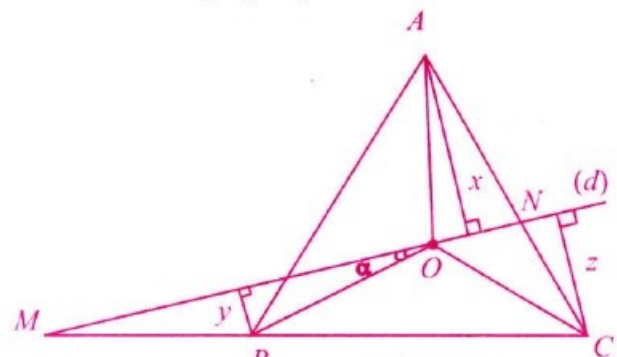
Do đó

$$x^2+y^2+z^2=R^2(\sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ - \alpha) + \sin^2(60^\circ + \alpha))$$

$$=\frac{a^2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

2) $x^4+y^4+z^4=R^4(\sin^4 \alpha + \sin^4(60^\circ - \alpha) + \sin^4(60^\circ + \alpha))$

$$=\frac{a^4}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{a^4}{8}. \square$$



Hình 3

Kết quả của Bài toán 4 là do chúng tôi liên tưởng đến một bài toán quen thuộc “Cho đường thẳng (d) đi qua trọng tâm tam giác ABC . Gọi A_1, B_1, C_1 là chân đường cao hạ từ A, B, C xuống (d) . Chứng minh một trong ba đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 bằng tổng hai đoạn thẳng còn lại” (Rất giống với Bài toán 1).

Bạn đọc hãy giải bài toán sau và cố gắng liên tưởng nó với các bài toán đã nêu trên.

BÀI TOÁN 5. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng chứa tam giác đó. Gọi A_1, B_1, C_1 là chân đường cao hạ từ A, B, C xuống (d) . Chứng minh các hệ thức

1) $A_1B_1^2 + A_1C_1^2 + B_1C_1^2 = \frac{3a^2}{2}$;

2) $A_1B_1^4 + A_1C_1^4 + B_1C_1^4 = \frac{9a^4}{8}$.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TP. HÀ NỘI

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Đề thi đã đăng trên TH&TT số 428, tháng 2 năm 2013)

Câu 1

1) Ta có

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1) \\ &= n(n^2 - 4 + 5)(n - 1)(n + 1) \\ &= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n - 1)(n + 1). \end{aligned}$$

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $(n^5 - n) : 30$. Từ đó suy ra
 $A = a^{2007}(a^5 - a) + b^{2007}(b^5 - b) + c^{2007}(c^5 - c) : 30$.

2) Ta có $x = \sqrt[3]{7 + \frac{7}{2\sqrt{2}}} + \sqrt[3]{7 - \frac{7}{2\sqrt{2}}}$

$$\Rightarrow x^3 = 14 + 3x^3 \sqrt{7^2 - \frac{7^2}{8}} \Rightarrow 2x^3 - 21x - 28 = 0.$$

Do đó $f(x) = (2x^3 - 21x - 29)^{2012} = (-1)^{2012} = 1$.

Câu 2

1) $\sqrt{x^2 + 5} + 3x = \sqrt{x^2 + 12} + 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5} - 3 + 3x - 6 - \sqrt{x^2 + 12} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} + 3(x - 2) - \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} + 3 - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} \right) = 0.$$

Từ đặc điểm của PT suy ra $3x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$; do

đó $\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} > \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4}$; vì vậy biểu thức

trong ngoặc luôn dương. Suy ra $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

2) Viết PT thứ nhất của hệ thành

$$x^2 + (y + 1)x - y - 2y^2 = 0$$

$$\text{có } \Delta = (y + 1)^2 + 4(y + 2y^2) = 9y^2 - 6y + 1 = (3y - 1)^2.$$

Do đó $x = y$ hoặc $x = -2y - 1$.

• Với $x = y$, thay vào PT thứ hai tìm được $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

• Với $x = -2y - 1$, thay vào PT thứ hai tìm được $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -2$.

Vậy hệ PT có ba nghiệm $(x; y)$ là $(3; 3)$, $(-3; 1)$, $(-5; 2)$.

Câu 3

Viết PT thành dạng $(2x - 3y + 3)(x - y - 2) = -2$.

Xây ra 4 trường hợp

$2x - 3y + 3$	2	-1	1	-2
$x - y - 2$	-1	2	-2	1

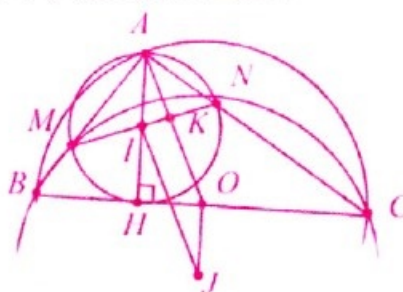
Vậy có bốn cặp số $(x; y)$ thỏa mãn là $(4; 3)$, $(16; 12)$, $(2; 2)$, $(14; 11)$.

Câu 4 (h.1)

1) Gọi $AO \cap MN = K$. Ta có $\widehat{OAC} = \widehat{ACB}$

(vì $OA = OC$); $\widehat{ANM} = \widehat{ABC} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{MC} \right)$

nên $\widehat{OAC} + \widehat{ANM} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AKN} = 90^\circ$, tức là $AO \perp MN$.



Hình 1

2) Chứng minh tứ giác BMNC nội tiếp.

Gọi $I = AH \cap MN$, gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNC thì $JI \parallel AO$ (cùng vuông góc với MN); $JO \parallel AH$ (cùng vuông góc với BC) nên tứ giác AIJO là hình bình hành, suy ra

$$OJ = AI = \frac{AH}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)}; OB = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Do đó } BJ = \sqrt{OB^2 + OJ^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \text{ (cm)}.$$

Câu 5

1) Đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\text{với } \frac{1}{\frac{S}{a} + \frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{S}{b} + \frac{2S}{c}} + \frac{1}{\frac{S}{c} + \frac{2S}{a}} = \frac{1}{\frac{3S}{a+b+c}}.$$

Đề thi chọn học sinh giỏi MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH PHÚ THỌ

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (3 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương n để hai số $n+26$ và $n-11$ đều là lập phương của hai số nguyên dương nào đó.

Câu 2. (4 điểm)

Giả sử a là một nghiệm của phương trình $\sqrt{2}x^2 + x - 1 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{2a-3}{\sqrt{2(2a^4-2a+3)+2a^2}}$$

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{8x+1} = x^2 + 3x - 1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ xy + x^2 = 2. \end{cases}$

Câu 4. (7 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua điểm M vẽ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A và B là các tiếp điểm). Gọi D là điểm di động trên cung lớn AB

(D không trùng với A, B và điểm chính giữa của cung) và C là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn $(O; R)$.

a) Giả sử H là giao điểm của các đường thẳng OM với AB . Chứng minh rằng $MH \cdot MO = MC \cdot MD$, từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác HCD luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng nếu dây AD song song với đường thẳng MB thì đường thẳng AC đi qua trọng tâm G của tam giác MAB .

c) Kẻ đường kính BK của đường tròn $(O; R)$, gọi I là giao điểm của các đường thẳng MK và AB . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MBI theo R , khi biết $OM = 2R$.

Câu 5. (2 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc + a + b = 3ab$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+1}} + \sqrt{\frac{b}{bc+c+1}} + \sqrt{\frac{a}{ca+c+1}} \geq \sqrt{3}.$$

THANH LOAN (Hà Nội)

Sưu tầm và giới thiệu

Áp dụng BDT Cauchy, ta có

$$\frac{S}{a} + \frac{2S}{b} = S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{9S}{a+2b}.$$

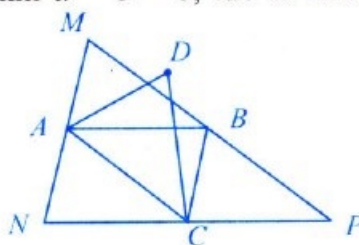
Tương tự $\frac{S}{b} + \frac{2S}{c} \geq \frac{9S}{b+2c}; \frac{S}{c} + \frac{2S}{a} \geq \frac{9S}{c+2a}$. Do đó

$$\frac{1}{\frac{S}{a} + \frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{S}{b} + \frac{2S}{c}} + \frac{1}{\frac{S}{c} + \frac{2S}{a}} \leq \frac{a+b+c}{3S} = \frac{1}{3S}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$, tức là tam giác ABC đều.

2) (h.2)

Trong 8045 điểm luôn tìm được 3 điểm là đỉnh của tam giác có diện tích lớn nhất, giả



Hình 2

sử đó là A, B, C với $S_{ABC} \leq 1$. Dựng các đường thẳng đi qua A và song song với BC , qua B và song song với AC , qua C và song song với AB , chúng đôi một cắt nhau tại M, N, P . Khi đó $S_{MNP} = 4S_{ABC} \leq 4$.

Ta sẽ chứng minh rằng 8045 điểm đã cho nằm trong hoặc trên cạnh tam giác MNP . Thật vậy, giả sử $\exists D \notin \Delta MNP$ (chẳng hạn D và B cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ chứa AC) thì $S_{DAC} > S_{ABC}$ (mâu thuẫn với cách chọn tam giác ABC). Tam giác MNP được chia thành 4 tam giác nhỏ bằng nhau ANC, AMB, ABC, BCP . Ta có $8045 = 4 \cdot 2011 + 1$. Theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại ít nhất $2011 + 1 = 2012$ điểm phải nằm trong hoặc trên cạnh của một tam giác nhỏ có diện tích không lớn hơn 1.

GIA LINH (Hà Nội)



Trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 402 tháng 12 năm 2010 có bài "Về bài toán tính thể tích khối đa diện" của tác giả Phan Cung Đức về cách tính thể tích khối đa diện bằng phương pháp trực tiếp thông qua việc tính diện tích đáy và chiều cao của khối đa diện. Với một số bài toán việc tính thể tích khối đa diện bằng phương pháp trực tiếp đôi khi gặp khó khăn trong việc xác định chiều cao và diện tích đáy. Khi đó ta sẽ phải sử dụng phương pháp gián tiếp để tính thể tích khối đa diện. Trong bài viết này tác giả xin được giới thiệu một số thí dụ áp dụng phương pháp gián tiếp để tính thể tích khối đa diện.

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Công thức tính thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} Bh \quad (B \text{ là diện tích đáy, } h \text{ là chiều cao}).$$

2) Công thức tính thể tích khối lăng trụ

$$V = Bh \quad (B \text{ là diện tích đáy, } h \text{ là chiều cao}).$$

3) Cho hai khối đa diện H và H_1 có thể tích

$$\text{tương ứng là } V \text{ và } V_1 \text{ biết } \frac{V}{V_1} = k \text{ và } V_1 = a \text{ thì}$$

$$V = ka.$$

4) Nếu chia khối đa diện H thành các khối đa diện $H_1, H_2, \dots, H_n$ thì $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

(V là thể tích của khối đa diện H , V_i là thể tích của khối đa diện H_i , $i = \overline{1, n}$).

5) Cho hình chóp $S.ABC$ và A', B', C' lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh SA, SB, SC khi đó ta có hệ thức

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$

II. PHƯƠNG PHÁP

• Nếu tính thể tích khối đa diện H bằng phương pháp trực tiếp khó khăn ta có thể chia

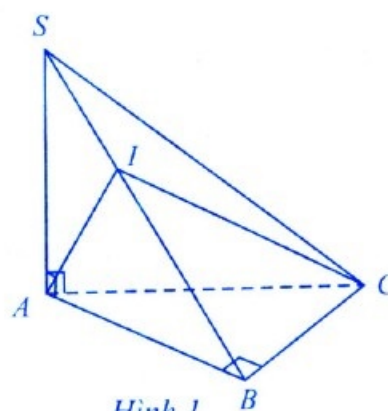
khối đa diện H thành các khối đa diện nhỏ $H_1, H_2, \dots, H_n$ mà việc tính thể tích của các khối đa diện H_i ($i = \overline{1, n}$) là đơn giản hơn.

• Khi biết tỉ số thể tích của hai khối đa diện H và H' , nếu việc tính thể tích khối đa diện H gặp khó khăn ta có thể tính thể tích khối đa diện H' rồi suy ra thể tích khối đa diện H .

III. CÁC THÍ DỤ MINH HỌA

★ **Thí dụ 1.** Cho khối chóp $S.ABC$ với tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = 2a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Giả sử I là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SI = \frac{1}{3}SB$. Tính thể tích khối tứ diện $SAIC$.

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AC = 2a$ nên $AB = BC = a\sqrt{2}$. Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = a^2$.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên SA là chiều cao của hình chóp $S.ABC$. Suy ra $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3}{3}$

$$\frac{V_{S.AIC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SI}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{1}{3}. \text{ Vậy}$$

$$V_{A'MKDAB} = V_{A.A'ND} - V_{B.MNK} = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{24} = \frac{7a^3}{24}.$$

Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng a^3 .

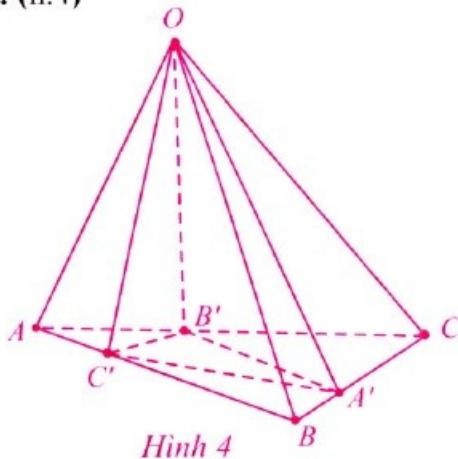
$$\text{Từ } V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{A'MKDAB} + V_{A'B'C'D'MKCD}$$

$$\Rightarrow V_{A'B'C'D'MKCD} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{A'MKDAB}$$

$$= a^3 - \frac{7a^3}{24} = \frac{17a^3}{24} \Rightarrow \frac{V_{A'MKDAB}}{V_{A'B'C'D'MKCD}} = \frac{7}{17}. \square$$

★ **Thí dụ 4.** Cho hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a, OB = b, OC = c$; OA', OB', OC' lần lượt là đường cao của các tam giác OBC, OAC, OAB . Tính thể tích của khối chóp $O.A'B'C'$.

Lời giải. (h.4)



Hình 4

$$\text{Ta có } V_{O.ABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{abc}{6}. \text{ Do } OA \perp OB,$$

$OA \perp OC, OB \perp OC$, nên các tam giác OAB, OAC, OBC vuông tại O .

$$\text{Áp dụng định lý Pythagore ta có } AC = \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}, BC = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Xét tam giác OBC vuông tại O có OA' là

$$\text{đường cao nên } \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\Rightarrow OA'^2 = \frac{OB^2 \cdot OC^2}{OB^2 + OC^2} = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}.$$

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông $OA'C$ ta có $OC^2 = OA'^2 + CA'^2$

$$\Rightarrow CA' = \sqrt{OC^2 - OA'^2} = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$CB' = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}; AB' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}; AC' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$BC' = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}; BA' = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \text{ Mặt khác}$$

$$\frac{V_{O.CA'B'}}{V_{O.ABC}} = \frac{V_{C.OA'B'}}{V_{C.OBA}} = \frac{CO}{CO} \cdot \frac{CA'}{CB} \cdot \frac{CB'}{CA}$$

$$= \frac{c^4}{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}.$$

$$\text{Suy ra } V_{O.CA'B'} = \frac{c^4}{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)} V_{O.ABC}.$$

Chứng minh tương tự, ta được

$$V_{O.AB'C'} = \frac{a^4}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} V_{O.ABC};$$

$$V_{O.BA'C'} = \frac{b^4}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} V_{O.ABC}. \text{ Do đó}$$

$$\begin{aligned} V_{O.A'B'C'} &= V_{O.ABC} - (V_{O.CA'B'} + V_{O.AB'C'} + V_{O.BA'C'}) \\ &= \left(1 - \left(\frac{a^4}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} + \frac{b^4}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{c^4}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} \right) \right) \frac{abc}{6}. \square \end{aligned}$$

BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, G là trọng tâm của tam giác SBD , mặt phẳng (ABG) cắt SC tại M , mặt phẳng (ABG) cắt SD tại N . Tính thể tích khối chóp $S.ABMN$; biết $SA = AB = a$, góc giữa đường thẳng AM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .

2. Cho hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau; $OA = a, OB = b, OC = c$; OA', OB', OC' lần lượt là các đường phân giác trong của các tam giác OBC, OAC, OAB . Tính thể tích của khối chóp $O.A'B'C'$.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD . Mặt phẳng (AHK) cắt SC tại I . Tính thể tích của khối chóp $S.AHIK$.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 6

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C)

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)
- 2) Tìm m sao cho hệ phương trình sau có đúng 4 nghiệm nguyên

$$\begin{cases} (y-2)x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 - m^2 = 0. \end{cases}$$

Câu II (2 điểm)

- 1) Giải bất phương trình

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3})(1 + \sqrt{x^2 + 2x - 15}) \geq 8.$$

- 2) Giải phương trình

$$3\sin^4 x + 2\cos^2 3x + \cos 3x = 3\cos^4 x - \cos x + 1.$$

Câu III (1 điểm)

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{3} \sin 2x + 2\cos^2 x} \, dx.$

Câu IV (1 điểm)

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi K , I lần lượt là trung điểm cạnh CC_1 , BB_1 . Tính thể tích khối chóp $A.A_1BK$ và khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (A_1BK) .

Câu V. (1 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \max \left\{ x; y; z; \frac{7}{x} + \frac{3}{y^2} + \frac{9}{z^3} \right\}$$

trong đó x, y, z là các số thực dương.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn có phương trình

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$$

và điểm $A(-1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đã cho, biết diện tích hình chữ nhật bằng $20(\text{đvdt})$ và điểm B có hoành độ âm.

- 2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

$$\text{đường thẳng } d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=-2-4t \\ z=\frac{8}{3}+8t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=2+3m \\ y=1 \\ z=-1+4m \end{cases}$$

Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau. Viết phương trình đường phân giác góc tù tạo bởi hai đường thẳng đó.

Câu VII.a (1 điểm)

Một hộp bi có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Xét phép thử lấy ngẫu nhiên 4

viên bi từ hộp. Gọi A là biến cố "trong số 4 viên bi lấy được số bi đỏ lớn hơn số bi vàng". Tính xác suất của biến cố A .

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của elip (E) . Biết (E) có một đỉnh cùng với hai tiêu điểm tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng $12(3+2\sqrt{3})$.

- 2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$$

và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) , biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Câu VII.b (1 điểm)

Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Từ các chữ số thuộc tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và số đó chia hết cho 3?

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Để tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0) \in (C_m)$ song song với đường thẳng $y = -3x + 1$ thì

$$y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{-2-m}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 1 - m = 0,$$

$m \neq -2$. Kết hợp với giả thiết $d(M, d) = \sqrt{10}$, tìm được $m = 1$ hoặc $m = \frac{43}{3}$.

Câu II. a) ĐK $\cos x \neq 0, \cos 4x \neq 0$.

PT đã cho tương đương với

$$8\sqrt{2} \sin x \cos 2x = (\tan x + \tan 4x) + (\tan x \tan 4x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{2} \sin x \cos 2x = \frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} - \frac{\cos 5x}{\cos x \cos 4x}$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x = \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}; x = -\frac{5\pi}{52} + k\frac{2\pi}{13} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Cộng hai vế của hai PT trong hệ, ta có

$$x^2 + (y+1) + 3(x + \sqrt{y+1}) + 2x\sqrt{y+1} - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{y+1})^2 + 3(x + \sqrt{y+1}) - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{y+1} = 5 \\ x + \sqrt{y+1} = 2. \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(0; 3), (1; 0)$.

Câu III. Ta có $I = \int_1^e \frac{\ln(\sqrt{1+\ln^2 x} + \ln x)}{x} dx$.

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$; khi $x=1 \Rightarrow t=0; x=e \Rightarrow t=1$.

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \ln(t + \sqrt{1+t^2}) dt = t \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(1 + \sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Câu VI. Kẻ $SH \perp (ABCD)$, vì $SA = SB = SD$

nên $HA = HB = HD$, suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD , mà tam giác ABD đều nên $HD \perp AB$, từ $AB \parallel CD \Rightarrow HD \perp DC$ (1). Theo định lý ba đường vuông góc có $SD \perp DC$ (2). Từ (1) và (2) ta thấy góc nhọn $\widehat{SDH} = 30^\circ$ chính là góc của hai mặt phẳng (SDC) và $(ABCD)$.

$$\text{Từ } SD = a, \widehat{SDH} = 30^\circ \Rightarrow SH = \frac{1}{2}a; HD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\text{suy ra } AB = \frac{3}{2}a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{3\sqrt{3}a^3}{16}.$$

Câu V. Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\frac{1}{2+4a} + \frac{2+4a}{16} \geq \frac{1}{2}; \frac{1}{2+9b} + \frac{3+9b}{36} \geq \frac{1}{3}; \frac{1}{6+36c} + \frac{6+36c}{144} \geq \frac{1}{6}.$$

$$\text{Suy ra } P + \frac{2+4a}{16} + \frac{3+9b}{36} + \frac{6+36c}{144} \geq 1 \Rightarrow P \geq \frac{1}{2}.$$

Câu VI a. 1) PT đường tròn $\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$.

$$\text{Đặt } \sin \alpha = \frac{x-1}{\sqrt{2}}, \cos \alpha = \frac{y+2}{\sqrt{2}} \text{ thì } x = \sqrt{2} \sin \alpha + 1$$

$$y = \sqrt{2} \cos \alpha - 2, \alpha \in [0; 2\pi].$$

$$\text{Từ đó } M(\sqrt{2} \sin \alpha + 1; \sqrt{2} \cos \alpha - 2) \in (C).$$

PT đường thẳng $AB: x + y - 8 = 0$. Ta có

$$d(M, AB) = \frac{\left| 2 \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) - 9 \right|}{\sqrt{2}}.$$

Để S_{MAB} lớn nhất thì $d(M, AB)$ lớn nhất,

$$\text{nên } \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4}, \text{ suy ra } x=0; y=-3.$$

Vậy điểm $M(0; -3) \in (C)$ thì diện tích tam giác MAB có giá trị lớn nhất.

2) Ta có $\overline{AB}=(-1;-2;-2)$; $\overline{AC}=(2;4;-4)$ nên

$AB=3$; $AC=6$. Gọi D là trung điểm AC , thì $D(2;3;-1) \in AC \Rightarrow AB=AD$. Gọi H là trung điểm BD_1 thì $H(1;1;-1)$. PT đường phân giác

$$AH \text{ cần tìm là } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1-2t \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Câu VII a. Xét số phức $z=x+yi$. Từ giả thiết có $(x-1)^2+(y+2)^2=5$. Suy ra tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$. Ta được $M(\sqrt{5}\sin\alpha+1;\sqrt{5}\cos\alpha-2)$ với $\alpha \in [0;2\pi]$. Mặt khác $w=z+1+i=(x+1)+(y+1)i \Rightarrow w^2=(x+1)^2+(y+1)^2=(\sqrt{5}\sin\alpha+2)^2+(\sqrt{5}\cos\alpha-1)^2=10+2\sqrt{5}(2\sin\alpha-\cos\alpha)$.

Đặt $t=2\sin\alpha-\cos\alpha$, để tồn tại α thì $-\sqrt{5} \leq t \leq \sqrt{5} \Rightarrow 2\sin\alpha-\cos\alpha \leq \sqrt{5}$. Do đó

$$|w|_{\max}=20 \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x=3; y=-3. \text{ Vậy số phức đó là } w=4-2i.$$

Câu VI b. 1) Đặt $\sin\alpha=\frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x=2\sqrt{2}\sin\alpha$,

$$\cos\alpha=\frac{y}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\sqrt{2}\cos\alpha, \text{ trong đó } \alpha \in [0;2\pi].$$

Do đó $M(2\sqrt{2}\sin\alpha;\sqrt{2}\cos\alpha) \in (E)$.

PT đường thẳng $AB: x+2y-1=0$. Ta có

$$d(M, AB) = \frac{\left| 4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1 \right|}{\sqrt{5}}.$$

Để S_{MAB} nhỏ nhất thì $d(M, AB)$ nhỏ nhất, nên

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2; y=1. \text{ Vậy } M(2;1).$$

2) Ta thấy $(d_1), (d_2)$ cắt nhau tại $I(1;1;1)$. Chọn trên (d_1) điểm $M(2;3;3)$ thì $IM=3$.

$$\text{PT tham số của } (d_2): \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z=3-2t \end{cases}$$

nên $N(t;-1+2t;3-2t) \in (d_2)$.

$$\text{Ta thấy } IN=IM=3 \Leftrightarrow IN^2=9 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2. \end{cases}$$

Suy ra $N_1(0;-1;3), N_2(2;3;-1)$.

Ta có $\overline{IM}=(1;2;2), \overline{IN_1}=(-1;-2;2), \overline{IN_2}=(1;2;-2)$.

Mà $\overline{IM} \cdot \overline{IN_2}=1 > 0 \Rightarrow \widehat{MIN_2} < 90^\circ$; nên góc nhọn của $(d_1), (d_2)$ chính là góc $\widehat{MIN_2}$. Gọi $K(2;3;1)$ là trung điểm của MN_2 thì đường thẳng qua hai điểm I, K là đường phân giác

$$\text{của góc tạo bởi } (d_1), (d_2) \text{ và PT } IK: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1. \end{cases}$$

Câu VII b. Vì $x>0, y>0$, từ PT thứ nhất của hệ suy ra

$$\log_{2013} \frac{1+x}{1+y} = x-y$$

$$\Leftrightarrow y - \log_{2013}(1+y) = x - \log_{2013}(1+x) \quad (1)$$

Đặt $f(t)=t-\log_{2013}(1+t), t \in (0;+\infty)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trong $(0;+\infty)$.

Do đó PT (1) có dạng $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$.

Từ PT thứ hai của hệ suy ra

$$4^y \cdot \log_2 x = -2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} x = \left(\frac{1}{4}\right)^y \quad (2)$$

Thế $x=y$ vào PT (2) được $\log_{\frac{1}{4}} x = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Bằng cách vẽ hai đồ thị $z=\log_{\frac{1}{4}} x$ và $z=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxz ta thấy PT có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$. Thử lại thì hệ PT

có nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)



MỞ RỘNG BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM 2013

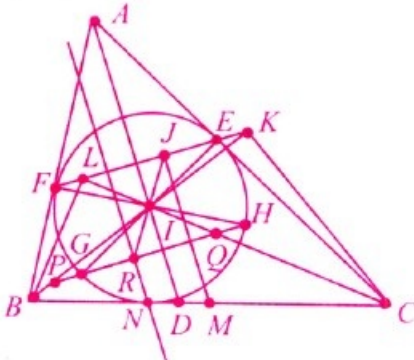
TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội)

Trong Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT Việt Nam năm 2013 có một bài toán hình học hay, đề bài có thể viết gọn lại như sau

★BÀI TOÁN 1. Cho tam giác ABC , đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB lần lượt tại E, F . Gọi G, H lần lượt là các điểm đối xứng của E, F qua I . Đường thẳng GH cắt IB, IC lần lượt tại P, Q . Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỉ số $\frac{AB}{AC} = k$ (không đổi). Chứng minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Giả sử IB, IC lần lượt cắt EF tại K và L . Chú ý tam giác AEF cân tại A nên

$$\begin{aligned} \widehat{KEC} &= \widehat{AEF} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} \right) \\ &= 180^\circ - \widehat{BIC} = \widehat{KIC}. \text{ Từ đó tứ giác } KEIC \text{ nội tiếp, suy ra } \widehat{IKC} = \widehat{IEC} = 90^\circ. \text{ Tương tự có } \widehat{ILB} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Gọi M là trung điểm BC , J là trung điểm KL để thấy tam giác KLM cân nên $MJ \perp EF$ (1)

Do G, H lần lượt là các điểm đối xứng của E, F qua I nên đường thẳng GH đối xứng với

đường thẳng EF qua I . GH, EF lần lượt cắt IB tại P, K suy ra I là trung điểm PK , tương tự I là trung điểm QL . Vậy hai đoạn KL và PQ đối xứng nhau qua I . Từ đó nếu gọi R là trung điểm PQ thì trung điểm J của KL và R đối xứng nhau qua I , hay I là trung điểm của JR .

Giả sử đường trung trực của PQ cắt BC tại N , ta thấy $RN \perp PQ, PQ \parallel EF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $RN \parallel JM$. Giả sử IA cắt BC tại D thì ID vuông góc với EF nên ID cũng song song với RN và JM . Hình thang $RJMN$ có $IR = IJ$ và $ID \parallel RN \parallel JM$ nên $DN = DM$. Tam giác ABC có AD là phân giác

nên $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = k$ (không đổi) nên điểm D cố

định. M là trung điểm BC cố định nên điểm N đối xứng với M qua BC cũng cố định. Vậy đường trung trực của PQ luôn đi qua điểm N cố định.

Nhận xét. Việc chứng minh $\widehat{IKC} = \widehat{IEC} = 90^\circ$ khá đơn giản vì đó là các bài toán cơ bản liên quan đến đường tròn nội tiếp và các tiếp điểm. Trong bài toán cho giả thiết $\frac{AB}{AC} = k$ (không đổi), nhằm mục đích suy ra chân đường phân giác góc BAC là cố định.

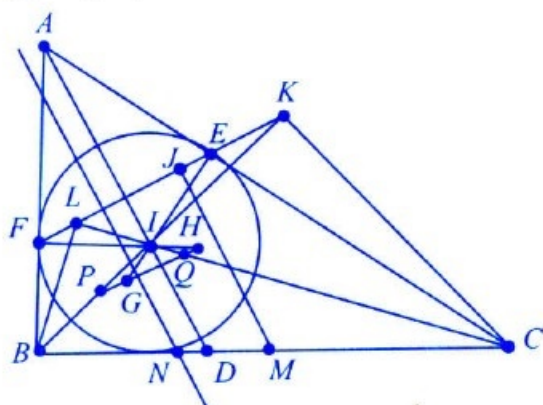
Trong phép chứng minh trên, đường tròn đường kính BC và phép đối xứng tâm I có vai trò quan trọng. Dựa vào ý tưởng đó chúng ta có thể mở rộng bài toán này như sau

★BÀI TOÁN 2. Cho tam giác ABC , đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh CA, AB lần lượt tại E, F . Các điểm G, H lần lượt là điểm chia IE, IF theo một tỉ số m không đổi. Đường thẳng GH cắt IB, IC lần lượt tại P, Q . Giả sử các điểm B, C cố định, A thay đổi

sao cho tỉ số $\frac{AB}{AC} = k$ (không đổi). Chứng

minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. (h.2)



Hình 2

Về cơ bản lời giải hoàn toàn giống lời giải bài toán 1 trong trường hợp G, H đối xứng qua I . Ta chú ý rằng nếu G, H chia IE, IF theo tỉ số m nghĩa là đường thẳng GH là ảnh của đường thẳng EF qua phép vị tự tâm I tỉ số m . Qua đó một cách hoàn toàn tương tự ta chứng minh được đường trung trực của PQ đi qua N cố định là ảnh vị tự của điểm M qua phép vị tự tâm D tỉ số m .

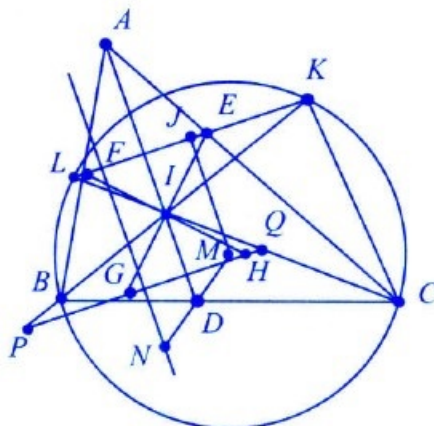
Nhận xét. Trong bài toán trên ta vẫn thấy vai trò quan trọng của đường tròn đường kính BC . Ta có thể tìm cách thay thế yếu tố đó. Thay đường tròn đường kính BC bằng một đường tròn bất kì đi qua B, C . Ta thu được bài toán sau

★BÀI TOÁN 3. Cho tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường tròn (M) bất kì qua B, C ; IB, IC lần lượt cắt (M) tại K, L khác B, C ; KL cắt CA, AB lần lượt tại E, F ; G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I ; GH cắt IB, IC lần lượt tại P, Q . Giả sử đường tròn (M) và B, C cố định. Điểm A thay đổi sao cho tỉ số $\frac{AB}{AC} = k$ (không đổi). Chứng

minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. (h.3) Lời giải bài này cũng giống lời giải bài toán 1, nhưng ở đây chỉ khác E, F là giao của KL với CA và AB . Ta cố gắng chứng minh EF vuông góc với AI thì bài toán được

giải quyết theo ý tưởng bài toán 1. Thật vậy ta thấy $\widehat{EKI} = \widehat{LKB} = \widehat{LCB} = \widehat{ICE}$.



Hình 3

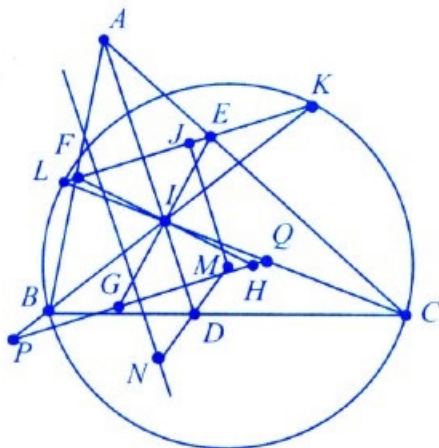
Từ đó tứ giác $EKCI$ nội tiếp, ta suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{KEC} = \widehat{KIC}$. Tương tự $\widehat{AFE} = \widehat{LIB}$ mà $\widehat{KIC} = \widehat{LIB}$ nên tam giác AEF cân có AI là phân giác góc EAF , suy ra $AI \perp EF$.

Đến đây lời giải hoàn toàn tương tự lời giải bài toán 1 bằng phép đối xứng tâm I . Ta chú ý đường trung trực của PQ sẽ đi qua điểm N cố định đối xứng với M qua D .

Nhận xét. Bài toán 3 tuy tổng quát hơn bài toán 1 song lời giải đạt được dễ dàng hơn do đã xuất hiện đường tròn tâm M trong đề bài. Ta có thể phát biểu lại bài toán trở thành khó hơn như sau

★BÀI TOÁN 4. Cho tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp. Các điểm E, F lần lượt thuộc đoạn thẳng CA, AB sao cho $\widehat{IEC} = \widehat{IFB} = \alpha$ (không đổi). Gọi G, H lần lượt là các điểm đối xứng của E, F qua I . Đường thẳng GH cắt IB, IC lần lượt tại P, Q . Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỉ số $\frac{AB}{AC} = k$ (không đổi). Chứng minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. Do $\widehat{IEC} = \widehat{IFB} = \alpha$ (không đổi) ta dễ chứng minh tam giác AEF cân, từ đó nếu IB, IC lần lượt cắt EF tại K, L thì B, C, K, L nằm trên đường tròn (M) cố định. Chân đường phân giác góc BAC là điểm D cố định. Khi đó đường trung trực của PQ sẽ đi qua điểm N đối xứng với M qua điểm D cố định (h.4).



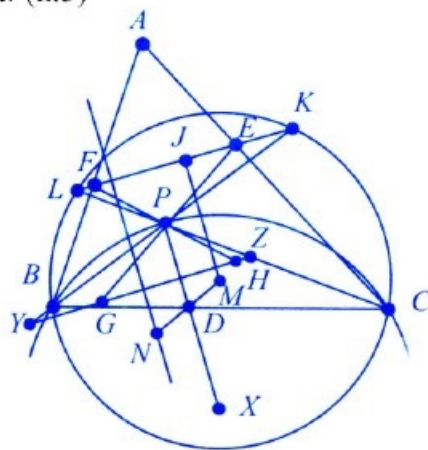
Hình 4

Nhận xét. Với ý tưởng mở rộng qua phép vị tự tương tự bài toán 2, ta đề xuất bài toán sau, lời giải kết hợp với bài toán 2 và bài toán 3, 4.

❖ BÀI TOÁN 5. Cho tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp. Các điểm E, F lần lượt thuộc đoạn thẳng CA, AB sao cho $\widehat{IEC} = \widehat{IFB} = \alpha$ (không đổi). Gọi G, H lần lượt là các điểm chia IE, IF theo tỉ số m (không đổi). GH cắt IB, IC lần lượt tại P, Q . Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỉ số $\frac{AB}{AC} = k$ (không đổi). Chứng minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Nhận xét. Chúng ta bắt đầu có thể nhận thấy vai trò của đường tròn nội tiếp tâm I có thể thay thế được. Tuy vậy, khi đó yếu tố chân đường phân giác cố định sẽ không còn được giữ nguyên.

❖ BÀI TOÁN 6. Cho tam giác ABC , P là một điểm bất kì. Đường tròn (M) bất kì đi qua B, C . Giả sử BP, CP lần lượt cắt (M) tại K, L . KL cắt CA, AB tại E, F . Gọi G, H lần lượt là các điểm đối xứng của E, F qua P ; GH cắt PB, PC lần lượt tại Y, Z . Giả sử B, C và (M) cố định, A và P thay đổi sao cho đường nối P và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC luôn đi qua một điểm cố định trên BC . Chứng minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua một điểm cố định.



Hình 5

Lời giải. (h.5)

Về cơ bản lời giải hoàn toàn tương tự các bài toán trên. Gọi X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC ta dễ chứng minh được $XP \perp EF$. Chú ý rằng với giả thiết thì XP đi qua điểm D cố định thuộc BC . Tương tự ta chứng minh được đường trung trực của YZ đi qua điểm N đối xứng với M qua điểm D cố định.

Nhận xét. Tuy rằng bài toán 6 tổng quát hơn các bài trước song ta dễ dàng thu được lời giải hơn nhờ các yếu tố cố định đã cho sẵn. Chúng ta hoàn toàn có thể tổng quát hơn một chút bằng cách thay các điểm chia PE, PF theo tỉ số m không đổi. Thực ra với bài toán tổng quát và P bất kì ta có thể khai thác được rất nhiều tính chất mới từ bài toán này, xin dành cho bạn đọc tiếp tục tìm tòi.

Cuối cùng chúng tôi xin nêu ra một thí dụ ứng dụng bài toán tổng quát khi P là trực tâm, lời giải nó xin dành cho bạn đọc.

❖ BÀI TOÁN 7. Cho đoạn thẳng BC và điểm D thuộc BC cố định. Đường tròn (O) thay đổi đi qua B, C . M là điểm đối xứng với O qua BC . Đường thẳng qua O song song với MD cắt (O) tại A sao cho A và M nằm khác phía đối với BC . Một đường tròn (K) cố định đi qua B, C ; MD cắt đường thẳng qua A vuông góc BC tại H ; HB, HC lần lượt cắt (K) tại E, F khác B, C ; Y, Z lần lượt là các điểm đối xứng của E, F qua H . Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn YZ luôn đi qua một điểm cố định khi đường tròn (O) di chuyển.



KỶ NIỆM TRÒN CHỤC NĂM SINH CÁC NHÀ TOÁN HỌC

Để chuẩn bị cho buổi sinh hoạt Câu lạc bộ Toán học của một trường học, bạn Sử đã sưu tầm được một số tư liệu về một số nhà toán học tròn chục năm sinh vào năm 2013 mà học sinh phổ thông quen biết, được ghi ở dưới đây. Bạn hãy thử sắp xếp các tư liệu đó theo các mục A, B, C, D cho phù hợp nhé ! Một số chữ viết tắt: Viện Hàn lâm Khoa học viết là Viện HLKH, Các công trình nghiên cứu viết là CCTNC, Toán sơ cấp viết là TSC.

A. HỌ VÀ TÊN



A1.
Lazare Nicolas
Marguerite
Carnot

A2.
Michel
Chasles

A3.
Pál Erdős

A4.
John Charles
Fields

A5.
Blaise Pascal

A6.
Hermann
Amandus
Schwarz

A7.
Andrew
Wiles

B. NĂM SINH VÀ NĂM MẤT

B1. 19.6.1623 - 19.8.1662

B2. 13.5.1753 - 2.8.1823

B3. 15.11.1793 - 18.12.1880

B4. 25.1.1843 - 30.11.1921

B5. 14.5.1863 - 9.8.1932

B6. 26.3.1913 - 20.9.1996

B7. 11.4.1953 - ...

C. QUỐC TỊCH

C1. Anh C2. Canada C3. Đức C4. Hungary

C5. Pháp C6. Pháp C7. Pháp

D. MỘT SỐ HOẠT ĐỘNG KHOA HỌC

D1. Trong nhóm chuẩn bị lập Viện HLKH Paris. CCTNC: Lí thuyết số, Hình học xạ ảnh, Lí thuyết xác suất, Máy tính. TSC: Tính chất các hệ số của khai triển lũy thừa một nhị thức, Hình sáu cạnh nội tiếp đường tròn.

D2. Viện sĩ các Viện HLKH Paris, Peterburg, London, Berlin. CCTNC: Giải tích, Hình học tính toán...TSC: Hệ thức về các vectơ, các góc.

D3. Viện sĩ Viện HLKH Berlin. CCTNC: Lí

thuyết hàm, Phương trình vi phân, Các mặt có diện tích cực tiểu. TSC: Bất đẳng thức của tổng bình phương hai số trong dạng toàn phương.

D4. Viện sĩ Viện HLKH Paris. CCTNC: Giải tích, Hình học xạ ảnh...TSC: Tổng quát hóa Định lí Menelaus, Các tính chất của tỉ số bốn điểm trên đường thẳng, của chùm bốn đường thẳng, của hình tứ diện.

D5. Viện sĩ Viện HLKH các nước Hungary, Anh, Hoa Kỳ, Hà Lan, Ôxtralia, Ấn Độ...CCTNC: Viết khoảng 1500 bài báo về Lí thuyết số, Giải tích, Hình học, Lí thuyết tập hợp, Lí thuyết xấp xỉ, Tổ hợp...TSC: Bất đẳng thức giữa tổng khoảng cách từ một điểm trong tam giác đến các đỉnh và tổng khoảng cách từ điểm đó đến các cạnh, Các dãy số nguyên tố.

D6. Viện sĩ Viện HLKH Hoa Kỳ. Nhận được 15 giải thưởng toán học danh giá. CCTNC: Lí thuyết số. Chứng minh định lí lớn Fermat.

D7. Viện sĩ Viện HLKH các nước Nga, Anh, Hoa Kỳ. Lập giải thưởng cho các nhà toán học trẻ xuất sắc. CCTNC: Lí thuyết hàm đại số, tích phân Abel.

Giải đáp câu lạc bộ:

SẢN PHẨM CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

(Đề đăng trên TH&TT số 426, tháng 12 năm 2012)



Từ khóa trong cột sẫm màu là: **NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC**. Một số bạn viết nhầm *Tuyển tập tác gia* thành *Tuyển tập tác giả*.

Các bạn sau có lời giải đúng và gửi về sớm hơn được nhận tặng phẩm:

- 1) Hoàng Thị Thu Uyên, 11 A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**.
- 2) Tô Khánh Hòa, 11A, THPT Nam Đông Quan, Đông Hưng, **Thái Bình**.
- 3) Đàm Mai Anh, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**.
- 4) Nguyễn Xuân Cường, 11 T1, THPT Anh Sơn 1, **Nghệ An**.
- 5) Trần Xuân Dương, 11 T2, THPT Trưng Vương, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**.
- 6) Lê Minh Phương, 11 T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, TP. Cà Mau, **Cà Mau**.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/429. (Lớp 6). Tìm độ dài cạnh hình vuông. Biết rằng nó là số nguyên; diện tích của hình vuông là số nguyên có 4 chữ số, trong đó các chữ số hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm giống nhau.

TRƯƠNG QUANG AN

(GV THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T2/429. (Lớp 7) Tìm $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ biết rằng $2a_1 = 3a_2; 2a_3 = 3a_4; 5a_4 = 2a_5; 2a_5 = 5a_6; 2a_6 = 3a_7; 2a_7 = 3a_1$ và

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 400.$$

PHẠM TRUNG KIÊN

(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ấn Thi, Hưng Yên)

Bài T3/429. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $x^2(x^2 + y^2) = y^{p+1}$, trong đó p là số nguyên tố.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, Bình Định)

Bài T4/429. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx - xyz$, trong đó x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

DƯƠNG VĂN SƠN

(GV THPT Hà Huy Tập, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T5/429. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có các góc $\widehat{BAC} = 70^\circ$ và $\widehat{ACB} = 50^\circ$. Trên (O) ta lấy năm điểm M, N, P, Q và R sao cho $PA = AB = BR, QB = BC = CM$ và $NC = CA = AN$. Gọi S là giao điểm của dây cung NQ và đường kính PP' của (O) . Chứng minh rằng $\triangle NRS \sim \triangle NQR$.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/429. Giải phương trình

$$x^3 - 3x = \sqrt{x+2}.$$

CAO MINH QUANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T7/429. Tính các góc của tam giác ABC sao cho biểu thức $T = -3 \tan \frac{C}{2} + 4(\sin^2 A - \sin^2 B)$ đạt giá trị lớn nhất.

PHẠM HOÀNG HÀ

(GV THPT chuyên Ngoại Ngữ, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/429. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau, $SA = a, SB = b, SC = c$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng ABC . Chứng minh rằng

$$aS_{HBC} + bS_{HAC} + cS_{HAB} \leq \frac{abc\sqrt{3}}{2}.$$

PHAN QUANG SƠN

(GV THPT Nam Khoái Châu, Hưng Yên)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/429. Cho p là số nguyên tố lẻ và hai số nguyên dương x, y thay đổi thỏa mãn $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2p}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/429. Tồn tại hay không hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$f(mf(n)) = n + f(2013m), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*?$$

NGUYỄN TRỌNG TUẤN

(GV PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/429. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $\max\{a, b, c\} \leq 4 \min\{a, b, c\}$.

Chứng minh rằng

$$2(a+b+c)(ab+bc+ca)^2 \geq 9abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).$$

DƯƠNG ĐỨC LÂM

(SV K59B Khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T12/429. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O ; I là tâm đường tròn nội tiếp. AI, BI, CI theo thứ tự cắt lại (O) tại A_1, B_1, C_1 . A_1C_1, A_1B_1 theo thứ tự cắt BC tại M, N . B_1A_1, B_1C_1 theo thứ tự cắt CA tại P, Q . C_1B_1, C_1A_1 theo thứ tự cắt AB tại R, S .

Chứng minh rằng $S_{MNPQRS} \leq \frac{2}{3} S_{A_1B_1C_1}$.

NGUYỄN MINH HÀ

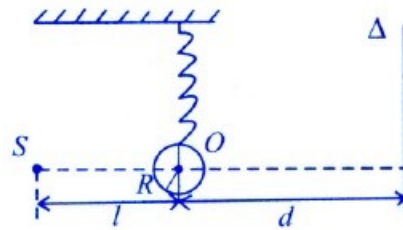
(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/429. Một con lắc lò xo có độ cứng k , được đặt thẳng đứng. Vật treo khối lượng m , có dạng hình cầu, bán kính R . Chọn gốc O tại vị trí cân bằng. Ở hai phía của vật, người ta đặt một nguồn sáng S và màn chắn Δ . Nguồn sáng tạo bóng của vật ở trên màn chắn. Cho biết S cách O một khoảng l ($l > R$), O cách Δ một khoảng d . Kích thích cho con lắc dao động điều hòa.

a) Tính độ dài bóng của vật theo li độ x .

b) Cho $k = 100 \text{ N/m}$, $m = 1 \text{ kg}$, $l = d = 3 \text{ cm}$, $R = 1 \text{ cm}$. Tại vị trí vật có vận tốc $v = 4\sqrt{10} \text{ cm/s}$ thì bóng có chiều dài $l_b = \frac{3\sqrt{17}}{2} \text{ cm}$. Tính biên độ dao động của vật.

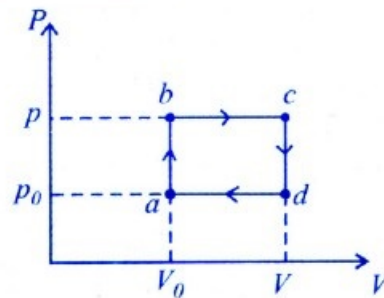


NGUYỄN HOÀI NAM

(GV THPT Dương Quang Hàm, Văn Giang, Hưng yên)

Bài L2/429. Một mol khí lí tưởng đơn nguyên tử được dùng làm chất công tác của một động cơ theo chu trình như hình vẽ. Giả thiết rằng $p = 2p_0$, $V = 2V_0$, $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $V_0 = 0,0225 \text{ m}^3$.

- Tính công thực hiện trong một chu trình.
- Xác định nhiệt lượng hệ nhận được trong một chu trình ứng với thời kì giãn abc .
- Tính hiệu suất của động cơ.
- Hiệu suất Carnot của một động cơ hoạt động giữa hai nhiệt độ cao nhất và thấp nhất của chu trình bằng bao nhiêu? So sánh nó với hiệu suất tính ở câu c.



NGUYỄN VĂN THUẬN

(GV ĐHSPT Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/429. (For 6th grade). Find an integer size square whose area is a 4-digit number such that the last rightmost three digits are identical.

T2/429. (For 7th grade) Determine the values of $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. Given that $2a_1 = 3a_2$; $2a_3 = 3a_4$; $5a_4 = 2a_5$; $2a_5 = 5a_6$; $2a_6 = 3a_7$; $2a_7 = 3a_1$ and $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 400$.

T3/429. Find all pairs of integers (x, y) such that $x^2(x^2 + y^2) = y^{p+1}$, where p is a prime number.

T4/429. Find the maximum and minimum values of the expression

$$P = xy + yz + zx - xyz,$$

where x, y, z are non-negative real numbers satisfying $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

(Xem tiếp trang 27)



★ **Bài T1/425.** Tìm các số tự nhiên N sao cho khi ta xóa đi vài chữ số cuối cùng của nó thì số N giảm đi 1997 lần.

Lời giải. Giả sử ta xóa đi k chữ số cuối cùng của N thì có thể viết $N = 10^k a + b$, trong đó số b có k chữ số. Theo giả thiết

$$10^k a + b = 1997a \quad (1)$$

Vì $a \geq 1$ nên từ (1) có $10^k a + b \geq 1997$, suy ra $k > 2$ (2). Từ (1) có $b = a(1997 - 10^k)$ nên $10^k < 1997$, suy ra $k \leq 3$. Kết hợp với (2) ta có $k = 3$. Lúc đó $b = 997a$, mà b có ba chữ số nên chỉ có thể $b = 997$, $a = 1$, suy ra $N = 1997$. □

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng và gọn:

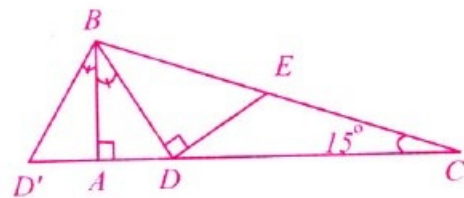
Phú Thọ: Nguyễn Phương Thảo A, Lê Nguyễn Quỳnh Trang, Nguyễn Dương Hoàng Anh, Nguyễn Thành Vinh, Lê Quang Huy, 6C, THCS Văn Lang, TP Việt Trì; Nguyễn Hải Dương, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thành Vinh, Nguyễn Vương Huy, Đỗ Minh Trung, Nguyễn Tường Vy, Nguyễn Ngọc Bảo Linh, Trần Thanh Huyền, Nguyễn Anh Dũng, 6A1, THPT Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; Nguyễn Trung Kiên, 6A5, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Lê Ngọc Sáng, 6E, THPT chuyên Hà Nội- Amsterdam; **Nghệ An:** Trần Phương Anh, Vương Trần Lực, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Hồ Huy Nhiên, Nguyễn Thị Hoài, Nguyễn Thị Triệu Vi, Nguyễn Lê Na, Phan Quang Linh, Đậu Thị Lan Anh, 6B; Phạm Quang Anh, Nguyễn Xuân Huỳnh, Phan Thị Trà Phương,

Nguyễn Thị Hương Mơ, Phan Minh Quang, Võ Thị Trà Giang, Võ Đức Thắng, Trần Lê Trà My, Lê Sĩ Hưng, Nguyễn Ngọc Quang Anh, Nguyễn Tiến Hoàng, Phạm Mai Thiên Thảo, Phan Thị Nhật Lệ, Nguyễn Trần Thảo Nhi, Bùi Thị Hà Trang, 6C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Bình Định:** Trần Cả Bảo, 6A1, THCS Phước Lộc, Tuy Phước.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/425.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ACB} = 15^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho đường thẳng qua D vuông góc với BD cắt cạnh BC tại E thỏa mãn $DE = 2DA$. Tính số đo góc ADB .

Lời giải. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua A .



• Nếu $\widehat{DBA} < 30^\circ$ thì $\widehat{DBD'} < 60^\circ$ (do tam giác BDD' cân tại B) và $\widehat{ADB} > 60^\circ > \widehat{DBD'}$ suy ra trong $\triangle BDD'$ có $BD' > DD'$ mà $BD' = BD$, $DD' = 2AD = DE$ nên $BD > DE$ (1). Mặt khác, $\widehat{C} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 75^\circ$, mà $\widehat{ABD} < 30^\circ$ nên $\widehat{DBE} > 45^\circ \Rightarrow \widehat{BED} < 45^\circ \Rightarrow BD < DE$, điều này mâu thuẫn với (1).

• Lập luận tương tự ta thấy không thể xảy ra trường hợp $\widehat{DBA} > 30^\circ$.

Vậy phải có $\widehat{DBA} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{ADB} = 60^\circ$. □

► **Nhận xét.** Bài toán có ít bạn tham gia giải, tất cả đều cho đáp số đúng, đó là các bạn sau đây (không kể các bạn lớp 8): **Phú Thọ:** Phạm Đức Duy, Nguyễn Nhật Thắng, Nguyễn Tiến Long, Lê Phương Dung, Dương Gia Huy, 7A1, THCS Lâm Thao; **Hải Phòng:** Lương Thế Trung, 7A1, THCS Hồng Bàng, Q. Hồng Bàng.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCD PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

★ **Bài T3/425.** Tìm số nguyên dương n để $[A]=4951$ với A là tổng của n số hạng sau

$$A = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(2 + \frac{2}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{3}{2^3}\right) + \dots + \left(n + \frac{n}{2^n}\right)$$

trong đó kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} A &= (1 + 2 + \dots + n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + B \text{ với } B = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}. \end{aligned}$$

Rõ ràng $B \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta cũng có

$$\begin{aligned} B &= 2B - B \\ &= \left(1 + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}. \end{aligned}$$

Đặt $C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$, suy ra

$$2C = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}.$$

$$\text{Do đó } C = 2C - C = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\text{Vậy } B = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2+n}{2^n} < 2.$$

Do đó $1 \leq B < 2 \Rightarrow [B]=1$. Vì với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}^*, \text{ nên } [A] = \frac{n(n+1)}{2} + [B]$$

$$\Leftrightarrow 4951 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \Leftrightarrow n(n+1) = 9900$$

$$\Leftrightarrow (n-99)(n+100) = 0 \Leftrightarrow n = 99 \text{ (do } n \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

Vậy $n = 99$ là giá trị cần tìm. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán hay về phần nguyên. Điểm mấu chốt của bài toán là rút gọn được biểu thức A , từ đó xác định được phần nguyên của A .

2) Các bạn tham gia giải bài này đều tìm đúng kết quả. Các bạn sau có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Hữu Huy, Nguyễn Thị Thém, Nguyễn Thị Tú Linh, Nguyễn Thị Tâm, 8A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Thuận, 8A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** Trần Phương Anh, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** Tạ Lê Ngọc Sáng, 6E, THPT chuyên Hà Nội- Amsterdam; **Hà Nam:** Lê Tuấn Anh, 8A; **Hoàng Đức Mạnh,** 9A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Phạm Quang Toàn, 8C, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Trà, 9D, THCS Liên Hương, Vũ Quang, Phan Thị Kim Tuyền, 8A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Hạ Vy, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/425.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}}{xy + yz + zx}$, trong đó x, y, z

là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Lời giải. Từ điều kiện $x + y + z = 3$ suy ra

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 4(xy + yz + zx) = 18 \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta có

$$2x^2 + 3\sqrt[3]{x} = x^2 + x^2 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} \geq 5x.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Tương tự ta cũng có $2y^2 + 3\sqrt[3]{y} \geq 5y, 2z^2 + 3\sqrt[3]{z} \geq 5z$.

Cộng theo về các bất đẳng thức trên được

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \geq 5(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \geq 18 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$3(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \geq 4(xy + yz + zx).$$

$$\text{Do đó ta có } P = \frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}}{xy + yz + zx} \geq \frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng $\frac{4}{3}$ đạt được khi

$$x = y = z = 1. \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Các lời giải mà Tòa soạn nhận được đều giải đúng. Các lời giải phần lớn sử dụng đặt ẩn phụ, biến đổi thêm bớt nhờ giả thiết $x + y + z = 3$, hoặc

đánh giá từ số và mẫu số để tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức cần tìm là $\frac{4}{3}$ như trên.

2) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Quản Đức Bình, Nguyễn Minh Dương, Nguyễn Tùng Dương, Trần Ngọc Đạt, Đinh Minh Hà, Trần Thị Hồng Ngọc Huyền, Quản Đức Mạnh, Nguyễn Quỳnh Trang, 8A1; Nguyễn Đức Thuận, 8A3; Nguyễn Thanh Quang, Nguyễn Huy Tuyển, 9A3, THCS Lâm Thao; Nguyễn Nhật Hạ, 9B, THCS Phong Châu, Thị xã Phú Thọ; Vĩnh Phúc:* *Hoàng Thị Lan, Kim Văn Thiện, 8A; Hoàng Thị Minh Anh, Nguyễn Thị Tú Linh, Nguyễn Thị Hương Ly, Nguyễn Thị Tâm, Nguyễn Thị Thêm, 8A1, THCS Yên Lạc; Lương Kim Hải, 9B, THCS Liên Bảo, Vĩnh Yên; Thanh Hóa:* *Nguyễn Hữu Hoàng, 8B, THCS Trần Phú, Nông Cống; Nghệ An:* *Lương Đình Ân, 8B, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên.*

TA NGỌC TRÍ

★ Bài T5/425. Giải phương trình

$$x^2 - 2x + 7 + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+\sqrt{1+8x}}.$$

Lời giải. Biến đổi phương trình đã cho thành

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 + \sqrt{x+3} &= 1 + 1 + 8x + 2\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+\sqrt{1+8x}} \\ \Leftrightarrow (x+3)^2 + \sqrt{x+3} &= (1+\sqrt{1+8x})^2 + \sqrt{1+\sqrt{1+8x}} \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x+3} = a$, $\sqrt{1+\sqrt{1+8x}} = b$ (với $a > 0, b > 0$). Khi đó PT (1) trở thành

$$\begin{aligned} a^4 + a &= b^4 + b \\ \Leftrightarrow a^4 - b^4 + a - b &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)((a+b)(a^2+b^2)+1) &= 0. \end{aligned}$$

Vì $a > 0, b > 0$ nên $(a+b)(a^2+b^2)+1 > 0$. Do đó $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$. Tức là

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= \sqrt{1+\sqrt{1+8x}} \\ \Leftrightarrow x+3 &= 1+\sqrt{1+8x} \Leftrightarrow x+2 = \sqrt{1+8x} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 1+8x = (x+2)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1; 3\}$. □

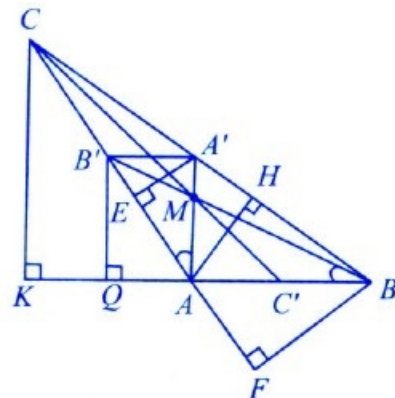
► **Nhận xét.** Bài này có nhiều bạn tham gia giải, đa số các bạn không đặt ẩn phụ nên trình bày dài dòng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt, trình bày sáng sủa: **Phú Thọ:** *Quản Đức Bình, 8A1, Nguyễn Thanh Quang, Trương Anh Tú, 9A3, THCS Lâm Thao; Hà Nam:* *Hoàng Đức Mạnh, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; Vĩnh Phúc:* *Nguyễn Thị Quỳnh Trang, 9A, THCS Lập Thạch, Hoàng Thị Lan, 8A, Nguyễn Thị*

Thêm, 8A1, THCS Yên Lạc; Nghệ An: *Nguyễn Văn Hòa, Trương Ngọc Hùng, 9C, THCS Lý Nhật Quang; Hà Tĩnh:* *Trần Đoàn Trang, 9C, Phan Thị Kim Tuyển, 8A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; Quảng Ngãi:* *Trần Thị Mỹ Ninh, 9A, THCS Nghĩa Mỹ; TP. Hồ Chí Minh:* *Nguyễn Bảo Trân, 8T1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; Vĩnh Long:* *Đoàn Hoàng Gia Bảo, 8/11, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vĩnh Long.*

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T6/425.** Cho tam giác ABC không cân. Kẻ các đường trung tuyến AA', BB', CC' ; các đường cao AH, BF và CK . Biết rằng $CK = BB'$, $BF = AA'$. Tìm tỉ số $\frac{CC'}{AH}$.

Lời giải



Không mất tính tổng quát giả sử rằng $1 = AB < AC < BC$. Gọi M là trọng tâm tam giác ABC ; kẻ $A'E \perp AC$, $B'Q \perp AB$. Khi

đó $A'E = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}AA'$, suy ra $\widehat{AA'E} = 30^\circ$.

Tương tự $\widehat{B'BA} = 30^\circ$. Để ý rằng $\widehat{A'B'M} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'AM} = 30^\circ$, ta thấy $\triangle B'A'M \sim \triangle AA'B'$,

dẫn đến $\frac{A'B'}{A'M} = \frac{AA'}{A'B'} \Rightarrow A'B'^2 = AA' \cdot A'M$,

hay $A'B'^2 = 3A'M^2$. Từ đó suy ra $\widehat{A'MB'} = 120^\circ$ hoặc $\widehat{A'MB'} = 60^\circ$ (theo định lý sin cho tam giác $A'MB'$).

• Nếu $\widehat{A'MB'} = 120^\circ$ thì tam giác $A'MB'$ cân tại M , tam giác AMB cân tại M , suy ra $AA' = BB'$, nên $AC = BC$, mâu thuẫn với giả thiết $AC < BC$. Khả năng này không xảy ra.

• Trong trường hợp $\widehat{A'MB'} = 60^\circ$, ta có $\widehat{B'A'A} = \widehat{A'AB} = 90^\circ$, $\widehat{B'BA} = 30^\circ$, tam giác BAB' cân tại A , nên $AB' = AB = 1$. Từ đó tìm

được $AC = 2AB = 2$; $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Áp dụng định lí cosin cho tam giác ACC' ta có

$$CC'^2 = AC^2 + AC'^2 - 2AC \cdot AC' \cdot \cos 120^\circ = \frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow CC' = \frac{\sqrt{21}}{2}. \text{ Xét tam giác vuông } AA'B'$$

$$\text{có } AA'^2 = AB'^2 - A'B'^2 = \frac{3}{4}. \text{ Mặt khác}$$

$$AH = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}. \text{ Do đó } \frac{CC'}{AH} = \frac{7}{2}. \square$$

► **Nhận xét.** Nhiều bạn giải tốt bài toán này. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Kiều Hoàng Anh, 11A1, THPT Quốc Oai; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hòa Bình:** Đặng Hữu Hiếu, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hải Phòng:** Lương Thế Sơn, 10 Toán, THPT chuyên Trần Phú; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Việt Hà, Nguyễn Trung Hiếu, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** Vũ Văn Dũng, 10 Toán 2, Nguyễn Hải Linh Chi, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Trần Trung Đức, 10 A6, THPT Đào Duy Từ, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** Lương Đình Ân, 8B, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, Nguyễn Thị Quỳnh Loan, 11 T1, THPT Đô Lương 1, Hồ Sỹ Thành, Nguyễn Đức Nguyên, Trần Trọng Tinh, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Chu Tự Tài, 12 A12, THPT Diễn Châu 2; **Quảng Ngãi:** Tống Thành Nguyên, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** Lê Nhật Thăng, 12 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T7/425.** Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 > \frac{3n-1}{3}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Chứng minh rằng khi đó a_i, a_j, a_k là độ dài ba cạnh của một tam giác, trong đó i, j, k là các số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $0 < i < j < k \leq n$.

Lời giải. Giả sử có ba số nào đó không là độ dài ba cạnh của một tam giác, chẳng hạn là a_1, a_2, a_3 và $a_1 + a_2 < a_3$ (1). Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai dãy, mỗi dãy có $n-2$ số thực:

$$\text{dãy thứ nhất: } \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, a_4, a_5, \dots, a_n;$$

dãy thứ hai: $\sqrt{\frac{8}{3}}$ và $n-3$ số 1. Ta có

$$\left(\sqrt{\frac{8}{3}}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + a_4 + a_5 + \dots + a_n \right)^2$$

$$\leq \left(\frac{8}{3} + n-3 \right) (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

$$\text{hay } \frac{3n-1}{3} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{8}{3}}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + a_4 + a_5 + \dots + a_n \right)^2.$$

Kết hợp với BĐT điều kiện suy ra

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{8}{3}}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + a_4 + a_5 + \dots + a_n \right)^2$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 > \sqrt{\frac{8}{3}}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

$$\Rightarrow 3(a_1 + a_2 + a_3)^2 > 8(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

$$\Rightarrow 5(a_1 + a_2 + a_3)^2 < 6(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) \quad (2)$$

Giả sử $a_3 = a_1 + a_2 + x$ với $x > 0$. Thay vào (2), ta được

$$5(a_1^2 + a_2^2 + (a_1 + a_2 + x)^2) < 6(a_1 a_2 + (a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + x)).$$

Rút gọn thành

$$4(a_1^2 + a_2^2) - 8a_1 a_2 + 5x^2 + 4x(a_1 + a_2) < 0$$

$$\Leftrightarrow 4(a_1 - a_2)^2 + 5x^2 + 4x(a_1 + a_2) < 0.$$

Bất đẳng thức không xảy ra (do biểu thức ở vế trái dương). Giả thiết (1) sai. Vậy a_i, a_j, a_k là độ dài ba cạnh của một tam giác, trong đó i, j, k là các số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $0 < i < j < k \leq n$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Đa số các bạn giải bài toán với $n = 3$, sau đó xét trường hợp tổng quát; hoặc sử dụng phương pháp quy nạp. Tuy nhiên làm như vậy dài và phức tạp. Bạn Nguyễn Trung Hiếu, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên đặt ra vấn đề: BĐT điều kiện có thể viết

$$\text{dưới dạng } (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 > \left(n - \frac{1}{3} \right) (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2);$$

mặt khác lại có $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$

Câu hỏi đặt ra là có thể thay $\frac{1}{3}$ bởi số $c > \frac{1}{3}$ sao cho kết luận của bài toán vẫn đúng. Các bạn hãy cùng kiểm tra và giải quyết vấn đề này nhé.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

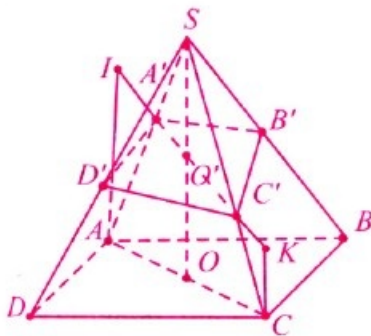
Nam Định: Trần Phúc Tài, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Nguyễn Hải Linh Chi, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Hà Tĩnh:** Phan Văn Trung, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Sơn, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** Lê Anh Tuấn, 10A1 K54, THPT chuyên ban Hà Nam.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T8/425.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có thể tích là V . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' thỏa mãn đẳng thức $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SD}{SD'} = 8$. Đặt thể tích của hình chóp $S.A'B'C'$ là V_1 và thể tích của hình chóp $S.A'C'D'$ là V_2 .

Chúng minh rằng $\frac{1}{\sqrt[3]{V_1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{V_2}} \leq \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{V}}$.

Lời giải (hình vẽ)



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$, và O' là giao điểm của SO với (P) . Xét tam giác SAC có SO là trung tuyến. Kẻ AI, CK song song với SO (I, K thuộc đường thẳng $A'C'$). Khi đó OO' là đường trung bình của hình thang $ACKI$, ta có

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{IA + SO'}{SO'} + \frac{CK + SO'}{SO'} = \frac{2SO}{SO'} \quad (1)$$

Tương tự, xét tam giác SBD , ta cũng có

$$\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{2SO}{SO'} \quad (2)$$

Từ (1), (2), kết hợp với giả thiết suy ra $\frac{SO}{SO'} = 2$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$$\sqrt[3]{\frac{V}{2V_1}} = \sqrt[3]{\frac{V_{S.ABC}}{V_1}} = \sqrt[3]{\frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} \right) \quad (3)$$

Tương tự ta có

$$\sqrt[3]{\frac{V}{2V_2}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SD}{SD'} \right) \quad (4)$$

Từ (3), (4) ta có

$$\sqrt[3]{\frac{V}{2V_1}} + \sqrt[3]{\frac{V}{2V_2}} \leq \frac{1}{3} \left(8 + \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} \right) = 4.$$

Do đó $\frac{1}{\sqrt[3]{V_1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{V_2}} \leq \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{V}}$. Đẳng thức xảy ra

khi và chỉ khi (P) đi qua trung điểm của SO và song song với mặt phẳng $(ABCD)$. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Thái Bình: Bùi Đình Hiếu, 12A1, THPT Quỳnh Côi; **Nguyễn Hải Linh Chi,** 11Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Phú Yên:** Bùi Lê Ngọc Min, 11S3, THPT Duy Tân; **Đồng Tháp:** Huỳnh Thanh Dư, 12L, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** Nguyễn Trung Hiếu, 12 Toán, THPT Chu Văn An; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 12 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Hải Dương:** Minh Thành Trung, 12 A, THPT Kim Thành; **Đắk Lắk:** Nguyễn Thanh Hải, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Hà Tĩnh:** Đặng Văn Phúc, 12 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** Lương Thị Mai Hương, 12A1, THPT chuyên ĐH Vinh.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T9/425.** Viết 2012^{2013} thành tổng của 2013 số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2013}$.

$$\text{Đặt } T = a_1^{13} + a_2^{13} + a_3^{13} + \dots + a_{2013}^{13}.$$

Chúng minh rằng $T + 2012^{2013}$ không là số chính phương.

Lời giải. (Theo bạn Trần Hồng Quân, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh)

Theo Định lí nhỏ Fermat ta có

$$a_i^{13} \equiv a_i \pmod{13} \quad (i = 1, 2, \dots, 13).$$

$$\text{Do đó } T = \sum_{i=1}^{13} a_i^{13} \equiv \sum_{i=1}^{13} a_i = 2012^{2013} \pmod{13}.$$

$$\text{Vậy } T + 2012^{2013} \equiv 2 \cdot 2012^{2013} \pmod{13}.$$

$$\text{Suy ra } 2012^3 \equiv 1000 \equiv -1 \pmod{13}$$

$$2012^{2013} = (2012^3)^{671} \equiv -1 \pmod{13}$$

$$2 \cdot 2012^{2013} = -2 \equiv 11 \pmod{13}.$$

Vậy $T + 2012^{2013} \equiv 11 \pmod{13}$. Vì một số chính phương khi chia cho 13 chỉ có dư là 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, nên $T + 2012^{2013}$ không thể là số chính phương. $\square$

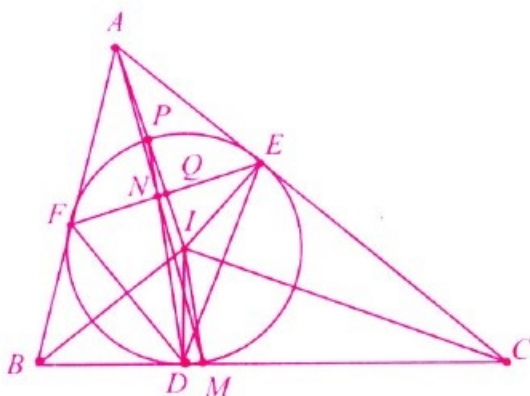
► **Nhận xét.** Bài này được khá đông các bạn tham gia giải và đều giải theo cách trên. Ngoài bạn *Quân* các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Quảng Bình: Đặng Ngọc Tuấn, 10T, THPT chuyên Quảng Bình; **Phú Thọ:** Nguyễn Đình Mậu, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Quảng Ngãi:** Phạm Đình Thuyền, 12T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Hưng Yên:** Trần Bá Trung, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** Vũ Văn Dũng, 10T2, THPT chuyên Thái Bình; **Đắk Lắk:** Nguyễn Thanh Hải, 12, THPT chuyên Nguyễn Du.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/425.** Cho tam giác ABC . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F . Gọi M là giao điểm của BC với đường phân giác trong góc BIC , N là giao điểm của EF với đường phân giác trong góc EDF . Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Lời giải. Bỏ qua trường hợp đơn giản $AB = AC$. Không mất tính tổng quát giả sử $AB > AC$. Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm của AI với (I) và EF (hình vẽ).



Để thấy ba điểm D, N, P thẳng hàng (1)
Ta thấy

$$\begin{aligned} \widehat{IMC} &= \widehat{MIB} + \widehat{MBI} = \frac{1}{2} \widehat{BIC} + \widehat{MBI} \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{IBC} - \widehat{ICB}) + \widehat{MBI} \\ &= \frac{1}{2} \left(180^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{ACB}}{2} \right) + \frac{\widehat{ABC}}{2} \\ &= 90^\circ + \frac{\widehat{ABC}}{4} - \frac{\widehat{ACB}}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{NDC} &= \widehat{NDE} + \widehat{EDC} = \frac{1}{2} \widehat{FDE} + \widehat{EDC} \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - (\widehat{90^\circ - \widehat{IBD}}) - (\widehat{90^\circ - \widehat{ICD}})) + (\widehat{90^\circ - \widehat{ICD}}) \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{FDB} - \widehat{EDC}) + \widehat{EDC} \\ &= 90^\circ + \frac{\widehat{IBD}}{2} - \frac{\widehat{ICD}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{ABC}}{4} - \frac{\widehat{ACB}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \widehat{IMC} = \widehat{NDC}. \text{ Do đó } IM \parallel ND \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } IM \parallel PN \quad (3)$$

Từ (3), chú ý rằng $ID = IP$, suy ra $\widehat{MID} = \widehat{IDP} = \widehat{QPN}$. Kết hợp với BC tiếp xúc với (I) , P là trung điểm của cung $\widehat{EF}$, ta có

$$\begin{aligned} \widehat{IDM} &= \widehat{PDM} - \widehat{IDP} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{PED} - \widehat{IDP} \\ &= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{PE} + \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{ED} - \widehat{IDP} \\ &= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{PF} + \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{ED} - \widehat{IDP} \\ &= \widehat{PNF} - \widehat{QPN} = \widehat{PQN}. \end{aligned}$$

Vậy các tam giác IDM, PQN đồng dạng. Do

$$\text{do } \frac{IM}{PN} = \frac{DI}{QP}. \text{ Kết hợp với } DI = IP, \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned} \frac{IM}{PN} &= \frac{IP}{QP}. \text{ Mặt khác, vì } \widehat{IEA} = 90^\circ, EQ \perp IP, \\ IE &= IP \text{ nên } IQ \cdot IA = IE^2 = IP^2. \text{ Do đó} \\ \frac{QP}{IP} &= 1 - \frac{IQ}{IP} = 1 - \frac{IP}{IA} = \frac{PA}{IA}. \text{ Suy ra } \frac{IP}{QP} = \frac{IA}{PA}. \end{aligned}$$

Vậy $\frac{IM}{PN} = \frac{PA}{IA}$ (4). Từ (3) và (4), theo định lí

Thales, suy ra A, M, N thẳng hàng. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Bài toán này không khó, nhiều bạn tham gia giải với nhiều cách giải khác nhau.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Hà Tĩnh: Phan Văn Trung, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** Trần Hoàng Khôi Nguyên, 11A1, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Thanh Hoá:** Trần Trung Đức, 10A6, THPT Đào Duy Từ; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Việt Hà, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** Nguyễn Hải Linh Chi, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; **Phú Yên:** Lê Nhật Thăng, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Bùi Lê Ngọc Min, 11S3, THPT Duy Tân; **Nam Định:** Trần Thị Quyên, 11T1, Vũ Thị Thanh Hiền, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nội:** Nguyễn Nhật Minh, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T11/425.** Với hai đa thức có hệ số nguyên $p(x)$ và $q(x)$, ta viết $p(x) \equiv q(x) \pmod{2}$ nếu $p(x) - q(x)$ là một đa thức có tất cả các hệ số đều chia hết cho 2.

Cho dãy đa thức $p_n(x)$ thỏa mãn $p_0(x) = p_2(x) = 1$ và $p_{n+2}(x) = p_{n+1}(x) + x \cdot p_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $p_{2^n}(x) \equiv 1 \pmod{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lời giải. Để cho gọn ta quy ước viết $p_n(x)$ là p_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} p_{n+4} &= p_{n+3} + x p_{n+2} = (p_{n+2} + x p_{n+1}) + x p_{n+2} \\ &= (x+1)p_{n+2} + x p_{n+1} = (x+1)p_{n+2} + x(p_{n+2} - x p_n) \\ &= (2x+1)p_{n+2} - x^2 p_n \\ &\equiv p_{n+2} + x^2 p_n \pmod{2} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}^*$ $p_{2^n} \equiv p_n^2 \pmod{2}$ (2)

Thật vậy với $n = 1$, $p_2 = p_1 = 1$, khẳng định (2) đúng.

Giả sử khẳng định (2) đã đúng với $n = 1, 2, 3, \dots, k$, ta chứng minh (2) cũng đúng với $n = k + 1$. Thật vậy từ (1) ta suy ra

$$\begin{aligned} p_{2k+2} &\equiv p_{2k} + x^2 p_{2k-2} \equiv p_k^2 + x^2 p_{k-1}^2 \quad (\text{theo giả thiết}) \\ &\equiv (p_k + x p_{k-1})^2 = p_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Như vậy khẳng định (2) đúng. Áp dụng ta có với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$p_{2^n} \equiv p_{2^{n-1}}^2 \equiv p_{2^{n-2}}^4 \equiv \dots \equiv p_1^{2^n} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Khẳng định của bài toán đã được chứng minh. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán số học - đa thức hay, mới lạ với nhiều bạn học sinh. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

Hòa Bình: Đặng Hữu Hiếu, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hưng Yên:** Nguyễn Long Duy, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** Vũ Văn Dũng, 10T2; **Nguyễn Hải Linh Chi, Trần Hồng Quân, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; Nghệ An:** Lê Kim Nhã, Nguyễn Văn Sơn, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Phan Văn Trung, 10 T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Phú Yên:** Lê Nhật Thăng, 12T, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T12/425.** Giả sử ABC là một tam giác nhọn. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos B \cos C}{\cos \frac{B-C}{2}} + \frac{\cos C \cos A}{\cos \frac{C-A}{2}} + \frac{\cos A \cos B}{\cos \frac{A-B}{2}} \leq \frac{3}{4}.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Vì tam giác ABC là một tam giác nhọn nên $\cos A > 0, \cos B > 0, \cos C > 0$. Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (AM-GM), ta được

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos B \cos C}{\cos \frac{B-C}{2}} &= \frac{4 \cos B \cos C}{\cos B + \cos C} \sin \frac{A}{2} \\ &\leq 2 \sqrt{\cos B \cos C} \sin \frac{A}{2} \leq \cos B \cos C + \sin^2 \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos C \cos A}{\cos \frac{C-A}{2}} &\leq \cos C \cos A + \sin^2 \frac{B}{2}; \\ \frac{2 \cos A \cos B}{\cos \frac{A-B}{2}} &\leq \cos A \cos B + \sin^2 \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Cộng các BĐT trên theo từng vế, ta thu được

$$2 \left(\frac{\cos B \cos C}{\cos \frac{B-C}{2}} + \frac{\cos C \cos A}{\cos \frac{C-A}{2}} + \frac{\cos A \cos B}{\cos \frac{A-B}{2}} \right) \leq \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A + \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \quad (*)$$

Sử dụng các kết quả $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$,

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{2} (3 - (\cos A + \cos B + \cos C))$$

và $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A$

$$\leq \frac{1}{3} (\cos A + \cos B + \cos C)^2, \text{ từ } (*) \text{ ta thu được}$$

$$2 \left(\frac{\cos B \cos C}{\cos \frac{B-C}{2}} + \frac{\cos C \cos A}{\cos \frac{C-A}{2}} + \frac{\cos A \cos B}{\cos \frac{A-B}{2}} \right) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$+ \frac{1}{2} (3 - (\cos A + \cos B + \cos C)) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{\cos B \cos C}{\cos \frac{B-C}{2}} + \frac{\cos C \cos A}{\cos \frac{C-A}{2}} + \frac{\cos A \cos B}{\cos \frac{A-B}{2}} \leq \frac{3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều. $\square$

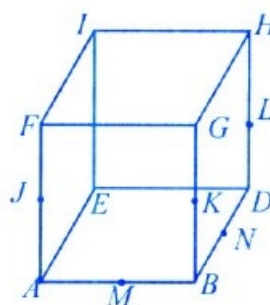
► **Nhận xét.** Đây là dạng toán cơ bản về BĐT lượng giác trong tam giác nên có nhiều bạn gửi lời giải đến Tòa soạn. Đa số các bạn đều giải theo cách trên, tức là dựa vào BĐT lượng giác cơ bản quen biết trong tam giác. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt, trình bày đẹp:

Hà Nội: Mai Phương Anh, 10A1 Tin, THPT chuyên KHTN; Kiều Hoàng Anh, 11A1, THPT Quốc Oai; **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Trần Phúc Tài, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Thùy Linh, 10A1, THPT chuyên Hà Tĩnh; Nguyễn Thị Thúy Nga, 10A1, THPT Hương Khê; **Nghệ An:** Hồ Thúy Nga, 11A2, THPT Thái Hòa; **Bình Định:** Trịnh Quang Huy, 10T, Huỳnh Mạnh Diên, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Long An:** Nguyễn Hữu Minh Nguyệt, 11T, THPT chuyên Long An; **Cà Mau:** Lưu Giang Nam, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Đắk Lắk:** Nguyễn Thanh Hải, 12CT, THPT chuyên Nguyễn Du.

NGUYỄN VĂN MẬU

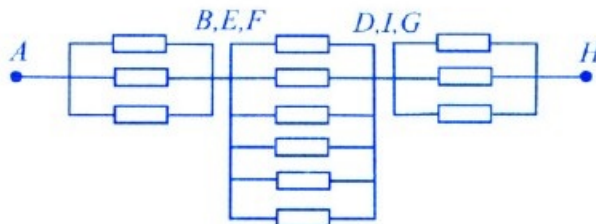
★ **Bài L1/425.** Một khung dây dẫn điện gồm các cạnh của một hình lập phương, mỗi cạnh có điện trở là $R = 12\Omega$. Gọi các điểm J, M, K, L, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AF, AB, GB, HD, BD (hình vẽ). Hãy tính điện trở của khung dây khi cho dòng điện vào và ra ở hai điểm sau :

- a) A và H ; b) A và D ; c) A và B ; d) J và L ; e) J và K ; f) M và N .



Lời giải. a) Khi dòng điện vào A ra H .

Chập các điểm có cùng điện thế: $B \equiv E \equiv F; D \equiv I \equiv G$ rồi vẽ lại mạch như hình vẽ. Dùng công thức tính điện trở của đoạn mạch song song và nối tiếp ta tính được $R_{AH} = 10\Omega$.



b) Khi dòng điện vào A ra D . Chập các điểm $B \equiv E \equiv I \equiv G$, bỏ qua được các điện trở IE và BG , vẽ lại mạch ta sẽ tính được $R_{AD} = 9\Omega$.

c) Khi dòng điện vào A ra B . Chập các điểm E và F ; G và D . Vẽ lại mạch ta sẽ tính được $R_{AB} = 7\Omega$.

d) Khi dòng điện vào J ra L . Chập các điểm A và F ; H và D ; I, G, E và B . Bỏ qua hai điện trở IE và GB . Vẽ lại mạch ta tính được $R_{JL} = 12\Omega$.

e) Khi dòng điện vào J ra K . Chập các điểm: F và A ; I và E ; H và D ; G và B . Bỏ qua hai điện trở IE và HD ta sẽ tính được $R_{JK} = 10,5\Omega$.

f) Khi dòng điện vào M và ra N . Chập các điểm B , E , I , và G . Bỏ qua các điện trở IE và GB , ta sẽ tính được $R_{MN} = 8,25\Omega$.

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Thanh Hóa: Lê Thị Quỳnh, 11C1, THPT Hoàng Hóa 4;
Nghệ An: Ngô Trí Tuấn, 11A1, THPT Quỳnh Hợp II, Nguyễn Xuân Cường, 11T1, THPT Anh Sơn 1; **Đồng Tháp:** Huỳnh Thanh Dư, 12L, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Tiền Giang:** Nguyễn Thế Dũng, 10Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/425.** Trên một sợi dây đàn hồi CB có sóng dừng, đầu B cố định. Xét dao động của một phần tử tại điểm M trên dây cách đầu cố định B một khoảng $MB = d$. Giả sử tại thời điểm t , sóng tới truyền đến B có phương trình $u_B = A\cos 2\pi ft$. Viết phương trình dao động của phần tử tại M khi có sóng tới và sóng phản xạ liên tục đi qua đó. Từ phương trình này nêu lên

a) Công thức xác định vị trí của bụng sóng và nút sóng theo khoảng cách d .

b) Nhận xét về pha dao động của các phần tử trên dây.

Lời giải. Phương trình dao động tại M do sóng tới từ C truyền đến là

$$u_{1M} = A\cos\left(2\pi ft + \frac{2\pi d}{\lambda}\right).$$

Sóng phản xạ tại B có phương trình

$$u_B = -A\cos(2\pi ft) = A\cos(2\pi ft - \pi).$$

Phương trình dao động tại M do sóng phản xạ từ B truyền đến là

$$u_{2M} = A\cos\left(2\pi ft - \frac{2\pi d}{\lambda} - \pi\right)$$

Dao động tại M là tổng hợp hai dao động do sóng tới và sóng phản xạ truyền đến

$$u_M = u_{1M} + u_{2M} = 2A\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2\pi ft - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

a) Từ (1) suy ra vị trí bụng sóng thỏa mãn điều kiện $2A\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow d = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$, với $k = 0, 1, 2, \dots$

Vị trí nút sóng thỏa mãn điều kiện

$$2A\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow d = \frac{k\lambda}{2},$$

với $k = 0, 1, 2, \dots$

b) Từ (1) ta thấy

* Các điểm thỏa mãn điều kiện

$$-1 \leq \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) < 0$$

$$\text{hay } k\lambda < d \leq \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (2)$$

(với $k = 0, 1, 2, \dots$) dao động cùng pha.

* Các điểm thỏa mãn điều kiện

$$0 < \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$$

$$\text{hay } \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \leq d < (k+1)\lambda.$$

(với $k = 0, 1, 2, \dots$) cũng dao động cùng pha, nhưng các điểm này dao động ngược pha với các điểm thỏa mãn (2).

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghệ An: Chu Tự Tài, 12A12, THPT Diễn Châu 2, Trần Văn Thế, 12A, THPT Quỳnh Hợp 1; **Thanh Hóa:** Lê Thị Quỳnh, 11C1, THPT Hoàng Hóa IV; **Thái Nguyên:** Tạ Văn Tuấn, Phạm Thanh Bình, 11A1, THPT Lương Phú.

NGUYỄN VĂN THUẬN

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Trên Tạp chí TH&TT số 428, tháng 2 năm 2013 xin được đọc lại câu b) đề bài T11/428 như sau

$$\text{b) } OD.OE.OF \leq \frac{1}{27} AB.BC.CA.$$

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

PROBLEMS...(Tiếp trang 17)

T5/429. Triangle ABC inscribed in circle (O) with $\widehat{BAC}=70^\circ$, $\widehat{ACB}=50^\circ$. The points M, N, P, Q and R on circle (O) are such that $PA=AB=BR$; $QB=BC=CM$ and $NC=CA=AN$. Let S be the intersection of arc NQ and the diameter PP' of (O) . Prove that $\triangle NRS \sim \triangle NQR$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/429. Solve the equation

$$x^3 - 3x = \sqrt{x+2}.$$

T7/429. Find the measure of the angles of a triangle ABC such that the expression $T = -3 \tan \frac{C}{2} + 4(\sin^2 A - \sin^2 B)$ is greatest possible.

T8/429. Let $S.ABC$ be a triangular pyramid where the sides SA, SB, SC are pairwise orthogonal, $SA=a, SB=b, SC=c$. H is the foot of the perpendicular from S onto ABC . Prove the inequality

$$aS_{HBC} + bS_{HAC} + cS_{HAB} \leq \frac{abc\sqrt{3}}{2}.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/429. Let p be an odd prime number. x, y are two positive integers such that

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2p}.$$

Find the minimum value of the following expression $A = \sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$.

T10/429. Does there exist a function $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ such that

$$f(mf(n)) = n + f(2013m), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*?$$

T11/429. The non-negative real numbers a, b, c are such that $\max\{a, b, c\} \leq 4 \min\{a, b, c\}$.

Prove the inequality

$$2(a+b+c)(ab+bc+ca)^2 \geq 9abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).$$

T12/429. Let ABC be a triangle inscribed in circle centered at O ; and let I be its incenter. AI, BI , and CI intersect (O) at A_1, B_1, C_1 ; A_1C_1, A_1B_1 meet BC at M, N ; B_1A_1, B_1C_1 meet CA at P, Q ; C_1B_1, C_1A_1 meet AB at R, S respectively. Prove that

$$S_{MNPQRS} \leq \frac{2}{3} S_{A_1B_1C_1}.$$

Translated by LE MINH HA

MỜI VIẾT BÀI CHO ĐẶC SAN

🌟 Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ trân trọng kính mời các thầy cô giáo, các bạn sinh viên các trường Đại học viết bài cho **ĐẶC SAN TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ** theo các chuyên mục: *Dành cho Trung học cơ sở, Giúp bạn ôn tập, Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT thi vào Đại học, Cao đẳng các môn Toán, Lí, Hóa, Thử sức trước kì thi, Phương pháp giải toán, Diễn đàn dạy - học toán, Nhiều cách giải cho một bài toán, Giải toán trên máy tính, Toán học vui, Toán học và đời sống, Dọn vườn Toán.*

Bài viết xin gửi về Tòa soạn. Nếu bài được đánh máy, xin gửi kèm file (chủ yếu theo phong chữ unicode hoặc Vntime). Ghi rõ họ tên, địa chỉ, số điện thoại liên lạc của tác giả.

Mọi liên hệ với Tòa soạn xin gửi về.

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

Email: toanhocvatuoi@vietnam@gmail.com

🌟 Đón đọc **ĐẶC SAN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ SỐ 6** (phát hành vào tháng 2/2013); **SỐ 7** (5/2013); **SỐ 8** (8/2013); **SỐ 9** (11/2013). Bạn đọc có thể đặt mua tại các Cơ sở Bưu điện trên cả nước theo **Mã số C.168.1**, các Công ty Sách và Thiết bị trường học ở địa phương.

TH&TT

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT

NĂM 2013 – MÔN TOÁN

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2013 đã được tổ chức trong các ngày 11, 12 và 13/01/2013, cho 12 môn học (ngày 13/01 là ngày thi thực hành cho các môn Vật lý, Hóa học và Sinh học). Tham dự kì thi, ở môn Toán có 431 học sinh (nhiều hơn 10 học sinh so với năm 2012) thuộc 67 đơn vị dự thi.

I. ĐỀ THI

Ngày thi thứ nhất (11/01/2013)

Bài 1 (5 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} = \sqrt{\frac{20y}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài 2 (5 điểm). Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi

$$a_1 = 1 \quad \text{và} \quad a_{n+1} = 3 - \frac{a_n + 2}{2^{a_n}} \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

Bài 3 (5 điểm). Cho tam giác không cân ABC . Ký hiệu (I) là đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB . Đường thẳng đi qua E và vuông góc với BI cắt (I) tại K ($K \neq E$), đường thẳng đi qua F và vuông góc với CI cắt (I) tại L ($L \neq F$). Gọi J là trung điểm của KL .

a) Chứng minh rằng D, I, J thẳng hàng.

b) Giả sử các đỉnh B và C cố định, đỉnh A thay đổi sao cho tỉ số $\frac{AB}{AC} = k$ (k không đổi).

Gọi M, N tương ứng là các giao điểm của IE, IF với (I) ($M \neq E, N \neq F$). MN cắt IB, IC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng trung trực của PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4 (5 điểm). Cho trước một số số tự nhiên được viết trên một đường thẳng. Ta thực hiện các bước điền số lên đường thẳng như sau: Tại mỗi bước, trước tiên xác định tất cả các cặp số kề nhau hiện có trên đường thẳng theo thứ tự từ trái qua phải, sau đó điền vào giữa mỗi cặp một số bằng tổng của hai số thuộc cặp đó. Hỏi sau 2013 bước, số 2013 xuất hiện bao nhiêu lần trên đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) Các số cho trước là 1 và 1000 ?

b) Các số cho trước là 1, 2, ..., 1000 và được xếp theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải ?

Ngày thi thứ hai (12/01/2013)

Bài 5 (7 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 2013$ và

$$\begin{aligned} (x - y)(f(f^2(x)) - f(f^2(y))) \\ = (f(x) - f(y))(f^2(x) - f^2(y)) \end{aligned}$$

đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, trong đó $f^2(x) = (f(x))^2$.

Bài 6 (7 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm D thuộc cung $\widehat{BC}$ không chứa điểm A . Đường thẳng Δ thay đổi đi qua trục tâm H của tam giác ABC cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH và tam giác ACH lần lượt tại M và N ($M \neq H, N \neq H$).

a) Xác định vị trí của đường thẳng Δ để diện tích tam giác AMN lớn nhất.

b) Ký hiệu d_1 là đường thẳng đi qua M và vuông góc với DB , d_2 là đường thẳng đi qua N và vuông góc với DC . Chứng minh rằng

giao điểm P của d_1 và d_2 luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài 7 (6 điểm). Tìm số các bộ sắp thứ tự (a, b, c, a', b', c') thỏa mãn

$$\begin{cases} ab + a'b' \equiv 1 \pmod{15} \\ ac + a'c' \equiv 1 \pmod{15} \\ bc + b'c' \equiv 1 \pmod{15} \end{cases}$$

với $a, b, c, a', b', c' \in \{0, 1, \dots, 14\}$.

II. GIẢI THƯỜNG

Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp Quốc gia hiện hành và kết quả chấm thi, theo đề nghị của Tổ chấm thi môn Toán và Hội đồng chấm thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2013, Lãnh đạo Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định trao giải cho **216** thí sinh (chiếm **50,11%** tổng số thí sinh), với mức điểm cho mỗi loại giải như sau:

- **Giải Nhất:** Từ **29** điểm đến **40** điểm;
- **Giải Nhì:** Từ **23** điểm đến **28.75** điểm;
- **Giải Ba:** Từ **19.50** điểm đến **22.75** điểm;
- **Giải Khuyến khích:** Từ **15** điểm đến **19.25** điểm.

Theo đó, có 4 thí sinh được trao Giải Nhất (Phạm Tuấn Huy, lớp 11 trường PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, 33 điểm; Đinh Lê Công, lớp 12 trường THPT chuyên ĐH Vinh, 30 điểm; Nguyễn Huy Dũng, lớp 12 trường THPT chuyên Lam Sơn, tỉnh Thanh Hóa, 30 điểm; Nguyễn Tú Anh, lớp 12 trường THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, TP. Hà Nội, 29 điểm), 40 thí sinh được trao Giải Nhì, 67 thí sinh được trao Giải Ba và 105 thí sinh được trao Giải Khuyến khích.

Dưới đây là danh sách các thí sinh được trao Giải Nhì và Giải Ba của kì thi.

• **Giải Nhì:** Lê Quang Bình (THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước); Trần Nguyễn Quốc Cường (THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng); Nguyễn Tấn Cường (THPT chuyên Nguyễn Du, tỉnh Đắk Lắk); Phạm Nguyễn Nhật Thanh (THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu, tỉnh Đồng Tháp); Trần Trí Kiên (THPT chuyên Biên Hòa, tỉnh Hà

Nam); Nguyễn Đăng Tuấn Anh, Lưu Nhật Nam, Nguyễn Văn Đỗ Tuấn (THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, TP. Hà Nội); Võ Anh Đức (THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh); Phùng Lâm Bình, Phạm Văn Hậu, Nguyễn Duy Hưng, Nguyễn Văn Hương, An Duy Mạnh, Nguyễn Đức Quý, Trần Xuân Thắng (THPT chuyên Nguyễn Trãi, tỉnh Hải Dương); Nguyễn Huy Tùng (THPT chuyên Trần Phú, TP. Hải Phòng); Phan Hồng Hạnh Trinh (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, tỉnh Kon Tum); Vũ Xuân Trường (THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định); Nguyễn Hoài Anh, Ngô Bảo Trung (THPT chuyên Phan Bội Châu, tỉnh Nghệ An); Vũ Hồng Sơn (THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh Phú Thọ); Lê Nhật Thăng (THPT chuyên Lương Văn Chánh, tỉnh Phú Yên); Nguyễn Đỗ Văn (THPT chuyên Lê Khiết, tỉnh Quảng Ngãi); Phạm Minh Hoàng (THPT chuyên Hạ Long, tỉnh Quảng Ninh); Trần Văn Thái, Nguyễn Huy Trung (THPT chuyên Thái Bình, tỉnh Thái Bình); Phạm Thế Dương (THPT chuyên Lam Sơn, tỉnh Thanh Hóa); Vũ Huy Quân (THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh); Hoàng Đỗ Kiên, Nguyễn Thế Tùng (THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc); Chu Tuấn Anh, Lương Tuấn Hiệp, Trần Đăng Phúc (THPT chuyên Tự nhiên, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội); Phạm Tấn Anh Quân, Cấn Trần Thành Trung (PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh); Phan Văn Tín (THPT chuyên ĐHSP Hà Nội); Bùi Quang Đông, Nguyễn Đăng Quang, Nguyễn Thế Tiến (THPT chuyên ĐH Vinh).

• **Giải Ba:** Nguyễn Bảo Lộc, La Văn Quân (THPT chuyên Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang); Vương Quốc Nghĩa (THPT chuyên Bạc Liêu, tỉnh Bạc Liêu); Trương Giang Khang (THPT chuyên Bắc Ninh, tỉnh Bắc Ninh); Lê Quang Minh (THPT chuyên Bến Tre, tỉnh Bến Tre); Nguyễn Đức Anh, Thiệu Hồng Thái (THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước); Lê Hoàng Minh (THPT chuyên Phan Ngọc Hiền, tỉnh Cà Mau); Vương Nguyễn Thùy Dương, Lê Trần Nhạc Long, Hoàng Cung Phúc, Trần Nguyễn Hoàng Phương, Đồng Đức Tài, Lê Võ Khánh Toàn (THPT chuyên Lê Quý Đôn,

TP. Đà Nẵng); Đặng Ngọc Sơn (THPT chuyên Lương Thế Vinh, tỉnh **Đồng Nai**); Nguyễn Thu Lan, Đinh Trọng Linh, Nguyễn Tùng Lâm (THPT chuyên Biên Hòa, tỉnh **Hà Nam**); Trần Minh Tuấn (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, **TP. Hà Nội**); Trần Đức Chính, Trần Quốc Dũng, Nguyễn Mậu Thành (THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh **Hà Tĩnh**); Nguyễn Anh Tuấn (THPT chuyên Nguyễn Trãi, tỉnh **Hải Dương**); Lê Việt Anh (THPT chuyên Trần Phú, **TP. Hải Phòng**); Đặng Hữu Hiếu (THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, tỉnh **Hòa Bình**); Đào Việt Anh, Dương Mạnh Cường, Lều Văn Duẩn, Hoàng Văn Duy, Nguyễn Thị Việt Hà, Nguyễn Trung Hiếu, Đỗ Thanh Tùng (THPT chuyên Hưng Yên, tỉnh **Hưng Yên**); Nguyễn Minh Toàn (THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh **Khánh Hòa**); Nguyễn Minh Bằng (THPT chuyên Chu Văn An, tỉnh **Lạng Sơn**); Bùi Ngọc Hiến, Lê Gia Tài, Phạm Minh Tuấn (THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh **Nam Định**); Dương Nữ Diệp Anh, Nguyễn Văn Bảo, Trần Mạnh Cường, Nguyễn Tiến Hoàng, Nguyễn Hiền Trang (THPT chuyên Phan Bội Châu, tỉnh **Nghệ An**); Nguyễn Trọng Đạt, Đinh Quốc Minh (THPT chuyên Lương Văn Tụy, tỉnh **Ninh Bình**); Phạm Minh Hoàng, Nguyễn Mạnh Hùng, Phan Quốc Hưng (THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh **Phú Thọ**); Nguyễn Văn Hữu (THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, tỉnh **Quảng Nam**); Phạm Việt Hoàng (THPT chuyên Lê Khiết, tỉnh **Quảng Ngãi**); Lê Quốc Tuấn (THPT chuyên Hạ Long, tỉnh **Quảng Ninh**); Hồ Phước Bảo, Lê Quốc Tùng (THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh **Quảng Trị**); Lê Duy Bình (THPT chuyên Hoàng Lê Kha, tỉnh **Tây Ninh**); Trần Xuân Đông, Trần Hồng Quân (THPT chuyên Thái Bình, tỉnh **Thái Bình**); Phạm Tiến Kha (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**); Phó Nghĩa Văn (THPT chuyên Trà Vinh, tỉnh **Trà Vinh**); Phùng Nhật Minh, Bùi Hồng Phương, Đặng Quang Tuấn (THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh **Vĩnh Phúc**); Đào Quang Đức, Nguyễn Thái Phúc (THPT chuyên Tự nhiên, ĐHKHTN - ĐHQG **Hà Nội**); Hồ Quốc Đăng Hưng (PTNK, ĐHQG **TP. Hồ Chí Minh**);

Hoàng Đức Anh, Nguyễn Trọng Bách, Lê Quang Thắng (THPT chuyên **ĐHSP Hà Nội**); Vương Nhật Quân (THPT chuyên **ĐH Vinh**).

Độc giả có thể xem danh sách tất cả thí sinh được trao giải tại trang tin điện tử của Bộ Giáo dục và Đào tạo (<http://www.moet.gov.vn>).

III. TUYỂN CHỌN HỌC SINH THAM DỰ KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THAM GIA TẬP HUẤN CHUẨN BỊ OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ 2013 (IMO 2013)

Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp Quốc gia hiện hành và kết quả kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT môn Toán, Bộ Giáo dục và Đào tạo quyết định triệu tập học sinh Trần Hoàng Bảo Linh (lớp 12 trường PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, thành viên đội tuyển học sinh Việt Nam dự thi IMO 2012) và 44 học sinh đạt từ 23 điểm trở lên trong kì thi vừa nêu tham dự kì thi chọn học sinh tham gia tập huấn chuẩn bị dự thi IMO 2013, dự kiến được tổ chức trong các ngày 05 và 06/4/2013 tại Thủ đô Hà Nội. Theo Quy chế, n thí sinh có điểm thi cao nhất trong kì thi này, với $6 \leq n \leq 9$, sẽ được triệu tập tham dự lớp tập huấn chuẩn bị dự thi IMO2013 do Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức (giá trị của n sẽ được xác định dựa trên kết quả chấm thi). Căn cứ kết quả học tập của n học sinh này trong quá trình tập huấn, Bộ Giáo dục và Đào tạo sẽ chọn 6 học sinh vào đội tuyển học sinh Việt Nam dự thi IMO 2013.

Dưới đây là danh sách các đơn vị có học sinh được triệu tập tham dự kì thi chọn học sinh tham gia tập huấn chuẩn bị dự thi IMO 2013:

Hải Dương (7 học sinh); Hà Nội, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, ĐH Vinh (mỗi đơn vị có 4 học sinh); ĐHQG Hà Nội (3 học sinh); Nghệ An, Thanh Hóa, Thái Bình, Vĩnh Phúc (mỗi đơn vị có 2 học sinh); Bình Phước, Đà Nẵng, Đắk Lắk, Đồng Tháp, Hà Nam, Hà Tĩnh, Hải Phòng, Kon Tum, Nam Định, Phú Thọ, Phú Yên, Quảng Ngãi, Quảng Ninh, TP. Hồ Chí Minh và ĐHSP Hà Nội (mỗi đơn vị có 1 học sinh).