



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

7 2012
SỐ 421

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 49

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Tri sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



Bình luận

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A - A₁ (NĂM 2012)



TOÀN HỌC & Tuổi trẻ

ĐẾN VỚI CÁC TỈNH MIỀN TÂY NAM BỘ



Hiệu trưởng **Bùi Chí Hiếu** (Thứ hai từ trái sang) cùng các giáo viên và học sinh trường THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm (Vĩnh Long) gặp gỡ với đoàn cán bộ Tạp chí TH&TT

đồng thời mong mỗi kế hoạch xây dựng trường chuyên sớm hoàn thành để đáp ứng Chỉ thị của Bộ GD&ĐT là đến năm 2015 các trường THPT chuyên đều đạt chuẩn Quốc gia. Từ 8 - 10.6.2012, đoàn đã tham dự Olympic Toán Tuổi thơ lần thứ Tám tại Cà Mau. Sáng 11.6.2012, đoàn tiếp tục đến tỉnh Sóc Trăng, Giám đốc Sở GD-ĐT Sóc Trăng **Trần Việt Hùng**, Trưởng phòng THPT **Châu Tuấn Hồng**, các thầy giáo **Thiểm Bửu Triết**, **Lâm**

Nhằm tìm hiểu thực tế về việc sử dụng Tạp chí TH&TT trong các trường phổ thông và thu thập các ý kiến góp ý về nội dung, góp phần làm cho Tạp chí đến với nhiều độc giả, đặc biệt là độc giả ở phía Nam, đoàn cán bộ Tạp chí vừa có chuyến công tác tới một số tỉnh miền Tây Nam Bộ từ 5 đến 13.6.2012.

Sáng 6.6.2012, đoàn đã gặp gỡ giáo viên và học sinh của Trường THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, tỉnh Vĩnh Long - Lá cờ đầu thi đua khối trường THPT của tỉnh. Thầy hiệu trưởng **Bùi Chí Hiếu** vui mừng thông báo nhà trường vừa tổ chức 20 năm thành lập và đã được UBND tỉnh phê duyệt Dự án cải tạo xây dựng mở rộng khuôn viên nhà trường đồng thời có kế hoạch triển khai từ năm 2012. Cô Hiệu phó **Lê Ngọc Trường** đã cho biết về phong trào giải Toán - Lí trên Tạp chí của học sinh và mong muốn có nhiều học sinh được khen, có nhiều giáo viên được đăng bài trên Tạp chí. Buổi chiều, tại TP. Cần Thơ, Phó Giám đốc Sở GD-ĐT Cần Thơ và Giám đốc Công ty CP Sách- Thiết bị Trường học Cần Thơ **Trần Quốc Bình** đã gặp gỡ đoàn và thống nhất cách làm để Tạp chí có thể đến được với đông đảo giáo viên và học sinh của Cần Thơ.

Ngày 7.6.2012, Giám đốc Sở GD-ĐT Cà Mau, NGND. TS **Thái Văn Long** đã tiếp Đoàn. Sau đó đoàn đã đến thăm Trường THPT chuyên Phan Ngọc Hiển- ngôi trường THPT nhỏ nhất trong cả nước, nhưng là ngôi trường chất lượng bậc nhất của tỉnh, có nhiều giáo viên có trình độ Thạc sĩ nhất, có nhiều học sinh được khen trên Tạp chí TH&TT và đoạt giải học sinh giỏi các cấp nhất. Thầy Hiệu trưởng **Lê Thanh Liêm** trao đổi với đoàn về cách kết hợp mọi lực lượng xã hội để động viên giáo viên và học sinh,

Quốc Toàn (THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai) đã có buổi trao đổi với đoàn và rất mong muốn có Hội nghị về Toán học được tổ chức tại tỉnh nhà để khơi dậy thêm lòng say mê toán học cho học sinh. Ngày 12.6.2012, đoàn đã có buổi làm việc với Phó Giám đốc Sở GD&ĐT Kiên Giang ThS. **Ninh Thành Viên**, Giám đốc Công ty CP Sách và Thiết bị Trường học Kiên Giang **Nguyễn Hùng Dũng** nhằm kết hợp giới thiệu và phát hành Tạp chí đến được các trường phổ thông.

Chuyến đi để lại nhiều ấn tượng tốt đẹp cho đoàn. Hi vọng Tạp chí sẽ có thêm nhiều giáo viên và học sinh ở vùng đất đồng bằng sông Cửu Long yêu mến và đón đọc.

Thanh Loan

Giám đốc Sở GD-ĐT Sóc Trăng **Trần Việt Hùng** (Thứ tư từ phải sang), cùng các giáo viên và chuyên viên của Sở chụp ảnh với đoàn.





TRUNG HỌC CƠ SỞ

TÍNH TOÁN GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

NGUYỄN VĂN CHẠY

(GV THCS&THPT Bàu Hàm, Trảng Bom, Đồng Nai)

Trong các đề thi học sinh giỏi giải toán trên máy tính điện tử (HSG-GTTMTĐT) thường xuất hiện dạng bài **tính toán giá trị biểu thức**. Bài viết này xin giới thiệu một số cách tiếp cận chung cho dạng bài toán đó.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Đối với các bài toán yêu cầu tính toán cho kết quả là một số nguyên chính xác mà số chữ số vượt quá độ rộng của màn hình máy tính điện tử thì ta biểu diễn số cần tính dưới dạng $M = a \cdot 10^n + b$ với a, b là các nhóm chữ số phù hợp để khi thực hiện phép tính thì kết quả hiển thị đầy đủ trên màn hình, sau đó kết hợp tính trên máy tính điện tử và trên giấy nháp để tìm kết quả chính xác.

Đối với các bài toán chỉ cần tìm kết quả gần đúng (dưới dạng số thập phân hữu hạn) thì ta nên chia nhỏ bài toán gốc chứa nhiều phép tính thành các bài toán nhỏ, sau đó kết hợp sử dụng các biến nhớ để tính toán tìm kết quả.

Đối với các bài toán có chứa các giá trị lượng giác thì ta cần biết những kiến thức cơ sở của lượng giác. Trong thực hành thao tác bấm phím cần ghi nhớ công thức $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ để chuyển hàm $\cot \alpha$ về hàm $\tan \alpha$ (do trong máy không có phím chức năng tính trực tiếp $\cot \alpha$).

2. CÁC THÍ DỤ MINH HỌA

★ **Thí dụ 1.** Tính kết quả đúng của các tích sau

$$P = 13032006 \times 13032007;$$

$$Q = 3333355555 \times 3333377777.$$

(Đề thi HSG GTTMTĐT cấp Khu vực, 2007-2008)

Lời giải. Đặt $x = 1303, y = 2006$ ta có

$$\begin{aligned} P &= (x \cdot 10^4 + y)(x \cdot 10^4 + y + 1) \\ &= x^2 \cdot 10^8 + 2xy \cdot 10^4 + x \cdot 10^4 + y^2 + y. \end{aligned}$$

Tính trên máy tính, sau đó làm tính trên giấy, ta được

$$x^2 \cdot 10^8 = 169780900000000$$

$$2xy \cdot 10^4 = 52276360000$$

$$x \cdot 10^4 = 13030000$$

$$y^2 = 4024036$$

$$y = 2006$$

$$P = 169833193416042.$$

• Đặt $A = 33333; B = 55555; C = 77777$, ta có

$$\begin{aligned} Q &= (A \cdot 10^5 + B)(A \cdot 10^5 + C) \\ &= A^2 \cdot 10^{10} + AB \cdot 10^5 + AC \cdot 10^5 + BC. \end{aligned}$$

Tính trên máy rồi làm tính, ta được

$$A^2 \cdot 10^{10} = 11110888890000000000$$

$$AB \cdot 10^5 = 185181481500000$$

$$AC \cdot 10^5 = 259254074100000$$

$$B \cdot C = 4320901235$$

$$Q = 11111333329876501235. \square$$

Lưu ý 1. Nếu tính trực tiếp trên máy tính điện tử thì kết quả vượt quá độ rộng hiển thị của màn hình. Do đó để có kết quả chính xác ta cần, tách các chữ số thành các bộ phận có k chữ số (k tùy thuộc vào từng loại máy tính cụ thể, thông thường thì k bằng $\frac{1}{2}$ độ rộng hiển thị các chữ số trên màn hình), bắt đầu từ bên phải và thực hiện tính toán. Sau đó kết hợp

tính trên máy tính điện tử và trên giấy nháp để được kết quả chính xác cuối cùng. Có thể đặt các biến cho các nhóm chữ số để thuận tiện trong biến đổi đại số.

★ **Thí dụ 2.** *Tính tổng sau*

$$S = 1.1! + 2.2! + \dots + 16.16!.$$

(Đề thi HSG - GTTMTĐT, H. Phú Tân, An Giang, 2011-2012)

Lời giải. Vì $n \cdot n! = (n+1-1) \cdot n! = (n+1)! - n!$ nên ta biến đổi tổng đã cho đồng thời tính toán trên máy tính điện tử và kết hợp tính trên giấy như sau

$$\begin{aligned} S &= 1.1! + 2.2! + \dots + 16.16! \\ &= (2! - 1!) + (3! - 2!) + \dots + (17! - 16!) \\ &= 17! - 1! = 13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 - 1 \\ &= 6227020800 \cdot 57120 - 1 \\ &= (6227 \cdot 10^6 + 208 \cdot 10^2) \cdot 5712 \cdot 10 - 1 \\ &= 35568624 \cdot 10^7 + 1188096 \cdot 10^3 - 1 \\ &= 355687428096000 - 1 \\ &= 355687428095999. \quad \square \end{aligned}$$

Lưu ý 2. Nếu không biến đổi để đơn giản tổng trên thì cũng có thể tính trực tiếp kết quả trên máy kết hợp trên giấy một cách tuần tự từng số hạng rồi cộng lại. Tuy nhiên, cách tính đó sẽ mất nhiều thời gian, có khi nhầm lẫn. Trên một số máy tính điện tử (chẳng hạn Casio fx - 570ES), nếu dùng chức năng tính tổng thì sẽ cho kết quả là số thập phân gần đúng vì nó vượt quá độ rộng của màn hình máy tính.

★ **Thí dụ 3.** *Tính giá trị biểu thức sau*

$$I = \frac{x^2(3y-5z+4)+2x(y^3z^2-4)+2y^2+z-6}{x(x^2+5y^2-7)+z^4+8}$$

$$\text{với } x = \frac{9}{4}; y = \frac{7}{2}; z = 4.$$

Lời giải. Lập công thức tính biểu thức trên với ý tưởng dùng các ô nhớ X, Y, M thay thế ba biến x, y, z theo thứ tự như sau

$$\frac{X^2(3Y-5M+4)+2X(Y^3M^2-4)+2Y^2+M-6}{X(X^2+5Y^2-7)+M^4+8}.$$

Sau đó bấm phím **CALC** để nhập các giá trị X, Y, M là $X = \frac{9}{4}; Y = \frac{7}{2}; M = 4$ ta nhận được

$$I = \frac{65358}{8479}. \quad \square$$

Lưu ý 3. Nếu nhập trực tiếp các giá trị của x, y, z để tính giá trị của biểu thức thì rất có thể độ rộng màn hình sẽ không đủ, mặc khác dữ liệu được nhập dễ bị nhầm lẫn. Sử dụng các biến nhớ trên máy tính điện tử để nhập công thức cần tính, sau đó dùng phím chức năng tính toán **CALC** để nhập giá trị của các biến giúp ta tránh sai sót khi nhập các phép tính, đồng thời cho thấy định hướng khai thác các chức năng của máy tính hỗ trợ trong việc tính toán. Trong một số bài toán, nếu biểu thức quá phức tạp, cồng kềnh, chúng ta có thể chia nhỏ thành các phép tính nhỏ và lưu giá trị tính toán vào các biến, sau đó tính biểu thức ban đầu qua các biến đó.

★ **Thí dụ 4.** *Tính giá trị biểu thức*

$$J = \frac{3\sin^3 x + 4\tan x \cdot \cot y + \cos^3 y}{2\cot^2 x + 3\cos^2 x \cdot \sin^3 y + \tan^2 y \cdot \cot\left(\frac{x}{3}\right)}$$

$$\text{biết rằng } \begin{cases} 2\sin x + 3\cos y = 2,211 \\ 5\sin x - 7\cos y = 1,946. \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} 2\sin x + 3\cos y = 2,211 \\ 5\sin x - 7\cos y = 1,946 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0,735 \\ \cos y = 0,247 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 47^\circ 18' 25'' \\ y = 75^\circ 41' 59'' \end{cases}$$

Khi đó lưu số đo góc x, y vào hai ô nhớ trên máy tính điện tử, lưu ý vì trên máy tính điện tử không có phím tính $\cot \alpha$ nên thay vì nhập

$\cot \alpha$ ta thay bởi $\frac{1}{\tan \alpha}$, sau đó lập biểu thức cần tính có sử dụng phím **CALC** , ta được $J \approx 0,040227236$. $\square$

(Xem tiếp trang 11)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Thời gian làm bài: 150 phút)

VÒNG 1

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

Câu 1 (2 điểm). Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a+b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

với $a > b > 1$.

a) Rút gọn P .

b) Biết $a - b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Câu 2 (2 điểm). Trên quãng đường AB dài 210 km, tại cùng một thời điểm, một xe máy khởi hành từ A đi về B và một ô tô khởi hành từ B đi về A . Sau khi gặp nhau, xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A . Biết rằng xe máy và ô tô không thay đổi vận tốc trên suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và của ô tô.

Câu 3 (2 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - m - 2$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 .

b) Tìm m để $|x_1 - x_2| = \sqrt{20}$.

Câu 4 (3 điểm). Cho tam giác ABC . Đường tròn (ω) có tâm O và tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại K, L . Tiếp tuyến (d) của đường tròn (ω) tại điểm E thuộc cung nhỏ KL , cắt các đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N . Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q .

a) Chứng minh $\widehat{MON} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

c) Chứng minh $KQ \cdot PL = EM \cdot EN$.

Câu 5 (1 điểm). Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $\sqrt{xy}(x-y) = x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x+y$.

VÒNG 2

(Dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

Câu 1 (1,5 điểm). Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+2x+2}\sqrt{x^2+2x-1}+2x^2+4x-4=0.$$

Câu 2 (2 điểm)

a) Cho các số thực a, b, c đôi một phân biệt và thỏa mãn $a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2012$. Tính giá trị của biểu thức $M = c^2(a+b)$.

b) Cho năm số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số trong chúng không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng, trong năm số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Câu 3 (2 điểm). Cho n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ (với $n \geq 3$). Kí hiệu $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là số lớn nhất trong các số $x_1, x_2, \dots, x_n$. Chứng minh rằng

$$\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1|}{2n}.$$

Câu 4 (1,5 điểm). Trong một lớp học có 36 bàn học cá nhân, được xếp thành 4 hàng và 9 cột (các hàng được đánh số từ 1 tới 4, các cột được đánh số từ 1 tới 9). Sĩ số học sinh của lớp

(Xem tiếp trang 5)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Đề thi đã đăng trên TH&TT số 420, tháng 6 năm 2012)

Câu 1. 1a) Ta có

$$A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} - b = 2\sqrt{b} - b.$$

1b) $A = 1 \Leftrightarrow b - 2\sqrt{b} + 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1.$

2) Ta có $x^2 - x + 3 = 3\sqrt{x^2 - x + 1}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 3\sqrt{x^2 - x + 1} - 3$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0; x = 1 \text{ hoặc } \sqrt{x^2 - x + 1} = 2 \quad (*)$$

$$\text{PT} (*) \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}; x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Vậy tập nghiệm PT là

$$S = \left\{ 0; 1; \frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Câu 2. 1) Do p nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1).$$

Vì $k(k+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, suy ra $(p-1)(p+1) : 8$ (1)

Vì p nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p = 3m + 1$ hoặc $p = 3m - 1$ ($m \in \mathbb{N}^*$) suy ra

$$(p-1)(p+1) : 3 \quad (2)$$

Do 8 và 3 nguyên tố cùng nhau nên từ (1) và (2) có $(p-1)(p+1) : 8 \cdot 3 = 24$ (đpcm).

2) Phương trình có nghiệm x

$$\Leftrightarrow \Delta' = 13 - y^2 - 4y = 17 - (y+2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq y+2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2.$$

Do $y \in \mathbb{N}$ nên $y \in \{0; 1; 2\}$. Thay vào PT và thử lại, tìm được $y = 2 \Rightarrow x = 3$ và $x = 1$.

Vậy $(x; y) \in \{(3; 2); (1; 2)\}$.

Câu 3. 1) Ta có $\Delta' = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0; \forall m.$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

2a) Áp dụng định lí Viète ta có $x_1 + x_2 = 2(m-1);$

$$x_1 x_2 = m - 3. \text{ Suy ra}$$

$$A = \frac{(x_1 + x_2)^2 + 4x_1 x_2 + 12}{(x_1 + x_2)^2 + 12x_1 x_2 + 36} = \frac{4(m-1)^2 + 4(m-3) + 12}{4(m-1)^2 + 12(m-3) + 36} = \frac{m^2 - m + 1}{m^2 + m + 1}.$$

2b) Nếu $m = 0$ thì $A = 1$ (nhận).

Nếu $m \in \mathbb{N}^*$ thì $0 < m^2 - m + 1 < m^2 + m + 1$ nên $0 < A < 1$ (loại).

Với m nguyên âm, đặt $m = -n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $A = 1 + \frac{2n}{n^2 - n + 1}$. Để A nguyên thì

$$2n : n^2 - n + 1.$$

Do $2n > 0$ và $n^2 - n + 1 > 0$, suy ra

$$2n \geq n^2 - n + 1 \Leftrightarrow n^2 - 3n + 1 \leq 0 \Rightarrow n^2 - 3n < 0$$

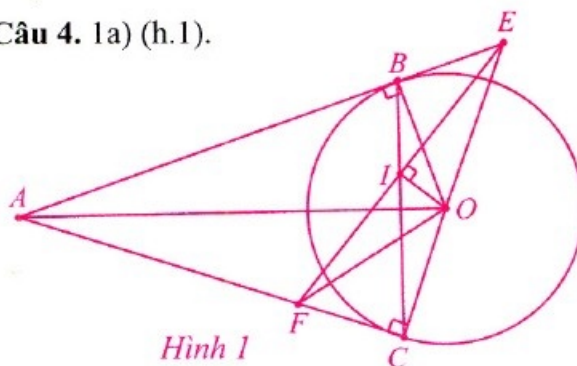
$$\Leftrightarrow n(n-3) < 0 \Rightarrow n = 1; n = 2.$$

Nếu $n = 1$ thì $m = -1 \Rightarrow A = 3$ (nhận).

Nếu $n = 2$ thì $m = -2 \Rightarrow A = 1 + \frac{4}{3}$ (loại).

Vậy $m = 0$ và $m = -1$ là các giá trị cần tìm.

Câu 4. 1a) (h.1).



Hình 1

Do $\widehat{OBE} = \widehat{OIE} = \widehat{OIF} = \widehat{OCF} = 90^\circ$ nên các tứ giác $EBOI$ và $FCOI$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{OBI} = \widehat{OEI}$; $\widehat{OCI} = \widehat{OFI}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Mặt khác $OB = OC$, $\widehat{OBI} = \widehat{OCI}$. Do đó $\widehat{OEI} = \widehat{OFI}$, hay tam giác OFE cân tại O .

b) Tứ giác $OBAC$ có $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^\circ$ nên $\widehat{BOC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$. Vì hai tam giác cân BOC và OEF có $\widehat{OBC} = \widehat{OEF}$ nên $\widehat{BOC} = \widehat{EOF}$. Suy ra $\widehat{EOF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ hay tứ giác $AEOF$ nội tiếp đường tròn.

2) Ta có $AB \cdot AC = 2a^2$.

Theo định lý Pythagore ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ \Leftrightarrow BC^2 = (AB + AC)^2 - 4a^2.$$

$$\text{Lại có } BC + 2a \leq \sqrt{2}(AB + AC) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow BC \leq \sqrt{2}(AB + AC) - 2a \quad (2)$$

$$\text{Vì } \sqrt{2}(AB + AC) \geq 2\sqrt{2}\sqrt{AB \cdot AC} = 2\sqrt{2}\sqrt{2a^2} = 4a$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(AB + AC) - 2a > 0 \text{ nên}$$

$$(2) \Leftrightarrow BC^2 \leq 2(AB + AC)^2 - 4\sqrt{2}(AB + AC)a + 4a^2$$

$$\Leftrightarrow (AB + AC)^2 - 4a^2$$

$$\leq 2(AB + AC)^2 - 4\sqrt{2}(AB + AC)a + 4a^2$$

$$\Leftrightarrow (AB + AC)^2 - 4\sqrt{2}(AB + AC)a + 8a^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (AB + AC - 2\sqrt{2}a)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng) nên BDT (1) được chứng minh.}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} AB + AC = 2\sqrt{2}a \\ AB \cdot AC = 2a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow AB = AC = \sqrt{2}a \text{ và } BC = 2a.$$

Câu 5. Gọi $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ là 17 số tự nhiên bất kì và $r_1, r_2, \dots, r_{17}$ là số dư khi chia lần lượt $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ cho 5.

Ta có $r_1, r_2, \dots, r_{17} \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

• Nếu trong 17 số $r_1, r_2, \dots, r_{17}$ có năm số bằng nhau, chẳng hạn $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5$.

Khi đó $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \vdots 5$.

• Nếu trong 17 số $r_1, r_2, \dots, r_{17}$ không có năm số nào bằng nhau thì tồn tại năm số có giá trị khác nhau từng đôi một, chẳng hạn $r_1, r_2, \dots, r_5$.

Khi đó $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 10$ nên

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \vdots 5$.

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Khoa Cơ bản, ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)



ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10... (Tiếp trang 3)

là 35. Sau một học kì, cô giáo chủ nhiệm xếp lại chỗ ngồi cho các học sinh trong lớp. Đối với mỗi học sinh của lớp, giả sử trước thời điểm chuyển chỗ, bạn ngồi ở bàn thuộc hàng thứ m , cột thứ n và sau khi chuyển chỗ, bạn ngồi ở bàn thuộc hàng thứ a_m , cột thứ a_n , ta gán cho bạn đó số nguyên $(a_m + a_n) - (m + n)$. Chứng minh rằng tổng của 35 số nguyên được gán cho 35 học sinh không vượt quá 11.

Câu 5 (3 điểm). Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M thuộc cung nhỏ CD của (O) , M khác C và D . MA cắt DB , DC

theo thứ tự tại X, Z ; MB cắt CA, CD theo thứ tự tại Y, T ; CX và DY cắt nhau tại K .

a) Chứng minh rằng $\widehat{MXT} = \widehat{TXC}$, $\widehat{MYZ} = \widehat{ZYD}$ và $\widehat{CKD} = 135^\circ$.

b) Chứng minh rằng $\frac{KX}{MX} + \frac{KY}{MY} + \frac{ZT}{CD} = 1$.

c) Gọi I là giao điểm của MK và CD . Chứng minh rằng XT, YZ, OI cùng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT .

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Sưu tầm và giới thiệu



Bình luận về Đề thi tuyển sinh VÀO ĐẠI HỌC KHỐI A-A₁ năm 2012

LTS. Đề thi tuyển sinh vào Đại học khối A và khối A₁ năm nay phù hợp với Chương trình và Cấu trúc đề thi tuyển sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ban hành. Kiến thức trong đề được rải đều theo ba năm học. Một số câu trong đề mang tính chất phân loại học sinh, chẳng hạn Câu 3, Câu 5 ý thứ hai, Câu 6, Câu 7a. Dưới đây là phần hướng dẫn và nhận xét một số câu tương đối khó trong đề thi của các Thầy cô giáo: Thanh Loan (Hải Dương), Nguyễn Phúc (Nghệ An), Nguyễn Minh Nhiên (Bắc Ninh).

CÂU 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Hướng dẫn. Đặt $y = -z$ thì HPT trở thành đối xứng với x và z .

$$\begin{cases} x^3 + z^3 - 3(x^2 + z^2) - 9(x + z) + 22 = 0 \\ x^2 + z^2 - (x + z) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $u = x + z$, $v = xz$ thì hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} u^3 - 3uv - 3u^2 + 6v - 9u + 22 = 0 \\ u^2 - 2v - u = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $v = \frac{2u^2 - 2u - 1}{4}$, rồi thay vào

$$(1) \text{ dẫn đến } 2u^3 - 6u^2 + 45u - 82 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u - 2)(2u^2 - 2u + 41) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = 2 \text{ (Do } 2u^2 - 2u + 41 \geq 0 \text{ với } \forall u).$$

$$\text{Suy ra } v = \frac{3}{4}. \text{ Dẫn đến } \begin{cases} x + z = 2 \\ xz = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{Tìm được } (x; z) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), (x; z) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Vậy HPT có các nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right). \square$$

➤ **Nhận xét.** Để làm bài này, thí sinh phải đặt $y = -z$ đưa về hệ đối xứng, rồi sử dụng phương pháp thế. Ta có thể giải phương pháp hàm số như sau: Viết HPT thành

$$\begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \end{cases} \quad (3) \quad (4)$$

Từ (4) suy ra $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq 1; \left|y + \frac{1}{2}\right| \leq 1$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \leq y + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t$ có $f'(t) = 3(t^2 - 4) < 0$ với $t \in (-2; 2)$ suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến.

Do đó (3) $\Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y = x - 2$.

★ **Bài luyện tập.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 - 5x - 4 = \frac{1}{y^3} \\ x^2 + \frac{1}{y^2} - x + \frac{1}{y} = 2. \end{cases} \quad \text{a)}$$

$$\begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y \\ \sqrt{2x+3} + x = y. \end{cases} \quad \text{b)}$$

CÂU 6. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}.$$

Hướng dẫn. Cách 1

Đặt $a = |x - y|, b = |y - z|, c = |z - x|$ thì $a \geq 0,$

$$b \geq 0, c \geq 0 \text{ và } a + b = |x - y| + |y - z|$$

$$\geq |x - y + y - z| = |z - x| = c; b + c \geq a; a + c \geq b.$$

Từ $x + y + z = 0$ suy ra

$$x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx). \text{ Do đó}$$

$$6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4(xy + yz + zx) \\ = 2((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Từ $a + b \geq c, b + c \geq a, a + c \geq b$ suy ra
 $(a+b).c + (b+c).a + (c+a).b \geq c^2 + a^2 + b^2$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow a+b+c \geq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\text{Suy ra } P = 3^a + 3^b + 3^c - \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\geq 3^a + 3^b + 3^c - (a+b+c).$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t - t$ với $t \geq 0$, ta có

$f'(t) = 3^t \ln 3 - 1 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$, suy ra $f(t) \geq f(0) \Leftrightarrow 3^t - t \geq 1, \forall t \geq 0$.

Do đó $P \geq 1+1+1=3$; $\min P = 3$ khi và chỉ khi $a=b=c=0 \Leftrightarrow x=y=z=0$.

Cách 2. Do vai trò x, y, z như nhau, giả sử $x \geq y \geq z$. Thay $z = -x - y$ vào P ta được

$$P = 3^{x-y} + 3^{x+2y} + 3^{2x+y} - \sqrt{12(x^2 + xy + y^2)}$$

Áp dụng BĐT $3^t \geq t+1$ với $t \geq 0$ ta có

$$P \geq x - y + x + 2y + 2x + y + 3 - \sqrt{12(x^2 + xy + y^2)} \\ = 4x + 2y + 3 - \sqrt{12(x^2 + xy + y^2)}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$4x + 2y \geq \sqrt{12(x^2 + xy + y^2)} \\ \Leftrightarrow x^2 + xy - 2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-y)(y-z) \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Vậy $P \geq 3$. $\square$

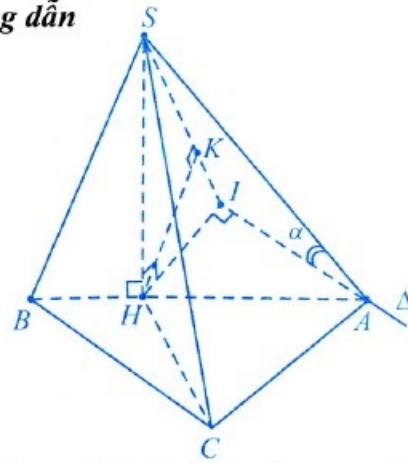
► **Nhận xét.** Đây là câu phân loại khó nhất của đề thi, đòi hỏi thí sinh phải biết đánh giá nhờ vào BĐT $3^t \geq t+1, \forall t \geq 0$. Ngoài ra phải biết biến đổi dựa vào tính chất của giá trị tuyệt đối.

★ **Bài luyện tập.** Xét các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = |2x - y| + |2y - z| + |2z - x| - \ln(\sqrt{14(x^2 + y^2 + z^2)} + 1)$.

CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh

AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

Hướng dẫn



• Áp dụng định lý cosin cho tam giác BHC , ta có $CH^2 = BH^2 + BC^2 - 2BH \cdot BC \cdot \cos 60^\circ$

$$= \frac{a^2}{9} + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{7a^2}{9}.$$

Do đó $CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. Chú ý rằng $\widehat{SCH} = 60^\circ$, ta

$$\text{thấy } SH = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{a^3 \sqrt{7}}{12}.$$

• Trong mặt phẳng (ABC) , qua A kẻ đường thẳng (Δ) song song với BC , kẻ $HI \perp (\Delta)$. Ta thấy $AI \perp (SHI)$. Trong tam giác vuông SHI kẻ $HK \perp SI$, khi đó dễ thấy $HK \perp (SIA)$. Ta có $d(SA, BC) = d(B, (SIA)) = \frac{3}{2} d(H, (SIA)) = \frac{3}{2} HK$ (1)

Xét tam giác vuông HIA với $\widehat{HAI} = 60^\circ$, ta có

$$HI = HA \cdot \sin 60^\circ = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Từ } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$. $\square$

► **Nhận xét.** Câu 5 này cùng dạng với câu IV trong Đề thi tuyển sinh vào Đại học Khối A năm

2011. Ở ý thứ nhất, yêu cầu thí sinh phải tính được độ dài đường cao SH theo a . Để làm được điều này chúng ta phải tìm được độ dài đoạn thẳng CH và thông qua sự kiện: tam giác SHC là tam giác nửa đều.

2) Ở ý thứ hai, để tìm được $d(SA, BC)$ cần chú ý $d(H, (SIA)) = \frac{2}{3} d(B; (SIA))$. Ngoài cách giải trên, có thể tính gián tiếp $d(SA, BC)$ qua công thức $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SA \cdot BC \cdot d(SA, BC) \cdot \sin \alpha$ (trong đó α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC). Hoặc dựng hình thoi $ACBD$ và tính $d(SA, BC) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD))$

$$= \frac{3V_{SABD}}{S_{SAD}} = \frac{3V_{SABC}}{S_{SAD}}.$$

Cũng có thể giải ý này bằng phương pháp tọa độ.

★ **Bài luyện tập.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

- Tìm thể tích khối chóp $S.ABCD$.
- Tìm khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) .
- Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB .

CÂU 7a. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đường

thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A .

Hướng dẫn. Giả sử cạnh hình vuông $ABCD$ là a .

Từ định lý Pythagore tìm được $AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$;

$$AN = \frac{a\sqrt{10}}{3}; \quad MN = \frac{5a}{6}.$$

Từ định lý cosin cho tam giác AMN ta có

$$\cos \widehat{MAN} = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM \cdot AN} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{MAN} = 45^\circ \quad (*)$$

Đường thẳng AM có PT dạng

$$mx + ny - \frac{11}{2}m - \frac{1}{2}n = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0).$$

$$\text{Từ } (*) \text{ có } \cos \widehat{MAN} = \frac{|2m - n|}{\sqrt{5(m^2 + n^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2X^2 - 8X - 3 = 0 \quad (\text{trong đó } X = \frac{m}{n}).$$

$$\text{Giải PT trên tìm được } X = 3, \quad X = -\frac{1}{3}.$$

$$\bullet \text{ Với } X = 3, \text{ giải hệ PT } \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 17 = 0 \end{cases}$$

ta được $A(4; 5)$.

$$\bullet \text{ Với } X = -\frac{1}{3}, \text{ giải hệ PT } \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

ta được $A(1; -1)$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Mấu chốt của câu này, với lời giải trên là phải chỉ ra được $\widehat{MAN} = 45^\circ$ từ giả thiết M là trung điểm của BC và N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Sau đó quy về bài toán quen thuộc: Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và tạo với một đường thẳng cho trước một góc cho trước.

★ **Bài luyện tập.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$.

Giả sử $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Gọi P là giao điểm của AN với đường chéo BD . Lập phương trình đường thẳng MP và tìm tọa độ điểm P .

CÂU 9b. Cho số phức z thỏa mãn

$$\frac{5(\bar{z} + i)}{z + 1} = 2 - i.$$

Tính môđun của số phức $w = 1 + z + z^2$.

Hướng dẫn. Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ta có

$$5(a - bi + i) = (2 - i)(a + bi + 1)$$

$$\Leftrightarrow (3a - b - 2) + (a - 7b + 6)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b - 2 = 0 \\ a - 7b + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$$

$$\text{Do đó } z = 1 + i, \quad z^2 = 2i \Rightarrow w = 2 + 3i.$$

$$\text{Vậy } |w| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}. \quad \square$$

★ **Bài luyện tập.** Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất sao cho $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 8

(Đề đăng trên THPT số 419, tháng 5 năm 2012)

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) PTTT (d) với (C) tại $M\left(m; 2 - \frac{1}{m-1}\right)$ có dạng

$$y = \frac{1}{(m-1)^2}(x-m) + 2 - \frac{1}{m-1}(d)$$

Gọi A và B theo thứ tự là giao điểm của (d) với đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 2$; $I(1;2)$ là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm được $S_{AIB} = \frac{1}{2}IA \cdot IB = 2$. Lại có

$$r = \frac{2S_{AIB}}{IA + IB + AB} = \frac{4}{IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2}}$$

$$\leq \frac{4}{2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB}} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}}.$$

Có hai tiếp tuyến thỏa mãn đề bài là:

$$y = x + 3; y = x - 1.$$

Câu II. 1) Đưa PT đã cho về dạng

$$\frac{1}{2}\cos 6x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6x = \frac{1}{2} \text{ hay } \cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}; x = \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

2) ĐK $x \geq -4$. Đặt $t = 4^{x-\sqrt{x+4}} (t > 0)$.

$$\text{BPT trở thành } t^2 - 15t - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 16.$$

$$\text{Đáp số. } -4 \leq x \leq 5.$$

Câu III. Đặt $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + \sin x$;

$$g(x) = \sin x + 2^{\log_8 x} = \sin x + x. \text{ Nhận thấy}$$

$$f(x) - g(x) \leq 0, \forall x \in [1; 2];$$

$$f(x) - g(x) \geq 0, \forall x \in [2; 3].$$

Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_1^3 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_1^2 (2x^2 - x^3) dx + \int_2^3 (x^3 - 2x^2) dx.$$

$$\text{Đáp số. } S = \frac{9}{2} \text{ (đvdt)}.$$

Câu IV. Ta có $d(M, (A_1BC)) = \frac{1}{2}d(B_1, (A_1BC))$

$$\frac{1}{2}d(C_1, (A_1BC)) = C_1H \text{ (với } C_1H \perp A_1C).$$

$$\text{Đáp số. } d(M, (A_1BC)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Câu V. Đặt $\vec{a}(x;2), \vec{b}(y-x;1), \vec{c}(3-y;1)$ thì $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3;4)$. Ta thấy

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|,$$

suy ra về trái PT thứ nhất (1) của hệ ≥ 5 . Do đó PT (1) tương đương với $\vec{a}; \vec{b}$ cùng phương và $\vec{a} + \vec{b}; \vec{c}$ cùng phương, hay $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-x}{1} = \frac{3-y}{1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ và } y = \frac{9}{4}.$$

Đáp số. Hệ có các nghiệm $(x; y; z)$ là

$$\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}; 3\right), \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}; 81\right).$$

Câu VIa. 1) $M(0;0); M(-1;3)$.

2) PT mặt phẳng (OAD) có dạng $7x - 11y + z = 0$.

Câu VIIa. PT có các nghiệm $z = 0; z = 1; z = -1$.

Câu VIb. 1) PT đường thẳng cần tìm là $x - 3y + 7 = 0$.

2) Có hai mặt phẳng thỏa mãn đề bài với PT là

$$x + (\sqrt{2} - 1)y = 0; x - (\sqrt{2} + 1)y = 0.$$

Câu VIIb. Ta có

$$(1 - x + x^2 - x^3)^6 = (1 + x^2)^6 (1 - x)^6$$

$$= (C_6^0 + C_6^1 x^2 + C_6^2 x^4 + C_6^3 x^6 + C_6^4 x^8 + C_6^5 x^{10} + C_6^6 x^{12}) \times$$

$$\times (C_6^0 - C_6^1 x + C_6^2 x^2 - C_6^3 x^3 + C_6^4 x^4 - C_6^5 x^5 + C_6^6 x^6) \times$$

$$\text{Hệ số của } x^9 \text{ là } a_9 = -C_6^4 C_6^1 - C_6^3 C_6^3 - C_6^2 C_6^5.$$

Tìm được $a_9 = -580$.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 9

(Đề đăng trên THPT số 420, tháng 6 năm 2012)

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Ta có $y' = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 - m = 0$. Đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$. Khi đó các điểm cực trị là $A(0; -3); B(\sqrt{m}; -m^2 - 3); C(-\sqrt{m}; -m^2 - 3)$.

Vì B và C đối xứng nhau qua Oy nên nếu gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $I \in Oy \Rightarrow I(0; a)$. Gọi R là bán kính của (I) .

Ta có $IA = IB \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{1}{m} + 6\right)$. Vậy

$$R = IA = \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m}\right) \\ \geq \frac{3}{2}\sqrt{m^2 \cdot \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2m}} = \frac{3}{2\sqrt{4}}. \text{ Đáp số. } m = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu II. 1) ĐK $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$.

Khi đó PT $\Leftrightarrow 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1$

$$= 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)(\sqrt{3}\cos x + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)(\sqrt{3}\cos x + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\cos x + \sin x)\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 0.$$

Kết hợp ĐK ta được nghiệm của PT là

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi; x = -\pi + k4\pi; x = \frac{\pi}{9} + k\frac{4\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

2) ĐK $x \geq \frac{1}{5}$. BPT đã cho tương đương với

$$(\sqrt[3]{x+6} - 2) - 2(\sqrt{5x-1} - 3) > x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt[3]{(x+2)^2} + 2\sqrt[3]{x+2} + 4} - \frac{10(x-2)}{\sqrt{5x-1} + 3} > x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2} + 2\sqrt[3]{x+2} + 4} - \frac{10}{\sqrt{5x-1} + 3} - x\right) > 0.$$

$$\Leftrightarrow x < 2. \text{ Đáp số. } \frac{1}{5} \leq x < 2.$$

$$\text{Câu III. Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\frac{2}{\cos^2 x} + 2\tan x}} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\tan x)}{\sqrt{\tan^2 x + \tan x + 1}}.$$

Đặt $t = 2\sqrt{\tan^2 x + \tan x + 1} + 2\tan x + 1$ thì

$$\frac{d(\tan x)}{\sqrt{\tan^2 x + \tan x + 1}} = \frac{dt}{t}.$$

$$\text{Do đó } I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_3^{2\sqrt{3}+3} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{2\sqrt{3}+3}{3}.$$

Câu IV. Gọi H, K tương ứng là trung điểm của BC, AB thì $SH \perp (ABC)$ và $\widehat{SKH} = 30^\circ$.

$$\text{Tính được } SH = \frac{a}{\sqrt{3}}; S_{ABC} = a^2,$$

$$\text{nên } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}.$$

Gọi N là đỉnh thứ ba của hình chữ nhật $AMNC$ vẽ trong mặt phẳng (ABC) . Gọi K là hình chiếu của M trên SN .

Khi đó $d(SC, AB) = d(AB, (SNC)) = d(M, (SNC)) = MK$. Tam giác SMN cân tại S , nên $\widehat{SNM} = 30^\circ \Rightarrow MK = \frac{MN}{2} = a$. Vậy $d(SC, AB) = a$.

Câu V. Áp dụng BDT Cauchy ta có

$$x + \sqrt{yz} \geq 2\sqrt{x}\sqrt[4]{yz}; y + \sqrt{zx} \geq 2\sqrt{y}\sqrt[4]{zx};$$

$$z + \sqrt{xy} \geq 2\sqrt{z}\sqrt[4]{xy}. \text{ Đặt về trái BDT là } F \text{ thì}$$

$$F \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\frac{1}{\sqrt[4]{z}} + \frac{1}{\sqrt[4]{z}}\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\right). \text{ Suy ra}$$

$$F \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) = \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{2\sqrt{xyz}}$$

$$\leq \frac{x+y+z}{2\sqrt{xyz}} \leq \frac{4024\sqrt{xyz}}{2\sqrt{xyz}} = 2012$$

$$\left(\frac{x+y+z}{2012} \right)^2 \leq 4xyz \Rightarrow x+y+z \leq 4024\sqrt{xyz}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow x = y = z = \left(\frac{3}{4024} \right)^2.$$

Câu VIa. 1) Đường tròn (T) có tâm là $I(1; 2)$, bán kính $R = 4$. Ta thấy M ở trong (T) nên d luôn cắt (T) tại theo một dây cung AB . AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ đường thẳng d vuông góc MI tại M . Vậy PT $d: 2x - 3y - 9 = 0$.

2) Lưu ý rằng $AB \parallel (\alpha)$; $\Delta: \frac{x-9}{-10} = \frac{y-13}{-11} = \frac{z+30}{31}$.

Câu VIIa. Ta có $|iz + \bar{z}| = \sqrt{2}$.

Câu VIb. 1) PT đường thẳng d cần tìm là $d: x - 4y + 19 = 0$.

2) Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}(1; -1; 1)$, mp(P) có VTPT là $\vec{n}(1; 1; -1)$. Gọi H là hình chiếu của B trên (P) , khi đó $\cos \widehat{ABH} = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{1}{3}$.

Do ABC là tam giác cân tại B nên $\widehat{ABH} = \widehat{CBH}$, suy ra

$$\cos \widehat{CBH} = \frac{1}{3} \text{ hay } |\cos(\vec{MB}, \vec{n})| = \frac{1}{3} \quad (*)$$

$$\text{Vì } B \in d \Rightarrow B(t+2; -t+1; t) \Rightarrow \vec{MB} = (t+1; -t; t-1).$$

$$\text{Từ } (*) \text{ có } t = \frac{5}{6} \Rightarrow 6\vec{MB} = (11; -5; -1).$$

$$\text{Vậy PT } \Delta: \frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{-1}.$$

Câu VIIb. $|z|$ nhỏ nhất bằng 2 khi và chỉ khi $a = 1$.

ĐỖ BÁ CHỦ

(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

TÍNH TOÁN GIÁ TRỊ... (Tiếp trang 2)

Các thí dụ ở trên có thể được giải theo các cách khác, do đó bạn đọc có thể tìm tòi thêm cho mình những lời giải thú vị khác.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Tính giá trị các biểu thức sau:

$$1. A = \frac{2\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{x}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{x}\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{x}\right)}$$

khi $x = 17,102010$.

(Đề thi HSG-GTTMTĐT, TX. Cao Lãnh, tỉnh Đồng Tháp, 2010-2011)

$$2. B = \frac{1}{2^3} \times \left(\frac{2^2 - \frac{2^2}{7} + \frac{2^2}{7^2} - \frac{2^2}{7^3}}{1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3}}; \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}} \right) \cdot \frac{200820082008}{200920092009}.$$

(Đề thi HSG-GTTMTĐT, tỉnh Phú Yên, 2008-2009)

$$3. C = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30}$$

khi $x = 3,33$.

(Đề thi HSG-GTTMTĐT, H. Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh, 2009-2010)

$$4. D = x^{2010} + y^{2010} \text{ với } x^{670} + y^{670} = 6,912 \text{ và } x^{1340} + y^{1340} = 33,76244.$$

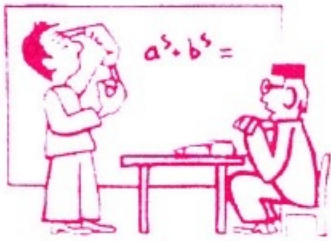
(Đề thi HSG-GTTMTĐT, H. Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh, 2009-2010)

$$5. E = \frac{3a^3 + 4a\sqrt{b} + 5b\sqrt{a} + b^3}{2a^5 + 3a^2\sqrt{b^3} + \sqrt{a^3}b^2}, \text{ biết } \begin{cases} 2a + 3b = 2,211 \\ 5a - 7b = 1,946. \end{cases}$$

(Đề thi HSG-GTTMTĐT, tỉnh Quảng Trị, 2009-2010)

$$6. F = \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{4 - \sqrt[5]{5 + \sqrt[6]{6 - \sqrt[7]{7 + \sqrt[8]{8 - \sqrt[9]{9 + \sqrt[10]{10 - \sqrt[11]{11 + \sqrt[12]{12}}}}}}}}}$$

(Đề thi HSG-GTTMTĐT, tỉnh Tuyên Quang, 2011-2012)

DIỄN ĐÀN**DAY
HỌC
TOÁN**

Khi giải toán nhiều học sinh chỉ lưu tâm tới bài toán, rồi vận dụng kết quả hoặc phương pháp giải để giải bài toán khác. Trong bài viết này xin giới thiệu phương pháp "**Đặc biệt hóa**" một số đối tượng trong bài toán để từ công thức đã chứng minh hình thành công thức mới, nhờ những công thức đó ta sẽ giải được một số dạng toán khác.

TẠO CÔNG CỤ GIẢI TOÁN

bằng cách đặc biệt hóa một bài toán cơ bản

PHẠM ĐỨC HẠNH

(GV THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

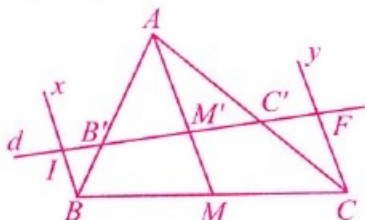
I. BÀI TOÁN CƠ BẢN

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của cạnh BC . Một đường thẳng d cắt cạnh AB , AC và AM lần lượt tại B' , C' và M' .

Chứng minh rằng

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = \frac{2AM}{AM'} \quad (1^*)$$

Lời giải. (h. 1)



Hình 1

Kẻ các tia Bx , Cy song song với AM cắt d lần lượt tại I , F .

Dễ thấy tứ giác $IFCB$ là hình thang và

$$BI + CF = 2MM' \quad (1)$$

Theo hệ quả của định lý Thales ta có

$$\frac{BB'}{AB'} = \frac{BI}{AM'} \Rightarrow \frac{AB}{AB'} = \frac{AM' + BI}{AM'} \quad (2)$$

$$\frac{CC'}{AC'} = \frac{CF}{AM'} \Rightarrow \frac{AC}{AC'} = \frac{AM' + CF}{AM'} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = \frac{2(AM' + MM')}{AM'} = \frac{2AM}{AM'}. \quad (\text{đpcm}). \quad \square$$

II. HÌNH THÀNH CÁC CÔNG THỨC MỚI

• Khi đường thẳng d đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì M' là trọng tâm của tam giác và hệ thức (1*) trở thành

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = 3 \quad (1.1^*)$$

• Khi đường thẳng d đi qua đỉnh B và cắt cạnh AC tại C' , hoặc d đi qua đỉnh C và cắt cạnh AB tại B' , thì hệ thức (1*) trở thành

$$\frac{AC}{AC'} + 1 = \frac{2AM}{AM'} \quad \text{hoặc} \quad \frac{AB}{AB'} + 1 = \frac{2AM}{AM'} \quad (1.2^*)$$

• Khi đường thẳng d đi qua trung điểm M của cạnh BC thì hệ thức (1*) trở thành

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = 2 \quad (1.3^*)$$

III. VẬN DỤNG**1. Các bài tính toán, chứng minh**

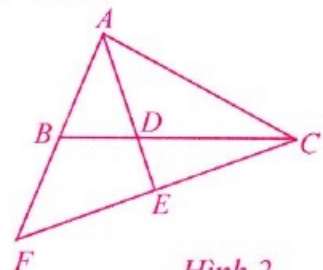
★ **Thí dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , có AD là đường phân giác góc BAC . Chứng

minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$.

Lời giải. (h. 2)

Dựng $CE \perp AD$ tại E và cắt AB tại F . Khi đó tam giác ACF vuông cân và $EC = EF$.

Áp dụng (1.2*)



Hình 2

ta có $1 + \frac{AF}{AB} = \frac{2AE}{AD}$.

Lại có $AF = AC$; $AE = \frac{AC}{\sqrt{2}}$ nên

$1 + \frac{AC}{AB} = \frac{2AC}{\sqrt{2}AD} \Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{\sqrt{2}}{AD}$ (đpcm). $\square$

★ **Thí dụ 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH , trung tuyến BM , phân giác CD đồng quy. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

(T5/376-TH&TT).

Lời giải. (h. 3)

Tam giác ABC có $MA = MC$, áp dụng hệ thức (1.2*) ta có

$$\frac{BC}{BH} + 1 = \frac{2BM}{BG}$$

và $\frac{BA}{BD} + 1 = \frac{2BM}{BG}$ suy ra $\frac{BC}{BH} = \frac{BA}{BD}$ (1)

Theo định lý Thales đảo ta có $DH \parallel AC$. Do đó $\widehat{HDC} = \widehat{DCA} = \widehat{HCD}$, nên tam giác HCD cân tại H , suy ra $HD = HC$. Do đó

$\triangle BDH = \triangle AHC$ suy ra $BD = AH$.

$$\frac{BH^2}{BD^2} = \frac{BH^2}{AH^2} = \frac{AB^2}{AC^2} \quad (2)$$

Từ (1) suy ra

$$\frac{BC^2}{BA^2} = \frac{BH^2}{BD^2} \Leftrightarrow \frac{AC^2 + AB^2}{AB^2} = \frac{BH^2}{BD^2} \quad (3)$$

Đặt $\frac{AB}{AC} = x$ ($x > 0$).

Từ (2) và (3) ta có $\frac{1}{x^2} + 1 = x^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0$.

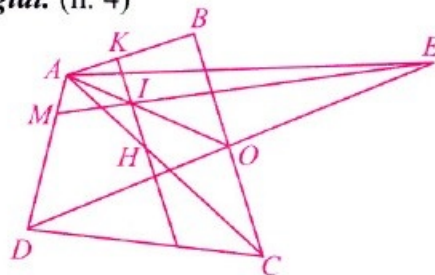
Tìm được $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Vậy $\frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. $\square$

★ **Thí dụ 3.** Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi O là trung điểm của cạnh BC , E là điểm đối xứng với D qua O . Một điểm M di động trên cạnh AD , đường thẳng ME cắt OA tại I . Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB , AC lần lượt tại K và H . Chứng minh rằng

$$\frac{AB}{AK} + \frac{AC}{AH} - \frac{AD}{AM} \text{ không đổi.}$$

(T5/325 - TH&TT)

Lời giải. (h. 4)



Hình 4

Tam giác ADE có O là trung điểm của DE , áp dụng hệ thức (1.2*) ta có

$$1 + \frac{AD}{AM} = \frac{2AO}{AI} \quad (1)$$

Tam giác ACB có $KH \parallel BC$ nên

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AO}{AI} = \frac{AC}{AH} \Rightarrow \frac{2AO}{AI} = \frac{AB}{AK} + \frac{AC}{AH}.$$

Thay vào (1) ta có

$$\frac{AB}{AK} + \frac{AC}{AH} - \frac{AD}{AM} = 1 \text{ (không đổi). } \square$$

2. Các bài toán bất đẳng thức, tìm GTLN, GTNN

★ **Thí dụ 4.** Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB , AC lần lượt tại P , Q . Chứng minh rằng $\frac{PQ}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$.

(Câu 3 trong đề thi Olympic Toán của Tây Ban Nha 2/1995)

Lời giải. (h. 5)

Nối AG cắt BC tại M thì $MB = MC$. Áp dụng hệ thức (1.1*) vào tam giác ABC ta có

$$\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} = 3$$

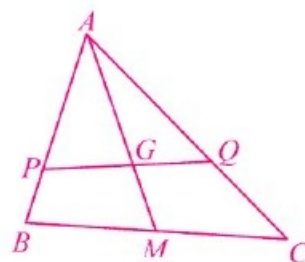
$$\Leftrightarrow \frac{BP}{AP} + \frac{CQ}{AQ} = 1.$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy cho hai số

$$\text{dương ta có } \frac{BP}{AP} + \frac{CQ}{AQ} \geq 2\sqrt{\frac{BP}{AP} \cdot \frac{CQ}{AQ}}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{BP}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{BP}{AP} = \frac{CQ}{AQ} \Leftrightarrow PQ \parallel BC$. $\square$



Hình 5

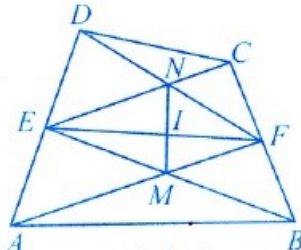
★ **Thí dụ 5.** Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC ; AF cắt BE tại M ; CE cắt DF tại N . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng

$$S = \frac{MA}{MF} + \frac{MB}{ME} + \frac{NC}{NE} + \frac{ND}{NF}.$$

(T6/352-TH&TT)

Lời giải. (h. 6)

Theo giả thiết $ED = EA, FC = FB$. Áp dụng hệ thức (1*) vào các tam giác FDA và EBC ta có



Hình 6

$$\frac{2FE}{FI} = \frac{FD}{FN} + \frac{FA}{FM} \Rightarrow \frac{2IE}{IF} = \frac{ND}{NF} + \frac{MA}{MF} \quad (1)$$

$$\frac{2EF}{EI} = \frac{EC}{EN} + \frac{EB}{EM} \Rightarrow \frac{2IF}{IE} = \frac{NC}{NE} + \frac{MB}{ME} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$S = 2 \cdot \left(\frac{IE}{IF} + \frac{IF}{IE} \right) \geq 4 \quad (\text{BĐT Cauchy}).$$

Từ đó $\min S = 4$ khi và chỉ khi I là trung điểm EF , tức là tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. □

★ **Thí dụ 6.** Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AH, BI, CK và các đường trung tuyến AL, BM, CN . Gọi $P = AL \cap BI$; $Q = BM \cap CK$; $R = CN \cap AH$. Chứng minh rằng

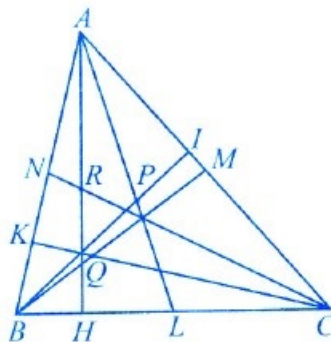
$$\frac{PA}{PL} + \frac{QB}{QM} + \frac{RC}{RN} \geq 6.$$

Lời giải. (h. 7). Áp dụng hệ thức (1.2*) ta có

$$\begin{aligned} 1 + \frac{AC}{AI} &= \frac{2AL}{AP} \\ \Leftrightarrow \frac{IC}{IA} &= \frac{2PL}{PA} \\ \Leftrightarrow \frac{PA}{PL} &= \frac{2IA}{IC} \quad (1) \end{aligned}$$

Tương tự có

$$\frac{QB}{QM} = \frac{2KB}{KA} \quad (2)$$



Hình 7

$$\frac{RC}{RN} = \frac{2HC}{HB} \quad (3)$$

Cộng theo vế của (1), (2) và (3) ta có

$$\frac{PA}{PL} + \frac{QB}{QM} + \frac{RC}{RN} = 2 \left(\frac{IA}{IC} + \frac{KB}{KA} + \frac{HC}{HB} \right).$$

Do AH, BI, CK đồng quy nên theo định lý

$$\text{Ceva thì } \frac{IA}{IC} \cdot \frac{KB}{KA} \cdot \frac{HC}{HB} = 1.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\frac{IA}{IC} + \frac{KB}{KA} + \frac{HC}{HB} \geq 3 \sqrt{\frac{IA}{IC} \cdot \frac{KB}{KA} \cdot \frac{HC}{HB}} = 3.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{PA}{PL} + \frac{QB}{QM} + \frac{RC}{RN} \geq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. □

BÀI TẬP

1. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F . Xác định vị trí của E sao cho tổng $AE + AF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD ; P là điểm bất kỳ của đoạn thẳng IJ . Một đường thẳng qua P cắt các đoạn thẳng AD, AC, BD, BC lần lượt tại M, N, R, S . Chứng minh rằng

$$\frac{MA}{MD} + \frac{NA}{NC} + \frac{RB}{RD} + \frac{SB}{SC} \geq 4 \cdot \frac{PI}{PJ}.$$

3. Cho tam giác ABC , M là trung điểm của cạnh BC . Trên các đường thẳng AB, AC, AM lần lượt lấy các điểm B', C', M' sao cho $\overrightarrow{AB'} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC'} = \beta \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM'} = \gamma \cdot \overrightarrow{AM}$, $(\alpha, \beta, \gamma \neq 0)$.

Chứng minh rằng B', C', M' thẳng hàng khi và

$$\text{chỉ khi } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{\gamma}.$$

4. Cho tam giác ABC , điểm M trên đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MC}$ ($k \neq 1$). Lấy các điểm B', C', M' lần lượt trên các đường thẳng AB, AC, AM sao cho $\overrightarrow{AB'} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC'} = \beta \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM'} = \gamma \cdot \overrightarrow{AM}$ với $(\alpha, \beta, \gamma \neq 0)$.

Chứng minh rằng ba điểm B', C', M' thẳng

$$\text{hàng khi và chỉ khi } \frac{1-k}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} - \frac{k}{\beta}.$$



NHỮNG SỰ KIỆN NỔI BẬT TRONG CÁCH MẠNG THÁNG TÁM

Bạn có nhớ những sự kiện lịch sử quan trọng nêu dưới đây trong diễn biến của Cách mạng tháng Tám ở nước ta? Bạn hãy sắp xếp các sự kiện, ngày tháng và địa điểm xảy ra sự kiện đó cho đúng nhé!

A. Ngày tháng năm

- | | |
|--------------------|--------------------|
| A1. 22.12.1944 | A2. 9 - 12.3.1945 |
| A3. 15 - 20.4.1945 | A4. 15.5.1945 |
| A5. 16 - 17.8.1945 | A6. 17 - 19.8.1945 |
| A7. 25.8.1945 | A8. 30.8.1945 |
| A9. 2.9.1945 | |

B. Những sự kiện lịch sử

B1. Hội nghị Ban Thường vụ mở rộng Trung ương Đảng ra bản chỉ thị “*Nhật Pháp bắn nhau và hành động của chúng ta*”.

B2. Hội nghị Quân sự cách mạng Bắc kỳ quyết định xây dựng 7 chiến khu và cử ra Ủy ban Quân sự.

B3. Lễ thành lập Việt Nam Giải phóng quân.

B4. Lễ thành lập Đội Việt Nam tuyên truyền Giải phóng quân.

B5. Quốc dân đại hội tán thành chủ trương khởi nghĩa toàn quốc của Đại hội Đảng vừa họp, thông qua 10 chính sách của Việt Minh, quy định Quốc kì và Quốc ca, bầu ra Ủy ban dân tộc giải phóng Việt Nam.

B6. Vua Bảo Đại đọc chiếu thoái vị, nộp ấn kiếm cho Phái đoàn Chính phủ Cách mạng lâm thời.

B7. Mít tinh, biểu tình thị uy biến thành khởi nghĩa giành chính quyền, chiếm các cơ quan đầu não của địch.

B8. Khởi nghĩa giành chính quyền, chiếm các cơ quan đầu não của địch.

B9. Chủ tịch Hồ Chí Minh đọc bản Tuyên ngôn Độc lập, tuyên bố thành lập nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa.

C. Địa điểm

C1. Hiệp Hòa, Bắc Giang.

C2. Từ Sơn, Bắc Ninh.

C3. Nguyên Bình, Cao Bằng.

C4. Hà Nội.

C5. Hà Nội.

C6. Huế.

C7. Sài Gòn.

C8. Định Hóa, Thái Nguyên.

C9. Sơn Dương, Thái Nguyên.

AN MINH

GIẢI ĐÁP : NHỮNG NỮ SĨ TÀI HOA (Đề đăng trên THPT số 417, tháng 3 năm 2012)

Đáp án đúng (D2 và D3 trùng nhau) như sau:

- | | |
|---------------------|------------------------|
| Đoàn Thị Điểm | A1, B2, C3, D4, E5, G6 |
| Hồ Xuân Hương | A2, B1, C5, D7, E6, G4 |
| Lê Ngọc Hân | A3, B4, C6, D2, E2, G2 |
| Ngô Chi Lan | A4, B5, C1, D6, E3, G7 |
| Nguyễn Thị Duệ | A5, B7, C2, D8, E8, G8 |
| Nguyễn Thị Hình | A6, B8, C7, D1, E7, G5 |
| Nguyễn Ngọc Khuê | A7, B6, C8, D5, E4, G3 |
| Trịnh Thị Ngọc Trúc | A8, B3, C4, D3, E1, G1 |

Các bạn có lời giải đúng, được nhận tặng phẩm là:

1. Đỗ Đắc Trường, 11A1, THPT Nguyễn Siêu, Khoái Châu, Hưng Yên.

2. Bùi Đình Hiếu, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, Thái Bình.

3. Nguyễn Quang Trọng, 11A1, THPT Tây Tiền Hải, Thái Bình.

4. Tống Thị Nụ, Hà Phương 4, Thắng Thủy, Vĩnh Bảo, Hải Phòng.

5. Trần Văn Thế, 11A1, THPT Quý Hợp 1, Quý Hợp, Nghệ An.

6. Võ Thị Hoài Thu, 11 Toán, THPT chuyên Đồng Hới, Quảng Bình.

7. Lê Thị Phương Linh, 9D3, THCS Him Lam, TP. Điện Biên Phủ, Điện Biên.

8. Nguyễn Minh Mẫn, 10 Toán, THPT chuyên, TP. Mỹ Tho, Tiền Giang.

VÂN KHANH



CÁC LỚP THCS

Bài T1/421. (Lớp 6). Cho tổng gồm 2012 số hạng

$$S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \dots + \frac{2012}{5^{2012}}.$$

Hãy so sánh S với $\frac{1}{3}$.

PHẠM TRUNG KIÊN

(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ấn Thi, Hưng Yên)

Bài T2/421. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 40^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Bên ngoài tam giác đó dựng tam giác ADC có $\widehat{ACD} = \widehat{CAD} = 50^\circ$. Chứng minh rằng tam giác BAD cân.

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T3/421. Tìm các số tự nhiên a, b, c với $c < 20$ thỏa mãn $a^2 + ab + b^2 = 70c$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T4/421. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{1 - \frac{x}{y+z}} + \sqrt{1 - \frac{y}{z+x}} + \sqrt{1 - \frac{z}{x+y}}$$

trong đó x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

ĐINH XUÂN HÙNG

(GV THCS Gia Hạnh, Can Lộc, Hà Tĩnh)

Bài T5/421. Cho đường tròn (O) , dây cung BC cố định. A là điểm di động trên đường thẳng BC , A nằm ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) . ($M, N \in (O)$). Qua B kẻ đường thẳng song song với AM cắt MN tại E . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BEN luôn đi

qua hai điểm cố định khi A di động trên đường thẳng BC .

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, Quy Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/421. Cho $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$ và $y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + \frac{x^2 y^2}{((4x-1)y-x)^2}.$$

LÊ QUANG NĂM

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/421. Cho dãy số thực dương (a_n) , $n = 0, 1, \dots$ được xác định như sau:

$$a_0 = 1$$

$$a_m < a_n \text{ với mọi } m, n \in \mathbb{N}, m < n$$

$$a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}} + 1 \text{ và } 4\sqrt{a_n} = a_{n+1} - a_{n-1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính tổng $T = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2012}$.

TRẦN VĂN THÍNH

(GV THCS Tự Cường, Tiên Lãng, Hải Phòng)

Bài T8/421. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác đều cạnh a , các cạnh bên của lăng trụ bằng a . Gọi I là trung điểm của AB và $B'I \perp (ABC)$. Tính khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(ACC'A')$ theo a .

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bình Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/421. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$P^2(x) - 1 = 4P(x^2 - 4x + 1).$$

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/421. Tìm α, β sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = |\cos x + \alpha \cos 2x + \beta \cos 3x|$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐẶNG THANH HẢI

(GV Học viện PKKQ Sơn Tây, Hà Nội)

Bài T11/421. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c . Gọi S và p lần lượt là diện tích và nửa chu vi của tam giác đó. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2(p-a)^2} + \frac{1}{b^2(p-b)^2} + \frac{1}{c^2(p-c)^2} \geq \frac{9}{4S^2}.$$

NGUYỄN VĂN THÔNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T12/421. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $BC > CA > AB$. Trên (O) ta lấy sáu điểm phân biệt M, N, P, Q, R và S (không trùng với bất cứ đỉnh nào của tam giác ABC) sao cho $QB = BC = CR$; $SC = CA = AM$ và $NA = AB = BP$.

Gọi I_A, I_B và I_C lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APS, BNR và CMQ . Chứng minh rằng $\Delta I_A I_B I_C \sim \Delta ABC$.

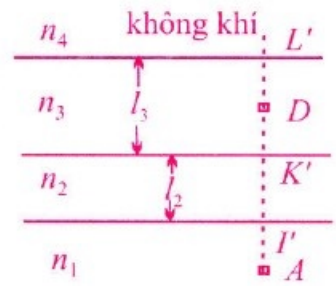
NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/421. Ba chất lỏng trong suốt có các chiết suất lần lượt là $n_1 = 1,45$; $n_2 = 1,4$; $n_3 = 1,35$ (hình vẽ). Đặt vật sáng A trong chất lỏng thứ nhất (dưới cùng) cách mặt I' là $I'A = d_1 = 29$ cm; cho biết lớp chất lỏng thứ hai dày

$l_2 = 7$ cm, lớp chất lỏng thứ ba dày $l_3 = 8,1$ cm. Đặt mắt trong không khí (có chiết suất $n_4 = 1$) và nhìn thẳng đứng sẽ thấy ảnh D của vật A cách mặt trên cùng L' bao nhiêu cm?



NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/421. Một con lắc đơn có chu kì dao động $T = 2s$ ở nơi có gia tốc trọng trường $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ và ở 0°C . Dây treo con lắc có khối lượng không đáng kể, có hệ số nở dài $\alpha = 2.10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

a) Tính chiều dài l_0 của con lắc ở 0°C và chu kì của con lắc ở 20°C .

b) Để con lắc ở 20°C vẫn có chu kì là $2s$, người ta tích điện cho quả cầu một điện tích $q = 10^{-9} \text{ C}$, rồi đặt nó trong điện trường đều có đường sức nằm ngang và song song với mặt phẳng dao động của con lắc. Biết khối lượng của con lắc là $m = 1 \text{ g}$, lấy gần đúng $\pi^2 = 10$. Tính cường độ điện trường.

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV ĐHSPT Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/421. (For 6th grade). Given the sum of 2012 terms

$$S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \dots + \frac{2012}{5^{2012}}.$$

Compare S with $\frac{1}{3}$.

T2/421. (For 7th grade). Let ABC be a triangle with $\widehat{ABC} = 40^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Outside this triangle, construct triangle ADC with $\widehat{ACD} = \widehat{CAD} = 50^\circ$. Prove that the triangle BAD is isosceles.

T3/421. Find all natural numbers a, b, c such that $c < 20$ and $a^2 + ab + b^2 = 70c$.

T4/421. Find the largest possible value of the expression

$$P = \sqrt{1 - \frac{x}{y+z}} + \sqrt{1 - \frac{y}{z+x}} + \sqrt{1 - \frac{z}{x+y}}$$

where x, y, z are side lengths of a triangle.

T5/421. Given a circle (O) , with a fixed chord BC . A is a point moving on the line BC , outside the circle (O) . AM and AN are the tangent lines to circle (O) . ($M, N \in (O)$). The line through B and parallel to AM meets MN at E . Prove that the circumcircle of triangle BEN always passes through two fixed points when point A moves on the line BC .

(Xem tiếp trang 27)



★ **Bài T1/417.** So sánh hai số A và B , biết rằng $A = 2^{3100}$ và $B = 3^{2100}$.

Lời giải. Vì $A = (2^{31})^{100}$ và $B = (3^{21})^{100}$ nên ta chỉ cần so sánh $C = 2^{31}$ với $D = 3^{21}$.

Ta thấy $C = 2^{31} = 2 \cdot 2^{30} = 2(2^3)^{10} = 2 \cdot 8^{10}$

$D = 3^{21} = 3 \cdot 3^{20} = 3(3^2)^{10} = 3 \cdot 9^{10}$.

Vì $2 < 3$ và $8^{10} < 9^{10}$ nên $C < D$, suy ra $(2^{31})^{100} < (3^{21})^{100}$ tức là $A < B$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Có thể so sánh A và B với một số thứ ba lớn hơn A và nhỏ hơn B , chẳng hạn $2^{3100} < 2^{3150} = 8^{1050} < 9^{1050} = 3^{2100}$.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và trình bày tốt:

Phú Thọ: Tạ Phương Thủy, 6A3, THCS Lâm Thao;
Thái Nguyên: Nguyễn Văn Tuyền, 6A4, THCS Hoàng Văn Thụ, TP. Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** Ngô Thị Ngọc Ánh, Nguyễn Hùng Mạnh, 6A, THCS Đại Từ, Yên Lạc, Đỗ Thị Thu Phương, Nguyễn Tuấn Anh, 6A3, Phan Thị Nguyệt, 6A5, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Nguyễn Thu Thảo, Vương Tiến Đạt, 6B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hà Nam:** Phạm Thị Phương, 6B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Hải Phòng:** Hoàng Thị Hoàn, 6A, THCS Đại Thắng, Tiên Lãng; **Thanh Hóa:** Trịnh Thị Phương Nga, 6A, THCS Phú Yên, Thọ Xuân; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Nhung, Nguyễn Khánh Linh, 6A, Trần Thị Ánh Tuyết, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Tăng Đức Thịnh, 6C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thủy Phương, Võ Quang Phú Thời, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, Nguyễn Quang Triệu, THCS Tịnh Thiên, Sơn Tịnh, Nguyễn Tấn Trung, 6H, THCS

Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Tiền Giang:** Nguyễn Minh Tuyền, 6/6, THCS Lê Ngọc Hân, TP. Mỹ Tho.

VIỆT HẢI

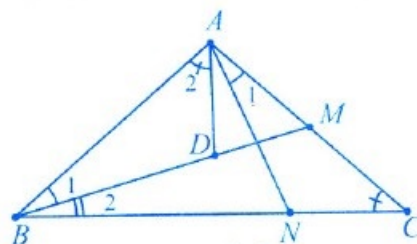
★ **Bài T2/417.** Cho tam giác ABC cân tại A . Vẽ trung tuyến BM , trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\widehat{CAN} = \widehat{ABM}$. Chứng minh rằng $CM \geq CN$.

Lời giải. Bổ đề. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Chứng minh rằng nếu $AB < AC$ thì $\widehat{BAM} > \widehat{CAM}$ (Bạn đọc tự chứng minh).

Trở lại bài toán, ta cần xét ba trường hợp

Trường hợp 1. $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Khi đó ABC là tam giác đều, do đó $\widehat{CAN} = \widehat{ABM} = 30^\circ$, suy ra AN là trung tuyến nên $CM = CN$.

Trường hợp 2. $\widehat{BAC} > 60^\circ$ (h. 1).



Hình 1

Khi đó $\widehat{C} < 60^\circ$ nên $BC > BA$, do đó $\widehat{B}_1 > \widehat{B}_2$ (theo bổ đề). Trên tia BM lấy điểm D sao cho $BD = AN$, ta có $\triangle ABD = \triangle CAN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{C} < \widehat{BAC}$ nên điểm D nằm giữa hai điểm B và M , và $AD = CN$.

Xét tam giác ADM có $\widehat{ADM} = \widehat{A}_2 + \widehat{B}_1 > \widehat{C} + \widehat{B}_2 = \widehat{AMD} \Rightarrow AM > AD$ hay $CM > CN$ (vì $AM = CM$ và $AD = CN$).

Trường hợp 3. $\widehat{BAC} < 60^\circ$ (h. 2).

Khi đó $\widehat{C} > 60^\circ$, nên $BC < BA$ do đó $\widehat{B}_1 < \widehat{B}_2$ (theo bổ đề). Trên tia BM lấy điểm D sao cho $BD = AN$, ta có $\triangle ABD = \triangle CAN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{C}$

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCD PHÒNG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THẦN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÉ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

$\widehat{BAC}$ nên điểm M nằm giữa hai điểm B và D , và $AD = CN$.

Xét tam giác AMD

$$\begin{aligned} & \text{có } \widehat{ADM} \\ & = 180^\circ - (\widehat{DAB} + \widehat{B_1}) \\ & > 180^\circ - (\widehat{C} + \widehat{B_2}) \\ & = \widehat{BMC} = \widehat{AMD} \\ & \Rightarrow AM > AD, \end{aligned}$$

hay $CM > CN$ (vì $AM = CM$ và $AD = CN$).

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $CM \geq CN$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán khá hay, Quan trọng là phải xét đầy đủ các trường hợp. Các bạn sau có lời giải tốt:

Thanh Hóa: Lê Quang Dũng, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Quảng Ngãi:** Vũ Thị Thi, Nguyễn Thủy Phương, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, Trần Thị Mỹ Ninh, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/417.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn

$$\begin{cases} |a+b+c| \leq 1 \\ |a-b+c| \leq 1 \\ |4a+2b+c| \leq 8 \\ |4a-2b+c| \leq 8. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $|a|+3|b|+|c| \leq 7$.

Lời giải. Xét hai trường hợp

- Nếu $(a+c)b \geq 0$ thì $|a+b+c| = |a+c| + |b| \leq 1$.
- Nếu $(a+c)b < 0$ thì $|a-b+c| = |a+c| + |-b| = |a+c| + |b| \leq 1$.

Như vậy, luôn có $|a+c| + |b| \leq 1$ (1)

Tương tự, ta cũng có $|4a+c| + |2b| \leq 8$ (2)

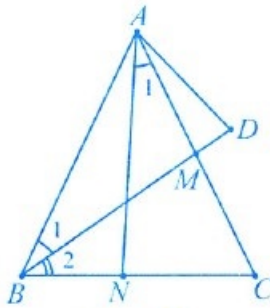
Cộng (1) và (2) theo vế ta có

$$\begin{aligned} 9 & \geq 3|b| + |4a+c| + |a+c| \geq 3|b| + |4a+c-a-c| \\ \Rightarrow 9 & \geq 3|b| + 3|a| \Leftrightarrow 3 \geq |a| + |b| \end{aligned} \quad (3)$$

Nhân hai vế của (1) với 4 rồi cộng với (2) theo vế ta được

$$\begin{aligned} 12 & \geq 6|b| + |4a+4c| + |4a+c| \geq 6|b| + |4a+4c-4a-c| \\ \Rightarrow 12 & \geq 6|b| + 3|c| \Leftrightarrow 4 \geq 2|b| + |c| \end{aligned} \quad (4)$$

Cộng (3) và (4) theo vế, ta được $|a|+3|b|+|c| \leq 7$.



Hình 2

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $a = -3, b = 0, c = 4$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Nếu các số thực a, b, c dương thì lời giải trên trở nên đơn giản: $a, b, c > 0$ nên $|a+b+c| = a+b+c \leq 1$. Suy ra $0 < a, b, c \leq 1$. Do đó $|a|+3|b|+|c| = a+3b+c < 5 < 7$.

2) Bạn Nguyễn Chí Tùng, 9A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội có lời giải tốt hơn cả.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/417.** Giải phương trình

$$(x-2)(x^2+6x-11)^2 = (5x^2-10x+1)^2.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Đặt $x-2 = y$ thì $x = y+2$. Khi đó

$$x^2+6x-11 = (y+2)^2+6(y+2)-11 = y^2+10y+5.$$

$$\begin{aligned} 5x^2-10x+1 & = 5(y+2)^2-10(y+2)+1 \\ & = 5y^2+10y+1. \end{aligned}$$

PT đã cho trở thành

$$\begin{aligned} y(y^2+10y+5)^2 & = (5y^2+10y+1)^2 \\ \Leftrightarrow y^5+20y^4+110y^3+100y^2+25y & = 25y^4+100y^3+110y^2+20y+1 \\ \Leftrightarrow y^5-5y^4+10y^3-10y^2+5y-1 & = 0 \\ \Leftrightarrow (y-1)^5 = 0 \Leftrightarrow y = 1. \text{ Do đó } x = 3. \end{aligned}$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Chí Tùng, 9A10, THCS Giảng Võ, Nguyễn Thế Dũng, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Bắc Ninh:** Lưu Đức Mạnh, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Thị Minh Anh, Nguyễn Thị Bích, Nguyễn Thị Thanh Huyền, 7A1, THCS Yên Lạc, Nguyễn Quốc Tùng, 9E, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Phú Thọ:** Nguyễn Đình Mậu, 8A3, THCS Lâm Thao; **Thái Nguyên:** Nguyễn Văn Tuyền, 6A4, THCS Hoàng Văn Thụ; **Nghe An:** Lê Văn Dũng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mai Lê, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Thanh Phương, 8A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Quảng Ngãi:** Võ Nguyễn Hải, Trần Thị Mỹ Linh, 8A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, Cao Thị Mỹ Diễm, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

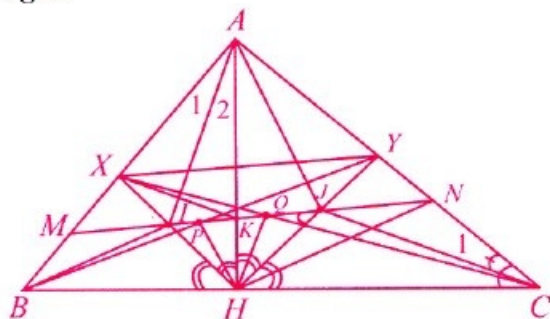
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/417.** Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác HAB và HAC . Đường thẳng IJ cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại M và N . Gọi X và Y lần

lượt là giao điểm của HI với AB và HJ với AC ; BY, CX cắt MN tương ứng tại P và Q .

Chứng minh rằng $\frac{AI}{AJ} = \frac{HQ}{HP}$.

Lời giải



• Trước hết ta chứng minh $AM = AN = AH$.
Thật vậy, trên các tia AB và AC lần lượt lấy các điểm M' và N' sao cho $AM' = AN' = AH$, ta có tam giác $AM'N'$ vuông cân tại A nên $\widehat{AM'N'} = \widehat{AN'M'} = 45^\circ$.

Kẻ tia phân giác của góc $\widehat{BAH}$ và tia phân giác của góc $\widehat{CAH}$ cắt $M'N'$ lần lượt tại I' và J' .
Từ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$; $AM' = AH$ suy ra $\triangle AI'M' = \triangle AI'H$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHI'} = \widehat{AMI'} = 45^\circ$ (theo trên).

Suy ra I' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHB . Do đó $I' \equiv I$. Tương tự $J' \equiv J$. Từ đó $M' \equiv M$; $N' \equiv N$, hay

$$AM = AN = AH \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = 45^\circ \quad (1)$$

• Do $\widehat{XAY} = \widehat{XHY} = 90^\circ$ nên tứ giác $AXHY$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AXY} = \widehat{AHY} = 45^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AXY} = \widehat{AMN}$, suy ra $XY \parallel MN$.

Giả sử $K = AH \cap MN$, ta có $\widehat{XMI} = \widehat{IHK} = 45^\circ$,

$IM = IH$, $\widehat{MIX} = \widehat{HIK}$ nên $\triangle MXI = \triangle HKI$
 $\Rightarrow MX = HK$ nên $AX = AK$.

Mặt khác AI là phân giác của góc XAK nên $XK \perp AI$ (3)

Lại có $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$.

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{IAC} = 90^\circ$, nên $\widehat{C_1} + \widehat{IAC} = 90^\circ$, suy ra $CJ \perp AI$ (4)

Từ (3) và (4) thu được $CJ \parallel XK$

$$\text{ nên } \frac{KQ}{QJ} = \frac{XQ}{QC} = \frac{YN}{NC} \quad (\text{vì } XY \parallel MN) \quad (5)$$

Lại có $\widehat{JHC} = \widehat{JNY} = 45^\circ$ nên tứ giác $HJNC$ nội tiếp, từ đó $\widehat{HCN} = 180^\circ - \widehat{HJN}$.

Vì $\widehat{KHJ} = \widehat{YHC} = 45^\circ$; $\widehat{HJK} = 180^\circ - \widehat{HJN} = \widehat{HCY}$

nên $\triangle KHJ \sim \triangle YHC$ mà $\frac{KQ}{JQ} = \frac{YN}{CN}$, suy ra

$$\widehat{KHQ} = \widehat{YHN} = \widehat{JHN} = \widehat{JCN} = \frac{\widehat{BAH}}{2} = \widehat{IAH}.$$

$$\text{Do đó } AI \parallel HQ \Rightarrow \frac{AI}{HQ} = \frac{AK}{KH} \quad (6)$$

$$\text{Tương tự, có } HP \parallel AJ \Rightarrow \frac{AJ}{HP} = \frac{AK}{KH} \quad (7)$$

Từ (6) và (7) suy ra $\frac{AI}{AJ} = \frac{HQ}{HP}$ (đpcm). $\square$

➤ **Nhận xét.** Do sơ suất, đề bài đã in nhầm thành "Chứng minh rằng $\frac{AI}{AJ} = \frac{HP}{HQ}$ ". Thành thật xin lỗi bạn đọc.

NGUYỄN THỊ THANH

★ **Bài T6/417.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+2)(y+2)(z+2)$.

Lời giải. Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ nên

$$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}, -\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3}.$$

Ta có $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 9$, suy ra $-3 \leq x+y+z \leq 3$. Từ BĐT Cauchy, ta có

$$P \leq \left(\frac{x+2+y+2+z+2}{3} \right)^3 \leq 27.$$

Vậy P đạt GTLN bằng 27, khi $x = y = z = 1$.

Biểu thức P sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi các số x, y, z đều âm. Do vậy, không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x \leq y \leq z \leq 0$. Khi đó $z \in [-1; 0]$. Ta có

$$P = (x+2)(y+2)(z+2) = \frac{1}{2}((x+y+2)^2 + z^2 + 1)(z+2) \geq \frac{1}{2}(z^2 + 1)(z+2).$$

Xét hàm số $f(z) = \frac{1}{2}(z^2 + 1)(z+2)$ với $z \in [-1; 0]$.

Ta có

$$f'(z) = z(z+2) + \frac{1}{2}(z^2+1) = \frac{1}{2}(3z+1)(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{3} \text{ hoặc } z = -1.$$

Lập bảng biến thiên ta có $\min_{-1 \leq z \leq 0} f(z) = \frac{25}{27}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{25}{27}$, đạt được
chẳng hạn khi $x = z = -\frac{1}{3}, y = -\frac{5}{3}$. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Lào Cai: Nguyễn Thu Thảo, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Vũ Đình Việt, 12A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Quốc Hùng, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học; **Đồng Tháp:** Trần Chí Thiên, 11T, Bùi Trần Hải Đăng, Nguyễn Thành Thi, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hoà; **Cần Thơ:** Nguyễn Thụy Phương Minh, 10A1, THPT Thốt Nốt; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Nhật Quang, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T7/417.** Cho tam giác ABC . Kí hiệu m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến; l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác trong và p là nửa chu vi tam giác. Chứng minh rằng

$$m_a + m_b + m_c + l_a + l_b + l_c \leq 2\sqrt{3}p.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$c = \max\{a, b, c\} \text{ suy ra } \frac{3c}{2} \geq p \quad (1)$$

$$\text{Ta chứng minh rằng } m_a + m_b + l_c \leq \sqrt{3}p \quad (2)$$

Trước hết, ta chứng minh

$$m_a + m_b = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}} + \sqrt{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + 2c^2} \quad (3)$$

Thật vậy, BĐT (3) tương đương với

$$\frac{a^2 + b^2}{4} + c^2 + \frac{1}{2}\sqrt{(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)}$$

$$\leq \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} + 2c^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)} \leq ab + 2c^2$$

$$\Leftrightarrow (2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2) \leq (ab + 2c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^4 + b^4 - 2a^2b^2) - (a^2c^2 + b^2c^2 - 2abc^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 - (ac - bc)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b + c)(a + b - c) \geq 0.$$

BĐT đúng, suy ra BĐT (3) được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

$$\text{Lại có } l_c = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a + b} \leq \sqrt{ab} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow l_c^2 \leq ab \cdot \frac{1 + \cos C}{2} = \frac{ab}{2} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{4}.$$

$$\text{Suy ra } l_c \leq \sqrt{p(p - c)} \quad (4)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Sử dụng các BĐT (3) và (4), để chứng minh (2) ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + 2c^2} + \sqrt{p(p - c)} \leq \sqrt{3}p$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(2p - c)^2}{4} + 2c^2} + \sqrt{p(p - c)} \leq \sqrt{3}p$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p(p - c)((2p - c)^2 + 8c^2)} \leq p^2 + 2pc - \frac{9c^2}{4}.$$

Biến đổi và rút gọn, ta thấy BĐT trên tương

$$\text{đương với } \left(\frac{3c}{2} - p\right)\left(\frac{3c}{2} + 3p\right) \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Như vậy BĐT (2) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bây giờ ta chứng minh rằng

$$l_a + l_b + m_c \leq \sqrt{3}p \quad (5)$$

Thật vậy, ta có

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 = (a + b)^2 - (c^2 - (a - b)^2)$$

$$= \left(a + b + \sqrt{c^2 - (a - b)^2}\right)\left(a + b - \sqrt{c^2 - (a - b)^2}\right)$$

$$\leq p\left(2 - (\sqrt{p - a} + \sqrt{p - b})^2\right). \text{ Suy ra}$$

$$4m_c^2 \leq 4p^2 - 2p(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{p(p-a)} + \sqrt{p(p-b)} \leq \sqrt{2(p^2 - m_c^2)} \quad (6)$$

Tương tự BĐT (4) và sử dụng BĐT (6), ta có

$$l_a + l_b \leq \sqrt{p(p-a)} + \sqrt{p(p-b)}$$

$$\Rightarrow l_a + l_b + m_c \leq m_c + \sqrt{2(p^2 - m_c^2)}$$

$$\leq \sqrt{(1+2)(m_c^2 + p^2 - m_c^2)}, \text{ suy ra}$$

$l_a + l_b + m_c \leq \sqrt{3}p$. BĐT (5) được chứng minh. Từ (2) và (5), suy ra

$$m_a + m_b + m_c + l_a + l_b + l_c \leq 2\sqrt{3}.p \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán khó, đòi hỏi nhiều phép biến đổi phức tạp nên rất ít bạn tham gia gửi bài giải.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

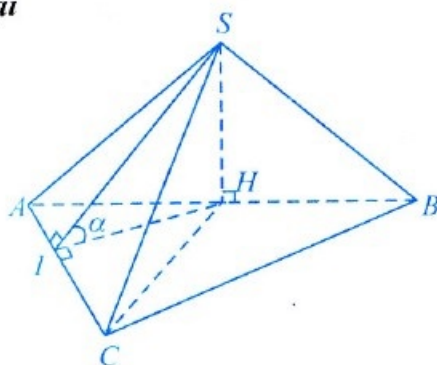
Thái Bình: Nguyễn Hải Linh Chi, 10 Toán I, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** Nguyễn Sỹ Tuấn, 10A7, THPT Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 11 Toán I, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Phan Hoàng Hải, 11A1, THPT Số 2, Quảng Trạch; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP Biên Hòa.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T8/417.** Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên SAB là tam giác cân tại S và góc $\widehat{BSA} = 120^\circ$, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng $\frac{S_{ABC}}{S_{SAC}} \leq \sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào? (Kí hiệu S_{DEF} là diện tích tam giác DEF).

Lời giải



Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $SH \perp AB$ thì do $mp(SAB) \perp mp(ABC)$ nên $SH \perp mp(ABC)$. Suy ra $SH \perp AC$.

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $HI \perp AC$. Từ định lý ba đường vuông góc ta thấy $SI \perp AC$. Do đó $\widehat{SIH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) . Đặt $\widehat{SIH} = \alpha$, ta có $SH < SI \leq SA$

$$\Rightarrow \frac{SH}{SA} \leq \frac{SH}{SI} < 1 \Leftrightarrow \sin 30^\circ \leq \sin \alpha < 1, \text{ hay}$$

$$30^\circ \leq \alpha < 90^\circ \quad (*)$$

Mặt khác $S_{AHC} = \cos \alpha \cdot S_{SAC} \Leftrightarrow S_{ABC} = 2 \cos \alpha \cdot S_{SAC}$.

Từ (*) có $0 < \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, nên $S_{ABC} \leq \sqrt{3} \cdot S_{SAC}$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{SAC}} \leq \sqrt{3}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ}$$

khi tam giác ABC vuông tại A . $\square$

➤ **Nhận xét.** Có nhiều bạn giải đúng bài toán này. Sau đây là những bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Phan Ngọc Lâm, 11A1, THPT Liên Hà, Đông Anh; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Việt Hà, Nguyễn Trung Hiếu, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** Vũ Thị Duyên, Vũ Trần Tùng Lâm, 11A, THPT Kim Thành I, Vũ Đình Việt, 12A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Thái Bình:** Bùi Đình Hiếu, Vũ Xuân Tường, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phú; **Nghệ An:** Nguyễn Đăng Công, 11A2, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, Nguyễn Anh Văn, 11A1, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu, Lê Thị Thúy An, Lê Thị Minh Thủy, Đậu Thanh Bình, 11A5, THPT Hà Huy Tập, TP. Vinh; **Quảng Bình:** Phan Hoàng Hải, 11A1, THPT Số 2 Quảng Trạch; **Lâm Đồng:** Nguyễn Vũ Trung Quân, 11 Toán 1, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt; **Đồng Tháp:** Võ Hoài Bảo, 11T, Âu Anh Minh, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bình Định:** Nguyễn Văn Hải, 11B, THPT Tây Sơn, Nguyễn Thịnh Vinh, 12A2, THPT Số 2 An Nhơn; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T9/417.** Một số tự nhiên n được gọi là số tốt nếu ta có thể chia hình vuông bất kì thành n hình vuông nhỏ có ít nhất hai trong chúng không bằng nhau.

- 1) Chứng minh rằng nếu n là số tốt, thì $n \geq 4$.
- 2) Chứng minh rằng số 4 và số 5 không phải là số tốt.
- 3) Tìm tất cả các số tốt.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Thị Việt Hà, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên).

1) Nếu n là số tốt thì hình vuông $ABCD$ được chia thành n hình vuông nhỏ hơn nó. Do đó tương ứng với mỗi đỉnh của $ABCD$ là một hình vuông nhỏ. Vậy $n \geq 4$.

2) Gọi độ dài cạnh của bốn hình vuông nhỏ tương ứng với các đỉnh A, B, C, D là a_1, a_2, a_3, a_4 và độ dài cạnh của $ABCD$ là a .

• Với $n = 4$ ta có

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = a_4 + a_1 = a \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_3 \\ a_2 = a_4 \\ a_1 + a_2 = a \\ 2a_1^2 + 2a_2^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_3 \\ a_2 = a_4 \\ (a_1 + a_2)^2 = 2a_1^2 + 2a_2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \text{ (loại).}$$

• Với $n = 5$. Gọi a_5 là độ dài cạnh hình vuông thứ năm. Xét hai trường hợp:

i) Nếu hình vuông thứ năm không có cạnh nào nằm trên hình vuông ban đầu. Khi đó ta có

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = a_4 + a_1 = a \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_3 \\ a_2 = a_4 \\ 2a_1^2 + a_2^2 + a_5^2 = a^2 \\ a_1 + a_2 = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_5^2 = (a_1 + a_2)^2 - 2a_1^2 - 2a_2^2 = -(a_1 - a_2)^2.$$

Suy ra $a_5 = 0$ vô lí.

ii) Nếu hình vuông thứ năm có cạnh nằm trên cạnh hình vuông ban đầu. Khi đó

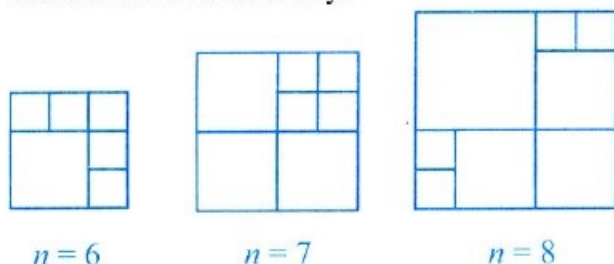
$$a_1 + a_5 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = a \Rightarrow a_5 = 0.$$

Vậy $n = 4$ và 5 không là **số tốt**.

3) Ta chứng minh rằng nếu n là **số tốt** thì $n + 3$ là **số tốt**.

Thật vậy trong n hình vuông nhỏ ta chọn hình vuông bé nhất. Sau đó chia hình vuông nhỏ này thành bốn hình vuông bằng nhau. Như vậy hình vuông $ABCD$ được chia thành $n + 4$ hình vuông nhỏ thỏa mãn điều kiện đề bài.

• Tiếp theo ta chỉ cần chỉ ra $n = 6, 7, 8$ là **số tốt** như hình vẽ dưới đây.



Vậy mọi $n \geq 6$ đều là **số tốt**. $\square$

➤ **Nhận xét.** Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Hoàng Đỗ Kiên, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** Vũ Tuấn Anh, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Phạm Thế Dương, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Đắk Lắk:** Hoàng Thị Phương Nhung, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Phú Yên:** Lê Nhật Thăng, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/417.** Cho dãy $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ (với $n \geq 2$)

được xác định bởi $a_0 = 0, a_k = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k}$,

$k = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{a_k}}{n+k+1} + (\ln 2 - a_n) e^{a_n} < 1$$

với $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Lời giải. Trước hết ta có hai nhận xét sau:

1) Xét hàm số $f(x) = \ln x$, với $m \in \mathbb{N}^*$ bất kì.

Từ định lí Lagrange tồn tại $m < b < m+1$ mà

$$f(m+1) - f(m) = f'(b) = \frac{1}{b} > \frac{1}{m+1}.$$

$$a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} < \sum_{i=1}^n (\ln(n+i) - \ln(n+i-1)) = \ln 2n - \ln n = \ln 2 \quad (1)$$

2) Xét hàm số $g(x) = e^x$, với $x \in \mathbb{R}, x > 0$ bất kì.

Từ định lí Lagrange tồn tại $0 < c < x$ thỏa mãn

$$g(x) - g(0) = g'(c) \cdot (x - 0) \Rightarrow e^x - 1 = e^c \cdot x > x.$$

$$\text{Từ đó ta có } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{a_k}}{n+k+1} < \sum_{k=0}^{n-1} e^{a_k} \left(\frac{1}{e^{n+k+1}} - 1 \right) = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{a_{k+1}} - e^{a_k}) = e^{a_n} - e^{a_0} = e^{a_n} - 1 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } h(x) = e^x - 1 + (\ln 2 - x)e^x, 0 \leq x \leq \ln 2.$$

$$\text{Chú ý } h'(x) = e^x - e^x + (\ln 2 - x)e^x = (\ln 2 - x)e^x > 0 \quad \forall x \in (0; \ln 2).$$

Suy ra $h(x)$ là hàm đồng biến trên $(0; \ln 2)$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{a_k}}{n+k+1} + (\ln 2 - a_n) e^{a_n} < h(a_n) < h(\ln 2) = 1.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán giải tích khó với nhiều bạn học sinh. Lời giải trên là của bạn **Phạm Thế Dương**, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**. Còn một số bạn gửi lời giải tới Tòa soạn nhưng lời giải không được gọn gàng, đẹp như lời giải trên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T11/417.** *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(x)f(yf(x)) = f(y + f(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

($\mathbb{R}^+$ là tập hợp tất cả các số thực dương).

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Trong (1) thay y bởi $f(y)$ ta thu được

$$f(x)f(f(y)f(x)) = f(f(y) + f(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Đổi vai trò của x và y trong (2), ta thu được

$$f(y)f(f(x)f(y)) = f(f(x) + f(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Từ (2), (3) và $f(x) > 0$ cho ta

$$f(x) = f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

hay $f(x) \equiv c > 0$. Thay vào (1) ta được $c^2 = c$ nên $c = 1$. Vậy $f(x) \equiv 1$. Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện đề bài. □

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Hoàng Đỗ Kiên, Dương Phước Thọ, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Vũ Đình Việt, 12A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Việt Hà, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** Nguyễn Hải Linh Chi, 10T, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Lê Thị Lan Anh, Phạm Thế Dương, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Lâm Đồng:** Nguyễn Vũ Trung Quân, 11T1, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt; **Phú Yên:** Lê Nhật Thăng, 11T, THPT Lương Văn Chánh; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phùng Thanh Dũng, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Phạm Việt Hoàng, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Trị:** Hồ Phước Bảo, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Nguyễn Quang Hải, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/417.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R), có trọng tâm G và diện tích S. Chứng minh rằng*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \left(4\sqrt{3} + \frac{OG^2}{R^2} \right) S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Lời giải. (Theo bạn **Dương Phước Thọ**, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**). Ta kí hiệu

$$\prod x = xyz; \prod (y+z) = (y+z)(z+x)(x+y),$$

Ta có $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9} \sum a^2$ (kết quả quen thuộc).

$$\text{Suy ra } \frac{OG^2}{R^2} = 1 - \frac{16S^2 \sum a^2}{9 \prod a^2}.$$

Đặt $x = p - a; y = p - b; z = p - c$.

Suy ra $a = y + z; b = z + x; c = x + y$ và

$$S = \sqrt{(\sum x)(\sum yz)}.$$

$$\text{Vậy } \sum a^2 \geq \left(4\sqrt{3} + \frac{OG^2}{R^2} \right) S + \sum (b-c)^2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sum bc - \sum a^2}{S} + \frac{16S^2 \sum a^2}{9 \prod a^2} \geq 1 + 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sum (z+x)(x+y) - \sum (y+z)^2}{\sqrt{(\sum x) \prod x}} + \frac{16(\sum x) \prod x \sum (y+z)^2}{9 \prod (y+z)^2} \geq 1 + 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \sum yz}{\sqrt{(\sum x) \prod x}} + \frac{32(\sum x) \prod x (\sum x^2 + \sum yz)}{9 \prod (y+z)^2} \geq 1 + 4\sqrt{3} \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy cho 7 số, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{\sum yz}{\sqrt{(\sum x) \prod x}} + \frac{32(\sum x) \prod x (\sum x^2 + \sum yz)}{9 \prod (y+z)^2} \\ &= \frac{12 \sum yz}{2\sqrt{3}(\sum x) \prod x} + \frac{32(\sum x) \prod x (\sum x^2 + \sum yz)}{9 \prod (y+z)^2} \\ &= \frac{3x(y+z)}{2\sqrt{3}(\sum x) \prod x} + \frac{3x(y+z)}{2\sqrt{3}(\sum x) \prod x} + \frac{3y(z+x)}{2\sqrt{3}(\sum x) \prod x} \\ &+ \frac{3y(z+x)}{2\sqrt{3}(\sum x) \prod x} + \frac{3y(z+x)}{2\sqrt{3}(\sum x) \prod x} + \frac{3y(z+x)}{2\sqrt{3}(\sum x) \prod x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{32(\sum x) \prod x (\sum x^2 + \sum yz)}{9 \prod (y+z)^2} \geq 7 \sqrt{\frac{3(\sum x^2 + \sum yz)}{2(\sum x)^2}} \\
 & = 7 \sqrt{1 + \frac{3(\sum x^2 + \sum yz) - 2(\sum x)^2}{2(\sum x)^2}} \\
 & = 7 \sqrt{1 + \frac{\sum x^2 - \sum yz}{2(\sum x)^2}} = 7 \sqrt{1 + \frac{\sum (y-z)^2}{4(\sum x)^2}} \geq 7 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
 & (\sum yz)^2 - 3 \prod x \sum x = \frac{1}{2} \sum x^2 (y-z)^2 \geq 0 \\
 & \Rightarrow \left(4 - \frac{6}{\sqrt{3}}\right) \frac{\sum yz}{\sqrt{\prod x \sum x}} \geq 4\sqrt{3} - 6 \quad (4)
 \end{aligned}$$

Cộng (3) và (4) theo vế, suy ra BĐT (2) đúng. Điều đó có nghĩa là BĐT (1) đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán khó, ngoài bạn Thọ, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

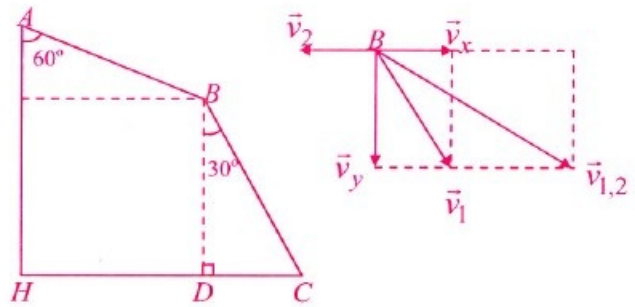
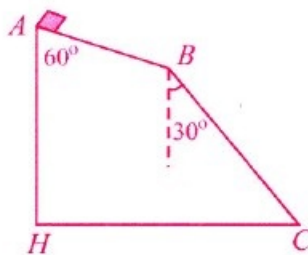
Hưng Yên: Nguyễn Thị Việt Hà, THPT chuyên Hưng Yên; **Đồng Tháp:** Bùi Trần Hải Đăng, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Quảng Bình:** Phan Hoàng Hải, 11A1, THPT Số 2, Quảng Trạch; **Phú Yên:** Lê Nhật Thăng, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bình Định:** Nguyễn Văn Hải, 11B, THPT Tây Sơn, Nguyễn Quang Hải, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ; **Hà Nội:** Phan Ngọc Lâm, 11A1, THPT Liên Hà, Đông Anh.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/417.** Một chiếc nêm có dạng như hình vẽ. Nêm được đặt trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn. Một vật nhỏ có khối lượng bằng khối lượng của nêm

được giữ nằm yên ở đỉnh nêm A. Buông nhẹ vật thì thấy sau khi rời mặt nêm AB, vật rơi đúng ngay vào chân nêm C. Hãy xác định tỉ số $\frac{BC}{AB}$. Bỏ qua mọi ma sát.

Lời giải. (Theo bạn Lê Xuân Trường, 10A5, THPT chuyên ĐH Vinh, Nghệ An).



Gọi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lần lượt là vận tốc của vật và nêm sau khi rời khỏi mặt AB. $\vec{v}_x, \vec{v}_y$ là thành phần vận tốc theo trục x và y của $\vec{v}_1$. $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ là vận tốc tương đối của vật so với nêm.

• Áp dụng động lượng bảo toàn theo phương ngang, ta có

$$m\vec{v}_x + m\vec{v}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow mv_x - mv_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_x.$$

Từ hình vẽ ta có

$$v_{1,2} = \frac{v_x + v_2}{\cos 30^\circ} = \frac{4v_x}{\sqrt{3}} \Rightarrow v_y = v_{1,2} \sin 30^\circ = \frac{2v_x}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} v_x.$$

(Ta lấy $v_1, v_2, v_x, v_y, v_{1,2}$ là các giá trị đại số của vận tốc).

• Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$\begin{aligned}
 mgh &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \Leftrightarrow 2gh = \frac{7}{3}v_x^2 + v_x^2 \\
 \Leftrightarrow 2g \cdot AB \cos 60^\circ &= \frac{10}{3}v_x^2 \Rightarrow AB = \frac{10v_x^2}{3g} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Thời gian vật rơi từ B tới C là

$$t = \frac{S}{v} = \frac{BC \cdot \sin 30^\circ}{v_x + v_2} = \frac{BC}{4v_x}.$$

• Phương trình chuyển động của vật

$$\begin{aligned}
 H &= v_y t + \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow BC \cos 30^\circ \\
 &= \frac{2v_x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{BC}{4v_x} + \frac{1}{2}g \frac{BC^2}{(4v_x)^2} \Rightarrow BC = \frac{32v_x^2}{\sqrt{3}g} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{BC}{AB} = \frac{16\sqrt{3}}{5}$. $\square$

➤ Nhận xét

1) Ngoài cách viết phương trình chuyển động của vật như trên, các bạn có thể chọn hệ quy chiếu có trục Ox trùng với BC , trục Oy vuông góc với BC .

2) Ngoài cách giải trên các bạn có thể giải theo cách tính độ cao AE và BD . Từ đó được tỉ số $\frac{BC}{AB}$.

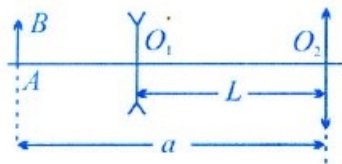
3) Ngoài bạn Trường, các bạn sau cũng có lời giải đúng:

Nghệ An: Nguyễn Xuân Cường, Nguyễn Đình Quang, 10T1, THPT Anh Sơn1; **TP. Hồ Chí Minh:** Lê Hữu Trọng, 11CT, THPT Nguyễn Hữu Huân.

ĐẶNG THANH HẢI

★ Bài L2/417.

Cho một thấu kính O_2 có tiêu cự $f_2 = 24\text{cm}$ và vật AB cách thấu kính O_2 một khoảng không đổi $a = 44\text{cm}$. Một thấu kính O_1 có tiêu cự $f_1 = -15\text{cm}$ được đặt đồng trục với O_2 ở trước và cách O_2 một khoảng L (hình vẽ).



1) Để ảnh cuối cùng A_2B_2 được tạo bởi hệ O_1 và O_2 là ảnh thật thì L phải có độ lớn nằm trong khoảng nào?

2) Hãy xác định L để A_2B_2 có độ phóng đại $k = \frac{5}{8}$; A_2B_2 là ảnh thật hay là ảnh ảo?

Lời giải. 1) Ta có sơ đồ tạo ảnh

$$AB \xrightarrow{O_1} A_1B_1 \xrightarrow{O_2} A_2B_2$$

$$d_1 \quad d'_1 \quad d_2 \quad d'_2$$

Áp dụng công thức thấu kính $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.

$$\text{Suy ra } d = \frac{d'f}{d' - f} \text{ và } d' = \frac{df}{d - f}.$$

$$\text{Ta có } L = d'_1 + d_2 = \frac{d_1 f}{d_1 - f} + \frac{d'_2 f}{d'_2 - f} \quad (1)$$

$$\text{Theo đề bài thì } a = d_1 + L \text{ hay } d'_1 = a - L \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$\text{Rút ra } d'_2 = \frac{24(L^2 - 44L - 660)}{L^2 - 68L + 756}$$

$$\text{hay } d'_2 \approx \frac{24(L - 55,82)(L + 11,82)}{(L - 54)(L - 14)} \quad (3)$$

Từ (3) ta xét dấu của d'_2 qua bảng

L	0	14	54	55,82	$+\infty$			
d'_2	-20,95	-		+		-	0	+

Muốn ảnh A_2B_2 là ảnh thật ($d'_2 > 0$) thì theo bảng trên và kết hợp với điều kiện đề bài là $L < a = 44\text{cm}$, ta suy ra $14\text{cm} < L < 44\text{cm}$.

$$2) \text{ Ta có } k = \frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\text{Mặt khác } k = \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{(d'_2 - f_2)}{(d_1 - f_1)} = \frac{-15(d'_2 - 24)}{24(d_1 + 15)} \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } d'_2 = 9 - d_1 \quad (6)$$

$$\text{Thay (6) vào (1) ta được } L = \frac{9(d_1 - 24)}{d_1 + 15} \quad (7)$$

$$\text{Ta cũng có } d_1 = a - L = 44 - L \quad (8)$$

Thay (8) vào (7) ta được phương trình

$$L^2 - 68L + 180 = 0 \quad (9)$$

PT (9) có hai nghiệm $L_1 = 2,76\text{cm} < a = 44\text{cm}$ (chọn) và $L_2 = 65,24\text{cm} > a = 44\text{cm}$ (loại).

Theo bảng xét dấu trên, với $L = L_1 = 2,76\text{cm}$ thì $d'_2 < 0$ nên A_2B_2 là ảnh ảo. $\square$

➤ Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nam: Đinh Ngọc Hải, 12 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phù Lý; **Nam Định:** Nguyễn Thu Trang, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bình Định:** Trần Nam Hiếu, 10A2, THPT Số 2 Phù Cát; **Thái Bình:** Nguyễn Văn Sơn, Nguyễn Văn Minh, 11A2, THPT Bắc Đông Quan, Phạm Thị Lan Hương, Vũ Xuân Ngung, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Bùi Đình Hiếu, Vũ Xuân Tường, 11A1, THPT Quỳnh Côi; **Nghệ An:** Trịnh An Bình, 11A1, Nguyễn Ngọc Minh, 11A3, THPT Thái Hòa, Lê Xuân Báo, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Bình:** Nguyễn Hoàng Duy Thành, 11 Lí, THPT chuyên Quảng Bình; **TP. Hồ Chí Minh:** Lê Hữu Trọng, 11CT, THPT Nguyễn Hữu Huân.

NGUYỄN VĂN THUẬN



ĐÓN ĐỌC ÁN PHẨM MỚI
ĐẶC SAN CỦA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
SỐ 4

Vào tháng 8 năm 2012, Tòa soạn *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* sẽ phát hành cuốn *Đặc san Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ Số 4*. Các chuyên mục trong Đặc san Số 4 được các nhà giáo, các nhà sư phạm có kinh nghiệm biên soạn, giúp các giáo viên trong việc giảng dạy, giúp các em học sinh ôn tập, hệ thống kiến thức để đạt kết quả cao trong các kì kiểm tra chương, học kì, thi vào lớp 10 THPT, thi tốt nghiệp THPT và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng.

Đặc san số 4 dày 48 trang, khổ 19 x 26,5cm. **Giá bìa: 14.500 đồng**

Các bạn có thể đặt mua tại các Cơ sở Bưu điện trên cả nước theo **Mã số C.168.1**, các Công ty Sách và Thiết bị trường học ở địa phương.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

ĐT Biên tập: (04)3521607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04)35121606 - Hotline : 0912828687

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/421. Given that $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$ and $y \geq 1$. Find the minimum value of

$$P = x^2 + y^2 + \frac{x^2 y^2}{((4x-1)y-x)^2}.$$

T7/421. Let (a_n) , $n = 0, 1, \dots$ be a sequence of positive real numbers, given by

$$a_0 = 1$$

$$a_m < a_n \text{ for all } m, n \in \mathbb{N}, m < n$$

$$a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}} + 1 \text{ and } 4\sqrt{a_n} = a_{n+1} - a_{n-1} \text{ for all } n \in \mathbb{N}^*.$$

Determine the sum

$$T = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2012}.$$

T8/421. The base of a triangular prism $ABC.A'B'C'$ is an equilateral triangle with side lengths a , and the lengths of its adjacent sides also equal a . Let I be the midpoint of AB and $B'I \perp (ABC)$. Find the distance from B' to the plane $(ACC'A')$ in term of a .

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/421. Find all polynomials $P(x)$ with real coefficients satisfying

$$P^2(x) - 1 = 4P(x^2 - 4x + 1).$$

T10/421. Find α, β so that the largest value of $y = |\cos x + \alpha \cos 2x + \beta \cos 3x|$ is smallest possible.

T11/421. Let ABC be a triangle with side lengths a, b , and c . Let S and p be respectively the area and the semiperimeter of this triangle. Prove the inequality

$$\frac{1}{a^2(p-a)^2} + \frac{1}{b^2(p-b)^2} + \frac{1}{c^2(p-c)^2} \geq \frac{9}{4S^2}.$$

T12/421. Given an acute triangle ABC inscribed the circle (O) with $BC > CA > AB$. On the circle (O) , select six distinct points M, N, P, Q, R and S (which are also distinct from the vertices of triangle ABC) so that $QB = BC = CR$; $SC = CA = AM$ and $NA = AB = BP$.

Let I_A, I_B and I_C be the incenters of triangles APS, BNR and CMQ respectively. Prove that $\Delta I_A I_B I_C \sim \Delta ABC$.

Translated by LE MINH HA



Tản mạn VỀ TOÁN VÀ TIN

NGUYỄN XUÂN HUY

(Viện Công nghệ Thông tin)

Toán học và Tin học là hai lĩnh vực rất gần nhau và hỗ trợ nhau như hai người bạn thân thiết. Hầu hết các thành tựu của Tin học đều được phát triển trên các kết quả của Toán học. Ngược lại, Tin học cũng đặt ra nhiều bài toán cho các nhà toán học cùng tham gia giải quyết. Bài viết này giới thiệu một số mẩu chuyện trong lịch sử phát triển Toán học, Tin học và một số bài toán tin minh họa tình bạn thân thiết giữa hai ngành này.

Trước hết xin bật mí với các bạn rằng có những bài thi học sinh giỏi môn Tin được lấy từ đề Toán. Sau đây là một thí dụ.

Lát nền

Người ta cần lát kín một nền nhà hình vuông cạnh dài $n = 2^t$, (t là một số nguyên lớn hơn 1) khuyết một ô thoát nước tại vị trí (x, y) bằng những viên gạch màu hình thước thợ (chữ L) gồm 3 ô vuông đơn vị. Hai viên

gạch kề cạnh nhau, dù chỉ 1 đơn vị dài, phải có màu khác nhau. Các ô trong nền nhà được đánh số theo dòng $x = 1, 2, \dots, n$ tính từ trên xuống và theo cột $y = 1, 2, \dots, n$ tính từ trái qua phải. Hãy cho biết một cách lát với số màu ít nhất.

Nếu là đề Toán thì yêu cầu có thể như sau:

Chúng mình rằng với mọi t nguyên lớn hơn 1 luôn tồn tại cách lát thỏa điều kiện đầu bài với số màu tối thiểu là 3.

Với đề Tin người ta thường yêu cầu chỉ rõ một cách lát cụ thể với mỗi giá trị t cho trước. Cách lát chính là thuật toán. Thuật toán sau đây là của bạn Lê Hoàng Hải, lớp 10 chuyên Tin, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội (năm 2002).

Về số màu, với $n = 2$ thì chỉ cần 1 viên gạch màu 1. Với mọi n nguyên lớn hơn 2, ta sẽ trình bày một thuật toán cần tối đa 3 màu. Ta sẽ giải bài toán qua hai pha.



Hình 1. Lát nền nhà: $n = 8$, $t = 3$, ô thoát nước tại vị trí $x = 5$, $y = 6$

Pha 1. Lát nền nhà để chứa một ô trống tại góc cuối cùng (n, n) .

Đầu tiên ta khởi trị với hình vuông cạnh $k = 2$ nằm ở góc trên – trái của nền nhà được biểu diễn dưới dạng một ma trận hai chiều : ba ô trong hình vuông 2×2 sẽ được điền giá trị 1, ô nằm ở góc dưới – phải được điền giá trị 2 (phần tô đậm trong Hình 2 (a)). Như vậy, sau khi khởi trị ta coi như đã lát xong nền nhà cạnh $n = 2$ bằng 1 viên gạch màu 1, lỗ thoát nước nằm ở góc dưới – phải, (ô $(2, 2)$ và tạm mang màu 2). Gọi hình được khởi trị là A . Mỗi bước tiếp theo ta thực hiện ba thao tác biến hình sau đây (Hình 2(b) và Hình 3(a)):

- Tịnh tiến A đi xuống theo đường chéo để thu được hình B .
- Lật A sang phải (tức là lấy đối xứng qua trục tung) để thu được hình C .
- Lật A xuống dưới (tức là lấy đối xứng qua trục hoành) để thu được hình D .

Chú ý rằng khi *lật* ta cần thực hiện thêm phép hoán đổi màu m của mỗi ô thành màu bù 4, tức là $4 - m$. Ta tạm gọi phép lật này là *phép lật bù 4*. Đến đây ta thu được ma trận 4×4

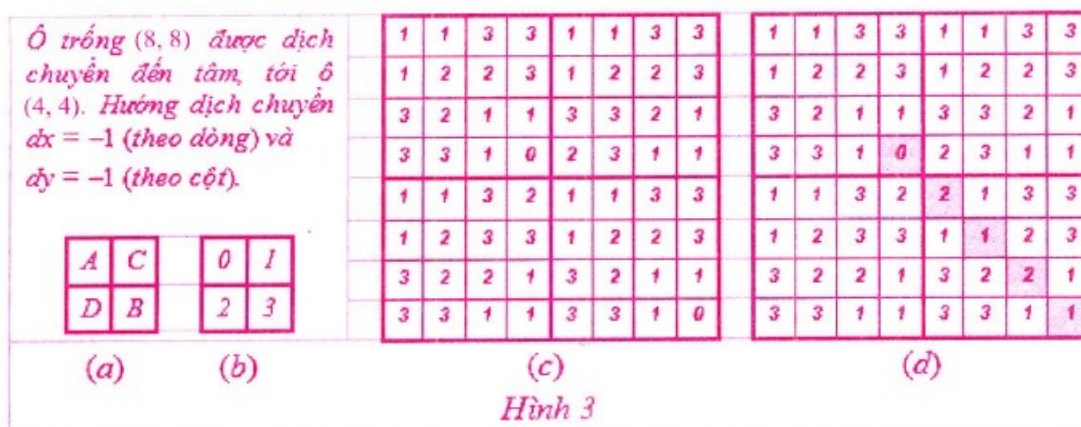
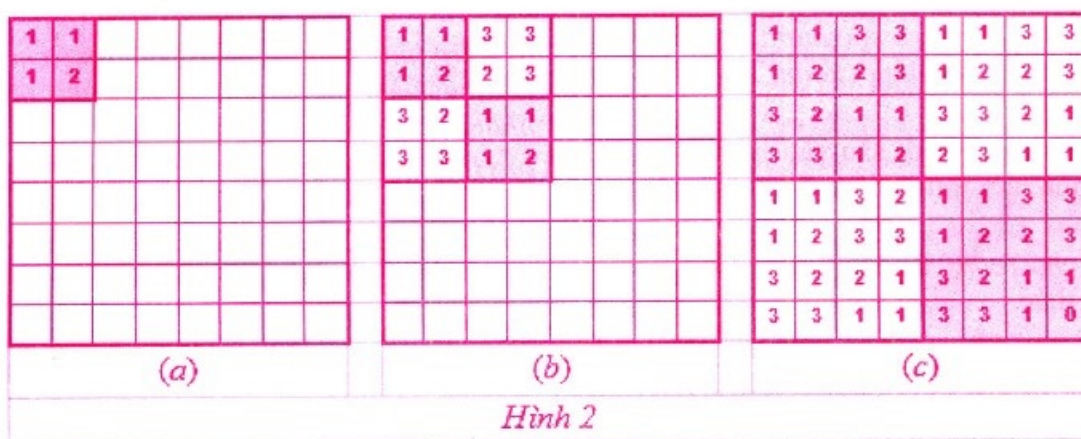
như trong Hình 2 (b).

Lặp lại thủ tục ba bước: tịnh tiến, lật bù 4 phải và lật bù 4 dưới với ma trận 4×4 trong Hình 2 (b) ta sẽ thu được ma trận 8×8 như trong Hình 2(c). Mỗi lần lặp như vậy ta sẽ thu được hình vuông có cạnh tăng gấp đôi hình trước. Khi $k = n$ ta thu được nền nhà được lát bằng các viên gạch chữ L với tối đa 3 màu 1, 2 và 3 cho trường hợp $n > 2$. Riêng ô (n, n) mang giá trị 2 sẽ được sửa thành 0.

Pha 2. Dịch chuyển ô trống (n, n) đến vị trí (x, y) .

Ta sẽ sử dụng thao tác cơ bản sau đây: Dịch chuyển ô (d, c) tại góc một hình vuông cạnh k tới tâm của hình vuông, cụ thể là tới một trong 4 ô nằm tại tâm của hình vuông này.

Độ dịch chuyển theo dòng và cột phụ thuộc vào hướng dịch chuyển. Ta gọi dx là độ dịch chuyển (mỗi bước 1 ô) theo dòng và dy là độ dịch chuyển theo cột. Khi cần dịch ô trống về tâm theo hướng $B \rightarrow A$ ta đặt $dx = dy = -1$; theo hướng $A \rightarrow B$ ta đặt $dx = dy = 1$; theo



hướng $D \rightarrow C$ ta đặt $dx = -1$, $dy = 1$; theo hướng $C \rightarrow D$ ta đặt $dx = 1$, $dy = -1$.

Muốn đưa ô trống (d, c) về vị trí (x, y) trước hết ta xác định xem hai ô này rơi vào mảnh nào trong các mảnh phần tư của hình vuông cạnh k .

Với mỗi hình vuông cạnh k ta chia làm 4 phần A , B , C và D rồi đưa hai ô (c, d) và (x, y) về cùng một mảnh phần tư. Sau một số lần lặp ta thu được $k = 2$. Khi đó trong hình vuông 4 ô chứa hai ô (c, d) và (x, y) , trong đó (c, d) là ô trống, 3 ô còn lại cùng màu, ta chỉ làm phép đổi chỗ hai ô (c, d) và (x, y) là thu được kết quả. $\square$

Thế nào là tồn tại?

Ngày xưa người ta quan niệm tồn tại như sau:

Tôi nói rằng (phải) tồn tại một mệnh đề A nào đó nếu như bạn chấp nhận phủ định của mệnh đề A thì tôi sẽ chỉ ra mâu thuẫn.

Trong khá nhiều chứng minh người ta đều dựa vào cách hiểu trên và phép lập luận tương ứng được gọi là *phản chứng*.

Một số người khác lại quan niệm tồn tại như sau:

Anh nói rằng có tồn tại một đối tượng A nào đó thì anh phải chỉ ra các bước đi thật cụ thể (tức là chỉ ra một thuật toán) để tôi có thể phát hiện ra A .

Chúng ta sẽ không đi sâu vào lý giải các vấn đề trên mà tạm thừa nhận có hai loại đề toán sau đây:

Đề toán cho Toán: thường yêu cầu chứng minh, lập công thức.

Đề toán cho Tin: thường yêu cầu chỉ ra các bước làm cụ thể.

Sản phẩm nộp trong các kì thi Toán thường là bài viết gọi là *tự luận*. Các thầy sẽ chấm trên bài viết đó để xác định tính chặt chẽ của các lập luận và tính đúng của đáp số. Sản phẩm nộp trong các kì thi Tin thường là chương trình đã được dịch ra ngôn ngữ máy tính. Các thầy sẽ không đọc lại chương trình mà thường sử dụng các bộ dữ liệu cụ thể để xác định xem chương trình của thí sinh có cho ra kết quả đúng đắn trong khoảng thời gian quy định trước hay không. Thí dụ, với bài lát nền nói trên, một dữ liệu test có thể là $t = 10$, ($n = 1024$), $(x, y) = (123, 17)$ với yêu cầu số màu là 3 và thời gian thực hiện dưới 2 giây. Thường mỗi bài có khoảng trên dưới 10 bộ test với mức độ khó, dễ khác nhau.

Muốn giỏi Tin phải giỏi Toán

Dĩ nhiên, nếu không có kiến thức toán thì bạn dễ bị đầu hàng trước một số bài tin. Dưới đây là một đề toán tin như vậy.

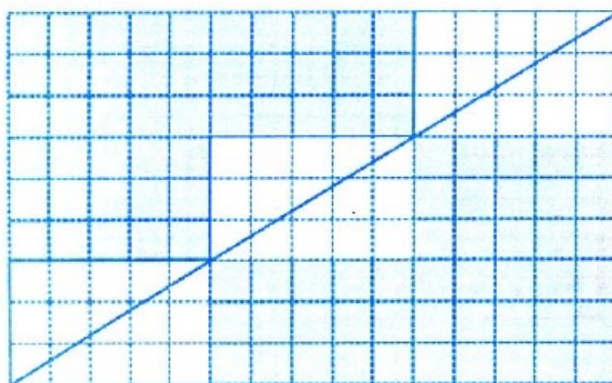
Cắt

Cho hình chữ nhật có chiều dài các cạnh là những số nguyên không âm m và n được chia thành các ô vuông có cạnh 1 đơn vị.

a) Hãy tính số ô đơn vị bị đường chéo cắt. Đường chéo cắt ô đơn vị nào nếu nó có ít nhất là 2 điểm chung với ô đó.

b) Hãy liệt kê danh sách các ô bị cắt với giả thiết rằng các ô trong hình được đánh số theo dòng $x = 1, 2, \dots, m$ tính từ dưới lên và theo cột $y = 1, 2, \dots, n$ tính từ trái qua phải.

Nếu bạn chỉ quan tâm đến toán thì chúng ta thử suy nghĩ xem có thể lập công thức tính số



Hình 4

Thí dụ,

$m = 9$, $n = 15$.

Số ô bị cắt: 21.

Các ô bị cắt: (x, y)

(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5),
(4, 6), (4, 7), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 9), (6, 10),
(7, 11), (7, 12), (8, 12), (8, 13), (8, 14),
(9, 14), (9, 15).

ô đơn vị bị đường chéo cắt hay không. Gọi $s(m, n)$ là số ô bị đường chéo cắt trong hình chữ nhật kích thước $m \times n$. Ta nhanh chóng phát hiện một số tính chất của hàm hai ngôi s .

(TC1) s là hàm đối xứng: $s(m, n) = s(n, m)$. Điều này là dễ hiểu vì hình chữ nhật đặt "đứng" hay đặt "nằm" đều không ảnh hưởng đến số ô bị cắt.

(TC2) $s(0, n) = s(m, 0) = 0$. Khi một trong hai cạnh bằng 0 thì hình chữ nhật biến thành đoạn thẳng có diện tích bằng 0 và do hình không chứa ô nào nên cũng sẽ không có ô bị cắt.

(TC3) $s(1, n) = n$; $s(m, 1) = m$. Khi có cạnh dài 1 đơn vị thì mọi ô trong hình đều bị cắt.

(TC4) $s(m, m) = m$. Với hình vuông thì mỗi ô sẽ bị cắt khi và chỉ khi ô đó nằm trên đường chéo.

(TC5) Tính tỉ lệ: $s(km, kn) = ks(m, n)$. Khi tăng đồng thời kích thước hai cạnh lên k lần thì số ô bị cắt cũng tăng thêm k lần. Bạn xem hình 4 để lập luận cho chứng minh này.

Từ TC5 ta suy ra

(TC6) Nếu n và m là hai số nguyên dương thì $s(m, n) = ds(m', n')$, trong đó $d = \text{UCLN}(m, n)$ $m = m'd$, $n = n'd$.

Thí dụ $s(20, 16) = 4s(5, 4)$.

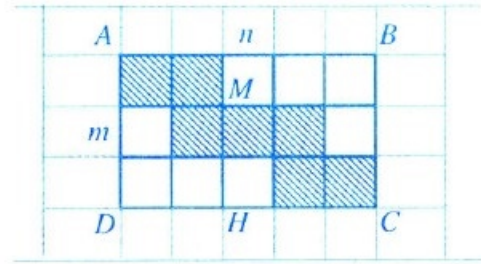
Đến đây công việc còn lại là lập công thức tính giá trị của hàm $s(m, n)$ khi m và n là nguyên tố cùng nhau, tức là hai số không có ước chung khác 1. Ta cần bổ đề sau:

Bổ đề 1

Trong hình chữ nhật có chiều dài hai cạnh là m và n với $(m, n) = 1$ thì đường chéo không đi qua đỉnh của ô đơn vị nào ngoài hai đầu mút của đường chéo đó.

Chứng minh

Giả sử đường chéo AC đi qua đỉnh M của một ô đơn vị. Xét tam giác vuông ADC được tạo bởi hai cạnh của hình chữ nhật $ABCD$ và đường chéo AC . Ta có $MH \perp DC$. Vì M có tọa độ nguyên nên H cũng có tọa độ nguyên và do đó MH và HC là các số nguyên. Theo



Hình 5

hệ thức tỉ lệ ta có $MH \cdot n = HC \cdot m$. Ta thấy tích $HC \cdot m$ chia hết cho n . Vì m và n nguyên tố cùng nhau nên HC phải chia hết cho n . Mặt khác $HC \leq n$ nên suy ra $HC = n$ hoặc $HC = 0$, tức là điểm M trùng với một trong hai đầu mút của đường chéo AC . $\square$

Mệnh đề 1

Nếu hình chữ nhật có chiều dài hai cạnh là m và n với $(m, n) = 1$ thì $s(m, n) = m + n - 1$.

Chứng minh

Theo Bổ đề 1 thì đường chéo AC , ngoài hai đầu mút A và C , không đi qua đỉnh của các ô đơn vị trong hình nên, ngoài hai đầu mút A và C , đường chéo AC sẽ cắt $n - 1$ đường dọc và $m - 1$ đường ngang, do đó trên AC sẽ có $n + m - 2$ điểm cắt khác nhau ở phía trong. Nếu tính cả hai đầu mút thì trên AC sẽ có $m + n$ điểm cắt. Hai điểm cắt liên tiếp nhau thuộc vào một ô đơn vị. Vậy số ô đơn vị bị đường chéo AC cắt sẽ là $m + n - 1$ (đpcm).

Mệnh đề 2

Nếu hình chữ nhật có chiều dài hai cạnh là m và n (với $m, n \in \mathbb{N}$) thì $s(m, n) = m + n - d$ trong đó $d = \text{UCLN}(m, n)$.

Chứng minh

Đặt $m = m'd$, $n = n'd$. Theo TC6 và Mệnh đề 2 ta có

$$\begin{aligned} s(m, n) &= ds(m', n') = d(m' + n' - 1) \\ &= dm' + dn' - d = m + n - d. \end{aligned}$$

Với các bạn làm Tin thì Thuật toán Bresenham như trình bày ở số báo tiếp theo có thể giải đồng thời các câu a và b. $\square$

(Kì sau đăng tiếp)



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 421 (7.2012)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

**Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam**

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

**Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam**

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1** **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Nguyễn Văn Chạy – Tính toán giá trị biểu thức.
- 3** **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2012 – 2013.**
- 4** **Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, năm học 2011 – 2012.**
- 6** **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Bình luận về Đề thi tuyển sinh vào Đại học khối A – A1, năm học 2012.
- 9** **Thử sức trước kì thi**
Hướng dẫn giải Đề số 8.
- 10** **Hướng dẫn giải Đề số 9.**
- 12** **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Phạm Đức Hạnh – Tạo công cụ giải toán bằng cách đặc biệt hóa một bài toán cơ bản.
- 15** **Câu lạc bộ – Math Club**
- 16** **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/421,..., T12/421, L1/421, L2/421.
- 18** **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 417.
- 28** **Tin học**
Nguyễn Xuân Huy – Tản mạn về Toán và Tin.

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH

Trĩ sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật : QUỐC HIỆP, THANH LONG

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÈ

VỚI NGÀY

BÁO CHÍ CÁCH MẠNG VIỆT NAM



■ TS. Nguyễn Quý Thao, Phó Tổng Giám đốc, Tổng biên tập NXBGD Việt Nam tặng hoa chúc mừng Tạp chí.

■ NXBGD tại Hà Nội chúc mừng Tạp chí.

■ PGS. TS Phan Doãn Thoại, Viện trưởng Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu Giáo dục và Th.S Phạm Văn Hùng, Hiệu phó Trường chuyên KHTN, ĐHKHTN Hà Nội cùng cán bộ tòa soạn.

■ TS. Nguyễn Tiến Bính, Bí thư Chi bộ Văn phòng 2, NXBGD Việt Nam, chúc mừng Tạp chí TH&TT.

■ ThS. Vũ Kim Thủy, TBT Tạp chí Toán Tuổi thơ chúc mừng Tạp chí TH&TT.

LỜI CẢM ƠN

Nhân ngày Báo chí Cách mạng Việt Nam 21.6.2012, **Toán học và Tuổi trẻ** xin trân trọng gửi lời cảm ơn đến Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, Nhà xuất bản Giáo dục tại TP. Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh, Xí nghiệp Bản đồ 1, Bộ Quốc phòng, Tạp chí Toán Tuổi thơ, Chi bộ Văn phòng 2 NXBGD Việt Nam, Th.S Phạm Văn Hùng (ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội) đã tặng Quà, Lẵng hoa và Thiệp chúc mừng đến Tạp chí.

TH&TT