



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

8 2012
Số 422

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 49

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Tri sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA



CHÚC MỪNG ĐOÀN VIỆT NAM TẠI KÌ THI
OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 53



**VŨ ĐÌNH HÒA**

(Trưởng đoàn Việt Nam)

Kì thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 53 được tổ chức tại thành phố du lịch Mar del Plata ở Argentina vào hai ngày 10 và 11/7/2012. Tham dự có đúng 100 nước và vùng lãnh thổ trên thế giới với tổng số 548 thí sinh. Đoàn học sinh Việt Nam gồm có các bạn:

1. Nguyễn Tạ Duy, lớp 12 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội,
2. Nguyễn Phương Minh, lớp 12 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội,
3. Đậu Hải Đăng, lớp 12 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội,
4. Nguyễn Hùng Tâm, lớp 12 chuyên Toán, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam,
5. Trần Hoàng Bảo Linh, lớp 11 chuyên Toán ĐHQG TP Hồ Chí Minh,
6. Lê Quang Lâm, lớp 12, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa.

Đoàn do PGS. TSKH Vũ Đình Hòa (ĐHSP Hà Nội) làm Trưởng đoàn và TS Lê Bá Khánh Trình (ĐHQG TP. Hồ Chí Minh) làm Phó đoàn. Đoàn còn có Ông Nguyễn Hữu Độ (Giám đốc Sở GD-ĐT Hà Nội), Ông Nguyễn Khắc Minh (Chuyên viên Cục Khảo thí Bộ

Giáo dục và Đào tạo) là Quan sát viên A, Thầy Kim Ngọc Chính, Thầy Nguyễn Thanh Sơn (THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa) và Thầy Hà Duy Hưng (THPT chuyên ĐHSP Hà Nội) là Quan sát viên C.

Tuân thủ theo nguyên tắc và căn cứ vào điểm thi, Ban Giám khảo đã quyết định trao 51 Huy chương Vàng (từ 28 điểm), 88 Huy chương Bạc (từ 21 điểm), 138 Huy chương Đồng (từ 14 điểm) và 148 Bằng khen (làm tròn vẹt 1 bài).

Sáu bài thi năm nay gồm: Bài số 1 (kí hiệu P1) Hình học của Hy Lạp, Bài số 2 (P2) Bất đẳng thức của Úc, Bài số 3 (P3) Tổ hợp của Canada, Bài số 4 (P4) Phương trình hàm của Nam Phi, Bài số 5 (P5) Hình học của Czech và Bài số 6 (P6) Số học của Serbia. Kết quả, chúng ta có 1 Huy chương Vàng, 3 Huy chương Bạc và 2 Huy chương Đồng và được xếp thứ 9 sau Hàn Quốc (1), Trung Quốc (2), Mỹ (3), Nga (4), Thái Lan (5), Canada (5) cùng vị trí thứ 5, Singapore (7) và Iran (8).

Sau đây là kết quả các cá nhân của Đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 53:

STT	Họ và tên	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Tổng điểm	Huy chương
1	Nguyễn Tạ Duy	7	7	0	6	7	0	27	Bạc
2	Đậu Hải Đăng	7	7	3	7	7	0	31	Vàng
3	Nguyễn Phương Minh	7	7	0	6	7	0	27	Bạc
4	Lê Quang Lâm	7	7	0	5	0	0	19	Đồng
5	Trần Hoàng Bảo Linh	7	1	0	5	7	0	20	Đồng
6	Nguyễn Hùng Tâm	7	7	1	2	7	0	24	Bạc

Bài số 4 là Bài về phương trình hàm. Hầu hết các bạn trong đội tuyển đều giải được bài này, trừ bạn Nguyễn Hùng Tâm sơ suất chia hai về cho một biến mà không xét khả năng nó bằng 0 nên để lọt mất nghiệm. Tuy vậy, trừ bạn Đậu Hải Đăng, các bạn khác không chịu thử lại nghiệm, mà chỉ viết "Để dành thử lại thấy thỏa mãn" nên bị trừ 2 hoặc 1 điểm. Nếu ở bài này, các bạn làm cẩn thận thử lại nghiệm như bạn Đậu Hải Đăng, thì chúng ta đã có 3 Huy chương Vàng và 3 Huy chương Bạc.

Bài 3 và bài 6 là các bài khó nhất trong kì thi. Bài 3 có hai câu a) và b). Bạn Đậu Hải Đăng đã giải quyết trọn vẹn phần a) với lời giải hoàn toàn khác với đáp án. Bạn Nguyễn Hùng Tâm đã tìm ra hướng đi đúng hết như đáp án, nhưng chỉ sử dụng cách tiếp cận của mình để giải quyết một trường hợp đặc biệt của bài toán mà không áp dụng nó giải quyết trọn vẹn toàn bộ phần a) của bài 3.

Sau đây là sáu bài toán thi

NGÀY THỨ NHẤT (10/7/2012)

Bài 1. Cho tam giác ABC , điểm J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A . Đường tròn bàng tiếp này tiếp xúc với cạnh BC tại M , với đường thẳng AB và AC tại K, L một cách tương ứng. Đường thẳng LM và BJ cắt nhau tại F , đường thẳng KM và CJ cắt nhau tại G . S là giao điểm của đường thẳng AF và BC , T là giao điểm của đường thẳng AG và BC .

Chứng minh rằng M là trung điểm của ST .

(Đường tròn **bàng tiếp** góc A của tam giác ABC là đường tròn tiếp xúc với cạnh BC , với tia AB ở phần kéo dài qua B , và với tia AC ở phần kéo dài qua C).

Bài 2. Cho trước $n \geq 3$ là một số nguyên, và $a_2, a_3, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_2 a_3 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Bài 3. Trò chơi **nói dối và đoán** là một trò chơi giữa hai người chơi A và B . Luật chơi dựa trên hai số nguyên dương k và n mà cả hai người chơi đều được biết trước.

Khi bắt đầu trò chơi, A chọn các số nguyên x và N với $1 \leq x \leq N$. Người chơi A giữ bí mật

số x , và thông báo số N một cách trung thực cho người chơi B . Bây giờ B tìm cách nhận thông tin về số x bằng cách hỏi người chơi A các câu hỏi như sau: B xác định một tập hợp S các số nguyên dương tùy ý và hỏi A rằng liệu x có thuộc S . Người chơi B có thể hỏi bao nhiêu câu hỏi cũng được, và cũng có thể hỏi lại một câu hỏi nhiều lần, vào bất cứ lúc nào mà anh ta muốn. Người chơi A phải trả lời mỗi câu hỏi của B ngay lập tức bằng "đúng" hoặc "sai", nhưng anh ta được phép nói dối nhiều lần một cách tùy ý. Sự hạn chế duy nhất ở đây là trong bất kì $k + 1$ câu trả lời liên tiếp nào cũng phải có ít nhất một câu trả lời thật.

Sau khi B đã đặt nhiều câu hỏi như anh ta muốn, anh ta phải xác định một tập hợp X có không quá n số nguyên dương. Nếu x thuộc X thì B thắng cuộc; còn nếu ngược lại, anh ta thua cuộc. Chứng minh rằng

1) Nếu $n \geq 2^k$, thì B có thể bảo đảm thắng cuộc.

2) Với tất cả số k đủ lớn, tồn tại $n \geq 1,99^k$ sao cho B không thể thắng cuộc.

NGÀY THỨ HAI (11/7/2012)

Bài 4. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho với tất cả số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$ bất đẳng thức sau đây đúng:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Ở đây, $\mathbb{Z}$ kí hiệu tập hợp các số nguyên).

Bài 5. Cho tam giác ABC với $\widehat{BCA} = 90^\circ$, và D là chân đường cao hạ từ C . Cho X là một điểm nằm ở miền trong đoạn thẳng CD . K là điểm trên đoạn thẳng AX sao cho $BK = BC$. Tương tự, L là điểm nằm trên đoạn thẳng BX sao cho $AL = AC$. M là giao điểm của AL và BK . Chứng minh rằng $MK = ML$.

Bài 6. Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$



TỪ MỘT BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI

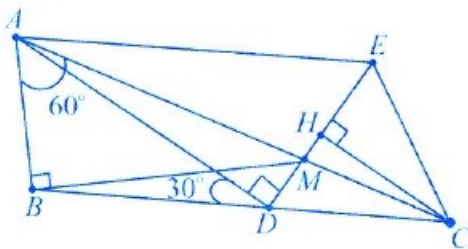
ĐỖ QUANG MINH

(GV THCS Nguyễn Bá Ngọc, Tuy An, Phú Yên)

Khi giải xong một bài toán mà đặc biệt là bài thi học sinh giỏi (HSG), các em thường hay thỏa mãn và không trao đổi gì thêm. Nhưng đằng sau lời giải đó thì biết bao nhiêu kết quả rất thú vị đang chờ chúng ta khai thác. Chúng ta hãy bắt đầu từ một bài toán thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Yên năm học 2011 – 2012.

★BÀI TOÁN GÓC. Cho tam giác ABC có $AC = 3AB$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{ADB} = 30^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với AD tại D lấy điểm E sao cho $DE = DC$ (E và A cùng phía đối với BC). Chứng minh rằng $AE \parallel BC$.

Lời giải. Cách 1. Gọi M là giao điểm của AC và DE (h. 1).



Hình 1

Vì $\widehat{ADB} = 30^\circ$; $\widehat{ADM} = 90^\circ$ nên $\widehat{MDC} = 60^\circ$, vậy tam giác DEC đều. Do đó

$$\triangle DMC \sim \triangle ABC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MD}{DC} = \frac{BA}{AC} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } DM = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}DE \Rightarrow \frac{MD}{ME} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Kẻ $CH \perp DE$ ($H \in DE$) thì $DH = HE = \frac{1}{2}DE$

$$\text{và } \frac{MH}{MD} = \frac{1}{2} \text{ (do (1)).}$$

Lại có $AD \parallel CH$ (cùng vuông góc với DE) nên theo định lý Thales, ta có

$$\frac{MC}{MA} = \frac{MH}{MD} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $AE \parallel DC$, hay $AE \parallel BC$ (đpcm).

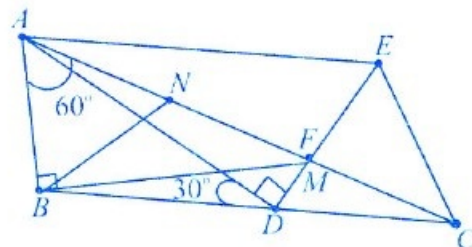
Cách 2. (h. 1) Từ $\triangle DMC \sim \triangle ABC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DM}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } DM = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}DE \Rightarrow \frac{MD}{ME} = \frac{1}{2}.$$

Do tam giác DEC đều nên $\widehat{MAB} = 60^\circ = \widehat{MDC}$. Suy ra tứ giác $ABDM$ nội tiếp. Do đó $\widehat{ABM} = \widehat{ADM} = 90^\circ$. Tam giác ABM vuông tại B có $\widehat{BAM} = 60^\circ$ nên $AM = 2AB$. Kết hợp với $AC = 3AB$, ta có $AM = 2CM \Leftrightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{1}{2}$. Tương tự như trên ta cũng được điều phải chứng minh.

Cách 3. Gọi N, F là các điểm thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AN = NF = FC = AB$ (h. 2).



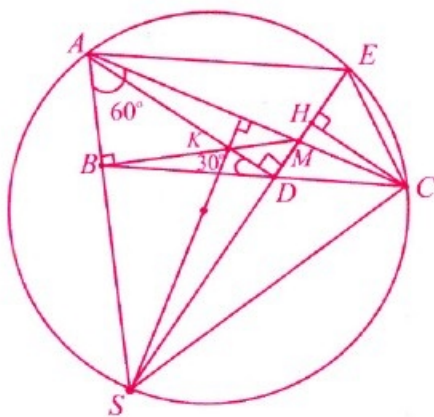
Hình 2

Từ $\triangle ABN$ là tam giác đều, suy ra $BN = NA = NF = \frac{1}{2}AF$. Do đó tam giác ABF vuông tại B . Kết hợp với $\widehat{FAB} = 60^\circ$, ta có $\widehat{AFB} = 30^\circ = \widehat{ADB}$.

Suy ra tứ giác $AFDB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{ABF} = 90^\circ$
 $\Rightarrow DA \perp DF \Rightarrow F \equiv M$ (với M là giao điểm của AC và DE). Vậy $\frac{MC}{MA} = \frac{FC}{FA} = \frac{1}{2}$. Và chứng minh như trên ta cũng có $\frac{MD}{ME} = \frac{1}{2}$.

Ta cũng được điều phải chứng minh.

Nhận xét 1. Ở Cách 1 thì người giải chỉ dừng lại ở kiến thức lớp 8. Ở Cách 2 và 3 thì chúng ta dùng kiến thức lớp 9 (Tứ giác nội tiếp). Vậy qua lời giải ở Cách 2 và 3 thì chúng ta có thấy được điều gì không? Xin thưa là có đấy! Thật vậy nếu gọi S là giao điểm của hai đường thẳng AB và DE ; K là giao điểm của AD và BM thì K là trực tâm của tam giác AMS , và do đó $SK \perp AC$ (h. 3).



Hình 3

Từ đó chúng ta có bài toán sau

★ **Bài toán 1.** Với giả thiết như bài toán gốc. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng AB và DE ; K là giao điểm của AD và BM . Chứng minh rằng $SK \perp AC$.

Nhận xét 2. Do $AE \parallel BC$, kết hợp với tam giác DEC đều, suy ra $\widehat{AED} = \widehat{CDE} = \widehat{CED} = 60^\circ$. Vậy ED là tia phân giác của góc AEC . Từ đó ta có bài toán sau

★ **Bài toán 2.** Với giả thiết như bài toán gốc. Chứng minh rằng ED là tia phân giác của góc AEC .

Nhận xét 3. Ta có $\widehat{SAC} = \widehat{SEC} = 60^\circ$ nên tứ giác $AEC S$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ACS} = \widehat{AES} = 60^\circ$. Do đó $\widehat{SAC} = \widehat{ACS} = 60^\circ$, suy ra tam giác ACS đều. Và như thế ta lại có một bài toán thú vị hơn.

★ **Bài toán 3.** Cho tam giác ABC có $AC = 3AB$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{ADB} = 30^\circ$. Đường thẳng vuông góc với AD tại D cắt đường thẳng AB tại S . Chứng minh rằng ACS là tam giác đều.

Nhận xét 4. Theo bài toán gốc thì khi giải bài toán 3 chúng ta phải dựng tam giác đều DEC .

Do bốn điểm A, E, C, S cùng nằm trên một đường tròn và ACS là tam giác đều, nên $ED = EC$. Lại vì $\triangle DCS = \triangle ECA$ (c.g.c) nên $DS = EA$. Vậy $ED + DS = EC + EA \Rightarrow ES = EA + EC$.

Lại có tam giác DEC đều, nên

$$HE = \frac{1}{2}EC; HC = \frac{\sqrt{3}}{2}EC.$$

$$\text{Do đó } ES^2 + EA^2 + EC^2 = ES^2 + (ES - EC)^2 + EC^2 = 2(ES^2 + EC^2 - ES \cdot EC) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} SC^2 &= SH^2 + HC^2 = (ES - HE)^2 + \frac{3}{4}EC^2 \\ &= \left(ES - \frac{1}{2}EC\right)^2 + \frac{3}{4}EC^2 \\ &= ES^2 + EC^2 - ES \cdot EC \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $ES^2 + EA^2 + EC^2 = 2SC^2$, với chú ý rằng $SC = AC$. Đến đây ta lại có một bài toán mới.

★ **Bài toán 4.** Với giả thiết như bài toán gốc. Chứng minh rằng $ES^2 + EA^2 + EC^2 = 2AC^2$.

Nhận xét 5. Dễ thấy $\triangle ESA \sim \triangle ECM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EA}{EM} = \frac{ES}{EC} \Rightarrow \frac{1}{EM} = \frac{ES}{EA \cdot EC}.$$
 Suy ra

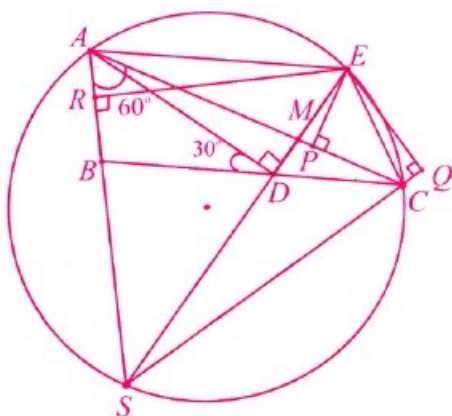
$$\frac{1}{EM} = \frac{1}{EA} + \frac{1}{EC} \quad (\text{do } ES = EA + EC).$$

Và như thế một bài toán mới lại xuất hiện.

★ **Bài toán 5.** Với giả thiết như bài toán gốc. Gọi M là giao điểm của đường thẳng DE với đường thẳng AC . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{EM} = \frac{1}{EA} + \frac{1}{EC}.$$

Nhận xét 6. (h. 4). Gọi P, Q, R lần lượt là hình chiếu vuông góc của E trên AC, CS, SA .



Hình 4

Dễ thấy $\widehat{SAE} < 90^\circ$ và tứ giác $AECS$ nội tiếp.

Khi đó điểm R thuộc đoạn SA và điểm Q thuộc tia đối của tia CS .

Ta có $\triangle ECP \sim \triangle ESR$ (g.g) và $\triangle EPA \sim \triangle EQS$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EP}{ER} = \frac{EC}{ES}$ và $\frac{EP}{EQ} = \frac{EA}{ES}$

$$\Rightarrow \frac{EP}{EQ} + \frac{EP}{ER} = \frac{EA}{ES} + \frac{EC}{ES} = 1 \text{ (do } EA + EC = ES).$$

Do đó $\frac{1}{EQ} + \frac{1}{ER} = \frac{1}{EP}$. Ta lại có bài toán

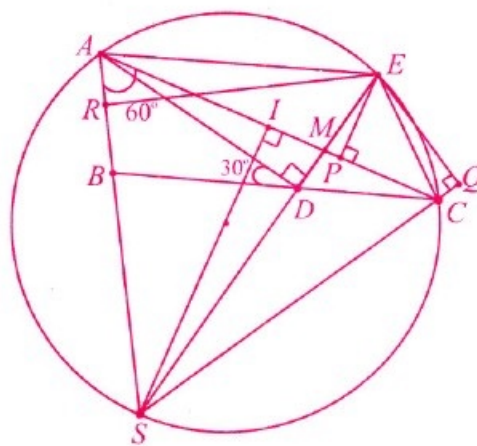
★ **Bài toán 6.** Với giả thiết của Bài toán 5. Đường thẳng DE cắt đường thẳng AB tại S .

Gọi P, Q, R lần lượt là hình chiếu vuông góc của E trên AC, CS, SA . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{EQ} + \frac{1}{ER} = \frac{1}{EP}.$$

Nhận xét 7. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên AC (h. 5).

Ta có $S_{SAC} = S_{ESA} + S_{ESC} - S_{EAC}$



Hình 5

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} AC \cdot SI = \frac{1}{2} SA \cdot ER + \frac{1}{2} SC \cdot EQ - \frac{1}{2} AC \cdot EP$$

$$\Leftrightarrow SI = ER + EQ - EP \text{ (do } AC = SA = SC)$$

$$\Leftrightarrow SI^2 = ER^2 + EQ^2 + EP^2 + 2(ER \cdot EQ - ER \cdot EP - EQ \cdot EP) \quad (5)$$

Theo bài toán 6, ta có $\frac{1}{EP} = \frac{1}{EQ} + \frac{1}{ER}$

$$\Rightarrow ER \cdot EQ - ER \cdot EP - EQ \cdot EP = 0 \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $SI^2 = ER^2 + EQ^2 + EP^2$.

Với chú ý rằng $SI = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$. Từ đó ta có

★ **Bài toán 7.** Với giả thiết như Bài toán 6.

Chứng minh rằng $ER^2 + EQ^2 + EP^2 = \frac{3}{4} AC^2$.

Cuối cùng, mời các bạn cùng thử sức khám phá với một bài toán được trích trong đề thi HSG Toán lớp 9 của tỉnh Phú Yên năm học 2007 – 2008 có nội dung như sau:

Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) (với $R_1 < R_2$) cắt nhau tại M và P . Gọi MA là dây cung của (O_1) tiếp xúc với (O_2) tại M ; MB là dây cung của (O_2) tiếp xúc với (O_1) tại M . Trên tia MP lấy đoạn $PH = MP$. Từ O_1 kẻ đường vuông góc với MA , từ O_2 kẻ đường vuông góc với MB , hai đường này cắt nhau tại S . Chứng minh rằng PS vuông góc với MH và từ đó suy ra tứ giác $MAHB$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI

NĂM HỌC 2012 - 2013

VÒNG 1

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu I (3,5 điểm). 1) Giải phương trình

$$\sqrt{x+9} + 2012\sqrt{x+6} = 2012 + \sqrt{(x+9)(x+6)}.$$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 4 \\ 2x + y + xy = 4. \end{cases}$$

Câu II (2,5 điểm). 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức

$$(x+y+1)(xy+x+y) = 5 + 2(x+y).$$

2) Giả sử x, y là số thực dương thỏa mãn điều kiện $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}+1) \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức
$$P = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}.$$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi M là một điểm trên

cung nhỏ $\widehat{BC}$ (M khác B , M khác C và AM không đi qua O). Giả sử P là một điểm thuộc đoạn thẳng AM sao cho đường tròn đường kính MP cắt cung nhỏ $\widehat{BC}$ tại điểm N khác M .

1) Gọi D là điểm đối xứng với điểm M qua O . Chứng minh rằng ba điểm N, P, D thẳng hàng.

2) Đường tròn đường kính MP cắt MD tại điểm Q khác M . Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AQN .

Câu IV (1 điểm). Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \leq b \leq 3 \leq c$, $c \leq b+1$, $a+b \geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

VÒNG 2

(Dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu I (3 điểm). 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ 9xy(3x-y) + 6 = 26x^3 - 2y^3. \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{4-x}+2) = 2x.$$

Câu II. (3 điểm). 1) Tìm hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = 3\sqrt{2x-1} + x\sqrt{5-4x^2}, \text{ với } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Giả sử M, N là hai điểm thuộc cung nhỏ $\widehat{BC}$ sao cho MN song song với BC và tia AN nằm giữa hai tia AM, AB .

Gọi P là hình chiếu vuông góc của điểm C trên AN và Q là hình chiếu vuông góc của điểm M trên AB .

1) Giả sử CP cắt QM tại điểm T . Chứng minh rằng T nằm trên đường tròn (O) .

2) Gọi giao điểm của NQ và (O) là R khác N . Giả sử AM cắt PQ tại S . Chứng minh rằng bốn điểm A, R, Q, S cùng thuộc một đường tròn.

Câu IV (1 điểm). Với mỗi số n nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 cố định, xét các tập n số thực đôi một khác nhau $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Kí hiệu $C(X)$ là số các giá trị khác nhau của tổng $x_i + x_j$ ($1 \leq i < j \leq n$). Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $C(X)$.

PHẠM VĂN HÙNG

(GV Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)
Sưu tầm và giới thiệu

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Đề thi đã đăng trên TH&TT số 421, tháng 7 năm 2012)

VÒNG 1

Câu 1 a) Ta có

$$P = \sqrt{a-b} \left(\frac{1}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \times \\ \times \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

b) Từ $a = b + 1$ và BĐT Cauchy, ta có

$$P = \frac{(b+1)^2 + b^2}{b} = 2b + \frac{1}{b} + 2 \geq 2\sqrt{2b \cdot \frac{1}{b}} = 2\sqrt{2} + 2,$$

$$\min P = 2\sqrt{2} + 2 \text{ tại } a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; b = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 2. Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h), vận tốc của ô tô là y (km/h) ($x > 0, y > 0$).

Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{9y}{4} + 4x = 210 \\ \frac{9y}{4x} = \frac{4x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9y}{4} + 4x = 210 \\ 3y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 40. \end{cases}$$

Câu 3. a) Số giao điểm của (d) và (P) là số nghiệm của PT

$$-x^2 = mx - m - 2 \Leftrightarrow x^2 + mx - m - 2 = 0.$$

Do $\Delta = (m+2)^2 + 4 > 0, \forall m \Rightarrow$ đpcm.

b) Theo định lý Viète, ta có

$$x_1 + x_2 = -m; x_1 x_2 = -(m+2).$$

Vì vậy $|x_1 - x_2| = \sqrt{20} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 20$

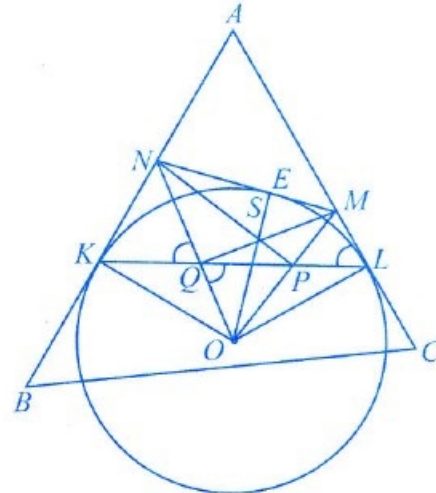
$$m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ hoặc } m = -6.$$

Câu 4. (h. 1). Do tứ giác $AKOL$ nội tiếp nên

$$\widehat{MON} = \widehat{MOE} + \widehat{EON} = \frac{1}{2}\widehat{EOL} + \frac{1}{2}\widehat{EOK} = \frac{1}{2}\widehat{KOL} \\ = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BAC}) = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

b) Tam giác KAL cân tại A nên $\widehat{QLM} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{KAL}$.

Suy ra $\widehat{QOM} = \widehat{QLM}$.



Hình 1

Vậy tứ giác $MLOQ$ nội tiếp suy ra $MQ \perp NO$. Tương tự $NP \perp MO \Rightarrow$ đpcm.

c) Từ $\triangle MPL \sim \triangle QNK$ (g.g) suy ra $\frac{ML}{PL} = \frac{KQ}{NK}$.

Do đó $KQ \cdot PL = ML \cdot NK = ME \cdot EN$.

Câu 5. Từ giả thiết suy ra $x > y > 0$ và áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$(x+y)^2 = xy(x-y)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4xy((x+y)^2 - 4xy) \\ \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4xy + (x+y)^2 - 4xy}{2} \right)^2 = \frac{1}{16}(x+y)^4.$$

Vậy $x + y \geq 4$. Từ đó

$$\min P = 4 \text{ khi } x = 2 + 2\sqrt{2}; y = 2 - \sqrt{2}.$$

VÒNG 2

Câu 1 Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{(\sqrt{x^2 + 2x - 1})^2} + 2(x^2 + 2x - 1) - 2 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$, ta có $2t^2 + t - 1 = 0$.

$$\text{Đáp số. } x = \frac{1}{2}; x = \frac{-5}{2}.$$

Câu 2. a) Từ $a^2(b+c) = b^2(c+a)$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = 0 \text{ (do } a \neq b)$$

$$\Rightarrow (b-c)(ab+bc+ca)=0$$

$$\Rightarrow b^2a+b^2c-bc^2-ac^2=0.$$

$$\text{Vậy } M=c^2(a+b)=b^2(c+a)=2012.$$

b) Gọi các số đã cho là a_i ($1 \leq i \leq 5$). Biểu diễn $a_i = 2^{\alpha_i} \cdot 3^{\beta_i}$, với α_i, β_i là các số tự nhiên. Xét năm cặp số (α_i, β_i) ($1 \leq i \leq 5$): mỗi cặp rơi vào một trong bốn trường hợp (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn), (lẻ, lẻ). Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai cặp (α_i, β_i) và (α_j, β_j) ($i \neq j$) cùng thuộc một trường hợp. Khi đó $\alpha_i + \alpha_j, \beta_i + \beta_j$ là những số chẵn, suy ra $a_i \cdot a_j$ là một số chính phương.

Câu 3. Áp dụng nhận xét

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \text{ ta có}$$

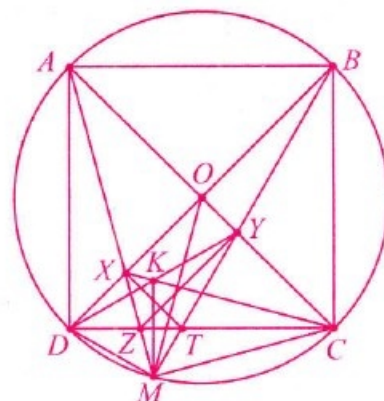
$$\begin{aligned} & \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + \dots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1|}{2n} \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) + \dots + (x_n + x_1 + |x_n - x_1|)}{2n} \\ &= \frac{\max\{x_1, x_2\} + \dots + \max\{x_n, x_1\}}{n} \leq \max\{x_1, \dots, x_n\}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Câu 4. Bổ sung một học sinh “đặc biệt” H ngồi vào bàn còn trống. Sau khi chuyển chỗ 35 học sinh của lớp, ta cũng chuyển học sinh H sang ngồi ở bàn trống mới. Gắn cho H một số nguyên theo quy tắc như đối với các học sinh khác. Với 36 học sinh này (sau khi đã bổ sung H), thì việc chuyển chỗ chỉ là một hoán vị các vị trí (i, j) ($1 \leq i \leq 4; 1 \leq j \leq 9$) cho nhau. Do đó tổng của tất cả các chỉ số hàng và chỉ số cột ứng với 36 học sinh trước khi chuyển chỗ và sau khi chuyển chỗ là như nhau. Điều đó có nghĩa là tổng số các số được gán cho 36 học sinh là bằng 0. Vậy tổng số các số được gán cho 35 học sinh của lớp bằng $-h$, với h là số được gán cho học sinh H . Rõ ràng $h \geq (1+1) - (4+9) = -11$. Do đó tổng các số được gán cho 35 học sinh của lớp là không vượt quá 11.

Câu 5 a) (h. 2)

• Do $\widehat{XDT} = \widehat{XMT} (= 45^\circ)$ nên tứ giác $XDMT$ nội tiếp. Mà $\widehat{DMT} = 90^\circ$ nên $\widehat{DXT} = 90^\circ$.



Hình 2

Tam giác AXC có XO là phân giác trong và $XO \perp XT$, nên XT là phân giác ngoài. Vậy $\widehat{MXT} = \widehat{TXC}$; $\widehat{MYZ} = \widehat{ZYD}$.

• Kẻ $ME \perp CD$, $E \in (O)$. CX cắt AD tại V , DE cắt AB tại L .

Dễ thấy $DZ = DV$, $DZ = AL$ nên $DV = AL$. Do đó $CV \perp DL$. Tương tự $DY \perp CE$. Do vậy $\widehat{CKD} = \widehat{XKY} = 180^\circ - \widehat{CED} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

b) Ta có $\widehat{KMX} = \widehat{DAM} = \widehat{DBM} = \widehat{YMO}$.

Mà tứ giác $MXOC$ nội tiếp nên $\widehat{MKX} = \widehat{MOY}$.

Vậy $\triangle MXK \sim \triangle MOY$. Suy ra $\frac{KX}{MX} = \frac{YO}{MO} = \frac{ZO}{CO}$

(do $YZ \parallel OZ$). Tương tự $\frac{KY}{MY} = \frac{TC}{CD}$. Do đó

$$\frac{KX}{MX} + \frac{KY}{MY} + \frac{ZT}{CD} = \frac{ZO + TC + ZT}{CD} = 1.$$

c) Gọi $XT \cap YZ = I$. Theo định lý Thales ta có

$$\frac{IT}{IC} = \frac{MT}{MB} = \frac{ZT}{AB} = \frac{ZT}{CD} = \frac{TJ}{CO}.$$

Mặt khác $TJ \parallel CO$ nên I, J, O thẳng hàng. Vậy XT, YZ, OI đồng quy. Gọi $EM \cap AB = H$ thì

$$\frac{IJ}{IO} = \frac{IT}{IC} = \frac{MT}{MB} = \frac{MI}{MH} = \frac{IK}{IE}.$$

Vậy $JK \parallel OE$. Suy ra $\frac{JK}{OE} = \frac{IJ}{IO} = \frac{JT}{OC}$.

Vì $OE = OC$ nên $JK = JT = JZ$. Do đó J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT .

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội) giới thiệu

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH THỪA THIÊN - HUẾ

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức

$$Q = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right).$$

- 1) Rút gọn biểu thức Q .
- 2) Tính giá trị Q khi $x = 2013$.

Bài 2. (4 điểm)

Cho phương trình

$$x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0 \quad (1)$$

- 1) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm dương.
- 2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Tìm m nguyên dương để $A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.

Bài 3. (4 điểm)

- 1) Giải phương trình

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \sqrt{3x+1} = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x+2}$$

- 2) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ sao cho $x < y$ và $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2012}$.

Bài 4. (5 điểm)

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ ($R > R'$) cắt nhau tại A và B . Một tiếp tuyến chung tiếp xúc với đường tròn (O) tại C , tiếp xúc với đường tròn (O') tại D . Gọi I là giao điểm của AB và CD , B' là điểm đối xứng của B qua I ; C' là điểm đối xứng của B qua CD . Qua A kẻ cát tuyến song song với CD cắt đường tròn (O) tại P , cắt đường tròn (O') tại Q . Gọi $M; N$ lần lượt là giao điểm của DB, CB với PQ .

- 1) Chứng minh rằng A là trung điểm của MN .
- 2) Chứng minh rằng năm điểm A, C, B', C', D cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 5. (2,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC , cạnh BC tiếp xúc với đường tròn (O) tại D . Chứng minh rằng nếu tam giác ABC vuông tại A thì $S_{ABC} = BD \cdot DC$.

Bài 6. (2 điểm)

Tìm số tự nhiên n để $2012 + n^2$ là số chính phương.

NGUYỄN TẤN TƯỜNG

(Sở GD&ĐT Thừa Thiên - Huế)
sưu tầm và giới thiệu

ĐÓN ĐỌC

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ (QUYỂN 6)

Cuốn sách được biên soạn tiếp nối bộ TUYÊN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ (Quyển 1 đến Quyển 5) gồm các bài viết chọn lọc đã đăng trên Tạp chí THPT chủ yếu từ năm 2000 đến 2008. Sách gồm 5 chương:

- Chương 1. Giải một số dạng phương trình
- Chương 2. Một số cách chứng minh bất đẳng thức đại số
- Chương 3. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác
- Chương 4. Chuyên đề về số π
- Chương 5. Cuộc sống với toán học

Sách sẽ phát hành vào tháng 9 năm 2012.



Số 422 (8-2012)

TOÁN HỌC
& Tuổi trẻ **9**



CAO MINH QUANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long)

Trong kì thi tuyển sinh vào Đại học năm 2011, ở môn Toán khối A có bài toán

CÂU V [Khối A, 2011] Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

Bài toán này được xem là bài khó và hay nhất của đề thi, có rất ít học sinh đã giải được bài toán này. Chúng ta hãy cùng xem xét "cội nguồn" của bài toán trên như thế nào?

Có lẽ thật bất ngờ khi bài toán này có "cội nguồn" từ bài toán hết sức đơn giản.

★ **Bài toán 1.** Cho các số thực không âm a, b . Khi đó ta có các kết quả sau đây.

a) **Kết quả 1**

$$\text{Nếu } ab \leq 1 \text{ thì } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}.$$

b) **Kết quả 2**

$$\text{Nếu } ab \geq 1 \text{ thì } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}.$$

Lời giải. Sử dụng phép biến đổi đại số, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} \\ &= \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} \right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \right) \\ &= \frac{b-a}{1+ab} \left(\frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2} \right) = \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)}. \end{aligned}$$

Từ biến đổi trên ta có ngay các kết quả cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $ab = 1$. □

Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu một số bài toán khác có liên quan trực tiếp đến Bài toán 1.

★ **Bài toán 2. [Olympic Nga, 2000].**

Cho $a, b \in [0;1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}.$$

Lời giải. Vì $a, b \in [0;1]$ nên $ab \leq 1$. Sử dụng kết quả 1 của Bài toán 1, kết hợp với BĐT Cauchy – Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \right)^2 \leq (1+1) \left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \right) \\ & \leq \frac{4}{1+ab} \text{ hay } \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. □

Với kết quả Bài toán 2, ta có thể giải được hệ phương trình sau đây.

★ **Bài toán 3. [Olympic Việt Nam, 2009]**

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9}. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x(1-2x) \geq 0$ và $y(1-2y) \geq 0$

$$\text{hay } x, y \in \left[0; \frac{1}{2} \right].$$

Với các số thực $a \geq 0, b \geq 0$, ta đặt $a^2 = 2x^2$,

$$b^2 = 2y^2 \text{ thì } x = \frac{a}{\sqrt{2}}, y = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Từ PT thứ nhất của hệ, ta có PT

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+ab}}.$$

Chú ý rằng, từ điều kiện $x, y \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, ta có

$$a, b \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Sử dụng kết quả Bài toán 2, suy ra $a = b$ hay $x = y$. Thế vào PT thứ hai của hệ, ta được $\sqrt{x(1-2x)} = \frac{1}{9}$

$$\Leftrightarrow 162x^2 - 81x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{36}$$

(đều thỏa mãn điều kiện ban đầu).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(\frac{9+\sqrt{73}}{36}; \frac{9+\sqrt{73}}{36}\right); \left(\frac{9-\sqrt{73}}{36}; \frac{9-\sqrt{73}}{36}\right). \quad \square$$

★ **Bài toán 4. [Việt Nam TST, 2005]** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương

$$\text{với } \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} \geq \frac{3}{8}$$

$$\text{với } x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}.$$

Bằng phép thế như trên suy ra x, y, z là các số dương và $xyz = 1$. Vì $xyz = 1$ nên trong ba số x, y, z phải có một số nhỏ hơn hoặc bằng 1. Giả sử $z \leq 1$ thì $xy \geq 1$. Áp dụng BĐT Cauchy, kết hợp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{8}$$

$$\geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{(1+x)^6} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{(1+x)^3} \geq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{16}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{(1+y)^3} \geq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{16}.$$

$$\text{Hơn nữa } \frac{1}{(1+z)^3} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{1}{16}.$$

Từ đó ta cần chứng minh

$$\frac{3}{8} \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{3}{16} \geq \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{2}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Từ điều kiện $x > 0, y > 0, xy \geq 1$, sử dụng kết quả 2 của Bài toán 1, ta có

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} = \frac{2}{1+\frac{1}{z}} = \frac{2z}{z+1}.$$

Để kết thúc bài toán, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2z}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Nhưng bất đẳng thức cuối luôn đúng, vì nó tương đương với $(z-1)^2 \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c$. $\square$

★ **Bài toán 5. [Vasile Cirtoaje, Olympic 30/4, lần thứ XV, 2009]** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3.$$

Lời giải. Đặt $x = \sqrt{\frac{b}{a}}, y = \sqrt{\frac{c}{b}}, z = \sqrt{\frac{a}{c}}$ thì x, y, z là các số dương và $xyz = 1$. BĐT cần chứng

minh trở thành $\sqrt{\frac{2}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+y^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \leq 3$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $z = \max\{x, y, z\}$. Từ điều kiện $xyz = 1$, ta suy ra $z \geq 1$ và $xy \leq 1$.

Sử dụng kết quả của Bài toán 1, kết hợp với BĐT Cauchy – Schwarz, ta có

$$\sqrt{\frac{2}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+y^2}} \leq \sqrt{(1+1)\left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+y^2}\right)} \\ \leq 2\sqrt{\frac{2}{1+xy}} = 2\sqrt{\frac{2z}{z+1}}.$$

Do đó ta cần chứng minh BĐT

$$2\sqrt{\frac{2z}{z+1}} + \sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \leq 3.$$

Chú ý rằng $\sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \leq \frac{2}{1+z}$ nên ta chỉ cần chứng minh $2\sqrt{\frac{2z}{z+1}} + \frac{2}{z+1} \leq 3$. Nhưng BĐT này luôn đúng vì nó tương đương với $(\sqrt{2z} - \sqrt{z+1})^2 \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. $\square$

Trước khi kết thúc bài viết, chúng ta hãy cùng tham khảo thêm cách giải **Câu V** trong đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2011.

Bài toán 6. [Câu V Khối A, 2011] Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $x \geq y, y \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

Lời giải. Viết lại biểu thức P dưới dạng

$$P = \frac{1}{2+3a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}.$$

Trong đó $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$, suy ra $a > 0$,

$b > 0, c > 0$ và $abc = 1$. Lưu ý rằng $bc = \frac{x}{y} \geq 1$ nên áp dụng kết quả 2 của Bài toán 1, ta có

$$\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{2}{1+\sqrt{bc}}.$$

Bằng cách đặt $t = \sqrt{bc}$, với điều kiện $x, y \in [1;4], x \geq y$, suy ra $t \in [1;2]$.

Bây giờ, chỉ còn việc tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{t+1}$, với $t \in [1;2]$.

$$\text{Ta có } P = \left(\frac{t^2}{2t^2+3} - \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{2}{t+1} - \frac{2}{3}\right) + \frac{34}{33} \\ = \frac{(2-t)(35t^2-27t+48)}{33(t+1)(2t^2+3)} + \frac{34}{33} \geq \frac{34}{33}, \text{ vì } t \in [1;2].$$

Do đó $\min P = \frac{34}{33}$, đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} t = \sqrt{bc} = 2 \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ \frac{z}{y} = \frac{x}{y} \end{cases}.$$

Lưu ý rằng $1 \leq y \leq x \leq 4$, nên $\frac{x}{y} = 4$ khi và chỉ khi $x = 4, y = 1$. Từ đó suy ra $z = 2$.

Như vậy, chỉ với các kết quả đơn giản ở Bài toán 1, ta đã giải được các bài toán khó hơn trong các kì thi học sinh giỏi và thi tuyển sinh vào Đại học. Hi vọng rằng, trong quá trình học tập, các bạn cần xây dựng tinh thần học tập cầu tiến, sáng tạo và luôn nắm vững những kết quả đơn giản như Bài toán 1.

BÀI TẬP

1. Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} \geq \frac{2}{ab+2}.$$

2. Cho a, b là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}.$$

3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

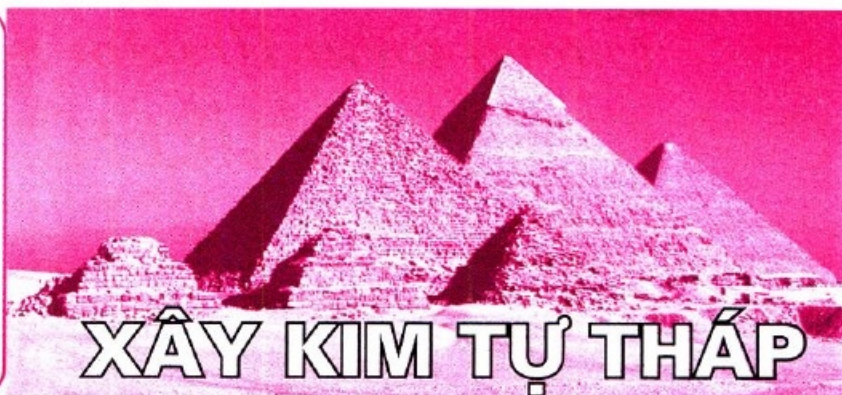
$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 1.$$

5. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abcd=1$. Chứng minh rằng

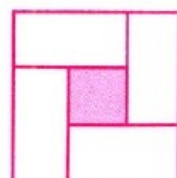
$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$



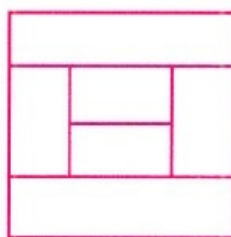
Người ta dự định xây một Kim tự tháp trong một công viên dành cho trẻ em bằng các viên gạch với chiều dài gấp đôi chiều rộng. Ngoài tầng trên cùng của Kim tự tháp cần phải đục riêng, ở mỗi tầng tính từ trên xuống, người ta đặt gạch thành hình vuông như ở hình bên sao cho tâm của chúng nằm trên một trục thẳng đứng (các ô vuông sẫm màu là phần để trống). Tiếp tục đặt như thế. Hỏi nếu xây Kim tự tháp gồm 20 tầng thì cần dùng bao nhiêu viên gạch? Bạn hãy tìm công thức để tính nhanh ra kết quả.



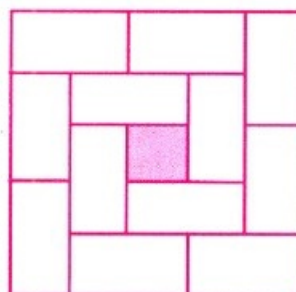
Tầng 1



Tầng 2



Tầng 3



Tầng 4

PHI PHI

Giải đáp bài : XẾP QUE TÍNH

(Đề đăng trên THPT số 418, tháng 4 năm 2012)

Trong các hình bên các que tính không xếp lại có màu đen còn các que xếp lại có màu đỏ.

Ngoài ra có thể xếp thành

$$55 \times 53 - 903 = 2012 \text{ (6 que)}$$

$$39 \times 76 - 952 = 2012 \text{ (6 que)}$$

$$37 \times 68 - 504 = 2012 \text{ (5 que)}$$

$$33 \times 33 + 923 = 2012 \text{ (que)}$$

$$33 \times 78 - 562 = 2012 \text{ (4 que)}$$

Bạn *Phạm Hoàng Hưng*, 10T1, THPT chuyên **Hưng Yên** có nhiều đáp án đúng, được nhận tặng phẩm.

ĐAN QUỲNH

$$23 \times 61 + 609 = 2012$$

$$61 \times 23 + 609 = 2012$$

$$39 \times 73 - 835 = 2012$$

$$39 \times 31 + 803 = 2012$$

$$31 \times 39 + 803 = 2012$$

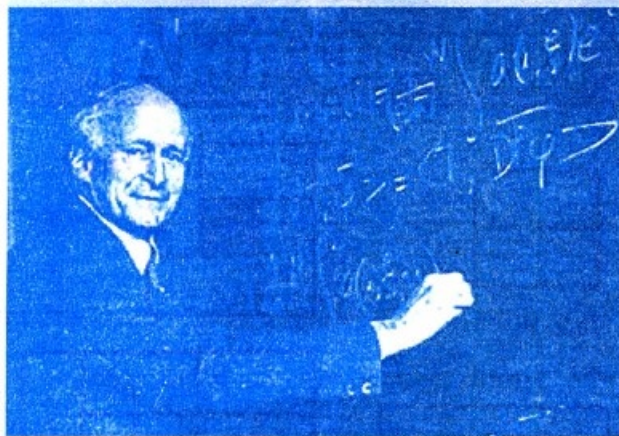
$$33 \times 31 + 989 = 2012$$

$$31 \times 33 + 989 = 2012$$

Tưởng niệm 10 năm ngày mất CỦA GIÁO SƯ LAURENT SCHWARTZ

NGUYỄN DUY TIẾN

(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)



LAURENT SCHWARTZ

(05/03/1915 - 04/07/2002)

Trong cuốn hồi kí của Giáo sư Laurent Schwartz có câu "*Les Vietnamiens ne m'oublient pas*" (Người Việt Nam không quên tôi). Đúng thế, những người Việt Nam chúng tôi không bao giờ quên Ông, Giáo sư Laurent Schwartz là nhà toán học vĩ đại, người đã tới thăm và giảng bài ở Việt Nam ba lần vào những năm tháng khó khăn nhất của dân tộc ta.

- Lần thứ nhất, vào cuối năm 1968 với tư cách là thành viên của Tòa án Bertrand Russell "xử tội ác Đế quốc Mỹ trong cuộc chiến tranh với Việt Nam". Ông được Thủ Tướng Phạm Văn Đồng tiếp 3 tiếng, và được nói chuyện với Hồ Chủ Tịch 1 tiếng (một trường hợp hiếm có). Vì thời gian có hạn, nên Ông chỉ có một buổi làm việc với giới toán học Việt Nam. Hôm đó Ông nêu một nhận xét trong phương trình đạo hàm riêng. Tôi nhớ là Ông nói "*Nhận xét đơn giản này mở ra cho một hướng mới của toán học hiện đại*". Nhân dịp này, Ông đã ủng hộ 10.000 quan cho Việt Nam khi Bệnh viện Bạch Mai bị máy bay Mỹ ném bom.

- Lần thứ hai, vào mùa xuân 1976, Ông sang giảng bài về *Ánh xạ Radon hóa* (*Radonifying maps*) và một ít về *Hình Học các không gian Banach* (*Geometry of Banach Spaces*) trong 3 tuần liền.

Tôi còn nhớ, dù trời nóng, nhưng Ông (lúc đó đã 61 tuổi) giảng bài rất say sưa, rất rõ ràng, khúc triết tại Giảng đường C1 của Đại học Bách Khoa Hà Nội có tới 100 người nghe. Sau này các bài giảng của Ông được Giáo sư Nguyễn Đình Trí và Giáo sư Phan Đức Chính ghi chép lại và được in thành sách (bằng tiếng Pháp): *Radonifying maps*. Thầy Nguyễn Bắc Văn và tôi được trực tiếp làm việc với Ông nhiều buổi (lúc thì ở Hội trường Bách Khoa, lúc thì ở Số 9 Hai Bà Trưng, và cả nơi vợ chồng Ông nghỉ tại Khách sạn Metropol Hà Nội) Tôi không nói được tiếng Anh và tiếng Pháp, thành thử thầy Văn đã phiên dịch cho tôi. Trong khi tôi trình bày kết quả mới của tôi về *Phiếm hàm tuyến tính đo được trong không gian Banach với độ đo Gauss*, Ông hỏi tôi đến từng chi tiết nhỏ nhất. Mắt Ông sáng ngời và rất thích kết quả này. Tôi còn đặt ra 16 vấn đề về độ đo trong không gian vectơ tôpô. Ông chăm chú nghe và cùng tôi thử giải quyết một số vấn đề. Ông làm việc say sưa quên cả giờ giấc, quên cả ăn tối. Lúc bấy giờ tôi hiểu ra rằng "*Toán học đầy ắp trong Ông*", và khi có vấn đề thì từ bộ não của người được Giải Fields (khi Ông 35 tuổi) các ý tưởng toán học tuôn chảy ra mãnh liệt và liên tục. Thỉnh thoảng Ông lại hỏi: "Anh có hiểu không?"

Có thể nói rằng các bài giảng của Giáo sư Laurent Schwartz là câu nói tôi với sinh viên xuất sắc Đặng Hùng Thắng. Một hôm anh Thắng gặp tôi và trình bày với tôi một khái

niệm mới: *Giá của độ đo xác suất trụ, và đặt câu hỏi: Giá trị và giá của độ đo có khi nào trùng nhau không?* Tôi thấy câu hỏi rất thú vị. Sau vài ngày suy nghĩ tôi đã tìm được câu trả lời, trong trường hợp giá là tập lồi thì giá trị và giá của độ đo trùng nhau, vì giá trị là giá của độ đo trong tôpô yếu. Đặc biệt, điều này đúng đối với độ đo Gauss, vì giá của độ đo Gauss đối xứng là không gian con. Sau đó tôi đưa cho anh *Thắng* đọc chứng minh của tôi về kết quả này, anh nhận xét rằng: Chứng minh ấy mở rộng được cho trường hợp độ đo p -ổn định với $1 < p \leq 2$. Từ đấy tôi và anh *Thắng* làm việc với nhau và thu được một số kết quả hay về độ đo ổn định.

• Lần thứ ba, vào đầu năm 1979, Ông sang giảng về *Lí thuyết Martingales và Tích phân ngẫu nhiên* (Giáo sư Nguyễn Đình Ngọc dịch). Lần này Ông trình bày các kết quả chính của *Meyer*. Lần đầu tiên tôi được biết khái niệm CADLAG từ các bài giảng của Ông và hiểu được tầm quan trọng của khái niệm này. Nhưng ấn tượng hơn cả là tài phiên dịch của Giáo sư Nguyễn Đình Ngọc. Cứ mỗi lần Giáo sư *Laurent Schwartz* vừa giảng hết một ý, thì Giáo sư Ngọc đã dịch ngay sang tiếng Việt rất chuẩn mực, tới mức Giáo sư *Laurent Schwartz* phải thốt lên "Tôi thực sự kinh ngạc về khả năng tiếng Pháp của anh. Tôi chưa bao giờ gặp một người vừa lau bảng vừa dịch rất trôi chảy các điều khó".

Có thể thấy rằng Giáo sư *Laurent Schwartz* có ba hướng nghiên cứu chính, đó là:

1) *Lí thuyết về phân phối (hàm suy rộng)*. Chính nhờ kết quả cơ bản này, Ông đã được giải thưởng Fields năm 1950. Cần chú ý rằng *Sobolev*, nhà toán học vĩ đại người Nga, cũng là tác giả của lí thuyết hàm suy

rộng, là tác giả của *Định lí nhúng* nổi tiếng trong các không gian Sobolev, được dùng thường xuyên trong lí thuyết phương trình đạo hàm riêng.

2) *Ánh xạ Radon và Hình học các không gian Banach*. Tuy Ông không phải là người khởi nguồn lí thuyết này, nhưng Ông có ảnh hưởng lớn tới sự phát triển nhanh chóng của nó. Đặc biệt, các khái niệm *không gian loại p , đối loại q ; không gian p -tròn đều, q -lồi đều* do *Maurey* đưa ra (1973) đã được chính *Maurey* và *Pisier* áp dụng rất thành công vào việc nghiên cứu ba luật cơ bản của Lí thuyết xác suất: *Luật số lớn, Định lí giới hạn trung tâm và Luật loga lập*.

Cần lưu ý rằng đã có tới hai giải thưởng Fields trao cho các nhà toán học đạt được những kết quả xuất sắc trong lĩnh vực *Hình học các không gian Banach*. Đó là *Jain Bourgain* (1994, Bỉ) và *Timothy Gowers* (1998, Anh).

3) *Tính toán ngẫu nhiên trên đa tạp*.

Giáo sư *Laurent Schwartz* có sở thích sưu tập tượng và bắt bướm. Bộ sưu tập về loài bướm nhiệt đới của Ông có tới hơn 25000 loại (là một trong những bộ sưu tập cá nhân lớn nhất), và một số loại mang tên Ông. Khi đến thăm Việt Nam Ông cũng bắt được một số bướm quý hiếm.

Thầy tôi - Giáo sư *Vakhania* (là đệ tử của Giáo sư *Sobolev*) hết sức kính trọng *Sobolev*, có lần nói với chúng tôi: "*Lịch sử thường bị lãng quên, nhưng lịch sử không bao giờ quên những đóng góp của N. Sobolev*". Tôi muốn mượn câu nói này để viết: "*Cho dù lịch sử có phức tạp như thế nào, thì chúng tôi luôn ghi nhớ công lao to lớn của Ông, Giáo sư Laurent Schwartz đối với sự phát triển của nền toán học Việt Nam*".

Các bạn nhớ đặt mua TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ cho Quý IV năm 2011 và CÁC SẢN PHẨM CỦA TÒA SOẠN tại các Cơ sở Bưu điện trên cả nước



CÁC LỚP THCS

Bài T1/422. (Lớp 6).

Cho $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}$

và $B = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012}$. Hãy tính $\left(\frac{A}{B}\right)^{2012}$.

TRƯỜNG QUANG AN

(GV THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T2/422. (Lớp 7). Cho đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $f(3) \cdot f(4) = 5$. Chứng minh rằng đa thức $f(x) - 6$ không có nghiệm nguyên.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN

(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

Bài T3/422. Tìm các số nguyên a, b, c sao cho $2^a + 8b^2 - 3^c = 283$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T4/422. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$ và $\widehat{ACB} = 120^\circ$. Lấy I trên tia đối của tia CB sao cho $\widehat{AIB} = 75^\circ$. Tính độ dài AI theo a, b, c .

VI QUỐC DŨNG

(GV DHSP Thái Nguyên)

Bài T5/422. Điểm K nằm trên cạnh BC của tam giác ABC . Chứng minh rằng $AK^2 = AB \cdot AC - KB \cdot KC$ khi và chỉ khi $AB = AC$ hoặc $\widehat{BAK} = \widehat{CAK}$.

NGUYỄN ĐỂ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/422. Cho tam giác ABC không cân có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi (AA_1, AA_2) ,

$(BB_1, BB_2), (CC_1, CC_2)$ lần lượt là các đường trung tuyến và đường cao của tam giác tương ứng với các đỉnh A, B, C . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2 - c^2} \overrightarrow{A_1A_2} + \frac{b^2}{c^2 - a^2} \overrightarrow{B_1B_2} + \frac{c^2}{a^2 - b^2} \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}.$$

CAO HẢI VÂN

(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T7/422. Cho $a, b, c \in (0; 1)$ và $ab + bc + ca + a + b + c = 1 + abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a}{1+a^2} + \frac{1+b}{1+b^2} + \frac{1+c}{1+c^2} \leq \frac{3}{4}(3 + \sqrt{3}).$$

PHAN VĂN ANH

(GV THPT Quỳnh Lưu 3, Nghệ An)

Bài T8/422. Cho tam giác nhọn ABC có số đo các góc lớn hơn 45° . Chứng minh rằng

$$\frac{2}{1 + \tan A} + \frac{2}{1 + \tan B} + \frac{2}{1 + \tan C} \leq 3(\sqrt{3} - 1).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

HOÀNG SỸ LUYỆN

(GV THPT - DTNT Quỳnh Châu, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/422. Xét hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = 3, b_0 = -3 \\ a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}, n \geq 1 \\ b_n = 4a_{n-1} + 3b_{n-1}, n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm tất cả những số tự nhiên n để $\prod_{k=0}^n (b_k^2 + 9)$

là số chính phương.

ĐÀM VĂN NHÍ

(GV THPT chuyên DHSP Hà Nội)

Bài T10/422. Cho n là số nguyên dương. Có bao nhiêu xâu kí tự độ dài n : $a_1a_2\dots a_n$, với kí tự a_i lấy trong tập số $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) mà số lần số 0 xuất hiện trong xâu kí tự đó là số chẵn (tức số lần xuất hiện số 0 là 0, 2, 4, 6, 8, ...)?

TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T11/422. Cho dãy số thực (u_n) được xác định bởi $u_0 = a \in [0; 2)$, $u_n = \frac{u_{n-1}^2 - 1}{n}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \sqrt{n})$.

TRẦN VŨ LINH
(SV K45, 11.06, Học viện Tài chính)

Bài T12/422. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với các đường cao AD, BE, CF ; AA' là đường kính của (O) . $A'B, A'C$ cắt AC, AB lần lượt tại M, N, P, Q thuộc EF sao cho PB, QC vuông góc với BC . Đường thẳng qua A vuông góc với QN, PM lần lượt cắt (O) tại X, Y . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại X, Y cắt nhau tại J . Chứng minh rằng JA' vuông góc với BC .

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/422. Sau bao lâu các dao động âm truyền được một khoảng l giữa các điểm A và B , nếu nhiệt độ của không khí giữa chúng biến đổi tuyến tính từ T_1 đến T_2 ? Biết vận tốc trong không khí thay đổi theo nhiệt độ theo biểu thức $v = \alpha \sqrt{T}$, trong đó α là hằng số.

TRẦN KHÁNH HẢI
(Số 28, phường Phú Cát, TP. Huế)

Bài L2/422. Một hệ gồm nhiều chất điểm. Lực tương tác giữa hai chất điểm bất kì là $\overrightarrow{F_{i,j}} = -\alpha m_i m_j \overrightarrow{r_{i,j}}$, trong đó α là một hằng số. Ban đầu tất cả các chất điểm đứng yên. Chứng minh rằng các chất điểm sẽ va chạm nhau sau một khoảng thời gian xác định.

NGUYỄN VĂN CHIẾN
(THPT Lê Trực, Tiến Hoà, Quảng Bình)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/422. (For 6th grade)

Let $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}$,
and $B = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012}$.

Compute the value of $\left(\frac{A}{B}\right)^{2012}$.

T2/422. (For 7th grade). Let $f(x)$ be a polynomial with integer coefficients such that $f(3).f(4) = 5$. Prove that $f(x) - 6$ does not have any integer solution.

T3/422. Find all triple of integers a, b, c such that $2^a + 8b^2 - 3^c = 283$.

T4/422. Given a triangle ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$ and $\widehat{ACB} = 120^\circ$. Point I is taken on the opposite ray of CB such that $\widehat{AIB} = 75^\circ$. Find the length of AI in term of a, b , and c .

T5/422. Point K lies on side BC of a triangle ABC . Prove that $AK^2 = AB.AC - KB.KC$ if and only if $AB = AC$, or $\widehat{BAK} = \widehat{CAK}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/422. A non-isosceles triangle ABC has $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Let (AA_1, AA_2) , (BB_1, BB_2) , (CC_1, CC_2) be the median and the altitude from vertices A, B , and C , respectively. Prove that

$$\frac{a^2}{b^2 - c^2} \overrightarrow{AA_1A_2} + \frac{b^2}{c^2 - a^2} \overrightarrow{BB_1B_2} + \frac{c^2}{a^2 - b^2} \overrightarrow{CC_1C_2} = \vec{0}.$$

T7/422. Let $a, b, c \in (0; 1)$ and

$$ab + bc + ca + a + b + c = 1 + abc.$$

Prove that

$$\frac{1+a}{1+a^2} + \frac{1+b}{1+b^2} + \frac{1+c}{1+c^2} \leq \frac{3}{4}(3 + \sqrt{3}).$$

T8/422. Let ABC be an acute triangle with all angles greater than 45° . Prove that

$$\frac{2}{1 + \tan A} + \frac{2}{1 + \tan B} + \frac{2}{1 + \tan C} \leq 3(\sqrt{3} - 1).$$

When does equality occur?

(Xem tiếp trang 27)



★ Bài T1/418. Cho

$$A = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 2011^5.$$

Hãy tìm chữ số tận cùng của A .

Lời giải. • Chú ý: Với $a \in \mathbb{N}$ thì hai số a^5 và a có chữ số tận cùng giống nhau. Thật vậy
 $a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1)$
 $= a(a - 1)(a + 1)(a^2 - 4 + 5)$
 $= a(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2) + 5a(a - 1)(a + 1).$

Vì tích của năm số nguyên liên tiếp chia hết cho 5 và tích của hai số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 nên $a^5 - a$ chia hết cho 10, nghĩa là $a^5 - a$ có chữ số tận cùng giống nhau.

• Đặt $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 2011$ thì do
 $A = (1^5 - 1) + (2^5 - 2) + \dots + (2011^5 - 2011) + B$
 nên hai số A và B có chữ số tận cùng giống nhau, do đó ta cần tìm chữ số tận cùng của B .

• Ta thấy $1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 10$ nên tổng của 10 số nguyên liên tiếp có tận cùng từ 1 tới 9 rồi tới 0 thì có tận cùng là 5. Từ đó tổng của 2000 số nguyên liên tiếp từ 1 đến 2000 có tận cùng là 0, còn tổng của 11 số nguyên liên tiếp từ 2001 đến 2011 có tận cùng là $5 + 1 = 6$. Do đó chữ số tận cùng của số B là 6, suy ra chữ số tận cùng của số A là 6. $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

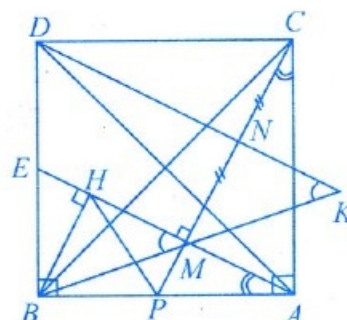
Vĩnh Phúc: Nguyễn Hương Quỳnh, Đỗ Thị Thu Phương, Lê Thu Trang, 6A3, Bùi Thị Hồng Ánh, Phan

Thị Nguyệt, Nguyễn Thị Kim Tuyền, 6A7, THCS Yên Lạc; **Thái Nguyên:** Nguyễn Văn Tuyền, 6A4, THCS Hoàng Văn Thụ, TP. Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** Mai Ngọc Huyền, 6D, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Nghệ An:** Lê Thị Thảo Linh, Cao Đức Thông, Phạm Hoàng Bảo Trâm, Nguyễn Hồng Nhung, Trần Lê Thảo Lam, Nguyễn Trà My, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Nghệ An:** Hà Tĩnh: Trần Thị Thanh Hoa, Nguyễn Mạnh Dũng, Lê Thị Ngọc Trâm, Võ Thị Hồng Liệu, Nguyễn Tiến Anh, 6B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; Nguyễn Thị Trâm Anh, Đặng Thị Minh Hoài, 6D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/418.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C vẽ tam giác ABD vuông cân tại B . Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD . Vẽ CM vuông góc với AE tại M . Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng CM , K là giao điểm của BM và DN . Tính số đo góc BKD .

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $AB = AC = DB = DC$ và $\widehat{CDB} = \widehat{DCA} = 90^\circ$. Vẽ $BH \perp AE$ ($H \in AE$). Gọi P là giao điểm của CM và AB . Vì $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$,



$CA = AB$, $\widehat{ACP} = \widehat{BAE}$ ($= 90^\circ - \widehat{MAC}$) nên $\triangle ABE = \triangle CAP$ (g.c.g) $\Rightarrow AP = BE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}BA$, suy ra $AP = BP$.

Ta thấy tam giác PHA cân tại P , mà $PM \perp HA$ nên $HM = AM$ (1). Ta lại có $\triangle ABH = \triangle CAM$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow BH = AM$ (2). Từ (1) và (2) có $HM = HB$, suy ra tam giác HBM vuông cân tại H , nên $\widehat{BMH} = 45^\circ$.

Theo trên $AH = CM$, suy ra $AM = CN$ ($= \frac{1}{2}CM$).

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCD PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẬP CHÍ TOÀN HỌC VÀ TUỔI TRÉ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

Do đó $\triangle CDN = \triangle ACM \Rightarrow \widehat{DNC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$
 $\Rightarrow DN \perp CP$. Mà $EM \perp CP$ nên $DN \parallel EM \Rightarrow$
 $\widehat{BKD} = \widehat{BME} = 45^\circ$. $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán có nhiều cách giải, các bạn gửi bài đều có lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Đức Thuận, Vũ Thùy Linh, 7A3, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, Lê Văn Duẩn, Nguyễn Việt Dũng, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Hà Tĩnh:** Đặng Trần Đức Anh, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Hạ Vy, Nguyễn Thúy Phương, Vũ Thị Thi, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Bình Định:** Nguyễn Trọng Khiêm, 7A1, THCS Võ Xán, Tây Sơn; **Trà Vinh:** Trương Hoàng Việt, 7/4, THCS Cầu Quan, Tiểu Cần.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/418.** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $3^x - 32 = y^2$ (1)

Lời giải. • Xét x lẻ, $x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. Khi đó (1) có dạng $3^{2k+1} - 32 = y^2 \Leftrightarrow 3 \cdot 9^k - 32 = y^2$.

Ta có $9 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3 \cdot 9^k \equiv 3 \pmod{8}$

nên $3 \cdot 9^k - 32 \equiv 3 \pmod{8}$ (2)

Từ (1) suy ra y là số lẻ, do đó y có dạng $4k + 1$ hoặc $4k - 1 (k \in \mathbb{N})$. Suy ra $y^2 \equiv 1 \pmod{8}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra trường hợp x lẻ không xảy ra.

• Xét x chẵn, $x = 2k, k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó (1) có dạng

$$3^{2k} - 32 = y^2 \Leftrightarrow (3^k - y)(3^k + y) = 32 \quad (4)$$

Để thấy $3^k + y > 3^k - y > 0$ và $3^k - y, 3^k + y$ là số chẵn nên từ (4) suy ra

$$\begin{cases} 3^k - y = 2 \\ 3^k + y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^k = 9 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^k - y = 4 \\ 3^k + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^k = 6 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (không xảy ra)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$$

Vậy PT (1) có nghiệm nguyên dương duy nhất $(x; y) = (4; 7)$. $\square$

► **Nhận xét.** Có nhiều bạn tham gia giải bài này với cách giải tương tự trên. Các bạn có lời giải ngắn gọn là:

Bắc Ninh: Chu Văn Trang, Lê Thị Hải Linh, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Ngọc, 8A, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** Bùi Tuấn Nam, 9A, THCS

Trương Lỗ, Thanh Ba, Phạm Minh Hải, 8A3, THCS Lâm Thao; **Nam Định:** Phạm Văn Phúc, 9A2, THCS Lương Thê Vinh; **Nghệ An:** Hoàng Anh Lại, 9A, Lê Văn Dũng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** Trần Trung Đức, 9H, THCS Trần Mai Ninh; **Hà Tĩnh:** Lê Thị Ngọc Trâm, Trần Thị Thanh Hoa, 6B, Nguyễn Thị Khánh Linh, Phạm Hoàng, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Trần Đoàn Trang,** 8C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** Trần Thị Mỹ Ninh, 8A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/418.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức} \quad A = \frac{1}{x^3 + xy + y^3} + \frac{4x^2y^2 + 2}{xy}$$

trong đó x và y là các số thực dương thỏa mãn $x + y = 1$.

Lời giải. • Nhận xét rằng với a, b là số thực dương thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Thật vậy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{b(a+b) + a(a+b) - 4ab}{ab(a+b)}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0 \text{ với } a > 0, b > 0 \text{ (đpcm).}$$

• Do $x + y = 1$ nên

$$A = \frac{1}{(x+y)(x^2 - xy + y^2) + xy} + 4xy + \frac{2}{xy}$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2} + 4xy + \frac{2}{xy}$$

$$= \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \left(4xy + \frac{1}{4xy} \right) + \frac{5}{4xy}$$

Áp dụng BĐT (1) ta có

$$\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2} = 4 \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$4xy + \frac{1}{4xy} \geq 2\sqrt{4xy \cdot \frac{1}{4xy}} = 2 \quad (3)$$

$$1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{4xy} \geq 5 \quad (4)$$

Từ (2), (3), (4) suy ra $A \geq 4 + 2 + 5 = 11$.

$$A = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ 4xy = \frac{1}{4xy} \\ x = y \\ x + y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 11 khi $x = y = \frac{1}{2}$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này và đều cho lời giải đúng. Kết quả bài toán vẫn đúng khi thay giả thiết $x + y = 1$ bởi $x + y \leq 1$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Nguyễn Thị Huân, Nguyễn Thị Mừng, 8A, Chu Văn Trang, 9A, THCS Yên Phong; **Phú Thọ:** Nguyễn Tiến Dũng, 8A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Trương Thị Hoài Thu, 8A, THCS Yên Lạc; **Nam Định:** Phạm Văn Phúc, 9A2, THCS Lương Thế Vinh; **Hà Nam:** Trần Tùng Lâm, Đỗ Đăng Dương, 8A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Hà Nội:** Tạ Mai Anh, 6C, THCS Tam Hưng, Thanh Oai; **Thanh Hóa:** Lê Thị Ngọc, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Đậu Thị Phương Nhi, 9A1, THCS Nghĩa Hồng, Nghĩa Đàn, Nguyễn Đình Toàn, 8C, Mạc Hữu Thắng, 9A, Lê Thị Anh, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Khánh Linh, Phạm Hoàng, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Đặng Trần Đức Anh, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thủy Phương, 8A, THCS Hành Phước, Trương Quang Huy, 9C, THCS Hành Thuận, Phạm Thị Mỹ Hằng, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Thanh Phương, 8A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Trần Lê Trí Hữu, 9A1, THCS Đồng Khởi; **Vĩnh Long:** Đoàn Hoàng Gia Bảo, 7/11, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vĩnh Long; **Đồng Tháp:** Dương Minh Chánh, 9A1, THCS Mỹ Quý, Tháp Mười.

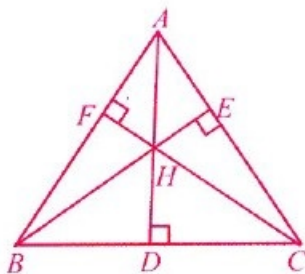
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/418.** Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H . Chứng minh rằng ABC là tam giác đều khi và chỉ khi $\frac{AH}{BC} = \frac{BH}{CA} = \frac{CH}{AB}$.

Lời giải. (Theo bạn Trần Tùng Lâm, 9A2, THCS Trần Phú, TP. Phú Lý, Hà Nam).

Gọi AD , BE và CF là ba đường cao của tam giác ABC thì

$$\begin{aligned} \widehat{HAE} &= \widehat{CBE} \\ &= 90^\circ - \widehat{ACB}; \\ \widehat{AEH} &= \widehat{BEC} = 90^\circ. \end{aligned}$$



$$\text{Do đó } \triangle AEH \sim \triangle BEC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{AE}{BE} = \cot A.$$

$$\text{Tương tự, ta có } \frac{BH}{CA} = \cot B; \frac{CH}{AB} = \cot C.$$

Từ đó, tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$\cot A = \cot B = \cot C \Leftrightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{BH}{CA} = \frac{CH}{AB}. \quad \square$$

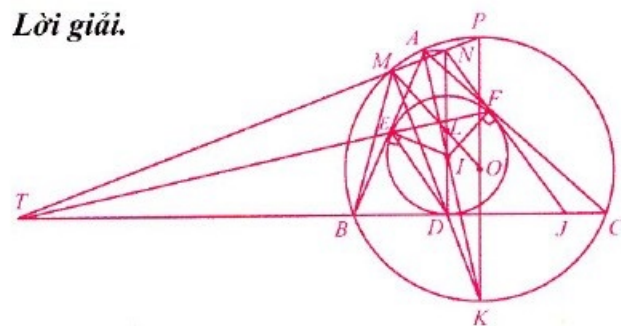
➤ **Nhận xét.** Ngoài bạn Lâm các bạn sau cũng có lời giải ngắn gọn:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Thị Nga, 8A, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** Bùi Tuấn Nam, 9A, THCS Lương Lỗ; **Nguyễn Hồng Quân,** 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** Nguyễn Chí Trung, 8A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** Nguyễn Tùng Sơn, 9A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Hà Nam:** Nguyễn Hồng Quân, 9A2, THCS Trần Phú, TP. Phú Lý; **Nam Định:** Phạm Văn Phúc, 9A2, THCS Lương Thế Vinh; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, Nguyễn Tuấn Anh, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Mai Trường An, 9D, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Nghệ An:** Hoàng Anh Tài; Mạc Hữu Thắng, 9A, Nguyễn Đình Toàn, 8C, THCS Lý Nhật Quang; **Hà Tĩnh:** Lê Trung Anh, Phạm Hoàng, Nguyễn Thị Khánh Linh, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** Trần Thị Mỹ Ninh, Nguyễn Thủy Phương, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Đồng Tháp:** Dương Minh Chánh, 9A1, THCS Mỹ Quý, Tháp Mười.

NGUYỄN THỊ THANH

★ **Bài T6/418.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , ngoại tiếp đường tròn tâm I . Tiếp điểm của BC với đường tròn (I) là D . Đường tròn đường kính AI cắt (O) tại M ($M \neq A$) và cắt đường thẳng đi qua A song song với BC tại N . Chứng minh rằng MO đi qua trung điểm của DN .

Lời giải.



Không mất tính tổng quát giả sử rằng $AC > AB$. Gọi E và F thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AB và AC . Giả sử $NF \cap BC = J$; $MO \cap DN = L$. Ta thấy bốn điểm M, N, E, F cùng nằm trên đường tròn $(\mathcal{C}_1)$.

Vì $\widehat{MAC} = \widehat{MAF} = \widehat{MNF} = \widehat{MNJ}$; $\widehat{MAC} + \widehat{MBC} = 180^\circ$ nên $\widehat{MBC} + \widehat{MNJ} = 180^\circ$. Do đó bốn điểm B, M, N, J cùng nằm trên đường tròn $(\mathcal{C}_2)$. Lại có $\widehat{EBD} = \widehat{EIN} = \widehat{EFN}$, suy ra bốn điểm B, E, F, J cùng nằm trên đường tròn $(\mathcal{C}_3)$.

Ta có MN là trục đẳng phương của hai đường tròn $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$;

EF là trục đẳng phương của hai đường tròn $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_3)$;

BC là trục đẳng phương của hai đường tròn $(\mathcal{C}_2)$ và $(\mathcal{C}_3)$.

Từ đó MN, EF, BC đồng quy tại điểm T . Mặt khác $TD^2 = \overline{TE} \cdot \overline{TF} = \overline{TM} \cdot \overline{TN}$, suy ra $DM \perp MN$. Giả sử $(O; R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , $(L; R')$ là đường tròn đường kính DN , P và K lần lượt là giao điểm của các tia MN, MD với đường tròn (O) . Xét phép vị tự $\mathcal{H}\left(M; k = \frac{R}{R'}\right): (L) \mapsto (O); L \mapsto O; N \mapsto P;$

$D \mapsto K$. Khi đó $\mathcal{H}\left(M; k = \frac{R}{R'}\right): DN \mapsto KP$.

Từ đó PK là một đường kính của đường tròn (O) . Lại do O là trung điểm của PK nên L là trung điểm của DN . $\square$

► **Nhận xét.** Nhiều bạn giải đúng bài toán này với những cách giải khác nhau. Sau đây là những bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Nguyễn Đình Tùng, 10 Toán 1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Việt Hà, Nguyễn Trung Hiếu, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Đinh Trung Kiên, 10 Toán 1, Vũ Tuấn Anh, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Nguyễn Hải Linh Chi, 10 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** Hồ Bá Đức, Chu Tự Tài, 11A12, THPT Diễn Châu II; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** Ngô Thành Đạt, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Đồng Tháp:** Bùi Trần Hải Đăng, Nguyễn Hữu Nhân, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu, TP. Đồng Tháp; **Lâm Đồng:** Nguyễn Vũ Trung Quân, 11 Toán 1, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Long An:** Chu Thị Thu Hiền, 10T, THPT chuyên Long An; **Bến Tre:** Lê Thị Minh Thảo, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

HỒ QUANG VINH

★ Bài T7/418. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy}-2)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} & (1) \\ (x+1)(y + \sqrt{xy} + x(1-x)) = 4 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ xy + (x-y)(\sqrt{xy}-2) \geq 0 \end{cases}$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy}-2)} - y + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(y + \sqrt{xy}-2)}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy}-2)} + y} + \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{y + \sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy}-2)} + y} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) = 0 \quad (3)$$

Mặt khác, từ PT(2) ta có

$$\begin{aligned} y + \sqrt{xy} &= x^2 - x + \frac{4}{x+1} \\ \Rightarrow y + \sqrt{xy} &= x+1 + \frac{4}{x+1} + (x-1)^2 - 2 \\ \Rightarrow y + \sqrt{xy} &= \left(\sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right)^2 + (x-1)^2 + 2 \geq 2. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{y + \sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy}-2)} + y} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0.$$

Phương trình (3) tương đương với $x = y$.

Thay $x = y$ vào (2), ta được

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 3x + 4 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1; x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

Vì $x = y \geq 0$ nên hệ PT đã cho có hai nghiệm

$$(x; y) \text{ là } (1; 1) \text{ và } \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right). \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Điều then chốt của lời giải là phân tích phương trình (1) về dạng tích và chứng minh thừa số thứ hai trong (3) dương. Có thể chứng minh $y + \sqrt{xy} \geq 2$

$$\text{bằng cách biến đổi } y + \sqrt{xy} - 2 = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1} \geq 0.$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Tĩnh: Trần Võ Hoàng, 10 Toán 1, Nguyễn Mậu Thành, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Quốc Hùng, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Lâm Đồng:** Nguyễn Vũ Trung Quân, 11 Toán 1, THPT chuyên Thăng Long; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phạm Quốc Đạt, 10 Toán 1, Phùng Thanh Dũng, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cà Mau:** Lưu Giang Nam, 10T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiền; **Long An:** Nguyễn Hồng Phát, 10T, THPT chuyên Long An; **Bến Tre:** Lê Thị Minh Thảo, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Đồng Tháp:** Nguyễn Thành Thi, Nguyễn Phương Ngọc, Lê Chí Toàn, Bùi Trần Hải Đăng, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP Cao Lãnh; **Đắk Lắk:** Nguyễn Thanh Hải, Nguyễn Tiến Mạnh, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du, TP Buôn Ma Thuột; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Nhật Quang, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T8/418.** Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C + \cos A \cos B \cos C \geq \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Sử dụng đẳng thức quen thuộc

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C \quad (1)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C \geq \frac{1}{2}(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương, ta có

$$\cos^3 A + \cos^3 A + \frac{1}{8} \geq 3\sqrt{\frac{\cos^6 A}{8}} = \frac{3}{2}\cos^2 A;$$

$$\cos^3 B + \cos^3 B + \frac{1}{8} \geq 3\sqrt{\frac{\cos^6 B}{8}} = \frac{3}{2}\cos^2 B;$$

$$\text{và } \cos^3 C + \cos^3 C + \frac{1}{8} \geq 3\sqrt{\frac{\cos^6 C}{8}} = \frac{3}{2}\cos^2 C.$$

Cộng theo về các BĐT trên, ta được

$$2\cos^3 A + 2\cos^3 B + 2\cos^3 C + \frac{3}{8}$$

$$\geq \frac{3}{2}(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C).$$

Kết hợp với BĐT quen thuộc

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4} \quad (*) \text{ ta có}$$

$$2\cos^3 A + 2\cos^3 B + 2\cos^3 C + \frac{3}{8}$$

$$\geq (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) + \frac{1}{2}(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$$

$$\geq \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \frac{3}{8}.$$

Từ đó suy ra BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) BĐT (*) có thể tổng mở rộng hơn như sau:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4} + \frac{\sin^2(A-B) + \sin^2(B-C) + \sin^2(C-A)}{12}$$

từ đó BĐT cần chứng minh cũng có thể mở rộng như sau

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C + \cos A \cos B \cos C \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(A-B) + \sin^2(B-C) + \sin^2(C-A)}{24}.$$

2) Có nhiều cách đánh giá khác nhau để đi đến BĐT cần chứng minh, nhưng mấu chốt của bài toán vẫn là sử dụng đẳng thức (1) và BĐT (*). Các bạn sau có lời giải tốt:

Lâm Đồng: Nguyễn Vũ Trung Quân, 11 Toán 1, THPT chuyên Thăng Long; **Nghệ An:** Lê Hoàng Hiệp, Trần Trung Hiếu, 11A1, THPT Thái Hoà; **Bùi Hải Vân,** 11T1, THPT Hà Huy Tập, TP. Vinh; **Đắk Lắk:** Nguyễn Thanh Hải, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du; **Hà Nội:** Nguyễn Duy Khánh, 11A1, THPT Ba Vì; **Thanh Hoá:** Nguyễn Quốc Trí, 10C1, THPT Hoàng Hoá 4; **Thái Bình:** Trần Trung Hiếu, 11T2, THPT chuyên Thái Bình; **Đồng Tháp:** Phan Quân Thụy, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T9/418.** Với mỗi số tự nhiên n , kí hiệu (S_n) là tổng các chữ số của n (khi n biểu diễn trong hệ thập phân).

Đặt $S_k(n) = \underbrace{S(S(\dots(S(n))\dots))}_{k \text{ lần}}$ (kí hiệu S xuất

hiện k lần). Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn

$$S_1(n) + S_2(n) + \dots + S_k(n) + \dots + S_{223}(n) = n.$$

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Trung Hiếu và Nguyễn Thị Việt Hà, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên). Ta có nhận xét sau

$$1) S(n) \equiv n \pmod{9}.$$

$$2) S(n) \leq n \text{ và } S(n) = n \text{ khi và chỉ khi } n \text{ có 1 chữ số.}$$

Chứng minh

$$1) \text{ Giả sử } n = \overline{a_1 \dots a_k}. \text{ Ta có}$$

$$n = a_k + 10a_{k-1} + \dots + 10^{k-1}a_1, \text{ suy ra}$$

$$n - S(n) = 9a_{k-1} + \dots + (10^{k-1} - 1)a_1 \equiv 0 \pmod{9}.$$

2) $S(n) = a_1 + \dots + a_k \leq a_1 10^{k-1} + \dots + a_k$ nếu $k > 1$ thì hiển nhiên $S(n) > n$.

Trở lại bài toán

• Rõ ràng $n = 0$ là một giá trị cần tìm.

• Xét $n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử n có k chữ S ($k \geq 1$)
 $n = \overline{a_1 \dots a_k}$.

Từ nhận xét suy ra $S_1(n) \geq S_2(n) \geq \dots \geq S_{223}(n)$.

Vậy $n = S_1(n) + \dots + S_{223}(n) \leq 223 \cdot S_1(n)$

Vì $S_1(n) = a_1 + \dots + a_k \leq 9k$ nên

$$n \leq 223 \cdot 9k = 2007k \quad (1)$$

Ta chứng minh $k \leq 1$.

i) Thật vậy nếu $a_1 = \dots = a_k = 9$ thì $n = 10^k - 1$ và $S_1(n) = 9k$. Từ (1) suy ra $10^k - 1 \leq 2007k$. Bằng quy nạp ta có $10^k - 1 > 2007k$ nếu $k \geq 4$, vậy $k \leq 3$.

ii) Nếu có ít nhất một $a_i < 9$. Khi đó $S_1(n) \leq 9k - 1$. Mặt khác $n \geq 10^{k-1}$. Vậy $10^{k-1} \leq 223(9k - 1) = 2007k - 223$.

Bằng quy nạp ta có $10^{k-1} > 2007k - 223$ nếu $k \geq 5$. Kết hợp i) và ii) ta được $k \leq 4$

$$\Rightarrow S_1(n) \leq 9k = 36 \quad (2)$$

Từ nhận xét suy ra $S_t(n) \equiv n \pmod{9} \forall t = 1, 2, \dots$

Do đó $n = S_1(n) + \dots + S_{223}(n) \equiv 223n \pmod{9}$

$$\Rightarrow 222n : 9 \Leftrightarrow 74n : 3 \Rightarrow n : 3 \Rightarrow S_t(n) : 3 \quad \forall t = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Kết hợp (2), (3) suy ra

$$S_1(n) \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36\}.$$

Khi đó $S_2(n)$ có 1 chữ số.

Do đó $S_2(n) = \dots = S_{223}(n) = a$ với $a \in \{3, 6, 9\}$.

+ Với $a = 3$ thì $S_1(n) + 222 \cdot 3 = n$

$$\Leftrightarrow S_1(n) + 666 = n \quad (4)$$

Vì $S_1(n) \leq 36 \Rightarrow 666 < n \leq 702$

$$\Rightarrow S(700) \leq S_1(n) \leq S(699) \Rightarrow 7 \leq S_1(n) \leq 24.$$

Mà $S_1(n) \equiv 3 \pmod{9}$ suy ra $S_1(n) \in \{12, 21\}$.

Nếu $S_1(n) = 12$ thì $n = 12 + 666 = 678$. Thử lại thấy không thỏa mãn.

Nếu $S_1(n) = 21$ thì $n = 21 + 666 = 687$. Thử lại thấy đúng.

+ Với $a = 6$ thì $S_1(n) + 222 \cdot 6 = n \Leftrightarrow S_1(n) + 1332 = n$.

$$\text{Vì } S_1(n) \leq 36 \Rightarrow 1332 < n \leq 1368 \Rightarrow S(1340) \leq S_1(n) \leq S(1368) \Rightarrow 8 \leq S_1(n) \leq 18.$$

Vì $S_1(n) \equiv S(S_1(n)) = a = 6 \pmod{9} \Rightarrow S_1(n) = 15 \Rightarrow n = 15 + 1332 = 1347$. Thử lại thấy đúng.

+ Với $a = 9$ thì $S_1(n) + 222 \cdot 9 = n \Leftrightarrow S_1(n) + 1998 = n$. Ta có $S_2(n) = 9 \leq S_1(n) \leq 36$

$$\Rightarrow 2007 \leq n \leq 2034 \Rightarrow S_1(n) \leq S(2029).$$

Vậy $S_1(n) \leq 14$ mà $S_1(n) \equiv S(S_1(n)) = a = 9 \pmod{9}$

nên $S_1(n) = 9 \Rightarrow n = 9 + 1998 = 2007$. Thử lại thấy đúng.

Kết luận. $n \in \{0; 687; 1347; 2007\}$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Ngoài bạn Hiếu và bạn Hà, các bạn sau có lời giải đúng và đầy đủ:

Phú Thọ: Nguyễn Đình Mậu, 8A3, THCS Lâm Thao;
Vĩnh Phúc: Hoàng Đỗ Kiên, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc;
Nghệ An: Trương Tuấn Anh, 11A2, THPT Diễn Châu II;
Bà Rịa - Vũng Tàu: Nguyễn Hồng Minh, THPT chuyên Lê Quý Đôn;
Phú Yên: Lê Nhật Thăng, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh;
Cần Thơ: Hoàng Công Đức, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/418.** *Tồn tại hay không tập hợp X thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau*

i) *Tập X gồm 2012 số tự nhiên.*

ii) *Tổng của một số phần tử bất kì trong X đều có dạng lũy thừa bậc k của một số nguyên dương ($k \geq 2$)?*

Lời giải. (Theo bạn Hoàng Đỗ Kiên, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc).

Ta sẽ chỉ ra rằng với mọi số nguyên dương s luôn tồn tại một tập hợp X gồm s số tự nhiên thỏa mãn điều kiện tổng của một số phần tử bất kì trong X đều có dạng lũy thừa bậc k của một số nguyên dương ($k \geq 2$) (1)

Thật vậy, đặt $n = \frac{s(s+1)}{2}$ và lấy n số nguyên tố bất kì $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Theo Định lý thặng

đr Trung Hoa, với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$ tồn tại số nguyên dương α_i thỏa mãn $\alpha_i : p_j, \forall j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ và $\alpha_i : l : p_i$.

Đặt $k = 1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}$, $X = \{k, 2k, 3k, \dots, sk\}$,

Ta sẽ chứng minh X là tập hợp thỏa mãn (1).

Ta có tổng của một số phần tử bất kì trong X đều có dạng tk với $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, $tk = 1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (t-1)^{\alpha_{t-1}} \cdot t^{\alpha_t+1} \cdot (t+1)^{\alpha_{t+1}} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}$.

Vì tất cả $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t-1}, \alpha_t+1, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_n$ đều chia hết cho p_i , ta suy ra $tk = a^{p_i} (a \in \mathbb{N}^*$ nào đó).

Vậy X là tập hợp thỏa mãn bài toán. $\square$

➤ **Nhận xét.** Ngoài bạn Hoàng Đỗ Kiên, hai bạn sau cũng có lời giải đúng: Hồ Anh Minh, 10T, Trịnh Hà Hằng, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T11/418.** *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(\frac{xf(y)}{2}\right) + f\left(\frac{yf(x)}{2}\right) = 4xy, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Lời giải. Từ (1) cho $x = 0, y = 0$ ta được $f(0) = 0$. Trong (1) cho $x = t, y = t$, ta thu được

$$f\left(\frac{tf(t)}{2}\right) = 2t^2, \forall t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Từ (2), ta chứng minh $f(t)$ là đơn ánh trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, giả sử $f(x) = f(y)$, thì từ (2), ta thu được

$$\begin{cases} xf(x) = xf(y) \\ yf(x) = yf(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{xf(x)}{2}\right) = f\left(\frac{xf(y)}{2}\right) \\ f\left(\frac{yf(x)}{2}\right) = f\left(\frac{yf(y)}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = f\left(\frac{xf(y)}{2}\right) \\ 2y^2 = f\left(\frac{yf(x)}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f\left(\frac{xf(y)}{2}\right) + f\left(\frac{yf(x)}{2}\right) = 2x^2 + 2y^2$$

$$\text{hay } 4xy = 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow x = y \text{ (đpcm).}$$

Tiếp theo, trong (2) cho $t = 1$, thu được

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{f(1)}{2}\right) = 1.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{2} \frac{f(1)}{2} f\left(\frac{f(1)}{2}\right) = \frac{f(1)}{2}$$

$$\text{hay } f\left(\frac{1}{2} \frac{f(1)}{2} f\left(\frac{f(1)}{2}\right)\right) = f\left(\frac{f(1)}{2}\right).$$

Sử dụng (2) và tính đơn ánh của f ta được

$$2\left(\frac{f(1)}{2}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 2 \\ f(1) = -2. \end{cases}$$

• Xét trường hợp $f(1) = 2$. Từ (1) cho $y = 1$, ta

$$\text{được } f(x) + f\left(\frac{f(x)}{2}\right) = 4x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{hay } f\left(\frac{f(x)}{2}\right) = 2x + z \text{ với } z = 2x - f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suy ra } f\left(x - \frac{z}{2}\right) = f\left(\frac{f(x)}{2}\right) = 2x + z, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó } f\left(x + \frac{z}{2}\right) = f\left(\frac{f\left(x - \frac{z}{2}\right)}{2}\right)$$

$$= 2\left(x - \frac{z}{2}\right) + z = 2x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = f\left(\frac{1}{2}f\left(x + \frac{z}{2}\right)\right) = 2x + z + z$$

$$= 2x + 2z, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Do đó } f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

• Tương tự, xét trường hợp $f(1) = -2$. Trong (2) thay $t = -x$ ta được

$$f\left(\frac{-xf(-x)}{2}\right) = 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) có $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Trong (1) cho $y = 1$, ta được

$$-f(x) + f\left(\frac{f(x)}{2}\right) = 4x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{hay } f\left(\frac{f(x)}{2}\right) = 2x + t \text{ với } t = 2x + f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } f\left(\frac{t}{2} - x\right) = f\left(\frac{f(x)}{2}\right) = 2x + t, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó } -f\left(x - \frac{t}{2}\right) = 2x + t$$

$$\text{hay } f\left(x - \frac{t}{2}\right) = -2x - t, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } f\left(-x-\frac{t}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}f\left(x-\frac{t}{2}\right)\right)=2\left(x-\frac{t}{2}\right)+t=2x.$$

$$\text{hay } f(x)=f\left(\frac{1}{2}f\left(-x-\frac{t}{2}\right)\right)=-2x-t+t=-2x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn điều kiện bài ra. Vậy các hàm số cần tìm là $f(x) = \pm 2x$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Một số bạn sử dụng phép đặt ẩn phụ

$$\frac{f(t)}{2} = g(t) \text{ để chuyển về dạng PT hàm quen thuộc}$$

$$g(xg(y)) + g(yg(x)) = 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nhiều bạn giải bài bằng cách sử dụng phương trình hàm dạng sai phân cũng cho kết quả đúng.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Dương Viết Thọ, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; Nguyễn Văn Cao, 10A1 THPT Sáng Sơn, Sông Lô; **Hà Nội:** Phạm Ngọc Lâm, 11A1, THPT Liên Hà, Đông Anh; **Nghệ An:** Trương Tuấn Anh, Hồ Bá Đức, Chu Tự Tài, 11A12, THPT Diễn Châu II; **Phú Yên:** Lê Nhật Thăng, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 11T, THPT Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa.

NGUYỄN VĂN MẬU

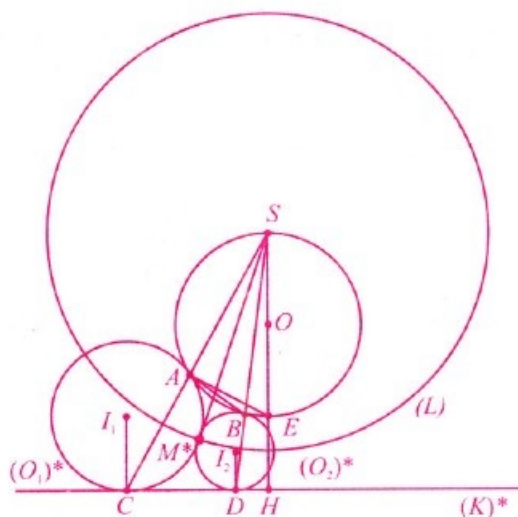
Bài T12/418. Cho trước hai đường tròn (K) và (O) , trong đó đường tròn (K) nằm trong đường tròn (O) . Hai đường tròn (O_1) , (O_2) đi chuyển sao cho chúng tiếp xúc ngoài với nhau tại M và cùng tiếp xúc với đường tròn (O) , đồng thời chúng cùng tiếp xúc ngoài với đường tròn (K) . Chứng minh rằng điểm M luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải. Lấy I thuộc (K) . Gọi $N_I^{\mathcal{P}_{I/(O)}}$ là phép nghịch đảo tâm I phương tích $\mathcal{P}_{I/(O)}$.

Qua $N_I^{\mathcal{P}_{I/(O)}}$, (O) biến thành (O) ; (K) biến thành đường thẳng $(K)^*$; (O_1) , (O_2) theo thứ tự biến thành các đường tròn $(O_1)^*$, $(O_2)^*$; M thành M^* .

Đương nhiên (O) , $(K)^*$ không có điểm chung; $(O_1)^*$, $(O_2)^*$ tiếp xúc với nhau tại M^* ; cùng xúc ngoài với (O) ; cùng tiếp xúc với $(K)^*$.

Gọi A, B theo thứ tự là tiếp điểm của $(O_1)^*$, $(O_2)^*$ với (O) ; C, D theo thứ tự là tiếp điểm của $(O_1)^*$, $(O_2)^*$ với $(K)^*$; I_1, I_2 theo thứ tự là tâm của $(O_1)^*$, $(O_2)^*$; H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên $(K)^*$; S, E là giao điểm của OH với (O) (E thuộc đoạn SH) (hình vẽ).



Gọi R, R_1, R_2 theo thứ tự là bán kính của (O) , $(O_1)^*$, $(O_2)^*$.

Vì (O) theo thứ tự tiếp xúc ngoài với $(O_1)^*$, $(O_2)^*$ tại A, B nên các phép vị tự $V_A^{\frac{R_1}{R}}, V_B^{\frac{R_2}{R}}$ theo thứ tự biến (O) thành $(O_1)^*$, $(O_2)^*$.

Từ đó, do vector $\overrightarrow{OS}$ ngược hướng với các vector $\overrightarrow{I_1C}, \overrightarrow{I_2D}$, nên các phép vị tự $V_A^{-\frac{R_1}{R}}, V_B^{-\frac{R_2}{R}}$ theo thứ tự biến S thành C, D . Nghĩa là A, B theo thứ tự thuộc các đoạn SC, SD .

Dễ thấy $\widehat{SAE} = 90^\circ = \widehat{EHC}$; $\widehat{SBE} = 90^\circ = \widehat{EHD}$.

Suy ra $AEHC, BEHD$ là các tứ giác nội tiếp.

Do đó $\mathcal{P}_{S/(O)^*} = \overline{SA} \cdot \overline{SC} = \overline{SE} \cdot \overline{SH} = \overline{SB} \cdot \overline{SD} = \mathcal{P}_{S/(O_2)^*}$.

Kết hợp với $\mathcal{P}_{M^*/(O_1)^*} = 0 = \mathcal{P}_{M^*/(O_2)^*}$ suy ra SM^* là trục đẳng phương của $(O_1)^*$, $(O_2)^*$.

Do đó SM^* tiếp xúc với $(O_1)^*$, $(O_2)^*$.

Vậy $SM^{*2} = SA \cdot SC = SE \cdot SH$, hay M^* thuộc đường tròn (L) tâm S bán kính $\sqrt{SE \cdot SH}$ (1)

Mặt khác, vì I thuộc (K) và (K) nằm trong (O) nên I nằm trong (O) . Kết hợp với (O) nằm trong (L) , suy ra I không thuộc (L) (2)

Từ (1) và (2) suy ra M thuộc đường tròn $N_I^{\mathcal{P}_{I/(O)}}((L))$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Bạn Chu Tự Tài, 11A12, THPT Diễn Châu II, Nghệ An cũng sử dụng phép nghịch đảo, nhưng cho một lời giải khác với lời giải trên. Các bạn

còn lại sử dụng phương pháp tính toán (bằng vector, bằng định lý Stewart, bằng phương pháp tọa độ). Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Hoàng Đỗ Kiên, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** Đào Việt Anh, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** Bùi Đình Hiếu, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Nghệ An:** Hồ Bá Đức, 11A12, THPT Diễn Châu II; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Lâm Đồng:** Nguyễn Vũ Trung Quân, 11 Toán 1, THPT chuyên Thăng Long; **Phú Yên:** Lê Nhật Thăng, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bến Tre:** Lê Thị Minh Thảo, 11T, THPT chuyên Bến Tre; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/418.** Một vật nhỏ khối lượng m nằm yên tại một điểm O trên mặt phẳng ngang. Người ta truyền cho nó một vận tốc ngang v_0 . Xác định

a) Công suất trung bình của lực ma sát trong suốt quá trình chuyển động của vật, biết hệ số ma sát $k = 0,27$; $m = 1,0\text{kg}$ và $v_0 = 1,5\text{m/s}$.

b) Công suất tức thời cực đại của lực ma sát, biết hệ số ma sát $k = b \cdot x$ với b là hằng số, x là khoảng cách từ vật đến điểm O .

Lời giải. a) Gia tốc của vật

$$a = -\frac{F_{ms}}{m} = -\frac{kmg}{m} = -kg.$$

Thời gian chuyển động của vật cho đến khi dừng lại $t = -\frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{kg}$.

Công của lực ma sát bằng độ biến thiên động năng của vật $A = -\frac{mv_0^2}{2}$.

Độ lớn công suất trung bình của lực ma sát trong quá trình chuyển động

$$N_{tb} = \frac{|A|}{t} = \frac{kmgv_0}{2} \approx 2(\text{W}).$$

b) PT chuyển động của vật ở thời điểm bất kì

$$-F_{ms} = ma = \frac{mdv}{dt} \Leftrightarrow -kmg = \frac{mdv}{dt}$$

$$\Leftrightarrow -bxdx = dv \Leftrightarrow -bgx \frac{dx}{v} = dv \Leftrightarrow -bx dx = v dv.$$

Tích phân hai vế biểu thức trên thu được

$$-\int_0^x bxdx = \int_{v_0}^v v dv \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - bgx^2}.$$

Độ lớn công suất tức thời của lực ma sát

$$N = |F_{ms} \cdot v| = bmgx \cdot \sqrt{v_0^2 - bgx^2}.$$

$$\text{Vì } x \cdot \sqrt{v_0^2 - bgx^2} = \frac{x \sqrt{bg} \sqrt{v_0^2 - bgx^2}}{\sqrt{bg}}$$

$$\leq \frac{bgx^2 + v_0^2 - bgx^2}{2\sqrt{bg}} = \frac{v_0^2}{2\sqrt{bg}}.$$

$$\text{Do đó } N \leq \frac{bmgv_0^2}{2\sqrt{bg}} = \frac{mv_0^2}{2} \sqrt{bg}.$$

Vậy công suất cực đại của lực ma sát là

$$N_{\max} = \frac{mv_0^2}{2} \sqrt{bg}. \square$$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Bình Định: Nguyễn Thịnh Vinh, 12A2, THPT Số 2 An Nhơn; **Đồng Tháp:** Huỳnh Thanh Dư, 11L, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Nghệ An:** Lê Xuân Báo, 10A3 THPT chuyên Phan Bội Châu; **Trịnh An Bình,** Trần Trung Hiếu, 11A1, THPT Thái Hòa; **Nam Định:** Trịnh Phương Dũng, Nguyễn Thanh Nam, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/418.** Hai thấu kính O_1 và O_2 có tiêu cự lần lượt là f_1 và f_2 đặt đồng trục và cách nhau $O_1O_2 = L = 12\text{cm}$. Một vật AB đặt trước O_1 và cách O_1 một khoảng $O_1A = 12\text{cm}$. Sau O_2 và cách O_2 là 8cm ta thu được ảnh thật A_2B_2 . Nếu trao đổi vị trí cho nhau giữa O_1 và O_2 thì sau O_1 và cách O_1 là 6cm ta cũng thu được ảnh thật A_3B_3 . Hãy xác định vị trí các tiêu cự f_1, f_2 và độ phóng đại k của ảnh A_2B_2 và k' của ảnh A_3B_3 .

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Ngọc Minh, 11A3, THPT Thái Hòa, **Nghệ An**)

* **Tính tiêu cự.** Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1. O_1 đặt trước O_2 . Ta có sơ đồ tạo ảnh 1:

$$AB \xrightarrow{O_1} A_1B_1 \xrightarrow{O_2} A_2B_2$$
$$d_1 \quad d'_1 = d_2 \quad d'_2$$

$$\text{Ta có } d'_1 = \frac{d_1 f_1}{d_1 - f_1} = \frac{12 f_1}{12 - f_1};$$

$$d_2 = L - d'_1 = 12 - \frac{12 f_1}{12 - f_1} = \frac{144 - 24 f_1}{12 - f_1};$$

$$d'_2 = \frac{d_2 f_2}{d_2 - f_2} = \frac{8(18 f_2 - 3 f_1 f_2)}{144 - 24 f_1 - 12 f_2 + f_1 f_2} = 8.$$

$$\text{Suy ra } 2 f_1 f_2 - 12 f_1 - 15 f_2 + 72 = 0 \quad (1)$$

Trường hợp 2. O_2 đặt trước O_1 . Ta có sơ đồ tạo ảnh 2:

$$\begin{array}{ccccc} AB & \xrightarrow{O_2} & A_1' B_1' & \xrightarrow{O_1} & A_3 B_3 \\ d_1 & & d'_1 = d_2 & & d'_2 \end{array}$$

Tương tự trường hợp 1, ta suy ra

$$d'_2 = \frac{d_2 f_1}{d_2 - f_1} = \frac{6(24 f_1 - 4 f_1 f_2)}{144 - 24 f_2 - 12 f_1 + f_1 f_2} = 6.$$

$$\text{Suy ra } 5 f_1 f_2 - 36 f_1 - 24 f_2 + 144 = 0 \quad (2)$$

Giải hệ gồm các phương trình (1) và (2) ta được

$$\begin{cases} f_1 = 3\text{cm} \\ f_2 = 4\text{cm} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} f_1 = 12\text{cm} \\ f_2 = 8\text{cm}. \end{cases}$$

* *Tính độ phóng đại*

- Với hệ nghiệm $f_1 = 3\text{cm}, f_2 = 4\text{cm}$.

Khi O_1 đặt trước O_2 , ta có $d_1 = 12\text{cm}, d'_2 = 8\text{cm}$.

$$\text{Vậy } k = \frac{\overline{A_2 B_2}}{AB} = \frac{f_1}{f_1 - d_1} \cdot \frac{f_2 - d'_2}{f_2} = \frac{3}{3 - 12} \cdot \frac{4 - 8}{4} = \frac{1}{3}.$$

Khi O_2 đặt trước O_1 , ta có $d_1 = -12\text{cm}, d'_2 = 6\text{cm}$.

$$\text{Vậy } k' = \frac{\overline{A_3 B_3}}{AB} = \frac{f_2}{f_2 - d_1} \cdot \frac{f_1 - d'_2}{f_1} = \frac{4}{4 - 12} \cdot \frac{3 - 6}{3} = \frac{1}{2}.$$

- Với hệ nghiệm $f_1 = 12\text{cm}, f_2 = 8\text{cm}$.

Khi O_1 đặt trước O_2 , ta có

$$k = \frac{\overline{A_2 B_2}}{AB} = -\frac{f_2}{f_1} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}.$$

Khi O_2 đặt trước O_1 , ta có $d_1 = -12\text{cm}, d'_2 = 6\text{cm}$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } k' &= \frac{\overline{A_3 B_3}}{AB} = \frac{f_2}{f_2 - d_1} \cdot \frac{f_1 - d'_2}{f_1} \\ &= \frac{8}{8 - 12} \cdot \frac{12 - 6}{12} = -1. \quad \square \end{aligned}$$

➤ **Nhận xét.** Ngoài bạn *Minh*, các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Nam:** *Trần Xuân Thái*, 11A2, THPT A Duy Tiên; **Nam Định:** *Đặng Phúc Cường*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Viết Tuấn*, 10A5, THPT chuyên Đại học Vinh; **Thái Bình:** *Nguyễn Văn Minh, Vũ Quang Hòa*, 11A2, THPT Bắc Đông Quan, *Vũ Xuân Ngun*, 10A1, THPT Tây Thụy Anh; **Cần Thơ:** *Trần Nguyễn Anh Thư*, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN VĂN THUẬN

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/422. Two sequences (a_n) and (b_n) are defined inductively as follows

$$\begin{cases} a_0 = 3, b_0 = -3 \\ a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}, n \geq 1 \\ b_n = 4a_{n-1} + 3b_{n-1}, n \geq 1. \end{cases}$$

Find all natural numbers n such that $\prod_{k=0}^n (b_k^2 + 9)$

is a perfect square.

T10/422. Let n be a positive integer. How many strings of length n : $a_1 a_2 \dots a_n$ where a_i is chosen from $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) are there such that the number of occurrences of 0 is even?

T11/422. Let (u_n) be a sequence defined by

$$u_0 = a \in [0; 2), \quad u_n = \frac{u_{n-1}^2 - 1}{n} \text{ for all } n = 1, 2,$$

3, ... Find $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \sqrt{n})$.

T12/422. Let ABC be a triangle, inscribed in the circle (O) with altitudes AD , BE , and CF . AA' is a diameter of (O) . $A'B$, $A'C$ intersect AC , AB at M , N , respectively. Points P , Q are in EF , such that PB , QC are perpendicular to BC . The line passing through A and orthogonal to QN , PM cuts (O) at X , Y , respectively. The tangents to circle (O) at X and Y meet at J . Prove that JA' is perpendicular to BC .

Translated by LEMINH HA



Tản mạn VỀ TOÁN VÀ TIN

(Tiếp theo kì trước)

NGUYỄN XUÂN HUY
(Viện Công nghệ Thông tin)

Thuật toán Bresenham

Giả sử $n \geq m$ thì có tỉ lệ $x:y = m:n$. Ta cho y biến thiên từ 1 đến n và tính dần giá trị của $x = y(m/n)$. Bạn hãy lấy một cốc rỗng có dung lượng n thìa nước và đặt cốc trên một đĩa lót để đựng nước tràn. Mỗi khi tăng y thêm 1 đơn vị, bạn tăng con đếm d số ô bị cắt 1 đơn vị, ghi nhận ô (x,y) là ô bị cắt và mức m thìa nước đổ vào cốc.

Nếu cốc bị tràn thì bạn làm như sau:

- (1) Thêm cho x 1 đơn vị;
- (2) Tăng con đếm d thêm 1 đơn vị;
- (3) Ghi nhận ô (x,y) là ô bị cắt;
- (4) Đổ cốc đầy nước đi;
- (5) Đổ phần nước tràn ở đĩa lót vào cốc.

Nếu cốc vừa đầy thì bạn chỉ cần thực hiện thao tác (4).

Tại sao lại làm như vậy. Thật là dễ hiểu. Biến thiên của x theo y thực ra có thể viết dưới dạng tổng của các giá trị không đổi m/n . Khi cân cộng dãy các phân số m/n với mẫu số cố định là n thì chắc chắn là bạn chỉ cần cộng dồn các tử số. Gọi giá trị cộng dồn này là t . Ta thấy

Nếu $t < n$ thì x chưa đạt tới đơn vị, chỉ có 1 ô bị cắt.

Nếu $t = n$ thì x vừa đạt đến đơn vị, vẫn chỉ có 1 ô bị cắt, ta đặt lại $t = 0$.

Nếu $t > n$ thì x vượt quá đơn vị, ngoài 1 ô bị cắt còn có thêm 1 ô phía trên nữa bị cắt, ta giảm t một lượng n .

Định lý ngắn nhất?

Số nguyên tố là những số tự nhiên có đúng hai ước, thí dụ, 2, 3, 5, ...

Số nguyên tố dạng $2^p - 1$ với p là số nguyên tố được gọi là số nguyên tố Mersenne, thí dụ, các số $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$, $127 = 2^7 - 1$ là những số nguyên tố Mersenne.

Theo một lẽ tự nhiên, nảy sinh các câu hỏi sau đây:

(Q1) Tại sao lại chỉ nghiên cứu các số nguyên tố dạng $2^p - 1$ mà không xét các số dạng $a^p - 1$ với a là số tự nhiên bất kì.

(Q2) Nếu p nguyên tố thì $2^p - 1$ có phải là số nguyên tố không?

(Q3) Nếu p là hợp số thì $2^p - 1$ là số nguyên tố hay hợp số?

(Q4) Các số nguyên tố Mersenne có nhiều vô hạn hay không?

Mệnh đề 3 sau đây trả lời cho câu hỏi Q1.

Mệnh đề 3

Nếu a và p là hai số tự nhiên thoả mãn $a^p - 1$ là số nguyên tố thì hoặc là $a = 2$ hoặc $p = 1$.

Gợi ý chứng minh

Do $a^p - 1$ chia hết cho $a - 1$. Nhưng $a^p - 1$ nguyên tố, tức là chỉ có đúng hai ước nên $a - 1$ chỉ có thể là 1 hoặc $a^p - 1$. Từ đây ta suy ra $a = 2$ hoặc $p = 1$. $\square$

Mệnh đề 4 và các thí dụ sau đây trả lời cho câu hỏi Q2 và Q3.

Mệnh đề 4

Nếu $2^p - 1$ là số nguyên tố thì p là số nguyên tố.

Gợi ý chứng minh

Giả sử p là hợp số tức là $p = ab > 1$ với $a > 1$, $b > 1$. Khi đó $2^p - 1 = (2^a)^b - 1$ nguyên tố mà $2^a > 2$ (do $a > 1$), điều này mâu thuẫn với Mệnh đề 3. $\square$

Thí dụ

$15 = 2^4 - 1 = 3 \times 5$; $31 = 2^5 - 1$; $63 = 2^6 - 1 = 3 \times 21$.

Còn Q4 là bài toán đến nay vẫn chưa giải được.

Với các số nguyên tố $p = 2, 3, 5, 7$ người ta thấy $2^p - 1$ đều là số nguyên tố. Với $p = 11$ ta có $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. Vậy, dù p là số nguyên tố nhưng $2^p - 1$ lại có thể là hợp số.

Các nhà toán học cũng cảm thấy rằng các số nguyên tố Mersenne ngày một thưa dần.

Người ta cũng đã khảo sát được các số dạng $2^p - 1$ với 18 giá trị nguyên tố đầu tiên của p là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61. Đến số nguyên tố thứ 19, $p = 67$ thì câu hỏi $2^{67} - 1$ có phải là số nguyên tố Mersenne?

Câu hỏi này bị bỏ ngỏ khoảng 300 năm...

Năm 1903 trong phiên họp toàn thể của Hội Toán học Mỹ, nhà toán học trẻ Cole lặng lẽ lên bảng và viết dòng sau đây:

$$2^{67} - 1 = 147573952589676412927$$

$$= 193707721 \times 761838257287.$$

Chỉ sau đó một thoáng, cả hội trường vỗ tay rào rào. Chưa bao giờ trong phòng khánh tiết của Hội Toán học Mỹ các nhà khoa học vỗ tay lâu và nhiệt thành đến như vậy.

Vẫn không nói thêm một lời nào, Cole khiêm tốn rời bảng về lại chỗ ngồi. Trong giờ giải lao, một người bạn của Cole đến hỏi anh: "*Cậu mất bao nhiêu thời gian để phân tích số đó?*". Cole trả lời: "*Tớ dành ra tất cả các ngày chủ nhật của ba năm liền!*". Phải là một người ham mê toán học và có ý chí phi thường mới có thể hoàn thành được khối lượng tính toán khổng lồ như vậy.

Mệnh đề 5 (Cole, 1903)

$$2^{67} - 1 = 147573952589676412927$$

$$= 193707721 \times 761838257287.$$

Có lẽ đây là mệnh đề toán học ngắn đáng kinh ngạc và hơn nữa chứng minh cho mệnh đề này chắc chắn là ngắn nhất trong lịch sử toán học: Không có một từ nào (?)

Từ hơn hai ngàn năm trước, nhà toán học Hy Lạp Euclid đã chứng minh rằng dãy các số nguyên tố là vô hạn và cùng với các nhà toán học khác ông đã phát triển thuật toán kiểm tra tính nguyên tố của các số.

Từ lâu chúng ta đã biết số nguyên (n lớn hơn 1 là nguyên tố khi và chỉ khi n không có ước số nào trong khoảng 2 đến $\sqrt{n}$. Với những số lớn tới hàng trăm chữ số thì việc kiểm tra theo dấu hiệu này vẫn đòi hỏi thời gian quá lớn. Ngày 8 tháng 8 năm 2002, ba nhà toán học trẻ của Ấn Độ là *Manindra Agrawal*, *Neeraj Kayal* và *Nitin Saxena* đã trình bày một thuật toán cho phép kiểm tra một số nguyên dương n cho trước là số nguyên tố hay hợp số với thời gian đa thức. Thuật toán

này đã đi vào lịch sử toán học với tên gọi AKS lấy từ ba chữ cái đầu tiên của ba người.

Diện tích

Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích $s = 729221 \text{ m}^2$. Tính chu vi của mảnh đất, biết rằng các cạnh của mảnh đất đều là những số nguyên lớn hơn 1 m.

Quá dễ phải không bạn! Từ diện tích s ta tìm cách tính chiều dài d và chiều rộng r . Khi đó chu vi $c = 2(d+r)$. Ta lại biết $s = dr$ nên ta phải giải phương trình hai ẩn để tính d và r . Vì các cạnh của mảnh đất đều là những số nguyên lớn hơn 1 nên ta lần lượt chia s cho $r = 2, 3, \dots$. Khi nào chia hết, tức là gặp dư bằng 0 thì ta tìm được kết quả r là số chia và d là thương.

Các bài toán tương tự như bài Diện tích được gọi là các bài toán *Cửa sập* hoặc *Một chiều*. Đặc điểm chung của các bài này là đi theo chiều này thì dễ, nhưng theo chiều ngược lại thì rất khó. Giả sử bạn có hai số nguyên tố d và r cỡ 100 chữ số. Bạn lấy tích $s = dr$ rồi giấu hai số d và r này đi, chỉ đưa s cho người khác và đố họ đoán xem s là tích của hai số nguyên dương khác 1 nào. Bạn thấy ngay, tìm tích s của hai số d và r cũng "*hơi bị khó*", nhưng so với việc phân tích s ra thừa số khác 1 thì là không đáng kể. Nếu bạn có thể làm một trăm phép chia trong thời gian 1 giây thì để phân tích số s thành tích dr bạn phải mất khoảng 10^{70} tỉ năm. Có thể, lúc đó Trái Đất của chúng ta đã bị hủy diệt từ lâu và sự sống đã được tái tạo và phát triển hàng chục vòng rồi.

Đến đây ta thấy rõ sự khác nhau khá căn bản của các đề thi Toán và Tin. Các đề Toán chủ yếu là đòi hỏi lời giải mang tính *luận lí* sao cho người đọc tin được chuỗi lập luận chặt chẽ của thí sinh. Khi đã chỉ ra được sự *tồn tại* của đối tượng có thể coi là hoàn tất. Tuy nhiên, để tìm ra cái *đối tượng tồn tại* đó thì lại đòi hỏi thời gian, đôi khi là rất lớn. Với tích $s = dr$ thì rõ ràng là d và r tồn tại (và đang được giấu đi). Tìm lại chúng sao mà khó vậy! Vì lẽ đó, trong các bài thi Tin học người ta thường yêu cầu thí sinh tìm ra đáp số trong thời gian vài giây (một giây khoảng 3 lần chớp mắt).

Các bài toán *Cửa sập* thường được vận dụng trong mã hoá thông tin và giao dịch điện tử. Nhờ các bài toán này mà người ta xây dựng được các hệ mật mã 2 khóa cho mỗi người:

một khóa để công khai cho mọi người mã hóa bản tin cần gửi cho chủ nhân của khóa đó, một khóa được giữ riêng cho mỗi người để giải mã bản tin nhận được.

Bạn cũng cần lưu ý rằng thuật toán AKS chỉ cho ta cách thức kiểm tra nhanh một số nguyên dương có phải là số nguyên tố hay không chứ không giúp ta phân tích nhanh một số nguyên dương ra thừa số nguyên tố.

Tồn tại nhưng không tìm được?

Trên kia ta đã nói về những đối tượng tồn tại thực sự nhưng không thể tìm được trong khoảng thời gian hữu hạn cho trước. Nay ta thử xét câu sau: "Số tự nhiên nhỏ nhất được mô tả bằng không dưới mười sáu từ Việt." Ta tạm hiểu từ Việt hay từ soạn thảo tiếng Việt là các từ đơn rời nhau. Theo ngữ pháp tiếng Việt thì số-tự-nhiên chỉ là một từ, theo quy định tạm thời của ta thì thuật ngữ trên gồm ba từ. Theo ý bạn số này có tồn tại không?

Nếu bạn tìm ra số x đó, nghĩa là bạn cố gắng chỉ dùng tối thiểu là 16 từ tiếng Việt để đọc hoặc mô tả số đó thì quá tốt. Bây giờ bạn thử đếm xem câu trên chứa bao nhiêu từ Việt: 15! Chỉ với 15 từ Việt bạn đã xác định được số x . Vậy là chúng ta đã gặp mâu thuẫn.

Tin rất cần Toán

Nhiều bài toán Tin đòi hỏi các bạn phải sử dụng các kiến thức toán vào loại khó, đặc biệt là toán học rời rạc. Dưới đây là một bài như vậy.

Bộ bài

Trên bàn đặt một bộ bài gồm $n - 1$ quân bài mã số $1, 2, \dots, n - 1$, $3 \leq n \leq 1000000000$. Trọng tài chỉ định bạn lấy k quân bài. Sau đó trọng tài đưa ra một số tự nhiên s . Bạn cần cố gắng thực hiện ít nhất m thao tác thuộc một trong hai loại sau đây:

- Lấy thêm một quân bài u từ trên bàn $(+u)$,
- Bỏ bớt một quân bài v trên tay $(-v)$, để cuối cùng đạt được hệ thức

$$t \equiv s \pmod{n} \quad (1)$$

trong đó t là tổng mã số các quân bài có trên tay bạn sau khi bạn đã hoàn tất m thao tác như trên.

Thí dụ, với $n = 8$, trọng tài cho số $s = 22$ và chỉ định bạn lấy $k = 3$ quân bài là 2, 3 và 6.

Nếu bạn bỏ quân bài 2 và lấy quân bài 5 thì tổng $t = 3 + 6 + 5 = 14$. Khi đó

$$t \pmod{n} = 14 \pmod{8} \equiv 22 \pmod{8} = s \pmod{8}.$$

Vậy một lời giải cho bộ dữ liệu này là thực hiện 2 thao tác: -2 và $+5$.

Thuật toán

Ta sẽ chứng minh rằng với không quá 2 thao tác $(+)$ lấy thêm hoặc $(-)$ bỏ bớt một quân bài ta có thể đạt được hệ thức (1).

Gọi t là tổng các mã số của các quân bài có trong tay lúc đầu. Giả sử $t \geq s$, ta đặt $b = (t - s) \pmod{n}$ và xét các trường hợp loại trừ nhau sau đây:

1. $b = 0$: Hệ thức (1) đã thỏa, ta không phải làm gì. Ta thông báo $m = 0$, trong đó m là số thao tác $+/-$ cần thực hiện.

2. Quân bài b có trên tay: Ta chỉ việc bỏ quân bài này xuống, khi đó tổng t sẽ giảm b đơn vị theo mod n .

3. Quân bài $(n - b)$ có trên bàn: Ta chỉ việc lấy thêm quân bài này. Khi đó tổng t sẽ được thêm $(n - b)$ đơn vị theo mod n , điều này tương đương với việc giảm tổng t đi b đơn vị theo mod n .

4. Nếu không xảy ra các trường hợp 1, 2 và 3 như trên, tức là $b > 0$, quân bài b có trên bàn và quân bài $n - b$ có trên tay: Ta gọi k là số số hạng b tối thiểu để tổng $u = b + b + \dots + b \equiv kb \pmod{n}$ thỏa mãn điều kiện: "Quân bài u có trên tay. Đặt $v = (k - 1)b \pmod{n}$, ta có ngay $u - v \equiv kb - (k - 1)b \equiv b \pmod{n}$. Do $u = kb$ và k là số nhỏ nhất để quân bài u có trên tay và $k - 1 < k$ nên $v = (k - 1)b$ phải là quân bài có trên bàn. Như vậy ta chỉ cần bỏ quân bài u trên tay $(-u)$, lấy quân bài v từ trên bàn $(+v)$ thì tổng sẽ được giảm đi $b \pmod{n}$, tức là hệ thức (1) được thỏa mãn.

Trường hợp $t < s$: Ta phải thêm $b = s - t$ đơn vị cho cho t . Việc này tương đương với giảm t bớt $(n - b)$ đơn vị. Thay b bằng $n - b$ rồi lặp lại thủ tục trên sẽ cho ta kết quả tương ứng.

Vấn đề còn lại là chứng minh sự tồn tại của số k lớn hơn 1 sao cho quân bài u có trên tay.

Trên hai ngàn năm trước nhà toán học cổ Hy Lạp Diophantus đã phát biểu và chứng minh định lý sau đây.

Định lý 1 (Diophantus)

Cho phương trình $ax \equiv b \pmod{n}$, với các hệ số a, b, n là các số tự nhiên, $n > 0$. Gọi d là

ước chung lớn nhất của a và n , $d = (a, n)$.
Khi đó

- a) Nếu d không là ước của b thì phương trình vô nghiệm.
b) Nếu $b = cd$ thì phương trình có đúng d nghiệm trong tập $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Các nghiệm này có dạng $x + k(n/d) \pmod{n}$, trong đó x là một nghiệm tùy ý, $k = 0, 1, 2, \dots, (d-1)$.

Phương trình $ax \equiv b \pmod{n}$ được người đời sau gọi là phương trình Diophantus.

Chứng minh

Nếu x là nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{n}$ thì $ax - b = kn$, hay $ax - kn = b$. Mặt khác, do $d = (a, n)$ suy ra b chia hết cho d . Giả sử $b = cd$, tức là giả sử phương trình có nghiệm. Gọi x là một nghiệm của phương trình trên, ta dễ dàng kiểm tra được rằng $x + k(n/d)$, $k = 0, 1, \dots, (d-1)$ cũng là nghiệm của phương trình đó. Thật vậy, do $d = (a, n)$ nên $v = an/d$ chia hết cho a và n . Ta có

$$a(x + k(n/d)) \equiv ax + k(an/d) \equiv ax + kv \equiv b + kv \equiv b \pmod{n}. \quad \square$$

Trở lại bài toán trên, khi gặp tình huống 4, do quân bài b có trên bàn và quân bài $n - b$ có trên tay nên $b \neq n - b$. Ta cũng để ý rằng, $b < n$ và do đó $n - b \leq n$.

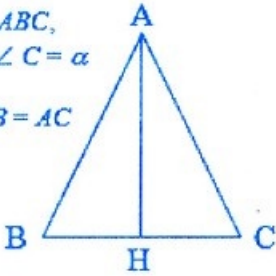
Xét phương trình $bx \equiv n - b \pmod{n}$ (2)

Đặt $d = (b, n)$ thì $d = (b, n - b)$, tức là $n - b$ chia hết cho d , theo Định lý 1 phương trình (2) có nghiệm. Gọi $x = k$ là nghiệm nhỏ nhất của (2). Nếu $k = 1$ thì $bk = b = n - b$, mâu thuẫn với điều kiện $b \neq n - b$. Vậy $k > 1$. $\square$

Hai người bạn thân thiết

Trong tiểu ban phương pháp giảng dạy toán học của Hội nghị Toán học Quốc tế, một đại biểu lên trình bày lời giải của bài toán sau: “Chứng minh rằng nếu tam giác có hai góc bằng nhau thì hai cạnh đối diện các góc đó cũng bằng nhau.” Nghe xong đề toán này, nhiều đại biểu dự hội thảo nghĩ rằng diễn giả có vấn đề, vì đây là bài toán quá dễ, chỉ tương đương với trình độ phổ thông cơ sở.

Diễn giả bình tĩnh nói tiếp: “Xin lỗi đã làm mất thì giờ của quý vị. Tôi chỉ xin quý vị cho biết lời giải như trong Bảng C đã được công bố ở đâu chưa?” Hội trường lặng đi một lát và rồi tiếng vỗ tay vang lên không ngớt. Quả thật, từ thời Euclid đến nay chưa ai thấy lời giải nào như trình bày trong Bảng C. Đến lúc này diễn giả bật mí: “Thưa quý vị, lời giải này là của máy tính đây ạ!” Hóa ra diễn giả vốn là một thầy giáo dạy Toán và rất mê Tin học. Thầy đã xây dựng một hệ thống chứng minh tự động trên máy tính. Sau đó, để kiểm tra hoạt động của hệ thống, thầy dạy cho máy tính biết các khái niệm về điểm, đường thẳng, mặt phẳng, các tiên đề và các phương pháp chứng minh. Khi dạy đến phương pháp kẻ đường phụ, thầy nạp quy tắc sau đây vào máy: “Nếu quan sát kỹ hình vẽ ban đầu mà không tìm được lời giải, hãy thử kẻ một đường phụ...”. Sau khi quan sát hình vẽ ban đầu, máy thấy rằng không cần kẻ đường phụ AH như mọi người thường làm trong Bảng B. Máy đã xét luôn hai tam giác có sẵn trên hình là ABC và ACB và thấy là chúng bằng nhau. Bạn thấy, nếu Toán học kết hợp với Tin học thì nhân loại có thể thu được nhiều kết quả lý thú hơn ta tưởng.

GT: $\triangle ABC$, $\angle B = \angle C = \alpha$ KL: $AB = AC$ 	Chứng minh kinh điển $\triangle AHB = \triangle AHC$ (g.c.g) vì $\angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$ AH: cạnh chung $\angle BAH = \angle CAH = 90^\circ - \alpha$ Suy ra $AB = AC$	Chứng minh của máy tính $\triangle ABC = \triangle ACB$ (g.c.g) vì $\angle ABC = \angle ACB$ (gt) $BC = CB$ $\angle ACB = \angle ABC$ Suy ra $AB = AC$
Bảng A. Giả thiết & kết luận	Bảng B. Chứng minh 1.	Bảng C. Chứng minh 2.



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 422 (8.2012)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN. NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THÙY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 Vũ Đình Hòa – Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 53 – năm 2012.
- 3 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School
Đỗ Quang Minh - Từ một bài toán thi học sinh giỏi.
- 6 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2012 – 2013.
- 7 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2012 – 2013.
- 9 Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thừa Thiên - Huế, năm học 2011 – 2012.
- 10 Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contributions
Cao Minh Quang – Những bất ngờ từ một bất đẳng thức đơn giản.
- 13 Giải trí toán học – Math Recreation
- 14 *Nguyễn Duy Tiến* – Tưởng niệm 10 năm ngày mất của Giáo sư Laurent Schwartz.
- 16 Đề ra kì này – Problems in This Issue
T1/422,..., T12/422, L1/422, L2/422.
- 18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems
Giải các bài của số 418.
- 28 Tin học
Nguyễn Xuân Huy – Tản mạn về Toán và Tin.

Ảnh Bìa 1: Từ trái sang phải:

Hàng trước: thầy Nguyễn Hữu Độ, thầy Nguyễn Thanh Sơn, Nguyễn Tạ Duy, Đậu Hải Đăng, Trần Hoàng Bảo Linh, Nguyễn Hùng Tâm, Lê Quang Lâm, thầy Vũ Đình Hòa, thầy Hà Duy Hưng, Nguyễn Phương Minh, thầy Kim Ngọc Chính.

Hàng sau: thầy Lê Bá Khánh Trình.

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH

Trĩ sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật : QUỐC HIỆP, THANH LONG

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

TRƯỜNG THCS LÊ HỒNG PHONG - THÀNH PHỐ HUẾ

• Địa chỉ: 214B Lý Nam Đế, thành phố Huế

• Điện thoại: 054.3519437 - 054.3611440



NGUYỄN PHƯỚC
Hiệu trưởng nhà trường

bộ, nhà tập thể dục và đang hoàn chỉnh tầng ba để học sinh toàn trường đều được học ngày 2 buổi. Vào đầu năm học mới 2012 – 2013 trường sẽ có 26 phòng học, trên 60 cán bộ giáo viên, nhân viên và 920 học sinh được phân thành 26 lớp.

Trong những năm qua thầy và trò Trường THCS Lê Hồng Phong đã nỗ lực phấn đấu đáp ứng yêu cầu phát triển sự nghiệp giáo dục và đào tạo, từng bước khắc phục khó khăn vươn lên sánh vai cùng các trường bạn trong thành phố và đã đạt được những thành tích đáng tự hào.

Hàng năm, có nhiều học sinh đạt giải trong kì thi học sinh giỏi cấp Tỉnh và đều đạt giải toàn đoàn trong Kỳ thi học sinh giỏi cấp thành phố, trong đó có 3 năm trường đoạt giải Nhất toàn đoàn. Trường đã hai lần đoạt giải toàn đoàn trong Hội Khỏe Phù Đổng cấp thành phố.

Trường THCS Lê Hồng Phong được thành lập vào đầu năm học 2004 – 2005 trên khuôn viên 11.371m² với 16 phòng học, 834 học sinh được phân thành 20 lớp và 26 cán bộ, giáo viên, nhân viên. Lúc mới thành lập trường có tên “Trường THCS Hương Long” và đến tháng 11/2005 được đổi tên “Trường THCS Lê Hồng Phong”.

Được sự quan tâm của lãnh đạo các cấp, nhà trường đã đầu tư xây dựng khu hiệu

Đội ngũ giáo viên ngày càng được nâng cao về chất lượng và số lượng; 100% giáo viên đạt chuẩn đào tạo trong đó có trên 85% giáo viên đạt chuẩn trên đào tạo. Hai lần trường được Phòng GD&ĐT trao tặng Cờ toàn đoàn trong Hội thi giáo viên giỏi cấp thành phố. Hội đồng giáo dục nhà trường có 24 giáo viên đạt giáo viên giỏi cấp thành phố và 4 giáo viên đạt giáo viên giỏi cấp Tỉnh, 01 giáo viên được phong tặng Nhà giáo Ưu tú. Trường có 03 đề tài cấp Ngành đã được nghiệm thu, đặc biệt đề tài “Hệ thống văn bản phục vụ quản lí giáo dục” đã được dự án SREM (Dự án hỗ trợ đổi mới quản lí giáo dục) phổ biến cho các trường trên toàn quốc.

Nhà trường liên tục đạt danh hiệu Tập thể lao động Tiên tiến Xuất sắc; được Bộ trưởng Bộ GD&ĐT tặng Bằng khen năm học 2007-2008; UBND Tỉnh tặng Cờ thi đua và công nhận trường đạt chuẩn quốc gia năm học 2008 – 2009; Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen năm học 2009 – 2010 và Chủ tịch Nước trao tặng Huân chương Lao động hạng Ba năm học 2010 – 2011. Chi bộ nhà trường hằng năm đều được công nhận Chi bộ trong sạch, vững mạnh và được Đảng bộ khen thưởng. Công Đoàn nhà trường luôn được công nhận vững mạnh và nhiều năm được Liên Đoàn Lao Động Tỉnh tặng Bằng khen. Liên Đội Thiếu niên Tiền Phong của nhà trường luôn được các cấp khen thưởng, trong đó có 3 năm đạt danh hiệu vững mạnh cấp Trung ương.

Trong thời gian đến cán bộ, giáo viên, nhân viên và học sinh nhà trường sẽ phấn đấu nỗ lực hơn nữa để duy trì và nâng cao thành tích đã đạt, đáp ứng được nguyện vọng của nhân dân địa phương, chung sức với toàn Ngành nhằm xây dựng Tỉnh Thừa Thiên-Huế trở thành trung tâm văn hóa của miền Trung.



HỘI ĐỒNG SƯ PHẠM NHÀ TRƯỜNG