



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

12 2012
SỐ 426

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 49

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



**CHÀO MỪNG
KỶ NIỆM
55 NĂM
THÀNH LẬP**

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



NHÌN BÀI TOÁN DƯỚI DẠNG HÌNH ĐỘNG

PHAN ĐÌNH ÁNH

(GV THCS Thạch Kim, Lộc Hà, Hà Tĩnh)

Gải được một bài toán là chúng ta đã tìm được một niềm vui, nhưng sẽ thật là đáng tiếc nếu chúng ta chỉ dừng lại ở kết quả của bài toán. Bởi đằng sau kết quả của mỗi bài toán còn chứa đựng bao điều thú vị. Chúng ta có thể khai thác bài toán bằng nhiều cách như: đặc biệt hoá, tổng quát hoá,... Ở đây, chúng tôi xin trao đổi với bạn đọc về một bài toán quen thuộc mà ta có thể nhìn nó ở nhiều góc độ khác nhau khi xét một điểm "động".

✪ **Bài toán xuất phát.** Xét hình bình hành $BEFP$ nội tiếp tam giác ABC ($E \in AB, F \in AC, P \in BC$). Đặt $S_{AEF} = a, S_{CFP} = b$.

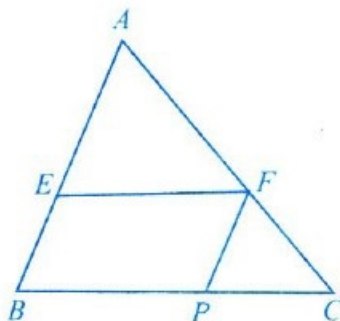
a) Tính S_{ABC} theo a và b .

b) Xác định vị trí điểm E trên AB , F trên AC sao cho diện tích của hình bình hành $BEFP$ lớn nhất.

c) Chứng minh rằng $S_{ABC} = \frac{AB}{AE} \cdot a + \frac{BC}{CP} \cdot b$.

Lời giải (h.1).

Trong bài này chúng ta sẽ sử dụng kết quả: Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.



Hình 1

a) Ta có $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ và $\triangle CFP \sim \triangle CAB$

$$\text{nên } \sqrt{\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}} = \frac{EF}{BC} = \frac{BP}{BC}; \quad \sqrt{\frac{S_{CFP}}{S_{ABC}}} = \frac{CP}{BC}.$$

$$\text{Từ đó } \sqrt{\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}} + \sqrt{\frac{S_{CFP}}{S_{ABC}}} = 1, \text{ hay } S_{ABC} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

b) Ta thấy

$$S_{BEFP} = S_{ABC} - S_{AEF} - S_{FCP} = 2\sqrt{ab}.$$

Mặt khác vì $2\sqrt{ab} \leq a + b$ nên

$$4\sqrt{ab} \leq a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

$$\text{Từ đó } 2 \cdot S_{BEFP} \leq S_{ABC} \Leftrightarrow S_{BEFP} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Vậy $\max S_{BEFP} = \frac{1}{2} S_{ABC} \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow F$ là trung điểm của AC , E là trung điểm của AB .

c) Từ kết quả $S_{ABC} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ ta có

$$\sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow S_{ABC} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{a}} \cdot a + \sqrt{\frac{S_{ABC}}{b}} \cdot b$$

$$\Leftrightarrow S_{ABC} = \frac{AB}{AE} \cdot a + \frac{BC}{CP} \cdot b \text{ (đpcm). } \square$$

Nếu điểm F không thuộc đoạn thẳng AC , chẳng hạn F thuộc tia đối của tia CA thì kết quả sẽ thay đổi như thế nào?

✪ **Bài toán 1.** Cho tam giác ABC . Điểm F thuộc tia đối của tia CA . Kẻ $FE \parallel BC$; $FP \parallel AB$ ($E \in AB; P \in BC$). Đặt $S_{AEF} = a$, $S_{FCP} = b$.

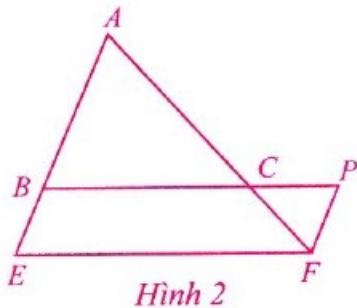
a) Tính S_{ABC} và S_{BEFP} theo a và b .

b) Chứng minh rằng $S_{ABC} = \frac{AB}{AE} \cdot a - \frac{BC}{CP} \cdot b$.

Lời giải (h. 2).

a) Ta nhận thấy $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ và $\triangle FPC \sim \triangle ABC$.

$$\text{Từ đó } \sqrt{\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}} = \frac{EF}{BC}; \quad \sqrt{\frac{S_{FCP}}{S_{ABC}}} = \frac{CP}{BC}.$$



Hình 2

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}} - \sqrt{\frac{S_{FPC}}{S_{ABC}}} = \frac{EF - PC}{BC} = 1.$$

$$\text{Hay } S_{ABC} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{BEFP} &= S_{AEF} + S_{FPC} - S_{ABC} \\ &= a + b - (a + b - 2\sqrt{ab}) \Rightarrow S_{BEFP} = 2\sqrt{ab}. \end{aligned}$$

b) Từ kết quả $S_{ABC} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ ta có

$$\sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \Leftrightarrow S_{ABC} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{a}} \cdot a - \sqrt{\frac{S_{ABC}}{b}} \cdot b$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{AB}{AE} \cdot a - \frac{BC}{PC} \cdot b \text{ (đpcm)} \quad \square$$

Nếu điểm F nằm trong tam giác ABC thì kết quả sẽ thay đổi như thế nào?

★ **Bài toán 2.** Cho tam giác ABC. Điểm F nằm trong tam giác ABC. Qua F kẻ MN // BC; PQ // AB; IK // AC (I, M ∈ AB; P, N ∈ AC; Q, K ∈ BC). Đặt $S_{FQK} = a$; $S_{PFN} = b$; $S_{IMF} = c$.

a) Tính S_{ABC} và S_{BEFP} theo a, b và c.

b) Xác định vị trí của điểm F để tổng $T = S_{APFI} + S_{MBQF} + S_{NCKF}$ lớn nhất.

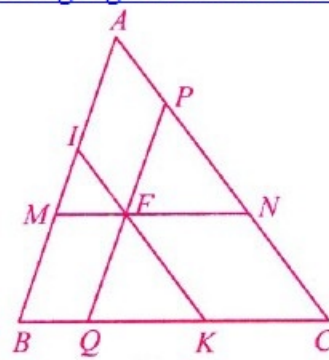
c) Chứng minh rằng

$$S_{ABC} = \frac{AB}{FQ} \cdot a + \frac{BC}{FN} \cdot b + \frac{AC}{FI} \cdot c.$$

Lời giải (h. 3).

a) Dễ thấy $\Delta FQK \sim \Delta ABC$, $\Delta PFN \sim \Delta ABC$ và $\Delta IMF \sim \Delta ABC$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{S_{FQK}}{S_{ABC}}} + \sqrt{\frac{S_{PFN}}{S_{ABC}}} + \sqrt{\frac{S_{IMF}}{S_{ABC}}} = \frac{QK}{BC} + \frac{FN}{BC} + \frac{MF}{BC}$$



Hình 3

$$= \frac{QK}{BC} + \frac{KC}{BC} + \frac{BQ}{BC} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{S_{FQK}} + \sqrt{S_{PFN}} + \sqrt{S_{IMF}} = \sqrt{S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = (\sqrt{S_{FQK}} + \sqrt{S_{PFN}} + \sqrt{S_{IMF}})^2.$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = (a + b + c)^2.$$

b) Ta có $S_{APFI} + S_{MBQF} + S_{NCKF} = S_{ABC} - (a + b + c)$

$$= (a + b + c)^2 - (a + b + c)$$

$$= 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} \leq 2(a + b + c).$$

Từ đó $3 \cdot (S_{APFI} + S_{MBQF} + S_{NCKF})$

$$\leq 2(a + b + c) + 2 \cdot (S_{APFI} + S_{MBQF} + S_{NCKF}) = 2S_{ABC}.$$

$$\text{Vậy } S_{APFI} + S_{MBQF} + S_{NCKF} \leq \frac{2}{3} S_{ABC}.$$

Do đó $\max T = \frac{2}{3} S_{ABC} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow F$ là trọng tâm tam giác ABC.

c) Ta có

$$S_{ABC} = (\sqrt{S_{FQK}} + \sqrt{S_{PFN}} + \sqrt{S_{IMF}})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_{FQK}} + \sqrt{S_{PFN}} + \sqrt{S_{IMF}}$$

$$\Leftrightarrow S_{ABC} = \sqrt{S_{FQK}} \cdot \sqrt{S_{ABC}} + \sqrt{S_{PFN}} \cdot \sqrt{S_{ABC}} + \sqrt{S_{IMF}} \cdot \sqrt{S_{ABC}}$$

$$\Leftrightarrow S_{ABC} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{FQK}}} \cdot S_{FQK} + \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{PFN}}} \cdot S_{PFN} + \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{IMF}}} \cdot S_{IMF}$$

$$\Leftrightarrow S_{ABC} = \frac{AB}{FQ} \cdot a + \frac{BC}{FN} \cdot b + \frac{AC}{FI} \cdot c. \quad \square$$

Ta tiếp tục thay đổi vị trí điểm F. Chẳng hạn cho điểm F ở ngoài tam giác ABC và thuộc góc BAC. Thế thì chúng ta có

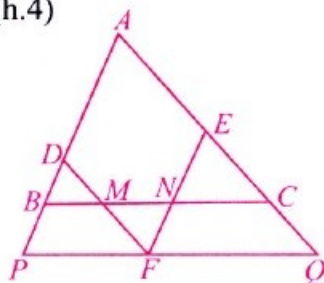
✪ **Bài toán 3.** Cho tam giác ABC . Điểm F thuộc góc BAC và nằm ngoài tam giác ABC . Qua F kẻ $PQ \parallel BC$, $EN \parallel AB$, $MD \parallel AC$ ($D, P \in AB$; $E, Q \in AC$; $M, N \in BC$)

Đặt $S_{FNM} = a$; $S_{DPF} = b$; $S_{EFQ} = c$.

a) Tính S_{ABC} theo a, b và c .

b) Chứng minh rằng $S_{ABC} = \frac{AB}{PD} \cdot b + \frac{AC}{EQ} \cdot c - \frac{BC}{MN} \cdot a$.

Lời giải. (h.4)



Hình 4

a) Dễ thấy $\triangle FNM \sim \triangle ABC$; $\triangle DPF \sim \triangle ABC$ và $\triangle EFQ \sim \triangle ABC$ nên

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{S_{DPF}}{S_{ABC}}} + \sqrt{\frac{S_{EFQ}}{S_{ABC}}} - \sqrt{\frac{S_{FNM}}{S_{ABC}}} \\ &= \frac{PF}{BC} + \frac{FQ}{BC} - \frac{MN}{BC} \\ &= \frac{MN + BM}{BC} + \frac{MN + NC}{BC} - \frac{MN}{BC} = 1. \end{aligned}$$

Suy ra $\sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_{DPF}} + \sqrt{S_{EFQ}} - \sqrt{S_{FNM}}$.

Hay $S_{ABC} = (\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})^2$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= (\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \Leftrightarrow \sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a} \\ \Leftrightarrow S_{ABC} &= \sqrt{S_{ABC}} \cdot (\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}) \\ &= \sqrt{\frac{S_{ABC}}{b}} \cdot b + \sqrt{\frac{S_{ABC}}{c}} \cdot c - \sqrt{\frac{S_{ABC}}{a}} \cdot a \\ &= \frac{AB}{PD} \cdot b + \frac{AC}{EQ} \cdot c - \frac{BC}{MN} \cdot a \end{aligned}$$

Vậy $S_{ABC} = \frac{AB}{PD} \cdot b + \frac{AC}{EQ} \cdot c - \frac{BC}{MN} \cdot a$ □

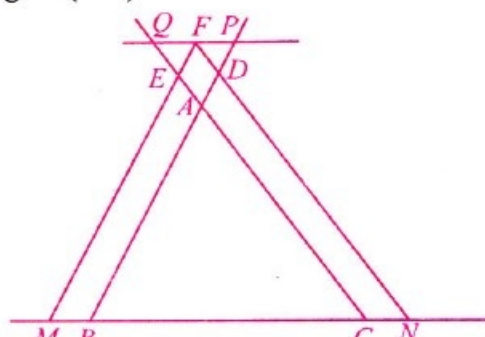
Nếu điểm F thuộc góc đối đỉnh với góc BAC thì ta được kết quả thế nào?

✪ **Bài toán 4.** Cho tam giác ABC . Điểm F thuộc góc đối đỉnh với góc BAC và nằm ngoài tam giác ABC . Qua F kẻ $PQ \parallel BC$; $EM \parallel AB$; $DN \parallel AC$ ($D, P \in AB$; $E, Q \in AC$; $M, N \in BC$).

Đặt $S_{FMN} = a$, $S_{DPF} = b$, $S_{EFQ} = c$.

Chứng minh rằng $S_{ABC} = \frac{AB}{PD} \cdot a - \frac{AC}{EQ} \cdot b - \frac{BC}{MN} \cdot c$.

Lời giải (h. 5)



Hình 5

Làm tương tự Bài toán 3 ta có kết quả

$S_{ABC} = (\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c})^2$. Từ đó suy ra

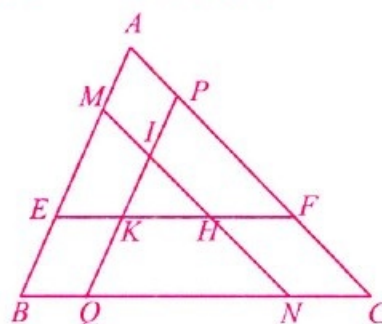
$$S_{ABC} = \frac{AB}{PD} \cdot a - \frac{AC}{EQ} \cdot b - \frac{BC}{MN} \cdot c. \quad \square$$

Trở lại Bài toán 3. Nếu MN, PQ, IK không đồng quy tại F mà đôi một cắt nhau. Thế thì chúng ta có bài toán sau.

✪ **Bài toán 5.** Cho hình 6 dưới đây. Biết $MN \parallel AC$, $PQ \parallel AB$, $EF \parallel BC$. Đặt

$S_{IKH} = S_0$, $S_{MEH} = S_1$, $S_{PKF} = S_2$, $S_{IQN} = S_3$.

Tính S_{ABC} theo S_0, S_1, S_2, S_3 .



Hình 6

(Xem tiếp trang 27)

Một ứng dụng của PHÉP CHIA ĐA THỨC

PHẠM THANH NGÀ

(GV THCS Ngô Gia Tự, TP. Hải Dương)

Phép chia đa thức có nhiều ứng dụng. Trong bài viết này chúng ta cùng tìm hiểu một ứng dụng của nó vào bài toán tính giá trị của biểu thức thông qua một số thí dụ cụ thể.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1) Khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$ được đa thức thương $q(x)$ và đa thức dư $r(x)$ thì $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ với bậc $r(x) <$ bậc $g(x)$.

Đặc biệt, khi $g(x) = 0$ thì $f(x) = r(x)$.

2) Nếu đa thức $f(x)$ nhận các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ làm nghiệm thì $f(x)$ chia hết cho đa thức $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$.

II. MỘT SỐ THÍ DỤ

★ **Thí dụ 1.** (Đề thi vào lớp 10 THPT Hải Dương 2004 - 2005)

Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x^5 - 4x^3 - 3x + 9}{x^4 + 3x^2 + 11} \text{ với } \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{4}.$$

Lời giải. Ta có $\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0,$$

suy ra $x \neq 0$.

Thực hiện phép chia đa thức $x^5 - 4x^3 - 3x + 9$ cho $x^2 - 3x + 1$ ta được thương là

$x^3 + 3x^2 + 4x + 9$ và dư $20x$ nên

$$\begin{aligned} & x^5 - 4x^3 - 3x + 9 \\ &= (x^3 + 3x^2 + 4x + 9)(x^2 - 3x + 1) + 20x \\ &= 20x \text{ (do } x^2 - 3x + 1 = 0). \end{aligned}$$

Tiếp tục thực hiện phép chia đa thức

$x^4 + 3x^2 + 11$ cho $x^2 - 3x + 1$ ta được thương là $x^2 + 3x + 11$ dư $30x$, nên

$$\begin{aligned} & x^4 + 3x^2 + 11 \\ &= (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 11) + 30x \\ &= 30x \text{ (do } x^2 - 3x + 1 = 0). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{20x}{30x} = \frac{2}{3} \text{ (do } x \neq 0). \quad \square$$

★ **Thí dụ 2.** (Đề thi vào lớp 10 THPT Hải Dương 2008-2009)

Cho biểu thức

$$B = (4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2)^2 + 2008.$$

$$\text{Tính giá trị của } B \text{ khi } x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}.$$

Lời giải. Ta có

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

$$\text{Dẫn đến } 2x + 1 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Thực hiện phép chia đa thức $4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2$ cho $4x^2 + 4x - 1$ ta được thương là $x^3 - x + 1$ và dư -1 , nên

$$\begin{aligned} & 4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2 \\ &= (4x^2 + 4x - 1)(x^3 - x + 1) + (-1) \\ &= -1 \text{ (do } 4x^2 + 4x - 1 = 0). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } B = (-1)^2 + 2008 = 2009. \quad \square$$

★ **Thí dụ 3.** Cho x là số thực thỏa mãn

$$x^3 - x^2 + x - 2 = 0.$$

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{x^6 + x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 - x + 2} < 2.$$

Lời giải. Thực hiện phép chia đa thức

$x^6 + x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3$ cho $x^3 - x^2 + x - 2$ ta được thương là $x^3 + x^2 + x - 3$ và dư $5x - 3$ nên

$$\begin{aligned} & x^6 + x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3 \\ &= (x^3 - x^2 + x - 2)(x^3 + x^2 + x - 3) + 5x - 3 \\ &= 5x - 3 \text{ (do } x^3 - x^2 + x - 2 = 0). \end{aligned}$$

Bài toán đưa về chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{5x-3}{x^2-x+2} < 2 \quad (*)$$

Do $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$(*) \Leftrightarrow 5x - 3 < 2x^2 - 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 7 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{7}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0 \text{ luôn đúng } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy BĐT (*) luôn đúng, suy ra đpcm. $\square$

★ **Thí dụ 4.** Cho $f(x)$ là một đa thức bậc

2012, thỏa mãn điều kiện $f(n) = \frac{n}{n+1}$ với

$n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2012$. Tính $f(2013)$.

Lời giải. Đặt $g(x) = (x+1)f(x) - x$ (1)

thì $g(x)$ là đa thức bậc 2013 và nhận các số 0, 1, 2, 3, ..., 2012 làm các nghiệm của nó. Do đó $g(x) : x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2012)$.

Vì đa thức $x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2012)$ có bậc 2013 nên

$$g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2012), a \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) có } g(-1) = (-1+1)f(-1) + 1 = 1.$$

Từ (2) có

$$g(-1) = a \cdot (-1)(-2)(-3)(-4)\dots(-2013) = -a \cdot (2013!).$$

$$\text{Suy ra } 1 = -a \cdot (2013!) \Rightarrow a = \frac{-1}{2013!}.$$

$$\text{Từ (2) có } g(2013) = \frac{-1}{2013!} \cdot (2013!) = -1.$$

$$\text{Từ (1) có } g(2013) = 2014f(2013) - 2013.$$

$$\text{Do đó } 2014f(2013) - 2013 = -1$$

$$\Leftrightarrow f(2013) = \frac{2012}{2014}. \text{ Vậy } f(2013) = \frac{1006}{1007}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 5.** Cho u là nghiệm của đa thức

$x^3 - x - 1$. Hãy tìm các số hữu tỉ a, b, c sao

$$\text{cho } \frac{1}{u^2 + u + 1} = au^2 + bu + c.$$

Lời giải. Do u là nghiệm của đa thức $x^3 - x - 1$ nên $u^3 - u - 1 = 0 \Rightarrow u \neq 1$ và $u \neq 0$.

Thực hiện phép chia đa thức $u^3 - u - 1$ cho $u^2 + u + 1$ được thương $u - 1$ và dư $-u$, nên

$$u^3 - u - 1 = (u^2 + u + 1)(u - 1) - u$$

$$\Rightarrow (u^2 + u + 1)(u - 1) = u \quad (\text{do } u^3 - u - 1 = 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u^2 + u + 1} = \frac{u - 1}{u}.$$

$$\text{Lại có } u^3 - u - 1 = 0 \Rightarrow u - 1 = -u^3 + 2u.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{u^2 + u + 1} = \frac{-u^3 + 2u}{u} = -u^2 + 2.$$

Vậy $a = -1; b = 0; c = 2$ là các số hữu tỉ thỏa

$$\text{mãn } \frac{1}{u^2 + u + 1} = au^2 + bu + c. \quad \square$$

BÀI TẬP

1. Cho $\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{5}$. Tính giá trị của biểu

$$\text{thức } C = \frac{x^5 - 3x^4 - 16x^3 - 5x^2 + 63x - 2}{2x^4 - 15x^3 + 21x^2 + 61x + 1}.$$

2. Cho $x = \sqrt{3} - 1$ Tính giá trị của biểu thức

$$D = (x^5 + x^4 - 7x^3 - 4x^2 - 9x - 8)^2 + 2012.$$

3. Cho u là nghiệm của đa thức $x^3 - x + 1$.

a) Tìm đa thức với hệ số hữu tỉ nhận

i) u^2 là nghiệm;

ii) $u^2 - u + 1$ là nghiệm;

iii) $u^4 + 1$ là nghiệm.

b) Hãy biểu diễn $\frac{1}{u^2}; \frac{1}{u^2 - u + 1}; \frac{1}{u^4 + 1}$ dưới

dạng $au^2 + bu + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ.

4. Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } S = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^6.$$

5. Cho $f(x)$ là một đa thức bậc 2000 thỏa mãn

$$f(n) = \frac{1}{n} \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots, 2001.$$

Tính $f(2002)$.

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm 2002).

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2012-2013

VÒNG 1

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu I. (2 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(m-3)x - 2(m-1) = 0$
(m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \in \mathbb{R}$.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Hãy tìm các giá trị của m để

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2.$$

Câu II. (1 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ (P) và

hàm số $y = x - \frac{1}{2}$ (D).

a) Vẽ (P) và (D) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Chứng tỏ rằng (P) và (D) tiếp xúc nhau tại một điểm M. Tìm tọa độ của M.

Câu III. (3 điểm)

a) Rút gọn biểu thức

$$M = \left(\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right) : (x - y) - \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

với $x > 0; y > 0; x \neq y$.

b) Người ta làm một vườn hoa gồm hai hình tròn tâm A và B tiếp xúc ngoài với nhau. Biết

$AB = 5m$ và diện tích vườn hoa là $13,48\pi m^2$.
Tính bán kính của mỗi hình tròn.

c) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y-2} + \frac{x+2y+4}{x+2y} = 3 \\ \frac{x+y}{x+y-2} - \frac{8}{x+2y} = 1. \end{cases}$$

Câu IV. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), có đường cao AH và O là trung điểm của BC. Đường tròn tâm I đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M và N.

1) Chứng minh rằng

a) $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

b) Tứ giác BMNC nội tiếp.

2) Gọi D là giao điểm của OA và MN. Chứng minh rằng

a) Tứ giác ODIH nội tiếp.

b) $\frac{1}{AD} = \frac{1}{HB} + \frac{1}{HC}$.

3) Gọi P là giao điểm của đường thẳng MN và đường thẳng BC. Đường thẳng AP cắt đường tròn đường kính AH tại điểm K (khác A). Tính số đo góc BKC.

4) Cho $AB = 6, AC = 8$. Hãy tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN.

VÒNG 2

(Dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán)

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu I. (2 điểm)

1) Giải phương trình $(x-1)^2 = 2 - x\sqrt{x - \frac{1}{x}}$.

2) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^3 - 3a^2 + 8a = 9$ và $b^3 - 6b^2 + 17b = 15$.

Tính $a + b$.

Câu II. (2 điểm)

1) Cho m, n là hai số nguyên. Chứng minh rằng nếu $5(m+n)^2 + mn$ chia hết cho 441 thì mn cũng chia hết cho 441.

2) Hãy tìm tất cả các dãy số tự nhiên liên tiếp có tổng bằng 180.

(Xem tiếp trang 8)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Đề thi đã đăng trên TH&TT số 425, tháng 11 năm 2012)

Câu 1. Từ ĐK bài ra ta có

$$a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2; \quad b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$$

$$c^2 = x^2 y^2 + \frac{1}{x^2 y^2} + 2.$$

$$abc = x^2 y^2 + \frac{1}{x^2 y^2} + 2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \\ = c^2 + a^2 + b^2 - 4.$$

Vậy $A = a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$ không phụ thuộc vào x, y .

Câu 2. Biến đổi PT đã cho về dạng

$$(x^2 - 7x + 6)(x^2 - 5x + 6) = mx^2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x} - 7\right) \left(x + \frac{6}{x} - 5\right) = m$$

(Vì $x = 0$ không phải là nghiệm).

Đặt $t = x + \frac{6}{x}$, PT trở thành

$$t^2 - 12t + 35 - m = 0 \quad (2)$$

Giả sử (1) có 4 nghiệm khác 0 là x_1, x_2, x_3, x_4 thì (2) phải có hai nghiệm t_1, t_2 . Không mất tính tổng quát, giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của

PT $x + \frac{6}{x} = t_1 \Leftrightarrow x^2 - t_1 x + 6 = 0$; còn x_3, x_4 là hai nghiệm của PT $x^2 - t_2 x + 6 = 0$.

$$\text{Theo định lí Viète ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 \cdot x_2 = x_3 \cdot x_4 = 6 \\ x_3 + x_4 = t_2 \\ t_1 + t_2 = 12. \end{cases}$$

Khi đó

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_3 + x_4}{x_3 x_4} \\ = \frac{t_1 + t_2}{6} = 2$$

không phụ thuộc vào m .

Câu 3. Giả sử tồn tại số n nguyên dương sao

cho $\frac{n(2n-1)}{26}$ là số chính phương, suy ra

$$n(2n-1) = 26k^2 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n \text{ chẵn.}$$

Đặt $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Suy ra $m(4m-1) = 13k^2$.

Xây ra hai trường hợp

$$\text{Trường hợp 1 } \begin{cases} m = 13q^2 \\ 4m-1 = p^2 \end{cases} \quad (p, q \in \mathbb{N}).$$

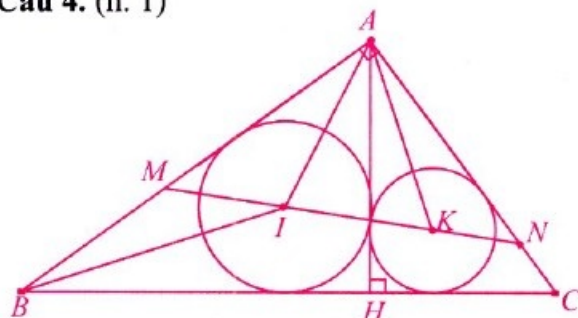
Suy ra p^2 chia cho 4 dư 3, điều này mâu thuẫn, vì bình phương của một số nguyên khi chia cho 4 dư 0 hoặc 1.

$$\text{Trường hợp 2 } \begin{cases} m^2 = q^2 \\ 4m-1 = 13p^2 \end{cases} \quad (p, q \in \mathbb{N}).$$

Suy ra p là số nguyên lẻ, do đó $p = 2a+1$ ($a \in \mathbb{N}$), dẫn đến $2(m - 13a^2 + 13a) = 7$, điều này mâu thuẫn, vì vế trái lẻ còn vế phải chẵn. Vậy không tồn tại số n nguyên dương sao cho

$\frac{n(2n-1)}{26}$ là số chính phương.

Câu 4. (h. 1)



Hình 1

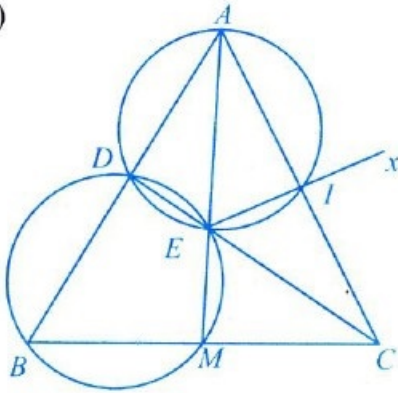
a) Ta có $AH \perp BC$ và I, K là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABH, ACH , suy ra $\widehat{BHI} = \widehat{AHK}$ ($= 45^\circ$)

$$\widehat{IBH} = \widehat{KAH} \quad (\text{vì } \widehat{ABH} = \widehat{CAH});$$

$$\Delta BIH \sim \Delta AKH \text{ (g.g)} \quad \text{nên } \frac{IH}{KH} = \frac{BH}{AH} \quad (1)$$

b) Ta có $\widehat{IHK} = \widehat{BHA} = 90^\circ$, từ (1) suy ra $\triangle IHK \sim \triangle BHA$, nên $\widehat{HIK} = \widehat{HBA}$. Do đó từ góc $BHIM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{IHB} = 45^\circ$, nên tam giác AMN vuông cân tại A , do đó $AM = AN$.

2) (h. 2)



Hình 2

Từ giả thiết suy ra

$$\widehat{AEC} = \widehat{DEM} = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ = \widehat{BAC} + \widehat{BCA} > \widehat{BAC}.$$

Trên nửa mặt phẳng bờ AM chứa điểm C , kẻ tia Ex cắt AC tại I sao cho $\widehat{xEC} = \widehat{BAC}$,

Vì $\widehat{AEC} > \widehat{BAC} = \widehat{xEC}$, nên điểm I thuộc đoạn AC ($I \neq A, I \neq C$).

Từ các tứ giác $BMED$, $ADEI$ nội tiếp suy ra

$$\begin{cases} CM.CB = CE.CD \\ CE.CD = CI.CA \end{cases} \Rightarrow \frac{BC^2}{2} = CI.CA$$

$$\Rightarrow BC^2 < 2.CA^2 \Rightarrow BC < AC\sqrt{2}.$$

Đặt $a = x - 1$, $b = y - 1$.

Theo giả thiết ta có $a > 0$, $b > 0$ và $a + b \leq 2$.

Ta có $a + 1 \geq 2\sqrt{a} \Rightarrow (a + 1)^4 \geq 16a^2$, tương tự $(b + 1)^4 \geq 16b^2$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } P &= \frac{(a+1)^4}{b^3} + \frac{(b+1)^4}{a^3} \geq \frac{16a^2}{b^3} + \frac{16b^2}{a^3} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{16a^2}{b^3} \cdot \frac{16b^2}{a^3}} = 32\sqrt{\frac{1}{ab}}. \end{aligned}$$

Ta có $2 \geq a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1$, suy ra $P \geq 32$.

Với $a = b = 1 \Leftrightarrow x = y = 2$ thì $P = 32$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 32, đạt được khi và chỉ khi $x = y = 1$.

PHẠM NGỌC QUANG

(Hà Nội)

Sưu tầm và giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH... (Tiếp trang 6)

Câu III. (2 điểm)

1) Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng $(1+x^2)(1+y^2) \geq (x+y)(1+xy)$.

2) Cho a, b là hai số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Câu IV. (3 điểm)

1) Cho tam giác ABC có B, C cố định và A di động sao cho $AB = 2AC$.

a) Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $IB = 2IC$. Chứng minh rằng AI là tia phân giác của góc BAC .

b) Chứng minh rằng điểm A luôn di động trên một đường tròn cố định.

2) Cho tam giác ABC . Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm I , tiếp xúc với BC tại D .

Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC có tâm J , tiếp xúc với BC tại E .

a) Gọi F là giao điểm của AE và DI . Chứng minh rằng F thuộc đường tròn (I) .

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng đường thẳng MI luôn đi qua trung điểm của AD .

Câu V. (1 điểm)

Từ 625 số tự nhiên 1, 2, 3, ..., 624, 625 ta chọn ra 312 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 312 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Sưu tầm và giới thiệu



I. PHƯƠNG PHÁP

Bài viết này đề cập đến một ứng dụng nhỏ của việc nhẩm được nghiệm trong giải phương trình lượng giác. Trong phương trình đại số hay phương trình vô tỉ, khi nhẩm được một nghiệm $x = a$ thì giúp ta có thể tách, ghép, thêm, bớt để biến đổi về phương trình tích có nhân tử là $(x - a)$. Tuy nhiên, khi biết một nghiệm của phương trình lượng giác thì có thể nhiều cách làm xuất hiện các nhân tử khác nhau. Chẳng hạn, ứng với nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$ thì nhân tử có thể là $2\sin x - 1$,

$2\cos x - \sqrt{3}$, $\cos x - \sqrt{3}\sin x$,... Ở đây ta quy ước không viết nghiệm của PT dưới dạng cụ thể mà thông qua PT lượng giác cơ bản của nó, chẳng hạn thay vì viết nghiệm $x = \pi$ ta viết nghiệm của PT $\sin x = 0$ hoặc $\cos x = -1$. Sau đây giới thiệu một số họ các biểu thức có nghiệm chung thường gặp.

Họ biểu thức	Nghiệm
$\sin 2x; \sin 3x; 1 \pm \cos x$	$\sin x = 0$
$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right); \sin x + \cos 2x$	$\sin x = 1$
$\cos x; \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$	$\sin x = -1$
$\sin 2x; \cos 3x$	$\cos x = 0$
$\sin \frac{x}{2}; \sin x; \cos 2x - \cos x$	$\cos x = 1$
$\cos \frac{x}{2}; \sin x$	$\cos x = -1$
$\cos 2x; 1 \mp \sin 2x; \cos^3 x \mp \sin^3 x;$ $\cos 3x \pm \sin 3x; \cos\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right);$ $\tan x - \cot x$	$\tan x = \pm 1$ $\sin x \pm \cos x = 0$

II. THÍ DỤ MINH HỌA

★ Thí dụ 1. Giải phương trình

$$2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0 \quad (1)$$

Nhận xét. Do có sự xuất hiện của $\cos x$ và $\cos 2x + \sin x$ nên ta nghĩ đến nghiệm $\sin x = 1$, do đó biến đổi PT thành tích có nhân tử $\sin x - 1$.

Lời giải. Biến đổi PT (1) thành

$$\begin{aligned} 2\cos x(1 + \sin x)(1 - \sin x) + (1 - \sin x)(1 + 2\sin x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \sin x)((\cos x + \sin x)^2 + 2(\cos x + \sin x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \sin x)(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \square \end{cases} \end{aligned}$$

★ Thí dụ 2. Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{\sin^3 x + 1}}{\cos x} + \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x \quad (2)$$

Nhận xét. Nhận thấy với $\sin x = 0$ thì hai vế của (2) bằng nhau, do đó biến đổi PT thành tích có nhân tử là $\sin x$.

Lời giải. Điều kiện $\cos x \neq 0$ và $\sin x \geq 0$. Biến đổi PT (2) thành

$$\begin{aligned} \sin x \sqrt{\sin x + 1} + \sin x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x (\sqrt{\sin x + 1} + \sin x + \cos x - \cos^2 x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x \left(\left(\sqrt{\sin x + 1} + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x (\sqrt{\sin x + 1} + \cos x)(\sqrt{\sin x + 1} - \cos x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sqrt{\sin x} = \cos x - 1 \\ \sqrt{\sin x} + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \\ \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Đến đây bạn đọc dễ dàng tìm được đáp số. $\square$

★Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\ln(1 + (\sin x + \cos x)^2) = 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3)$$

Nhận xét. Trong PT (3) có chứa biểu thức $\sin x + \cos x$ và $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ làm chúng ta nghĩ đến nghiệm $\sin x + \cos x = 0$.

Lời giải. Biến đổi

$$2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = (\sin x + \cos x)^2.$$

Ta có PT (3) $\Leftrightarrow f(t) = 0$, trong đó

$$f(t) = \ln(1+t) - t \text{ và } t = (\sin x + \cos x)^2 \geq 0.$$

Do $f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t} \leq 0$, với $\forall t \geq 0$ và $f(0) = 0$. Từ đó $t = 0$ là nghiệm duy nhất của PT $f(t) = 0$. Do vậy

$$\text{PT (3)} \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \square$$

★Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\sqrt{3}(2\cos^2 x + \cos x - 2) + \sin x(3 - 2\cos x) = 0 \quad (4)$$

Nhận xét. Bài này xuất hiện nhiều hệ số và khó phân tích, tuy nhiên nếu chú ý sự xuất hiện của $\sqrt{3}$ và vận dụng $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ta nghĩ đến việc nhân nghiệm liên quan đến

$$\sqrt{3} \text{ thì thu được nghiệm } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ Do đó}$$

biến đổi PT để xuất hiện nhân tử $2\sin x - \sqrt{3}$.

Lời giải

$$\text{PT (4)} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + 3\sin x - 2\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0.$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - \sqrt{3})(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \square \end{cases}$$

★Thí dụ 5. Giải phương trình

$$2\left(\sin x + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\sin x - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \tan x \quad (5)$$

Lời giải

$$\text{PT (6)} \Leftrightarrow 2\left(\sin^2 x - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \tan x.$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x = \tan x + 1 - \sin 2x.$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin x + \frac{1}{\cos x}\right)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Nhận xét. Sau khi biến đổi nhận thấy PT (5) có biểu thức $\tan x + 1$ làm chúng ta nghĩ đến nhân nghiệm $\sin x + \cos x = 0$.

★Thí dụ 6. Giải phương trình

$$\cos^3 x - \sin^3 x = 2\cos 2x(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}) \quad (6)$$

Nhận xét. PT (6) có các biểu thức $\cos^3 x + \sin^3 x$ và $\cos 2x$ gợi ý cho ta đến nhân nghiệm $\cos x + \sin x = 0$.

Lời giải. ĐK $\sin x \geq 0$ và $\cos x \geq 0$.

Khi đó PT (6) tương đương với

$$(\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x)$$

$$= 2(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}).$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

(Vì $2(\cos x + \sin x)(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}) \geq 2(\cos x + \sin x)^2 > 1 + \cos x \sin x$).

Đối chiếu ĐK ta được nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

★Thí dụ 7. Giải phương trình

$$\left(\frac{\cos 4x + \sin 2x}{\cos 3x + \sin 3x}\right)^2 + 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3 \quad (7)$$

Nhận xét. Để ý thấy các biểu thức $\cos 4x + \sin 2x$ và $\cos 3x + \sin 3x$ đều có nghiệm chung là $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

Lời giải. ĐK $\cos x - \sin x \neq 0$ và $\sin 2x \neq \frac{1}{2}$.

Biến đổi PT (7) thành

$$\left(\frac{(1 - \sin 2x)(1 + 2\sin 2x)}{(\cos x - \sin x)(1 + 2\sin x)} \right)^2 - 2\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)^2 - 2(\cos x - \sin x) - 3 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x + 1)(\cos x - \sin x - 3) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn ĐK}). \quad \square$$

★ **Thí dụ 8.** Giải phương trình

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x} - \frac{\cos x}{\cos 2x} = \sqrt{2} \cdot \frac{\tan^2 x + 2\tan x - 1}{1 - \tan^2 x} \quad (8)$$

Lời giải. ĐK $\cos x \cos 2x \neq 0, \tan x \neq \pm 1$.

Khi đó PT (8) tương đương với

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x} - \frac{\cos x}{\cos 2x} = \sqrt{2}(\tan 2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x - \cos x = \sqrt{2}(\sin 2x - \cos 2x) \quad (9)$$

Chú ý rằng $\sin 3x - \cos x$ và $\sin 2x - \cos 2x$ có nghiệm chung $\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$, nên

$$\text{PT (9)} \Leftrightarrow \sin 3x - \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 2\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

(Vì $\cos 2x \neq 0$ nên $\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \neq 1$).

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{thỏa mãn ĐK}). \quad \square$$

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau

1. $3 - 4\sin^2 4x = 2\cos 4x(1 + 4\sin x \cos x).$

2. $\cos 3x + 1 \cos x = 2(2\sin 2x + 3\cos 2x + 4).$

3. $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4.$

4. $\cos x(2\sin^2 x + 2\sin x + 1) = 2\cos^3 x + \sin x + 1.$

5. $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x.$

6. $\sin x(2\cos^3 x + \sin x + \cos x) = 1 + 2\sin^2 x \cos^2 x.$

7. $\frac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\cos x + \sin x} = 2(1 + \sin x).$

8. $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x.$
(Khối A – 2010)

9. $(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0.$
(Khối B – 2010)

10. $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x.$
(Khối A – 2011)

11. $\sqrt{2} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1.$
(Khối A – 2012)

CÁC BẠN NHỚ ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, ĐẶC SAN CỦA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM 2003 VÀ CÁC ẤN PHẨM CỦA TÒA SOẠN TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRÊN CẢ NƯỚC.

Mọi chi tiết xin liên hệ: TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập (04)35121607

ĐT-Fax Phát hành, Trị sự (04)35121606

Hotline: 0912828687

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
- 2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết rằng tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

Câu II (2 điểm)

- 1) Giải phương trình

$$\cos 2x + \cos 3x - \sin x - \cos 4x = \sin 6x.$$

- 2) Giải bất phương trình

$$4x^2 + \sqrt{2x+3} \geq 8x+1.$$

Câu III (1 điểm)

Tính tích phân $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{(e^x - 9)\sqrt{3e^x - 2}}$.

Câu IV (1 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P, K lần lượt là trung điểm của BC, CD, SD, SB . Tính thể tích của khối chóp $S.ABMN$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng MK và AP theo a .

Câu V. (1 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 y - y^4 = 7 \\ x^2 y + 2xy^2 + y^3 = 9. \end{cases}$$

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta: 2x + y + 10 = 0$. Từ một điểm M bất kì trên Δ kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Xác định tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ O đến đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

- 2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}, d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$$

và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với (P) và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{29}$.

Câu VII.a (1 điểm)

Cho số phức z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = 3(-1 + 2i)$.

Tính $|z| + |z|^2$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A có G là trọng tâm, $B(-10;1), C(10;1)$.

Xác định tọa độ đỉnh A biết diện tích tam giác ABG bằng 20.

- 2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) sao cho Δ vuông góc với d và khoảng cách giữa hai đường thẳng d và Δ bằng $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Câu VII.b (1 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3^x + 6.2^y = 11 + 4^y \\ 2^y + 4.3^x = 7 + 9^x. \end{cases}$$

HOÀNG ĐỨC NGUYỄN
(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Tứ giác $MHIK$ là hình chữ nhật. Gọi x_0 là hoành độ điểm M , ta có

$$S_{MHIK} = MH \cdot MK = |x_0 - 1| \left| \frac{x_0 + m}{x_0 - 1} - 1 \right| = |m + 1|.$$

Đáp số. $m = 0$ hoặc $m = -2$.

Câu II. 1) ĐK $x \neq \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). PT đã cho tương đương với

$$\cos 2x - (\sin x + \cos x) + 2 = 1 - \sin x$$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$. Kết hợp với ĐK ta được

$$x = \frac{3\pi}{2} + k.2\pi; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + m.2\pi \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

2) Nhân PT thứ nhất và PT thứ hai của hệ, chéo vế ta được

$$(x^2 + y^2)(x - 2y)(4x + 2y - 15) = 0.$$

Đáp số. Hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$, $(2; 1)$, $(4; 2)$.

Câu III. Ta có

$$I = \int_0^1 x.e^{-x} dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = I_1 + I_2.$$

$$\bullet I_1 = -xe^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}.$$

• Để tìm I_2 , đặt $\sqrt{x} = \tan u$ thì

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \tan^2 u}{1 + \tan^2 u} d(\tan u) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\tan u) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} du \\ = 2 - \frac{\pi}{2}. \text{ Vậy } I = 3 - \frac{2}{e} - \frac{\pi}{2}.$$

Câu IV. Góc giữa (P) và (ABC) là $\widehat{AA'C}$. Ta có $\cos \widehat{AA'C} = \frac{AA'}{A'C} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. Kẻ $AH \perp A'C$ tại

H , cắt cạnh CC' tại M . Kẻ $AN \perp A'B$ cắt cạnh BB' tại N . Thiết diện là tam giác AMN . Ta có

$$S_{ACB} = S_{AMN} \cdot \cos \widehat{AA'C} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Câu V. Từ giả thiết có $x = \frac{y-z}{1+yz} \Rightarrow P =$

$$\frac{2(1+yz)^2}{(y^2+1)(z^2+1)} - \frac{2}{y^2+1} - \frac{4z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}.$$

Vậy

$$P = \frac{2z(2y+(y^2-1)z)}{(y^2+1)(z^2+1)} - \frac{4z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}.$$

$$\text{Do } \frac{2z(2y+(y^2-1)z)}{(y^2+1)(z^2+1)} = \frac{2z\sqrt{(2y+(y^2-1)z)^2}}{(y^2+1)(z^2+1)}$$

$$\leq \frac{2z\sqrt{(4y^2+(y^2-1)^2)(1+z^2)}}{(y^2+1)(z^2+1)} = \frac{2z}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$\text{nên } P \leq \frac{2z}{\sqrt{z^2+1}} - \frac{4z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3z}{\sqrt{z^2+1}} \left(1 - \frac{z^2}{z^2+1}\right)$$

$$= -3t^3 + t \left(\text{với } \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} = t \in (0; 1) \right).$$

Hàm số $f(t) = -3t^3 + t$, có $\max_{t \in (0; 1)} f(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$.

$$\text{Từ đó } \max P = \frac{2}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y = \sqrt{2}; \quad z = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu VIa. 1) Có hai đường thẳng thỏa mãn đề bài là $\Delta_1: y - 1 = 0$; $\Delta_2: x - 2 = 0$.

2) $A(3; -1; -2); B(2; 4; -1)$.

Câu VIIa. Ta có $z - iz = 1 + i^3 + \dots + i^{2012} - 2011i^{2013}$

$$\Rightarrow z(1-i) = 1 + \frac{i^3(1-i^{2010})}{1-i} - 2011i$$

$$= 1 - \frac{2i}{1-i} - 2011i = 2 - 2012i.$$

$$\Rightarrow z = \frac{2-2012i}{1-i} = \frac{(2-2012i)(1+i)}{2} = 1007 - 1005i.$$

Vậy z có phần thực là 1007, phần ảo là -1005.

Câu VIb. 1) Gọi AH là đường cao tam giác ABC thì $AH = \frac{4}{5}$. Từ giả thiết suy ra $BC = 2$.

(Xem tiếp trang 28)



MỞ RỘNG BẤT ĐẲNG THỨC PTOLEMY VÀ HAYASHI CHO ĐA GIÁC

ĐÀM VĂN NHÌ

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Trong bài này chúng tôi xin bàn về cách mở rộng một vài bất đẳng thức trong tam giác thành bất đẳng thức cho đa giác mà vẫn giữ được "hình bóng ban đầu" của nó. Việc phát biểu bài toán mở rộng thể hiện sự am hiểu sâu sắc, tinh tế bài toán đã biết. Ta có thể đi theo hai cách:

- 1) Tăng số đỉnh bài toán cho đa giác tùy ý.
- 2) Xây dựng bài toán mới sao cho bài toán ban đầu là trường hợp đặc biệt của nó.

Chúng ta tổng quát hóa Bất đẳng thức Ptolemy (i) và Bất đẳng thức Hayashi (ii):

(i) Với bốn điểm phân biệt A, B, C, D ta luôn có bất đẳng thức $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot DB$.

Đẳng thức xảy ra khi tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Phép chứng minh này có nhiều trong các tài liệu tham khảo, chúng tôi xin không chứng minh ở đây.

(ii) Với tam giác ABC độ dài các cạnh là $BC = a, AC = b, AB = c$ và điểm M tùy ý luôn có bất đẳng thức

$$a \cdot MB \cdot MC + b \cdot MC \cdot MA + c \cdot MA \cdot MB \geq abc.$$

Chứng minh. Từ $0 \leq (x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MB} + z \cdot \overrightarrow{MC})^2$

$$\text{suy ra } (x+y+z)(x \cdot MA^2 + y \cdot MB^2 + z \cdot MC^2)$$

$$\geq a^2 yz + b^2 xz + c^2 xy \quad (\forall x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Chọn $x = \frac{a}{MA}; y = \frac{b}{MB}; z = \frac{c}{MC}$ thì ta có

$$\left(\frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC} \right) (aMA + bMB + cMC)$$

$$\geq abc \left(\frac{a}{MB \cdot MC} + \frac{b}{MC \cdot MA} + \frac{c}{MA \cdot MB} \right).$$

Nhân cả hai vế với $MA \cdot MB \cdot MC$, thu gọn được điều phải chứng minh.

Với biểu diễn kết quả như trên khó có thể mở rộng hoặc ta phải vừa mở rộng vừa *chỉnh* hình bài toán đã biết. Phát biểu lại hai bài toán:

(a) Với bốn điểm phân biệt A, B, C, D ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{AB}{DA \cdot DB} + \frac{BC}{DB \cdot DC} \geq \frac{CA}{DC \cdot DA}.$$

(b) Với tam giác ABC và điểm M tùy ý luôn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{AB \cdot AC \cdot MA} + \frac{1}{BC \cdot BA \cdot MB} + \frac{1}{CA \cdot CB \cdot MC} \geq \frac{1}{MA \cdot MB \cdot MC}.$$

Ta sẽ sử dụng số phức để mở rộng các kết quả của Ptolemy và của Hayashi như sau:

Mệnh đề 1. (Bất đẳng thức Ptolemy cho đa giác).

Với đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ và điểm M thuộc cùng một mặt phẳng, ta có bất đẳng thức

$$\frac{A_1 A_2}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{A_2 A_3}{MA_2 \cdot MA_3} + \dots + \frac{A_{n-1} A_n}{MA_{n-1} \cdot MA_n} \geq \frac{A_n A_1}{MA_n \cdot MA_1} \quad (1)$$

Khi $n = 3$, ta có bất đẳng thức Ptolemy.

Đặc biệt, khi $A_1 A_2 = A_2 A_3 = \dots = A_{n-1} A_n = A_n A_1$ ta còn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{1}{MA_2 \cdot MA_3} + \dots + \frac{1}{MA_{n-1} \cdot MA_n} \geq \frac{1}{MA_n \cdot MA_1}.$$

Chứng minh. Giả sử đỉnh A_k có tọa vị z_k và điểm M có tọa vị z thì $|MA_k| = |z - z_k|$. Từ

$$\frac{z_k - z_h}{(z - z_k)(z - z_h)} = \frac{1}{z - z_k} - \frac{1}{z - z_h}$$

có đồng nhất thức

$$\frac{z_1 - z_n}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)} + \frac{z_2 - z_3}{(z - z_2)(z - z_3)} + \dots + \frac{z_{n-1} - z_n}{(z - z_{n-1})(z - z_n)}.$$

Suy ra

$$\frac{|z_1 - z_n|}{|z - z_1| |z - z_n|} \leq \frac{|z_1 - z_2|}{|z - z_1| |z - z_2|} + \frac{|z_2 - z_3|}{|z - z_2| |z - z_3|} + \dots + \frac{|z_{n-1} - z_n|}{|z - z_{n-1}| |z - z_n|}.$$

$$\text{Do vậy } \frac{A_1 A_2}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{A_2 A_3}{MA_2 \cdot MA_3} + \dots + \frac{A_{n-1} A_n}{MA_{n-1} \cdot MA_n} \geq \frac{A_n A_1}{MA_n \cdot MA_1}.$$

Với $n = 3$, bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{A_1 A_2}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{A_2 A_3}{MA_2 \cdot MA_3} \geq \frac{A_3 A_1}{MA_3 \cdot MA_1}.$$

Đây là BĐT Ptolemy. $\square$

★Thí dụ 1. Giả sử đa giác lồi $A_1 A_2 \dots A_n$ với độ dài cạnh $A_k A_{k+1} = k A_1 A_2$ và quy ước $A_{n+1} \equiv A_1$. Chứng minh rằng không thể tồn tại điểm M ở trong mặt phẳng chứa đa giác lồi thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{1}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{2}{MA_2 \cdot MA_3} + \dots + \frac{n-1}{MA_{n-1} \cdot MA_n} < \frac{n}{MA_n \cdot MA_1}.$$

Lời giải. Nếu có điểm M thỏa mãn đầu bài, thì theo Mệnh đề 1 ta có bất đẳng thức

$$\frac{A_1 A_2}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{2 A_1 A_2}{MA_2 \cdot MA_3} + \dots + \frac{(n-1) A_1 A_2}{MA_{n-1} \cdot MA_n} \geq \frac{n A_1 A_2}{MA_n \cdot MA_1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{2}{MA_2 \cdot MA_3} + \dots + \frac{n-1}{MA_{n-1} \cdot MA_n} \geq \frac{n}{MA_n \cdot MA_1}.$$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh. $\square$

★Thí dụ 2. [Erdos-Mordell]. Ký hiệu khoảng cách từ điểm M ở trong tam giác ABC đến ba cạnh BC, CA, AB thứ tự là x, y, z . Khi đó ta có bất đẳng thức

$$MA + MB + MC \geq 2(x + y + z).$$

Lời giải. Giả sử AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D . Gọi khoảng cách từ D đến

CA, BA lần lượt là y', z' . Khi đó ta có $aDA = dDB + cDC$ (theo đồng nhất thức Ptolemy)

$$\text{và } \frac{y}{y'} = \frac{AM}{AD} = \frac{z}{z'}.$$

Vì $DC \geq y' = \frac{yDA}{MA}$ và $DB \geq z' = \frac{zDA}{MA}$ nên

$$aDA \geq b \cdot \frac{zDA}{MA} + c \cdot \frac{yDA}{MA} \text{ hay } MA \geq z \cdot \frac{b}{a} + y \cdot \frac{c}{a}.$$

Tương tự có $MB \geq x \cdot \frac{c}{b} + z \cdot \frac{a}{b}$ và $MC \geq y \cdot \frac{a}{c} + x \cdot \frac{b}{c}$.

Từ đây suy ra $MA + MB + MC \geq 2(x + y + z)$. $\square$

Mệnh đề 2. (Bất đẳng thức Hayashi cho đa giác) Với đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ và M là điểm tùy ý ta luôn có bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{MA_k \sum_{i \neq k}^n A_i A_k} \geq \frac{1}{\prod_{k=1}^n MA_k}.$$

Khi $n = 3$ và $a_1 = A_2 A_3, a_2 = A_3 A_1, a_3 = A_1 A_2$ ta nhận được BĐT Hayashi cho tam giác

$$a_1 MA_2 \cdot MA_3 + a_2 MA_3 \cdot MA_1 + a_3 MA_1 \cdot MA_2 \geq a_1 a_2 a_3.$$

Chứng minh. Trước hết ta có bổ đề

Bổ đề. Giả sử các số $z_1, z_2, \dots, z_s$ khác nhau đôi một và $z_i + a_j \neq 0$ với $i = 1, 2, \dots, s$ và $j = 1, 2, \dots, n$.

Xác định $x_1, x_2, \dots, x_n$ trong phân tích

$$\frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_s)}{(z + a_1)(z + a_2) \dots (z + a_n)} = \frac{x_1}{z + a_1} + \frac{x_2}{z + a_2} + \dots + \frac{x_n}{z + a_n}.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i=1}^s |a_k + z_i|}{\prod_{i=1}^n |a_k - a_i| \prod_{i=k+1}^n |a_i - a_k| |z + a_k|} \geq \frac{|z - z_1| \dots |z - z_s|}{|z + a_1| \dots |z + a_n|}.$$

Chứng minh. Giả sử rằng

$$\frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_s)}{(z + a_1)(z + a_2) \dots (z + a_n)} = \frac{x_1}{z + a_1} + \frac{x_2}{z + a_2} + \dots + \frac{x_n}{z + a_n}.$$

Khi đó ta có

$$x_1(z + a_2)(z + a_3) \dots (z + a_n) + x_2(z + a_1)(z + a_3) \dots (z + a_n) \\ + \dots + x_n(z + a_1)(z + a_2) \dots (z + a_{n-1}) \\ = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_s)$$

(Xem tiếp trang 28)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/426. (Lớp 6). Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n lớn hơn 4 thì tồn tại cặp số tự nhiên x, y với $\frac{n}{2} \leq x < n$ và $\frac{n}{2} \leq y < n$, thỏa mãn $x^2 - y$ chia hết cho n .

NGUYỄN HỮU BÀNG

(GV THCS Hưng Hòa, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T2/426. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên tia AC lấy hai điểm E và F sao cho $\widehat{ABE} = 15^\circ$ và $CE = CF$. Tính số đo của góc CBF .

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T3/426. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$65(x^3y^3 + x^2 + y^2) = 81(xy^3 + 1).$$

ĐÌNH XUÂN HÙNG

(GV THCS Gia Hanh, Can Lộc, Hà Tĩnh)

Bài T4/426. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9x^2 + 9xy + 5x - 4y + 9\sqrt{y} = 7 \\ \sqrt{x - y + 2} + 1 = 9(x - y)^2 + \sqrt{7x - 7y}. \end{cases}$$

ĐÀO HUY TRƯỜNG

(GV THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T5/426. Cho tam giác ABC cân tại A có góc BAC tù. Giả sử trên cạnh AB có điểm D sao cho $BC = CD\sqrt{2}$. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt CA tại E . Chứng minh rằng đường thẳng CD đi qua trung điểm của đoạn thẳng BE .

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/426. Cho

$$S = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \sqrt[5]{\frac{5}{4}} + \dots + \sqrt[2013]{\frac{2013}{2012}}.$$

Tìm phần nguyên của S .

ĐÀO CHÍ THANH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T7/426. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \\ & \leq \frac{3\sqrt{3}abc}{(a+b+c)\sqrt{a+b+c}}. \end{aligned}$$

NGUYỄN VĂN NHỎ
(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghệ An)

Bài T8/426. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. M là điểm di động trong không gian. Cho biết $AB = 4, AC = 8, AD = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{7}MA + \sqrt{11}MB + \sqrt{23}MC + \sqrt{43}MD.$$

HOÀNG SỸ LUYỆN
(Học viên Cao học Toán K19, ĐH Vinh, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/426. Cho dãy số nguyên dương (a_n) với $a_1 = 1, a_2 = 2$ và $a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n, n \geq 1$. Chứng minh rằng

1) $a_n a_{n+2} + (-1)^n \cdot 5$ luôn luôn là một số chính phương với mọi $n \geq 1$.

2) Phương trình $x^2 - 4xy - y^2 = 5$ có vô số nghiệm nguyên dương.

ĐÀM VĂN NHỈ
(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài T10/426. Cho a là một số thực thuộc $(0; 1)$ và b là một số phức thỏa mãn $|b| < 1$. Chứng minh bất đẳng thức $|b| + \left| \frac{a-b}{1-ab} \right| \geq a$.

TRẦN NGỌC THẮNG
(GV THPT Đoàn Thị Điểm, Hà Nội)

Bài T11/426. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $(\cot \alpha)^{\cos 2\alpha} \geq \frac{1}{\sin 2\alpha}$.

PHẠM KIM CHUNG

(GV THPT Đặng Thúc Hứa, Thanh Chương, Nghệ An)

Bài T12/426. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm O . Điểm G không thuộc các mặt phẳng (BCD) , (CDA) , (DAB) , (ABC) và mặt cầu (O) . Gọi X, Y, Z, T theo thứ tự là tâm mặt cầu ngoại tiếp của các tứ diện $GBCD$, $GCDA$, $GDAB$, $GABC$. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi O là trọng tâm của tứ diện $XYZT$.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/426. Có hai chiếc cốc, trong đó cốc 1 đựng M gam nước đường có nồng độ $a\%$, ở nhiệt độ $T=45^\circ\text{C}$ còn cốc 2 đựng m gam nước tinh khiết ở nhiệt độ $t=5^\circ\text{C}$. Người ta lấy n gam nước đường ở cốc 1 đổ vào cốc 2 và sau khi khuấy đều lại lấy n gam nước đường ở cốc 2 đổ vào cốc 1. Kết quả là hiệu nhiệt độ Δt giữa hai cốc là 15°C và nồng độ đường của

cốc 1 gấp $k=2,5$ lần của cốc 2. Tìm các tỉ số $x = \frac{n}{M}$ và $y = \frac{n}{m}$. Nếu tăng n thì sự chênh lệch về nồng độ và về nhiệt độ giữa hai cốc sau khi pha tăng hay giảm? Từ đó rút ra kết luận gì? Giả sử khối lượng đường hòa tan nhỏ không đáng kể so với M nên có thể coi nước đường và nước tinh khiết có cùng khối lượng riêng d và có cùng nhiệt dung riêng c_0 .

NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

Bài L2/426. Bạn ở trên một chiếc thuyền đang đứng yên trên mặt sông. Khối lượng tổng cộng của thuyền và của bạn là M . Trên thuyền có hai viên đá với khối lượng tương ứng là m_1 và m_2 . Cho biết $M = 6m_1 = 12m_2$. Muốn cho thuyền chuyển động, bạn ném đá về phía sau. Bạn ném liên tiếp từng viên một hoặc ném đồng thời cả hai viên, nhưng đều với tốc độ v_i so với thuyền. Hỏi tốc độ của thuyền là bao nhiêu nếu bạn ném
a) Hai viên đá đồng thời?
b) Viên m_1 trước, viên m_2 sau?
c) Viên m_2 trước, viên m_1 sau?

NGUYỄN VĂN THUẬN

(GV ĐHSPT Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/426. (For 6th grade). Prove that for any natural number $n > 4$, there exists a pair of natural numbers x, y with $\frac{n}{2} \leq x < n$ and

$\frac{n}{2} \leq y < n$, such that $x^2 - y$ is divisible by n .

T2/426. (For 7th grade). Let ABC be an isosceles right triangle with right angle at A . On the ray AC choose two points E and F such that $\widehat{ABE} = 15^\circ$ and $CE = CF$. What is the measure of the angle CBF ?

T3/426. Find all positive integer solutions of the equation $65(x^3y^3 + x^2 + y^2) = 81(xy^3 + 1)$.

T4/426. Solve the system of equations

$$\begin{cases} 9x^2 + 9xy + 5x - 4y + 9\sqrt{y} = 7 \\ \sqrt{x - y + 2} + 1 = 9(x - y)^2 + \sqrt{7x - 7y}. \end{cases}$$

T5/426. Let ABC be an isosceles triangle where the angle BAC is obtuse. Suppose D is a point on edge AB such that $BC = CD\sqrt{2}$. The line through D and perpendicular to AB meets CA at E . Prove that CD passes through the midpoint of BE .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/426. Let

$$S = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \sqrt[5]{\frac{5}{4}} + \dots + \sqrt[2013]{\frac{2013}{2012}}.$$

Find the integer part of S .

(Xem tiếp trang 27)



★ Bài T1/422. Cho

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}$$

và $B = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012}$. Hãy tính $\left(\frac{A}{B}\right)^{2012}$.

Lời giải. Ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}\right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}\right) \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} - \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} = A \end{aligned}$$

Suy ra $\left(\frac{A}{B}\right)^{2012} = 1^{2012} = 1. \quad \square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng, gọn, trình bày rõ ràng:

Phú Thọ: Sài Thị Phương Ly, 6C, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** Phạm Ngọc Hoa, 6A1, THCS

Sông Lô, Nguyễn Hà Anh, Nguyễn Văn Quyền, Nguyễn Thị Minh Chi, 6A1, Trần Quang Phú, Đỗ Lê Huyền Ngọc, 6A3, Nguyễn Minh Hiếu, Nguyễn Trung Kiên, 6A5, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Đỗ Quang Huy, 6B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Võ Nhật Minh, 6A1, THCS Ngô Gia Tự, Q. Hai Bà Trưng; **Thanh Hóa:** Nguyễn Danh Thắng, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Lê Ngọc Trung, 6C, THCS Lê Quý Đôn, Bim Sơn; **Nghe An:** Nguyễn Đình Tuấn, 5A, TH Hồng Sơn, Đô Lương, Đậu Thanh Thủy, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Lê Thị Nguyệt, Nguyễn Thị Văn Anh, Hoàng Thị Hoa, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Vũ Kiều Oanh, Cao Hồ Bích Ngọc, Nguyễn Trà My, Bùi Duy Khánh, Dương Thị Khánh Linh, Hồ Ngọc Anh, Nguyễn Quỳnh Anh, Nguyễn Đình Quý, Trần Thị Anh Thư, Nguyễn Thị Khánh Linh, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Việt Anh, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** Phạm Thiên Trang, Võ Trần Thủy Hương, 6A, Nguyễn Văn Lộc, Bùi Thị Lệ Giang, 6B, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, Nguyễn Đại Dương, 6B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; **Bình Định:** Trần Cả Bảo, 6A1, THCS Phước Lộc, Tuy Phước.

NGUYỄN VIỆT HẢI

★ Bài T2/422. Cho đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $f(3).f(4) = 5$. Chứng minh rằng đa thức $f(x) - 6$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải. Giả sử đa thức $f(x) - 6$ có nghiệm nguyên a . Khi đó $f(x) - 6 = (x - a).Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên nào đó. Suy ra

$$f(3) = (3 - a).Q(3) + 6; f(4) = (4 - a).Q(4) + 6 \quad (1)$$

Vì $f(3).f(4) = 5$ nên

$$((3 - a)Q(3) + 6).((4 - a)Q(4) + 6) = 5$$

$$\Leftrightarrow (3 - a)(4 - a)Q(3)Q(4) + 6(3 - a)Q(3)$$

$$+ 6(4 - a)Q(4) + 36 = 5 \quad (2)$$

Do $3 - a$ và $4 - a$ là hai số nguyên liên tiếp nên $(3 - a)(4 - a)$ là số chẵn. Do đó VT (2) là số chẵn, nhưng VP (2) là số lẻ, điều này là

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCD PHONG TRẢO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẬP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

mâu thuẫn. Vậy giả sử trên là sai. Suy ra đa thức $f(x) - 6$ không có nghiệm nguyên. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Từ (1) có thể lập luận tiếp như sau:

Do $3 - a$ và $4 - a$ là hai số nguyên liên tiếp nên phải có một số chẵn. Nếu $3 - a$ chẵn thì $f(3)$ là số chẵn, mâu thuẫn với giả thiết $f(3)f(4) = 5$. Nếu $4 - a$ chẵn thì $f(4)$ chẵn, cũng dẫn đến mâu thuẫn. Do vậy ta có điều cần chứng minh.

2) Đa số các bạn đều chứng minh được bài toán, nhưng lập luận trong lời giải của một số bạn vẫn chưa chặt chẽ. Các bạn có lời giải tốt là:

Thanh Hóa: Đỗ Minh Thắng, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Quảng Ngãi:** Cao Thị Thúy Diễm, Nguyễn Thúy Phương, 7A, THCS Hành Phước, Trần Thị Mỹ Ninh, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 8A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T3/422.** Tìm các số nguyên a, b, c sao cho

$$2^a + 8b^2 - 3^c = 283 \quad (1)$$

Lời giải. Ta có (1) $\Leftrightarrow 2^a - 3^c = 283 - 8b^2$.

Do $b \in \mathbb{Z}$ nên $283 - 8b^2 \in \mathbb{Z}$, suy ra $2^a - 3^c \in \mathbb{Z}$.

• Nếu a nguyên âm, $c \in \mathbb{N}$ thì $2^a \notin \mathbb{Z}$, $3^c \in \mathbb{Z}$ nên $2^a - 3^c \notin \mathbb{Z}$.

• Nếu $a \in \mathbb{N}$, c nguyên âm thì $2^a \in \mathbb{Z}$, $3^c \notin \mathbb{Z}$ nên $2^a - 3^c \notin \mathbb{Z}$.

Do đó a và c chỉ có thể là số tự nhiên.

Lại có (1) $\Leftrightarrow 2^a = 8(35 - b^2) + (3 + 3^c)$.

Do 3^c chia 8 dư 1 hoặc 3 nên $3 + 3^c$ chia 8 dư 4 hoặc 6, suy ra 2^a chia 8 dư 4 hoặc 6 (2)

Với $a = 0$ hoặc $a = 1$ thì $2^a = 1$ hoặc $2^a = 2$, điều này mâu thuẫn với (2).

Với $a \geq 3$ thì $2^a : 8$, điều này cũng mâu thuẫn với (2). Vậy $a = 2$, khi đó từ (1) suy ra $8b^2 = 279 + 3^c$.

Với $c = 0$ thì $8b^2 = 280 \Leftrightarrow b^2 = 35$ nên $b \notin \mathbb{Z}$.

Với $c = 1$ thì $8b^2 = 282 \Leftrightarrow b^2 = \frac{141}{4}$ nên $b \notin \mathbb{Z}$.

Với $c = 2$ thì $8b^2 = 288 \Leftrightarrow b = \pm 6$.

Với $c \geq 3$ thì $279 + 3^c : 9$ suy ra $8b^2 : 3 \Rightarrow b : 3$.

Đặt $b = 3d$ ($d \in \mathbb{Z}$) dẫn đến $8d^2 = 31 + 3^{c-2}$ (3)

Do d^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1, nên $8d^2$ chia cho 3 dư 0 hoặc 2, còn $31 + 3^{c-2}$ chia cho 3 dư 1. Điều này mâu thuẫn.

Vậy có hai bộ số nguyên $(a; b; c)$ là $(2; 6; 2)$ và $(2; -6; 2)$ thỏa mãn đề bài. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Đa số các bạn giải bài đều chỉ xét a, b, c là các số tự nhiên nên xảy ra thiếu trường hợp hoặc thiếu đáp số.

2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải gọn, lập luận chặt chẽ:

Vinh Phúc: Nguyễn Thanh Thủy, 8A, THCS Yên Lạc, Nguyễn Hồng Ngọc, Nguyễn Thị Quỳnh Trang, 9A, THCS Lập Thạch; **Hải Dương:** Trần Hoàng Minh, 9A, THCS Phạm Kha, Thanh Miện; **Phú Thọ:** Nguyễn Anh Hào, 7A1, Nguyễn Đức Thuận, Vũ Thùy Linh, 8A3, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, 7D, Hoàng Bảo Long, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Nguyễn Tài Thiên, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Trà, 8D, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Quảng Ngãi:** Phạm Mỹ Hằng, Nguyễn Thúy Phương, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 8A3, THCS chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T4/422.** Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$ và $\widehat{ACB} = 120^\circ$. Lấy I trên tia đối của tia CB sao cho $\widehat{AIB} = 75^\circ$. Tính độ dài AI theo a, b, c .

Lời giải. Kẻ tia

IK sao cho $\widehat{CIK} = 60^\circ$ ($K \in AC$).

Khi đó

$$\widehat{AIK} = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ.$$

Trong tam giác ABC có

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ABC}$$

$$- \widehat{ACB} = 180^\circ - 45^\circ$$

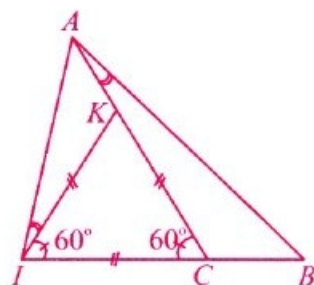
$$- 120^\circ = 15^\circ, \text{ suy ra } \widehat{AIK} = \widehat{BAC}.$$

Do $\widehat{ACB} = 120^\circ$, nên $\widehat{ACI} = 60^\circ$, mà $\widehat{CIK} = 60^\circ$, suy ra tam giác KIC đều. Do đó $\widehat{CKI} = 60^\circ$ và $KI = IC = CK$.

Xét hai tam giác AKI và BCA có $\widehat{AIK} = \widehat{BAC} = 15^\circ$,

$$\widehat{BCA} = \widehat{AKI} = 120^\circ, \text{ do đó } \triangle AKI \sim \triangle BCA.$$

$$\text{Suy ra } \frac{AI}{AB} = \frac{AK}{BC} = \frac{KI}{AC}.$$



Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, để ý rằng $KI = KC$, ta có

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AK + KC}{BC + AC} = \frac{AC}{BC + AC} = \frac{b}{a+b}.$$

Vậy $AI = \frac{bc}{a+b}$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Bài toán này có nhiều cách giải và cho kết quả ở các dạng khác nhau. Ngoài kết quả trên đây, các bạn còn tìm ra các kết quả $AI = \frac{3ab}{c}$, $AI = \frac{2ac}{b}$, ... Những kết quả này đều đúng, do có mối quan hệ

$$\frac{2a}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{3}}. \text{ (Bạn đọc tự chứng minh).}$$

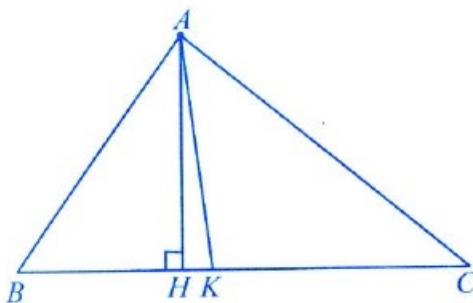
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Phạm Ngọc Hải, Nguyễn Đức Thuận, 8A3, Đinh Minh Hà, 8A1, Phạm Minh Hải, Nguyễn Huy Tuyển, Nguyễn Tiến Dũng, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Thêm, Nguyễn Khắc Việt Anh, Chu Mai Anh, Nguyễn Thị Tâm, Nguyễn Hữu Huy, Hoàng Thị Minh Anh, 8A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Lan Anh, Nguyễn Thu Hiền, Lê Hải Linh, 9A, THCS Yên Phong; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, Trương Văn Thọ, Đỗ Minh Thắng, 7D, Lê Văn Khánh, Hoàng Bảo Long, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Nguyễn Tài Thiên, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Nam:** Hoàng Đức Mạnh, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Quảng Ngãi:** Đỗ Thị Kim Lê, 8A, Vũ Thị Thi, Trần Thị Mỹ Ninh, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 8A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T5/422.** Điểm K nằm trên cạnh BC của tam giác ABC . Chứng minh rằng $AK^2 = AB.AC - KB.KC$ khi và chỉ khi $AB = AC$ hoặc $\widehat{BAK} = \widehat{CAK}$.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Đức Thuận, 8A3, THCS Lâm Thao, Phú Thọ)



Kẻ AH vuông góc với BC , xảy ra hai trường hợp.

Trường hợp 1. Điểm H nằm giữa hai điểm B và K . Theo định lý Pythagore (hình vẽ), ta có

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad (1)$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad (2)$$

$$AK^2 = AH^2 + HK^2 \quad (3)$$

Ta thấy $\widehat{BAK} = \widehat{CAK} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BK}{CK}$ hay

$AB.CK - AC.BK = 0$. Do vậy ta cần chứng minh

$$AK^2 = AB.AC - BK.CK$$

$$\Leftrightarrow (AB - AC)(AB.CK - AC.BK) = 0.$$

Thật vậy, sử dụng (1), (2), (3) và

$BK + CK = BC$, ta có

$$(AB - AC)(AB.CK - AC.BK) = 0$$

$$\Leftrightarrow AB^2.CK + AC^2.BK - AB.AC(BK + CK) = 0$$

$$\Leftrightarrow (AH^2 + BH^2).CK + (AH^2 + CH^2).BK = AB.AC.BC$$

$$\Leftrightarrow AH^2.BC + (BK - HK)^2.CK + (CK + HK)^2.BK$$

$$= AB.AC.BC$$

$$\Leftrightarrow AH^2.BC + BK^2.CK + HK^2.CK + CK^2.BK + HK^2.BK$$

$$= AB.AC.BC$$

$$\Leftrightarrow AH^2.BC + HK^2.BC + BK.CK.BC = AB.AC.BC$$

$$\Leftrightarrow AH^2 + HK^2 + BK.CK = AB.AC$$

$$\Leftrightarrow AK^2 = AB.AC - BK.CK \text{ (đpcm).}$$

Trường hợp 2. Điểm H nằm giữa hai điểm C và K . Cách chứng minh tương tự như trường hợp 1.

Nhận xét. Ngoài cách của bạn Thuận, một số bạn đã sử dụng cách xét hai cặp tam giác đồng dạng cũng cho kết quả. Xin nêu tên các bạn sau có lời giải tốt hơn cả

Hải Dương: Trần Hoàng Minh, 9A, THCS Phạm Kha, Thanh Miện; **Thanh Hóa:** Nguyễn Hữu Hoàng, 8B, THCS Trần Phú, Nông Công; **Hà Tĩnh:** Võ Duy Khánh, 9C, THCS Xuân Diệu, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** Trần Thị Mỹ Ninh, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Nguyễn Thúy Phương,** 9A, Vũ Thị Thi, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh:** Trần Bảo Trân, 8T1, Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

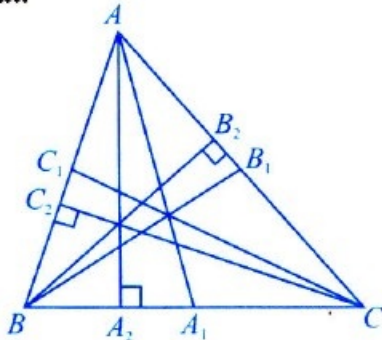
NGUYỄN THỊ THANH

★ **Bài T6/422.** Cho tam giác ABC không cân có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi (AA_1, AA_2) , (BB_1, BB_2) , (CC_1, CC_2) lần lượt là các đường

trung tuyến và đường cao của tam giác tương ứng với các đỉnh A, B, C . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2 - c^2} \overline{A_1A_2} + \frac{b^2}{c^2 - a^2} \overline{B_1B_2} + \frac{c^2}{a^2 - b^2} \overline{C_1C_2} = \vec{0}.$$

Lời giải.



Từ giả thiết $AA_2 \perp BC$, A_1 là trung điểm của BC , ta thấy $b^2 - c^2 = AC^2 - AB^2 = A_2C^2 - A_2B^2$
 $= (\overline{A_2C} + \overline{A_2B})(\overline{A_2C} - \overline{A_2B})$
 $= \overline{BC} \cdot (\overline{2A_2A_1} + \overline{A_1C} + \overline{A_1B})$
 $= \overline{BC} \cdot 2\overline{A_2A_1}.$

$$\text{Do đó } \frac{a^2}{b^2 - c^2} \cdot \overline{A_1A_2} = \frac{\overline{BC}}{2\overline{A_2A_1}} \cdot \overline{A_1A_2} = \frac{1}{2} \overline{CB} \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{b^2}{c^2 - a^2} \cdot \overline{B_1B_2} = \frac{1}{2} \overline{AC} \quad (2)$$

$$\frac{c^2}{a^2 - b^2} \cdot \overline{C_1C_2} = \frac{1}{2} \overline{BA} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{a^2}{b^2 - c^2} \overline{A_1A_2} + \frac{b^2}{c^2 - a^2} \overline{B_1B_2} + \frac{c^2}{a^2 - b^2} \overline{C_1C_2} = \frac{1}{2} (\overline{CB} + \overline{AC} + \overline{BA}) = \vec{0}.$$

Ta có điều cần chứng minh. $\square$

➤ **Nhận xét.** Rất nhiều bạn giải đúng bài toán này, sau đây là những bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Nguyễn Nhật Minh, 10 Toán 1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Hòa Bình:** Nguyễn Sỹ An, 10CT, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hà Nam:** Phạm Thị Bích Ngọc, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Phú Thọ:** Vũ Minh Hoàng, 11CT, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Đinh Trung

Kiên, 11 Toán 1, Trần Thị Thu Hằng, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Trương Trung Quyết, Trần Hồng Quân, Trịnh Thị Thùy Dương, Nguyễn Hải Linh Chi, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Lê Thế Sơn, 11B8, THPT Bim Sơn; **Nghệ An:** Bùi Hoàng Đạt, 10C1, THPT Nguyễn Đức Mậu, Quỳnh Lưu; Nguyễn Thị Quỳnh Loan, 10T1, THPT Đô Lương 1, Lương Thị Mai Hương, 12A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh, Lê Hoàng Hiệp, Trần Trung Hiếu, 12A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, Chu Tư Tài, 12A2, THPT Diễn Châu 2; **Quảng Ngãi:** Ngô Thành Đạt, 11 Toán 1, Trương Quang Huy, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Khiết, Phạm Tân Phát, 11A1, THPT Phạm Văn Đồng; **Đắk Lắk:** Nguyễn Thanh Hải, 12CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột; **Đồng Tháp:** Bùi Trần Hải Đăng, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bình Định:** Lê Khắc Nhuận, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 12 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T7/422.** Cho $a, b, c \in (0; 1)$ và $ab + bc + ca + a + b + c = 1 + abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a}{1+a^2} + \frac{1+b}{1+b^2} + \frac{1+c}{1+c^2} \leq \frac{3}{4}(3+\sqrt{3}).$$

Lời giải. Ta có

$$ab + bc + ca + a + b + c = 1 + abc$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{1-ab} = \frac{1-c}{1+c} \quad (1)$$

Đặt $a = \tan \alpha$, $b = \tan \beta$, $c = \tan \gamma$, trong đó $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. Khi đó, điều kiện (1) trở thành

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right).$$

Suy ra $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. Mặt khác,

$$\begin{aligned} & \frac{1+a}{1+a^2} + \frac{1+b}{1+b^2} + \frac{1+c}{1+c^2} \\ &= \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha) + \cos \beta (\cos \beta + \sin \beta) \\ & \quad + \cos \gamma (\cos \gamma + \sin \gamma) \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 3). \end{aligned}$$

Ta thấy $4\alpha, 4\beta, 4\gamma$ là ba góc trong một tam giác. Sử dụng các BĐT quen thuộc

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leq \frac{3}{2};$$

và $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, suy ra

$$\frac{1+a}{1+a^2} + \frac{1+b}{1+b^2} + \frac{1+c}{1+c^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3 \right) = \frac{3}{4} (3 + \sqrt{3}).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{12}$,

hay $a = b = c = 2 - \sqrt{3}$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán trên và đa số cho lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Thái Bình: Nguyễn Hải Linh Chi, Trịnh Thị Thuý Dương, 11 T1, THPT chuyên Thái Bình; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Văn Cao, 11A1, THPT Sáng Sơn, Sông Lô; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đông Tháp:** Bùi Trần Hải Đăng, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Đắk Lắk:** Trần Thị Thuý Tiên, 12T, THPT chuyên Nguyễn Du.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T8/422.** Cho tam giác nhọn ABC có số đo các góc lớn hơn 45° . Chứng minh rằng

$$\frac{2}{1 + \tan A} + \frac{2}{1 + \tan B} + \frac{2}{1 + \tan C} \leq 3(\sqrt{3} - 1).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{2}{1 + \tan x}$ với

$x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right)$. Ta có

$$f'(x) = -\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2} = -\frac{1}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)};$$

$$f''(x) = \frac{2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin^3 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} < 0, \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right).$$

Do đó, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ lồi trong khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right)$.

Ta có $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -8 + 4\sqrt{3}$ và $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 1$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số

$y = f(x)$ tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ có dạng

$$y = (-8 + 4\sqrt{3}) \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} - 1.$$

Vì hàm số $y = f(x)$ lồi trong khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right)$

nên với mọi x trong khoảng này, tiếp tuyến nằm phía trên đồ thị.

Do đó, ta có bất đẳng thức

$$\frac{2}{1 + \tan x} \leq (-8 + 4\sqrt{3}) \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} - 1 \quad (1)$$

Nếu tính các góc của tam giác ABC theo radian thì $A, B, C \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right)$.

Áp dụng BĐT (1), ta có

$$\frac{2}{1 + \tan A} \leq (-8 + 4\sqrt{3}) \left(A - \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} - 1;$$

$$\frac{2}{1 + \tan B} \leq (-8 + 4\sqrt{3}) \left(B - \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} - 1;$$

$$\frac{2}{1 + \tan C} \leq (-8 + 4\sqrt{3}) \left(C - \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} - 1.$$

Cộng theo về ba BĐT trên và để ý rằng $A + B + C - \pi = 0$, ta được

$$\frac{2}{1 + \tan A} + \frac{2}{1 + \tan B} + \frac{2}{1 + \tan C} \leq 3(\sqrt{3} - 1).$$

Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn sử dụng hệ thức lượng

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

và bất đẳng thức Cauchy để chứng minh, tuy nhiên lời giải như vậy dài và phức tạp.

Một số bạn sử dụng bất đẳng thức Jensen với hàm số

lồi $f(A) + f(B) + f(C) \leq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$. Lưu ý rằng

bất đẳng thức này nằm ngoài chương trình phổ thông.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hưng Yên: Nguyễn Xuân Tùng, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Văn Cao, 11A1, THPT Sáng Sơn, Sông Lô; **Thái Bình:** Trịnh Thị Thuý Dương, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghe An:** Trần Trung Hiếu, Lê Hoàng Hiệp, 12A1, Vũ Văn

Hoàng, 11A1, THPT Thái Hòa, TX Thái Hòa; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Thùy Linh, 10A1, THPT Hương Khê; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 12 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP Biên Hòa; **Đồng Tháp:** Trần Chí Thiên, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP Cao Lãnh.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T9/422.** Xét hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} a_0 = 3, b_0 = -3 \\ a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}, n \geq 1 \\ b_n = 4a_{n-1} + 3b_{n-1}, n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm tất cả những số tự nhiên n để $\prod_{k=0}^n (b_k^2 + 9)$ là số chính phương.

Lời giải. Nhận xét rằng

$$\begin{aligned} 2a_n^2 - b_n^2 &= 2(3a_{n-1} + 2b_{n-1})^2 - (4a_{n-1} + 3b_{n-1})^2 \\ &= 2(9a_{n-1}^2 + 12a_{n-1}b_{n-1} + 4b_{n-1}^2) \\ &\quad - (16a_{n-1}^2 + 24a_{n-1}b_{n-1} + 9b_{n-1}^2) \\ &= 2a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{và } 2a_0^2 - b_0^2 = 2 \cdot 3^2 - (-3)^2 = 9.$$

$$\text{Do đó } 2a_n^2 - b_n^2 = 9 \Rightarrow b_n^2 + 9 = 2a_n^2 \quad \forall n \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Bởi vậy } \prod_{k=0}^n (b_k^2 + 9) = 2^{n+1} \cdot \left(\prod_{k=0}^n a_k \right)^2.$$

Chú ý. Từ các công thức truy nạp của các dãy số $(a_n), (b_n)$ ta có $a_n \in \mathbb{Z}, b_n \in \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 0$.

Từ (2) ta suy ra $a_n \neq 0, \forall n \geq 0$.

Từ đó suy ra $\prod_{k=0}^n (b_k^2 + 9)$ là số chính phương

khi và chỉ khi $n+1:2 \Leftrightarrow n$ là số nguyên dương lẻ. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán dãy số cơ bản, dạng đơn giản. Cái khó là phát hiện ra công thức lùi (1). Các bạn sau có lời giải tốt:

Thái Bình: Nguyễn Hải Linh Chi, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Lê Thị Khanh, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Lê Hồng Đức, Lê Kim Nhã, Đậu Hồng Quân, 11A, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/422.** Cho n là số nguyên dương. Có bao nhiêu xâu kí tự độ dài $n: a_1a_2...a_n$, với kí tự a_i lấy trong tập số $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ ($i = 1, 2, ..., n$) mà số lần số 0 xuất hiện trong xâu kí tự đó là số chẵn (tức số lần xuất hiện số 0 là $0, 2, 4, 6, 8, ...$)?

Lời giải. Gọi $S(n)$ là tổng số xâu kí tự độ dài n mà số lần xuất hiện của số 0 là số chẵn. Dễ dàng thấy $S(1) = 9$. Xét xâu kí tự $a_1a_2...a_n$ độ dài n thỏa mãn yêu cầu đề bài. Thế thì có hai trường hợp có thể xảy ra:

Trường hợp 1. Nếu $a_1 = 0$ thì xâu kí tự độ dài $n-1: a_2a_3...a_n$ phải là xâu kí tự mà số lần số 0 xuất hiện phải là số lẻ. Vì các số $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ với $i = 2, n$ nên tổng số có 10^{n-1} xâu kí tự khác nhau độ dài $n-1$. Vì ta có $S(n-1)$ xâu kí tự khác nhau có độ dài $n-1$ mà số lần số 0 xuất hiện là số chẵn nên có $10^{n-1} - S(n-1)$ xâu kí tự độ dài $n-1$ mà số lần số 0 xuất hiện là số lẻ.

Trường hợp 2. Nếu $a_1 \in \{1, 2, ..., 9\}$ thì a_1 có 9 sự lựa chọn. Và bắt buộc xâu kí tự độ dài $n-1: a_2a_3...a_n$ phải là xâu kí tự mà số lần số 0 xuất hiện phải là số chẵn. Như vậy số xâu kí tự độ dài n thỏa mãn trong trường hợp này bằng với số xâu kí tự độ dài $n-1$ thỏa mãn yêu cầu. Tức là

$$S(n) = 9S(n-1).$$

Do vậy ta có quan hệ

$$S(n) = 10^{n-1} - S(n-1) + 9S(n-1)$$

$$\text{hay } S(n) = 10^{n-1} + 8S(n-1).$$

Chú ý rằng $S(1) = 9$ và giải phương trình hồi quy này ta tìm được

$$S(n) = 4 \cdot 8^{n-1} + 5 \cdot 10^{n-1} \quad (n \geq 1). \square$$

► **Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải như trên một số bạn cũng giải bằng cách tính trực tiếp số các xâu có số lần số 0 xuất hiện từ đó tính được $S(n)$.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Phú Thọ: Nguyễn Đình Mậu, 9A3, THCS Lâm Thao;
Vĩnh Phúc: Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hung Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 11A1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Trần Thị Thu Hằng, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Lê Thị Khanh, 11T, THPT chuyên Lam Sơn;
Nghệ An: Lê Kim Nhã, Trương Công Phú, 11T1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Chu Tụ Tài,** 12A12, THPT Diễn Châu 2; **Quảng Trị:** Hồ Phước Bảo, 12T, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Phạm Đình Thuyền, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Đoàn Hữu Thành, Huỳnh Mạnh Diễn, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** Phạm Công Danh, 11T0, Phạm Văn Minh, 12 T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Đắk Lắk:** Nguyễn Trần Sang, Nguyễn Thanh Hải, 12CT, THPT chuyên Nguyễn Du.

TẠ NGỌC TRÍ

★ **Bài T11/422.** Cho dãy số thực (u_n) được

xác định bởi $u_0 = a \in [0; 2)$, $u_n = \frac{u_{n-1}^2 - 1}{n}$ với

mọi $n = 1, 2, 3, \dots$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \sqrt{n})$.

Lời giải. (Theo ý của đa số các bạn).

Ta chỉ ra rằng luôn tìm được số hạng thứ k nào đó của dãy là $u_k \in [-1; 1]$.

Thật vậy, nếu $a \in (0; 1]$ thì $u_0 = a \in (0; 1] \subset [-1; 1]$.

Xét trường hợp $a \in (1; 2)$, tức $u_0 \in (1; 2)$.

Nếu xảy ra trường hợp mọi $u_n \notin [-1; 1]$ thì từ

hệ thức $u_n = \frac{u_{n-1}^2 - 1}{n}$, suy ra $u_n > 1$ với mọi

$n \in \mathbb{N}^*$. Để ý rằng

$$\frac{n+2-u_n}{n+1-u_{n-1}} = \frac{n+1+u_{n-1}}{n} > \frac{n+1}{n},$$

$$\text{tức là } \frac{k+2-u_k}{k+1-u_{k-1}} > \frac{k+1}{k}, k=1, 2, \dots, n.$$

Nhân theo vế của n bất đẳng thức với $k=1, 2, \dots, n$, ta thu được

$$\frac{n+2-u_n}{2-u_0} > \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$\text{hay } u_n < n+2 - (2-u_0) \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= (n+1)(n+2) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2-u_0}{2} \right).$$

Điều này là không thể, vì khi n đủ lớn

$\left(n > \frac{u_0}{2-u_0} \right)$ thì vế trái là số dương còn vế phải là số âm.

Vậy, luôn tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $x_k \in [-1; 1]$.

Khi đó theo hệ thức $u_n = \frac{u_{n-1}^2 - 1}{n}$, suy ra

$$|u_n| \leq \frac{1}{n} \text{ với mọi } n > k.$$

$$\text{Do đó } |u_n \sqrt{n}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ với mọi } n > k.$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \sqrt{n} = 0. \square$$

Nhận xét. 1) Một số bạn của Trường THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An** vận dụng hệ thức lượng giác

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{\pi}{2^n} = 1 \text{ cũng cho đáp số đúng.}$$

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hòa Bình:** Đặng Hữu Hiếu, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hung Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Lê Kim Nhã, Đậu Hồng Quân, Lê Hồng Đức, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/422.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với các đường cao AD, BE, CF ; AA' là đường kính của (O) . $A'B, A'C$ cắt AC, AB lần lượt tại M, N, P, Q thuộc EF sao cho PB, QC vuông góc với BC . Đường thẳng qua A vuông góc với QN, PM lần lượt cắt (O) tại X, Y . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại X, Y cắt nhau tại J . Chứng minh rằng JA' vuông góc với BC .

Lời giải. Gọi S là trung điểm của AH . Đặt $K = BC \cap HA'$. Lấy L thuộc (O) sao cho $AL \parallel BC$.

Kẻ $ST \parallel AL$. Kí hiệu (B) là đường tròn tâm B , bán kính bằng 0; (S) là đường tròn tâm S , bán kính SA (hình vẽ). Ta có

$$\bullet \mathcal{P}_{M/(B)} = BM^2$$

$$= \overline{BE} \cdot \overline{BA} \text{ (vì } \widehat{ABM} = 90^\circ \text{ và } BE \perp AM)$$

$$= \mathcal{P}_{M/(S)} \text{ (vì } \widehat{HEA} = 90^\circ \text{)}$$

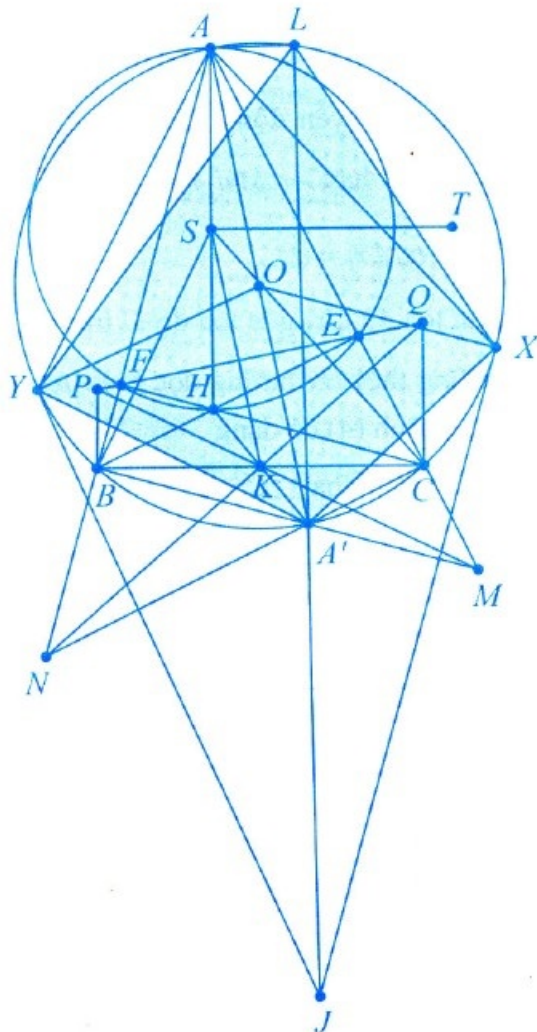
$$\bullet \widehat{PBF} = \widehat{FAH} \text{ (vì } BP \parallel AH \text{)} = \widehat{FEH} \text{ (vì } A, H, E, F \text{ cùng thuộc một đường tròn).}$$

Do đó PB tiếp xúc với đường tròn (HEF) .

$$\text{Suy ra } PB^2 = \overline{PE} \cdot \overline{PF}.$$

$$\text{Điều đó có nghĩa là } \mathcal{P}_{P/(B)} = \mathcal{P}_{P/(S)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $SB \perp MP$.



Kết hợp với $MP \perp AY$, ta có $SB \parallel AY$.

Tương tự $SC \parallel AX$.

$$\text{Vì } \begin{cases} BH \perp AC; A'C \perp AC \\ CH \perp AB; A'B \perp AB \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} CH \parallel A'C \\ BH \parallel A'B \end{cases}$$

Suy ra tứ giác $A'BHC$ là hình bình hành.

Do đó $KA' = KH$.

(1) Kết hợp với $SA = SH$, suy ra $SK \parallel AA'$.

Vậy, chú ý rằng $ST \parallel AL$, ta có

$$S(BCKT) = A(YXA'L) \quad (3)$$

Vì $KB = KC$ và $ST \parallel BC$ nên $S(BCKT) = -1$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $A(YXA'L) = -1$.

Do đó tứ giác $YA'XL$ điều hoà.

Từ đó, chú ý rằng JY, JX tiếp xúc với đường tròn (O) , suy ra ba điểm J, A', L thẳng hàng.

Kết hợp với $O \in AA'$, suy ra $JA' \perp AL$.

Kết hợp với $AL \parallel BC$, suy ra $JA' \perp BC$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Bài toán này khá khó nên ít bạn tham gia giải và một vài lời giải quá dài, một vài lời giải thiếu chính xác.

2) Có thể chứng minh rằng MP, NQ đi qua K .

3) Các bạn sau có lời giải tốt: **Nghệ An:** Đậu Hồng Quân, Lê Hồng Đức, Lê Kim Nhã, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hoà Bình:** Đặng Hữu Hiếu, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Nam Định:** Trần Đại Lâm, 11A1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 12 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa,

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/422.** Sau bao lâu các dao động âm truyền được một khoảng l giữa các điểm A và B , nếu nhiệt độ của không khí giữa chúng biến đổi tuyến tính từ T_1 đến T_2 ? Biết vận tốc trong không khí thay đổi theo nhiệt độ theo biểu thức $v = \alpha \sqrt{T}$, trong đó α là hằng số.

Lời giải. Chọn trục Ox dọc theo AB , gốc tọa độ tại A . Vì nhiệt độ biến đổi tuyến tính từ A đến B nên tại tọa độ x , nhiệt độ là

$$T_x = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x \quad (1)$$

Sau khoảng thời gian dt , sóng âm truyền được quãng đường

$$dx = v_x dt = \alpha \sqrt{T_x} dt \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{dx}{\sqrt{T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x}} = \alpha dt \quad (3)$$

Tích phân hai vế biểu thức (3)

$$\int_0^t \alpha dt = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x}}$$

Tính tích phân này ta tìm được

$$t = \frac{2l(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})}{\alpha(T_2 - T_1)} = \frac{2l}{\alpha(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})}$$

Vậy thời gian để dao động âm truyền từ A đến B bằng $\frac{2l}{\alpha(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})}$. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng:

Đặng Phúc Cường, Trần Thị Thu Hương, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**; Bùi Đình Hiếu 12A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**; Trần Trung Hiếu, 12A1, THPT Thái Hòa; Nguyễn Việt Tuấn, 11A5, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**; Lê Minh Trung, Võ Việt Tân, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; Huỳnh Thanh Dư, 12 Lí, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

NGUYỄN XUÂN QUANG

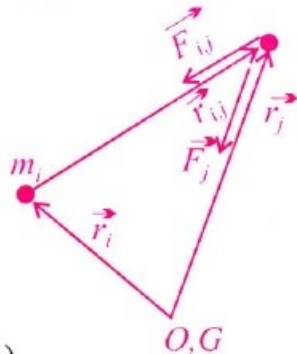
★ **Bài L2/422.** Một hệ gồm nhiều chất điểm. Lực tương tác giữa hai chất điểm bất kì là $\vec{F}_{i,j} = -\alpha m_i m_j \vec{r}_{i,j}$, trong đó α là một hằng số. Ban đầu tất cả các chất điểm đứng yên. Chứng minh rằng các chất điểm sẽ va chạm nhau sau một khoảng thời gian xác định.

Lời giải. Ta chọn hệ quy chiếu gắn với khối tâm G của hệ chất điểm, khi đó

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i = \vec{0} \quad (1)$$

Từ hình vẽ ta có $\vec{r}_{i,j} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$.

Lực tổng hợp tác dụng lên chất điểm bất kì m_j là



$$\vec{F}_j = \sum_i \vec{F}_{ij} = -\alpha m_j \sum_i m_i \vec{r}_{ij} = -\alpha m_j \sum_i m_i (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \quad (2)$$

Theo (1) thì (2) viết lại là

$$\vec{F}_j = -\alpha m_j \sum_i m_i \vec{r}_j = -\alpha M m_j \vec{r}_j \quad (3)$$

trong đó $M = \sum_i m_i$. Từ (3) ta thấy lực tổng hợp tác dụng lên chất điểm m_j ngược chiều với vectơ $\vec{r}_j$, nghĩa là có chiều hướng về khối tâm G .

Phương trình chuyển động của chất điểm m_j là $\vec{F}_j = m_j \vec{a}_j$ hay $-\alpha M m_j \vec{r}_j = m_j \vec{a}_j$

$$\text{Suy ra } -\alpha M \vec{r}_j = \vec{a}_j \quad (4)$$

Chọn trục tọa độ Ox , gốc tọa độ O trùng khối tâm G , đồng thời Ox hướng dọc theo $\vec{r}_j$. Khi đó phương trình (4) có dạng

$$-\alpha M x = x'' \text{ hay } x'' + \omega^2 x = 0 \quad (5)$$

với $\omega = \sqrt{\alpha M}$. Phương trình (5) là phương trình vi phân của một dao động tử điều hòa quanh gốc tọa độ O (cũng là khối tâm G) với tần số $\omega = \sqrt{\alpha M}$ và chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha M}}$.

Trên đây ta xét chuyển động của chất điểm m_j . Xét tương tự ta cũng thấy, mọi chất điểm khác trong hệ cũng dao động điều hòa quanh vị trí cân bằng là khối tâm G , với cùng chu kì

$$\text{là } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha M}}.$$

Do ban đầu các chất điểm đứng yên, nên các chất điểm sẽ va chạm nhau và có vận tốc lớn nhất sau khoảng thời gian

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha M}}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Bài toán này khá phức tạp nên không có bạn nào giải đúng.

NGUYỄN VĂN THUẬN

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T7/426. Given that a, b, c are edge lengths of a triangle. Prove the following inequality

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{3\sqrt{3}abc}{(a+b+c)\sqrt{a+b+c}}.$$

T8/426. Let $ABCD$ be a trirectangular tetrahedron where the edges AB, AC, AD are pairwise perpendicular. M is an arbitrary point in the space. Given that $AB = 4, AC = 8, AD = 12$. Find the minimum value of the expression

$$P = \sqrt{7}MA + \sqrt{11}MB + \sqrt{23}MC + \sqrt{43}MD.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/426. Let (a_n) be a sequence of positive integers where $a_1 = 1, a_2 = 2$ and $a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n, n \geq 1$. Prove that

1) $a_n a_{n+2} + (-1)^n \cdot 5$ is a perfect square for all $n \geq 1$.

2) The equation $x^2 - 4xy - y^2 = 5$ has infinitely many positive integer solutions.

T10/426. Let a be a real number from $(0, 1)$ and b is a complex number, $|b| < 1$. Prove that

$$|b| + \left| \frac{a-b}{1-ab} \right| \geq a.$$

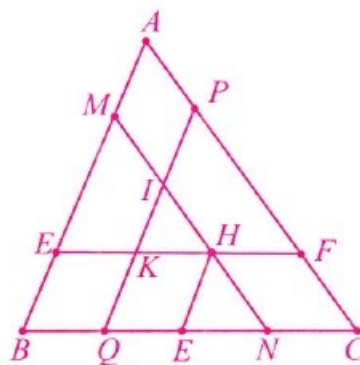
T11/426. Let $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Prove that

$$(\cot \alpha)^{\cos 2\alpha} \geq \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

T12/426. A tetrahedron $ABCD$ is inscribed in a sphere centered at O . Point G does not belong to planes $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ and the sphere (O) . X, Y, Z, T are the centers of the circumscribed spheres of the tetrahedron $GBCD, GCDA, GDAB, GABC$, respectively. Prove that G is the centroid of tetrahedron $ABCD$ if and only if O is the centroid of tetrahedron $XYZT$.

Translated by LE MINH HA

NHÌN BÀI TOÁN... (Tiếp trang 3)



Hình 7

Lời giải. (h. 7) Kẻ HE song song với PQ . Nhận xét thấy $\triangle IKH \sim \triangle ABC, \triangle MEH \sim \triangle ABC, \triangle PKF \sim \triangle ABC$ và $\triangle IQN \sim \triangle ABC$ nên

$$\sqrt{\frac{S_{IKH}}{S_{ABC}}} = \frac{KH}{BC} = \frac{QE}{BC}; \quad \sqrt{\frac{S_{MEH}}{S_{ABC}}} = \frac{EH}{BC} = \frac{BE}{BC};$$

$$\sqrt{\frac{S_{PKF}}{S_{ABC}}} = \frac{KF}{BC}; \quad \sqrt{\frac{S_{IQN}}{S_{ABC}}} = \frac{QN}{BC}.$$

Cộng theo vế của các đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{S_{IKH}}{S_{ABC}}} + \sqrt{\frac{S_{MEH}}{S_{ABC}}} + \sqrt{\frac{S_{PKF}}{S_{ABC}}} + \sqrt{\frac{S_{IQN}}{S_{ABC}}} \\ &= \frac{QE + BE + KF + QN}{BC} = \frac{3QE + BC}{BC} \\ &= 3\sqrt{\frac{S_{IKH}}{S_{ABC}}} + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Hay } \sqrt{\frac{S_{MEH}}{S_{ABC}}} + \sqrt{\frac{S_{PKF}}{S_{ABC}}} + \sqrt{\frac{S_{IQN}}{S_{ABC}}} - 2\sqrt{\frac{S_{IKH}}{S_{ABC}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow S_{ABC} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} - 2\sqrt{S_0})^2. \quad \square$$

Như vậy từ kết quả của bài toán xuất phát nêu cho điểm F "động" thì sẽ cho ta những bài toán mới mà kết quả thu được là rất thú vị. Mong các bạn tiếp tục bổ sung những điều còn bí ẩn xung quanh bài toán xuất phát ở trên.

MỞ RỘNG... (Tiếp trang 15)

Ta nhận được

$$x_1 = \frac{(-1)^s \prod_{i=1}^s (a_1 + z_i)}{\prod_{i=2}^n (a_i - a_1)}, \text{ với } z = -a_1;$$

$$x_2 = \frac{(-1)^{s+1} \prod_{i=1}^s (a_2 + z_i)}{(a_2 - a_1) \prod_{i=3}^n (a_i - a_2)}, \text{ với } z = -a_2;$$

$$x_3 = \frac{(-1)^{s+2} \prod_{i=1}^s (a_3 + z_i)}{\prod_{i=1}^2 (a_3 - a_i) \prod_{i=4}^n (a_i - a_3)}, \text{ với } z = -a_3;$$

$$\dots$$

$$x_n = \frac{(-1)^{s+n-1} \prod_{i=1}^s (a_n + z_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}, \text{ với } z = -a_n,$$

$$\frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_s)}{(z + a_1)(z + a_2) \dots (z + a_n)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{s+k-1} \prod_{i=1}^s (a_k + z_i)}{\prod_{i=1}^{k-1} (a_k - a_i) \prod_{i=k+1}^n (a_i - a_k)(z + a_k)}$$

Từ đây suy ra

$$\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i=1}^s |a_k + z_i|}{\prod_{i=1}^{k-1} |a_k - a_i| \prod_{i=k+1}^n |a_i - a_k| |z + a_k|}$$

$$\geq \frac{|z - z_1| \dots |z - z_s|}{|z + a_1| \dots |z + a_n|}. \text{ Bỏ đề được chứng minh.}$$

Trở lại chứng minh Mệnh đề 2.

Giả sử A_k có tọa vị a_k với $k = 1, 2, \dots, n$ và điểm M có tọa vị z . Theo Bổ đề

$$\frac{1}{(a_1 - z)(a_2 - z) \dots (a_n - z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\prod_{i \neq k} (a_i - a_k)(a_k - z)}.$$

Từ đây suy ra

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{MA_k \prod_{i \neq k} A_i A_k} \geq \frac{1}{\prod_{k=1}^n MA_k}. \square$$

★ **Thí dụ 3.** Giả sử tam giác ABC không tù có ba cạnh là $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng với bất kì điểm M ở trong miền tam giác ABC ta đều có

$$aMB.MC + bMC.MA + cMA.MB \geq abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi M là trực tâm tam giác ABC .

Lời giải. Ta có $aMB.MC + bMC.MA + cMA.MB \geq abc$ (theo BĐT Hayashi). Cho M trùng trực tâm H của tam giác ABC . Khi đó

$$aHB.HC = 2RHB.HC.\sin A = 4RS_{HBC}. \text{ Tương tự } b.HC.HA = 4R.S_{HAC}; c.HA.HB = 4R.S_{HAB}. \text{ Vậy } aHB.HC + bHC.HA + c.HA.HB = 4R.S_{ABC} = abc. \square$$

HƯỚNG DẪN GIẢI... (Tiếp trang 13)

Gọi I, R thứ tự là tâm và bán kính đường tròn cần tìm thì $R = AI = \frac{1}{2}BC = 1$. Có hai đường tròn thỏa mãn đề bài với phương trình là

$$(C_1): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1;$$

$$(C_2): \left(x + \frac{1}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{43}{25}\right)^2 = 1.$$

2) PT đường thẳng Δ cần tìm là

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-2}.$$

Câu VIIb. Đặt $t = \log_3(n^2 - 2n + 6)$ ta được

$$PT \ 3^t + 4^t = 5^t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow n = 3 \text{ (do } n \in \mathbb{N}).$$

$$\text{Ta có } z^{12} = \left(2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{12}$$

$$= 2^{12} \cos(-4\pi) + i \sin(-4\pi) = 2^{12}.$$

Vậy phần thực của z là 2^{12} , phần ảo là 0.

NGUYỄN TUẤN QUẾ

(GV THPT Lương Đắc Bằng, Hoàng Hòa, Thanh Hóa)

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ đến với các tỉnh Sơn La và Điện Biên



Tổng biên tập *Phạm Thị Bạch Ngọc* tặng sách và tạp chí cho Sở Giáo dục và Đào tạo Điện Biên.



Cán bộ Tòa soạn với giáo viên và học sinh Trường THPT chuyên Sơn La.

Nhằm tìm hiểu thực tế về việc sử dụng Tạp chí TH&TT trong các trường phổ thông và thu thập các ý kiến góp ý về nội dung, góp phần làm cho Tạp chí đến với nhiều độc giả, đặc biệt là độc giả các tỉnh miền núi phía Bắc, đoàn cán bộ Tạp chí đã có chuyến công tác tới các tỉnh Sơn La và Điện Biên.

Sáng 22.11.2012, đoàn đã gặp gỡ Ban Giám hiệu và các giáo viên Toán của Trường THPT chuyên Sơn La - Lá cờ đầu thi đua khối trường THPT của Tỉnh Sơn La. Thầy Hiệu trưởng *Cầm Văn Thịnh* vui mừng thông báo trường đã thành lập được 17 năm, hiện có 954 học sinh, giáo viên của trường rất trẻ về tuổi đời và tuổi nghề nhưng rất chịu khó học hỏi nâng cao trình độ chuyên môn. Trường có học sinh *Ngô Phi Long* lớp 11 Toán đã đoạt Huy chương Bạc Châu Á và Huy chương Vàng Quốc tế về thi học sinh giỏi Vật lí. Cô *Lê Thị Thu*, Tổ trưởng tổ Toán, thầy *Đặng Xu Khơ* và thầy *Vũ Văn Nam* đã trao đổi về việc sử dụng Tạp chí TH&TT trong giảng dạy và mong muốn trên Tạp chí và sách tham khảo của Tạp chí cần giới thiệu nhiều chuyên đề

Bồi dưỡng học sinh giỏi hơn để tham khảo. Sáng 23.11.2012, đoàn đã đến Sở Giáo dục - Đào tạo Tỉnh Điện Biên. Phó Giám đốc *Nguyễn Sỹ Quân* cùng với Trưởng phòng Giáo dục Trung học *Lê Ngọc Xuyên*, Trưởng phòng Khảo thí và Quản lí chất lượng giáo dục *Phạm Quang Tể*, Phó Chánh văn phòng *Cao Mai Hoa*,... đã trao đổi với đoàn về khó khăn của ngành Giáo dục Điện Biên (với hơn 84% học sinh là dân tộc ít người, địa bàn xa nhau, trình độ học sinh hạn chế, thiếu thông tin về các tạp chí,...) và mong muốn có nội dung hướng dẫn về kĩ năng nghiệp vụ sư phạm phù hợp với học sinh miền núi trên tạp chí; có kế hoạch kết hợp giới thiệu và phát hành Tạp chí đến giáo viên và học sinh các trường một cách hiệu quả hơn.

Nhân dịp này đoàn đã thăm Nhà tù Sơn La và viếng mộ các anh hùng liệt sĩ ở Nghĩa trang Điện Biên. Chuyến đi để lại nhiều ấn tượng về miền Tây bắc của Tổ Quốc anh hùng. Hi vọng Tạp chí sẽ có thêm nhiều bạn đọc ở miền Tây Bắc yêu mến và đón đọc.

THANH LOAN



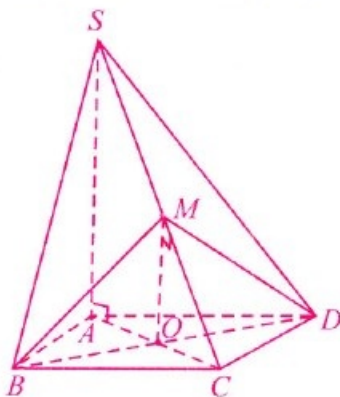
Giải đáp bài:

LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

(Đề đăng trên THPT số 423, tháng 9 năm 2012)

Lời giải của bạn Nam đã phạm sai lầm khi nhận xét MO nhỏ nhất khi và chỉ khi $MO \perp (ABCD)$ (!)

Nhận xét rằng O , M và SC cùng nằm trong mặt phẳng (SAC) có O , SC cố định, M là điểm chuyển động trên đoạn SC . Từ đó suy ra MO nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của O trên SC , hay MO vuông góc với SC tại M .



Ta có thể giải lại bài toán đó như sau:

Gọi O là giao điểm của AC và BD , khi đó $CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ta có $BD \perp AC$, $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. Từ đó $BD \perp (SAC)$, mà $MO \in (SAC)$ nên $BD \perp MO$. Ta thấy $S_{MBD} = \frac{1}{2}BD \cdot MO$, suy ra diện tích tam giác MBD nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của điểm O trên SC , lúc đó tam giác COM vuông tại M .

Ta có $SC^2 = SA^2 + AC^2 = 4a^2 \Rightarrow SC = 2a$.

Do $\triangle COM \sim \triangle CSA$ nên $\frac{CM}{CA} = \frac{CO}{CS}$

$\Rightarrow CM = \frac{CO \cdot CA}{CS} = \frac{a}{2}$. Vậy S_{MBD} nhỏ nhất khi M

thuộc cạnh SC sao cho $CM = \frac{a}{2}$, hay $\frac{CM}{CS} = \frac{1}{4}$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời bình và đáp án tốt: Lê Văn Thắng, 11A1, Trần Trí Dũng, 12A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy, Thái Bình; Phan Xuân Đức, 11C4, THPT Nam Đàn 2, Nghệ An; Dương Minh Chí, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh, Đồng Tháp; Đặng Phi Phôn, Phạm Quốc Đạt, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu; Võ Thị Thiên Trang, 12A1, Trường Quốc học Quy Nhơn, Bình Định.

QUANG PHÚC

TẠI SAO BẠN NAM LẠI CƯỜI?

Nam đổ Bình bài toán: Giải phương trình

$$5.2^x - 7 = \frac{x+2}{2x-1} \quad (1)$$

Bình đã đưa ra lời giải như sau:

ĐK $x \neq \frac{1}{2}$. Xét hai hàm số $f(x) = 5.2^x - 7$ và

$$g(x) = \frac{x+2}{2x-1} \text{ trên tập } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Ta có $f'(x) = 5.2^x \ln 2 > 0$; $g'(x) = -\frac{5}{(2x-1)^2} < 0$,

với $\forall x \in D$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên D , hàm số $g(x)$ nghịch biến trên D .

Do đó PT $f(x) = g(x)$ có không quá một nghiệm. Dễ thấy $x = 1$ là một nghiệm của PT (1).

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nam tùm tùm cười. Vì sao thế các bạn nhỉ?

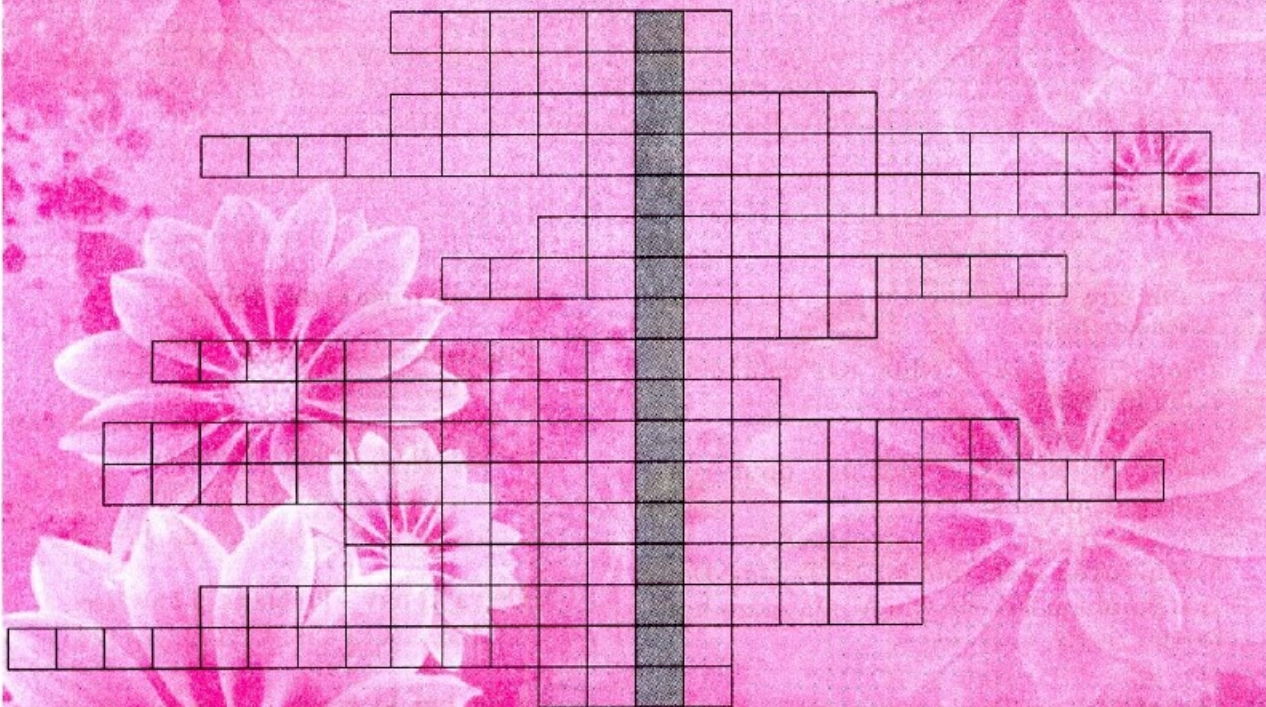
ĐẬU THANH KỲ
(GV THPT Diễn Châu IV, Nghệ An)



SẢN PHẨM CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Nhân kỉ niệm 55 năm thành lập Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (1957-2012) mời các bạn tìm hiểu về một số sản phẩm của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam bằng cách điền các từ cho dưới đây vào ô chữ để tìm được cụm từ ở cột sẫm màu:

SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP, SÁCH THAM KHẢO, SÁCH NGOẠI NGỮ, SÁCH TIẾNG DÂN TỘC, SÁCH ĐIỆN TỬ, GIÁO TRÌNH ĐẠI HỌC DẠY NGHỀ, TẠP CHÍ, TỪ ĐIỂN, TUYỂN TẬP TÁC GIA, LỊCH, BẢN ĐỒ, TRANH ẢNH GIÁO DỤC, GIẤY VỜ, THIẾT BỊ DẠY HỌC, BĂNG Đĩa PHIM GIÁO KHOA, THIẾT BỊ IN XUẤT NHẬP KHẨU.



VÂN KHANH



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 426 (12.2012)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Tổng biên tập kiêm

Phó Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Phan Đình Ánh – Nhìn bài toán dưới dạng hình động.
- 4 **Phạm Thanh Nga – Một ứng dụng của phép chia đa thức.**
- 6 **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013.**
- 7 **Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2012 – 2013.**
- 9 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Trần Quốc Luật – Kỹ năng nhầm nghiệm trong giải phương trình lượng giác.
- 12 **Thử sức trước kì thi - Đề số 3.**
- 13 **Hướng dẫn giải Đề số 2.**
- 14 **Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Đàm Văn Nhĩ – Mở rộng bất đẳng thức Ptolemy và Hayashi cho đa giác.
- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/426,..., T12/426, L1/426, L2/426.
- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 422.
- 29 **Tin tức**
- 30 **Sai lầm ở đâu – Where's Mistake?**
- 31 **Câu lạc bộ – Math Club**

Biên tập : NGUYỄN PHÚC, TẠ NGỌC TRÍ

Trĩ sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật : QUỐC HIỆP, THANH LONG

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CÔNG TY CỔ PHẦN BÀN ĐỒ VÀ TRANH ẢNH GIÁO DỤC

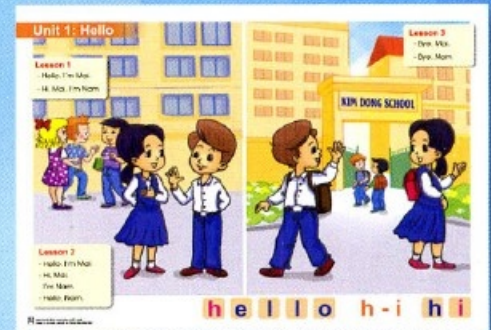
Địa chỉ: 45 Hàng Chuối, quận Hai Bà Trưng, TP. Hà Nội

Điện thoại: (04) 39711146 - 39716096; Fax: (04) 39718847

Website: www.bandotranhanh.vn



Tranh dạy Tiếng Anh lớp 3
Kích thước: 79 x 54 cm
Số lượng: 20 tờ (in hai mặt)



Tranh Thực hành Tiếng Anh lớp 3
Kích thước: 29 x 21 cm
Số lượng: 20 tờ (in hai mặt)



Tranh Thực hành Tiếng Anh lớp 4
Kích thước: 42 x 29 cm
Số lượng: 60 tờ (in hai mặt)



Tranh dạy Tiếng Anh lớp 4
Kích thước: 79 x 54 cm
Số lượng: 20 tờ (in hai mặt)



TRƯỜNG THCS NGÔ GIA TỰ, TP HẢI DƯƠNG

53 NĂM XÂY DỰNG VÀ TRƯỞNG THÀNH



ThS. Đào Thu Hiền
Bí thư chi bộ -
Hiệu trưởng nhà trường

Trường THCS Ngô Gia Tự TP Hải Dương được thành lập tháng 9 năm 1959 (với tên gọi ban đầu là Trường phổ thông Cấp 2 Dân lập Ngô Gia Tự). Đây là ngôi trường lớn với bề dày lịch sử và có truyền thống dạy tốt- học tốt của ngành giáo dục TP Hải Dương. Trải qua 53 năm xây dựng và phát triển, được sự quan tâm, đầu tư của các cấp, các ngành, sự ủng hộ của các bậc phụ huynh học sinh nhà trường đã có một cơ ngơi bề thế với các phòng học và phòng bộ môn đảm bảo chất lượng đáp ứng nhu cầu học tập, vui chơi của học sinh. Hiện nay nhà trường có 26 lớp với hơn 900 học sinh, 61 cán bộ giáo viên và là địa chỉ tin cậy của học sinh và phụ huynh trên toàn thành phố. Từ năm 2007 đến nay, trường THCS Ngô Gia Tự đã liên tục bổ sung hoàn thiện, phát triển về mọi mặt, và đã đạt được được nhiều thành tích đáng tự hào:

HỌC SINH. Trường luôn đứng trong tốp đầu của thành phố về chất lượng giáo dục. Trường đã có 5 học sinh đoạt giải các cuộc thi cấp Quốc gia: 2 em đoạt Huy chương Đồng Olympic Toán Tuổi thơ và 3 em đoạt giải Bông Nhãn, Thám Hoa, Pháo Bông trong cuộc thi Tập trung Trí tuệ Trang nguyên tương lai; 24 giải HSG cấp tỉnh, 238 giải HSG cấp thành phố. Nhà trường luôn là một trong những trường có thành tích cao về chất lượng tuyển sinh vào THPT (năm

học 2009 - 2010 là đơn vị dẫn đầu tỉnh), có em đạt Thủ khoa thi vào THPT chuyên Nguyễn Trãi và THPT Hồng Quang. Trường luôn quan tâm giáo dục phát triển toàn diện cho học sinh qua các hoạt động văn nghệ, thể thao, giáo dục kỹ năng sống... Đội chạy đều của trường đoạt giải Ba cấp Thành phố, đội AEROBIC đoạt giải Nhì cấp Thành phố.

GIÁO VIÊN. 100% giáo viên đạt chuẩn và trên chuẩn trong đó có 2 giáo viên trình độ thạc sĩ, 44 giáo viên trình độ đại học; 8 thầy cô giáo đạt danh hiệu Giáo viên giỏi cấp tỉnh; 63 lượt thầy cô giáo là Chiến sĩ thi đua cấp tỉnh và cơ sở; 3 thầy cô giáo được tặng Bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo; 1 thầy giáo được tặng Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ. Nhiều giáo viên của trường đã trở thành những giáo viên giỏi, cán bộ quản lý giỏi phục vụ cho ngành Giáo dục.

NHÀ TRƯỜNG. Nhà trường liên tục 10 năm đạt danh hiệu Tập thể Lao động Xuất sắc. Đặc biệt, năm học 2011- 2012 trường được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng Bằng khen và công nhận đạt trường chuẩn Quốc gia. Chi bộ Đảng liên tục đạt chi bộ Trong sạch Vững mạnh. Công đoàn nhà trường liên tục đạt danh hiệu công đoàn Vững mạnh Xuất sắc. Đội Thiếu niên Tiên phong Hồ Chí Minh của trường liên tục được công nhận đội Thiếu niên Vững mạnh Xuất sắc, được Tỉnh Đoàn và Trung ương Đoàn tặng Bằng khen.

Năm học 2012- 2013 này, nhà trường đang tiến hành mở rộng thêm diện tích để đáp ứng tốt hơn điều kiện dạy và học nhằm nâng cao chất lượng giáo dục của trường THCS đạt chuẩn Quốc gia.



Các thế hệ giáo viên Nhà trường