



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

2 2012
SỐ 416

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 49

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: <http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre>





DÙNG BIỂU THỨC LIÊN HỢP để giải toán

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(Cao học Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Trong một số dạng phương trình (PT), bất phương trình (BPT) chứa căn thức nếu biết sử dụng biểu thức liên hợp một cách khéo léo thì ta sẽ có lời giải rất ngắn gọn và ấn tượng. Bài viết này đề cập đến vấn đề đó thông qua một số thí dụ sau

★ Thí dụ 1. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}.$$

Lời giải. ĐK $\begin{cases} x^2-3x-2 \geq 0 \\ 2x^2-1 \geq 0. \end{cases}$

PT đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x^2-1} - \sqrt{2x^2+2x+3} = \sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{x^2-3x-2}$$

$$\Leftrightarrow (2x+4) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-3x-2}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{2x^2+2x+3}} \right) = 0.$$

Vì biểu thức trong ngoặc luôn luôn dương nên $x = -2$ (thỏa mãn ĐK). $\square$

★ Thí dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2+16x+18} + \sqrt{x^2-1} = 2x+4.$$

Lời giải. ĐK $\begin{cases} 2x^2+16x+18 \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0. \end{cases}$

PT đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-1} = 2x+4 - \sqrt{2x^2+16x+18} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} \left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{2x+4 + \sqrt{2x^2+16x+18}} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-1} = 0 \\ 2\sqrt{x^2-1} = 2x+4 + \sqrt{2x^2+16x+18} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ 2\sqrt{x^2-1} = 2x+4 + \sqrt{2x^2+16x+18} \end{cases} \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) theo vế ta thu được

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x^2-1} = 4x+8 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+8 \geq 0 \\ 9(x^2-1) = (4x+8)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 7x^2+64x+73=0 \end{cases} &\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{57}-32}{7} \end{aligned}$$

(thỏa mãn ĐK). Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{3\sqrt{57}-32}{7}; -1; 1 \right\}$. $\square$

★ Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0.$$

Lời giải. ĐK $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$. Nhận thấy $x = 5$ là

một nghiệm nên ta viết PT đã cho dưới dạng

$$(\sqrt{3x+1}-4) + (1-\sqrt{6-x}) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x+1 \right) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn ĐK). $\square$

★ Thí dụ 4. Giải phương trình

$$(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+2})(\sqrt{3x^2+7x+2} + 4) = 4x-2.$$

Lời giải. ĐK: $x \geq -\frac{1}{3}$, PT đã cho tương đương với

$$(2x-1)(\sqrt{3x^2+7x+2}+4) = (4x-2)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+2})$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) \left(\sqrt{(3x+1)(x+2)} + 4 - 2(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+2}) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{x+2}-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ \sqrt{3x+1}=2 \text{ hay } \sqrt{x+2}=2 \end{cases} \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK). } \square$$

★ Thí dụ 5. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2x+1}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}} = \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}}.$$

Lời giải. ĐK $x > 0$. PT trên có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{x+2} - \sqrt[4]{2x+1}}{\sqrt[4]{(2x+1)(x+2)}} &= \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1}}{(\sqrt[4]{x+2} + \sqrt[4]{2x+1})\sqrt[4]{(2x+1)(x+2)}} &= \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}} \\ \Leftrightarrow \frac{1-x}{(\sqrt[4]{x+2} + \sqrt[4]{2x+1})\sqrt[4]{(2x+1)(x+2)}} &= \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}} \\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1})}{\sqrt[4]{x}} \\ \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1}}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{(\sqrt[4]{x+2} + \sqrt[4]{2x+1})\sqrt[4]{(2x+1)(x+2)}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn ĐK)}. \quad \square \end{aligned}$$

★ Thí dụ 6. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{2x+2} - \sqrt[3]{5x-14} = (3x-16)\sqrt{x-2}.$$

Lời giải. ĐK $x \geq 2$. PT đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{16-3x}{\sqrt[3]{(2x+2)^2} + \sqrt[3]{(2x+2)(5x-14)} + \sqrt[3]{(5x-14)^2}} &= (3x-16)\sqrt{x-2} \\ \Leftrightarrow (3x-16) \times \left(\sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+2)^2} + \sqrt[3]{(2x+2)(5x-14)} + \sqrt[3]{(5x-14)^2}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Chú ý rằng $a^2 + ab + b^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$; đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0$. Do đó biểu thức trong dấu ngoặc ở trên luôn dương. Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = \frac{16}{3}$. $\square$

★ Thí dụ 7. Giải phương trình

$$\frac{1}{x^2} + \sqrt{x+2} = \frac{1}{x} + \sqrt{2x+1}.$$

Lời giải. ĐK $x \geq -\frac{1}{2}$ và $x \neq 0$. PT đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} &= \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow \frac{1-x}{x^2} &= \frac{x-1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+2}} \\ \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{x^2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn ĐK)}. \quad \square \end{aligned}$$

★ Thí dụ 8. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{3x-5} \leq 2x-3.$$

Lời giải. ĐK $x \geq 2$. BPT đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{3-2x}{\sqrt{x-2} + \sqrt{3x-5}} &\leq 2x-3 \\ \Leftrightarrow (2x-3) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{3x-5}} \right) &\geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta được tập nghiệm của BPT đã cho là $S = [2; +\infty)$. $\square$

★ Thí dụ 9. Giải bất phương trình

$$\frac{2x^2}{(3 - \sqrt{9+2x})^2} < x+21.$$

Lời giải. ĐK $x \geq -\frac{9}{2}$ và $x \neq 0$. Chú ý rằng

$$\frac{x}{3 - \sqrt{9+2x}} = \frac{3 + \sqrt{9+2x}}{-2}.$$

Do vậy BPT trên tương đương với

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{3 + \sqrt{9+2x}}{-2} \right)^2 &< x+21 \\ \Leftrightarrow (3 + \sqrt{9+2x})^2 &< 2(x+21) \Leftrightarrow \sqrt{9+2x} < 4 \\ \Leftrightarrow 0 \leq 9+2x < 16 &\Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leq x < \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{9}{2}; 0 \right) \cup \left(0; \frac{7}{2} \right)$. $\square$

★ Thí dụ 10. Cho các số thực x, y thỏa mãn

$$(x + \sqrt{x^2 + 2011})(y + \sqrt{y^2 + 2011}) = 2011.$$

Hãy tính giá trị của $x + y$.

(Xem tiếp trang 11)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2010 - 2011

(Đề thi đã đăng trên THPT số 414, tháng 12 năm 2012)

Câu 1. a) $A = -5$.

b) $B = a - 1$.

Câu 2. a) • Nếu $ad + bc \leq 0$ thì

$$ad + bc \leq 0 \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

• Nếu $ad + bc > 0$ thì

$$ad + bc \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$\Leftrightarrow (ad + bc)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \geq 0 \Leftrightarrow (ac - bd)^2 \geq 0$$

(BĐT đúng). (đpcm).

b) Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} = \left(\frac{a^3}{b} + ab\right) + \left(\frac{b^3}{c} + bc\right) + \left(\frac{c^3}{a} + ca\right) - (ab + bc + ca)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b} \cdot ab} + 2\sqrt{\frac{b^3}{c} \cdot bc} + 2\sqrt{\frac{c^3}{a} \cdot ca} - (ab + bc + ca) \\ = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + ab + bc + ca \\ \geq ab + bc + ca. \text{ (đpcm).}$$

Câu 3. a) $\Delta = (3m - 2)^2 - 4(2m^2 - 5m - 3)$
 $= m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (m + 4)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -4$.

b) $\Delta = (m + 4)^2 \geq 0$, phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{3m - 2 + m + 4}{2} = 2m + 1;$$

$$x_2 = \frac{3m - 2 - m - 4}{2} = m - 3.$$

Phương trình có ít nhất một nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2m + 1 > 0 \\ x_2 = m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

c) Phương trình có ít nhất một nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2m + 1 < 0 \\ x_2 = m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3.$$

Câu 4. a) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} = 2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z^2} = \frac{2}{xy} - 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{2}{xy} - 4 = \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} + 4 + \frac{1}{y^2} - \frac{4}{y} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - 2\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{y} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vì $\frac{1}{z} = 2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2 - 2 - 2 = -2$ nên $z = -\frac{1}{2}$.

Vậy HPT đã cho có nghiệm $(x; y; z)$ duy nhất

là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

b) $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Vì $n; n+1; n+2$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên tồn tại một số chia hết cho 3. Do đó $n(n+1)(n+2) \vdots 3$.

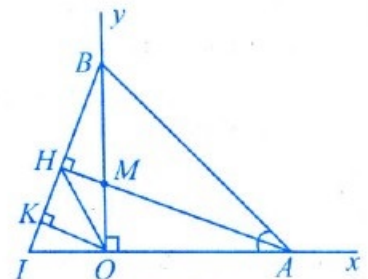
Vì $n; n+1; n+2; n+3$ là bốn số tự nhiên liên tiếp nên có hai số chẵn liên tiếp, ở đó một số chia hết cho 2 và số kia chia hết cho 4. Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 8$.

Mặt khác ƯCLN $(3, 8) = 1$ nên

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 24.$$

Câu 5. (h. 1)

a) Ta có
 $OB = OA$ (gt),
 $\widehat{BOI} = \widehat{AOM}$
 $= 90^\circ$, $\widehat{OBI} =$
 $\widehat{OAM}$ (cùng
 phụ với
 góc $\widehat{OIB}$).



Hình 1

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG

Năm học 2011 – 2012

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2 điểm) 1) Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn $a+b+c=2$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng trong ba số đó có ít nhất một số bằng 2.

2) Tính giá trị biểu thức

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2011^2} + \frac{1}{2012^2}}$$

Câu 2. (2 điểm) 1) Giải phương trình

$$x^2 + 4\sqrt{x+3} = 3x + 6.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ y^2 + yz + z^2 = 4 \\ z^2 + zx + x^2 = 7. \end{cases}$$

Câu 3. (2 điểm). 1) Giả sử a và b là các số nguyên dương sao cho $\frac{(a+b)^2 + a+b}{ab}$ là một số nguyên. Gọi d là một ước số chung bất kì của a và b . Chứng minh rằng $d \leq \sqrt{a+b}$. (Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

2) Cho x và y là các số hữu tỉ và thỏa mãn đẳng thức $(x+y)^3 = xy(3x+3y+2)$. Chứng minh rằng $\sqrt{1-xy}$ là một số hữu tỉ.

Câu 4. (3 điểm). Từ một điểm D nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến DA và DB đến đường tròn (A và B là các tiếp điểm). Tia Dx nằm giữa hai tia DA và DO ; Dx cắt đường tròn tại hai điểm C và E (E nằm giữa C và D); đoạn thẳng OD cắt đoạn thẳng AB tại M . Chứng minh rằng

1) Tứ giác $OMEK$ nội tiếp.

2) $\widehat{CMA} = \widehat{EMA}$.

3) $\left(\frac{MB}{MC}\right)^2 = \frac{DE}{DC}$.

Câu 5. (1 điểm). Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{a}{b^2 + c^2 + a} + \frac{b}{c^2 + a^2 + b} + \frac{c}{a^2 + b^2 + c}.$$

ĐINH VĂN ĐÔNG

(GV THCS Thanh An, Thanh Hà, Hải Dương)
sưu tầm và giới thiệu

Suy ra $\triangle OIB = \triangle OMA$ (c.g.c) nên $OI = OM$. Dễ thấy $\widehat{MHI} + \widehat{MOI} = 180^\circ$, nên tứ giác $OMHI$ nội tiếp.

b) Do tam giác OAB vuông cân tại O nên $\widehat{OAB} = 45^\circ$.

Lại có $\widehat{AOB} = \widehat{AOB} = 90^\circ$ nên tứ giác $OABH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OHK} = \widehat{OAB} = 45^\circ$. Suy ra tam giác KOH vuông cân tại K nên có $OK = KH$.

Lại vì $\widehat{OKB} = 90^\circ$; hai điểm O, B cố định nên K di động trên đường tròn đường kính OB cố định.

Câu 6. (h.2) Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC có chứa điểm B vẽ tam giác đều ACD .

Tam giác ABC cân tại B có $\widehat{ABC} = 80^\circ$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 50^\circ$; $\widehat{BAC} < \widehat{DAC}$ (vì $50^\circ < 60^\circ$) nên tia AB nằm giữa hai tia AC và AD . Do đó $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} - \widehat{BAC} = 10^\circ$.

Xét hai tam giác DAB, DCB có $DA = DC, DB$ (cạnh chung), $BA = BC$. Do đó

$\triangle DAB = \triangle DCB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CDB}$

$= \frac{1}{2} \widehat{ADC} = 30^\circ$. Suy ra

$\widehat{ADB} = \widehat{ICA}$, mà $AD = AC$,

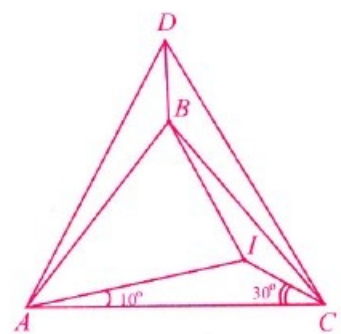
$\widehat{DAB} = \widehat{IAC} (= 10^\circ)$.

Do đó $\triangle DAB = \triangle CAI$

(g.g.g) $\Rightarrow AB = AI$ hay tam giác ABI cân tại A có $\widehat{BAI} = \widehat{BAC} - \widehat{IAC} = 40^\circ$. Nên $\widehat{AIB} = (180^\circ - \widehat{BAI}) : 2 = 70^\circ$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh) sưu tầm và giới thiệu



Hình 2



Trong SGK Hình học Nâng cao 11 có bài tập:
Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Khi đó hình chiếu H của O trên mặt phẳng (ABC) là trực tâm tam giác ABC và

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \text{ (Bài 17 trang 103).}$$

Trong bài viết này, chúng tôi xin phát biểu bài tập đó theo một cách khác để tạo ra các bài toán cơ bản mà vận dụng chúng có thể giải quyết được nhiều bài toán tính khoảng cách trong không gian. Việc chứng minh các bài toán này đơn giản xin dành cho bạn đọc.

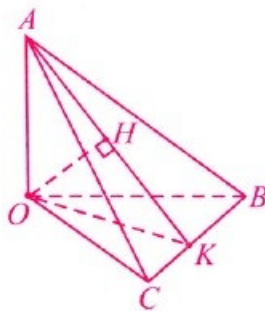
TỪ MỘT BÀI TOÁN TÍNH KHOẢNG CÁCH TRONG SÁCH GIÁO KHOA HÌNH HỌC 11

CAO THỊ THANH LÊ

(GV THPT Ba Đình, Nga Sơn, Thanh Hóa)

I. CÁC BÀI TOÁN

★ **Bài toán 1.** Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Đặt $OA=a, OB=b, OC=c$. Khi đó khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (ABC) là khoảng cách từ O đến AK (với K là hình chiếu



Hình 1

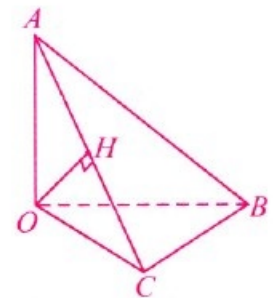
của O trên BC) và $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ (h. 1).

Sau đây chúng tôi đưa ra bài toán khái quát của Bài toán 1 bằng cách thay giả thiết ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc bằng giả thiết hai trong ba cặp cạnh đó vuông góc.

★ **Bài toán 2.** Cho tứ diện $OABC$ có OA vuông góc với mặt phẳng (OBC) . Khi đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là khoảng cách từ O đến AK (với K là hình chiếu của O trên BC) (h.1).

Bằng cách đặc biệt hoá Bài toán 2 ta được nhiều bài toán. Bây giờ xét một trường hợp đặc biệt: tam giác OBC vuông ở C .

★ **Bài toán 3.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp (OBC), OC \perp BC$. Khi đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là khoảng cách từ O đến AC . (h. 2).



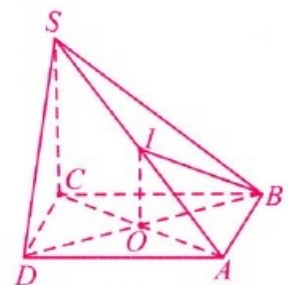
Hình 2

II. CÁC THÍ DỤ

★ **Thí dụ 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SC \perp (ABCD), SC = a\sqrt{2}$. Gọi $O = AC \cap BD$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) .

• **Cách 1.** (h. 3)

Phân tích. Thay đổi tên gọi mặt phẳng đáy để tạo ra tứ diện vuông đỉnh O . Bằng cách lấy I là trung điểm SA thì OI, OA, OB đôi một vuông góc. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (IAB) và được tính theo Bài toán 1.



Hình 3

Lời giải. Gọi I là trung điểm của SA thì OI là đường trung bình của tam giác SCA nên $OI \parallel SC$

và $OI = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Từ đó $OI \perp (ABCD)$.

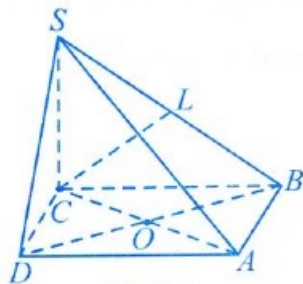
Gọi d là khoảng cách từ O đến (SAB) thì d cũng là khoảng cách từ O đến (IAB) . Vì tứ diện $OIAB$ có OA, OB, OI đôi một vuông góc nên theo bài toán 1, ta có

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{6}{a^2}.$$

$$\text{Vậy } d = \frac{a\sqrt{6}}{6}. \square$$

Cách 2. (h. 4)

Phân tích. Quy khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) về khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) , khoảng cách này được tính theo Bài toán 3.



Hình 4

$$\text{Lời giải. Ta có } \frac{d(O; (SAB))}{d(C; (SAB))} = \frac{OA}{CA} = \frac{1}{2}.$$

Vì $AB \perp SC$, $AB \perp CB$ nên $AB \perp (SBC)$. Do đó $(SAB) \perp (SBC)$.

Hạ $CL \perp SB$ ($L \in SB$) thì $CL \perp (SAB)$, suy ra $d(C; (SAB)) = CL$. Ta có

$$\frac{1}{CL^2} = \frac{1}{CS^2} + \frac{1}{CB^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}.$$

$$\text{Suy ra } CL = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(O; (SAB)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}. \square$$

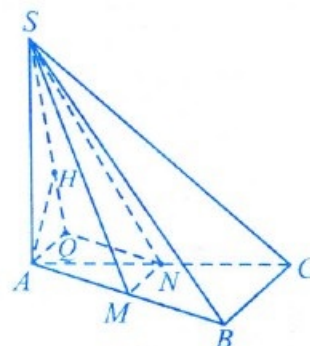
★ **Thí dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .

(Trích Câu IV đề thi Đại học khối A năm 2011)

Phân tích. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN ta sẽ quy về tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song bằng cách trong $mp(ABC)$ kẻ đường thẳng Δ đi qua N và song song với AB .

Khi đó $d(AB; SN) = d(AB; mp(S, \Delta)) = d(A; mp(S, \Delta))$. Vì $SA \perp (ABC)$ (hay $mp(A, \Delta)$) nên theo cách xác định của Bài toán 2, hạ $AQ \perp \Delta$ ($Q \in \Delta$), $AH \perp SQ$ ($H \in SQ$) thì $d(AB; SN) = d(A; mp(S, \Delta)) = AH$.

Lời giải. (h. 5). Từ giả thiết ta có $SA \perp mp(ABC)$. Mà $AB \perp BC$ nên $SB \perp BC$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.



Hình 5

Suy ra $MN \parallel BC$, nên N là trung điểm của AC .

Gọi Δ là đường thẳng đi qua N và song song với AB . Hạ $AQ \perp \Delta$, ($Q \in \Delta$). Ta có $AB \parallel (SQN) \Rightarrow d(AB; SN) = d(AB; (SQN)) = d(A; (SQN))$.

Hạ $AH \perp SQ$ ($H \in SQ$). Vì $QN \perp AQ$, $QN \perp SA$ nên $QN \perp (SAQ) \Rightarrow (SQN) \perp (SAQ) \Rightarrow AH \perp (SQN)$.

Do đó $d(AB; SN) = AH$.

Vì $AQ = MN = \frac{1}{2}BC = a$ nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AQ^2} = \frac{13}{12a^2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB; SN) = AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}. \square$$

★ **Thí dụ 3.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

(Trích Câu V.b.2 đề thi Đại học khối D năm 2008)

Lời giải. Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông ở B .

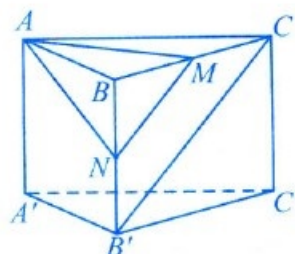
• **Cách 1.** (h. 6)

Gọi N là trung điểm của BB' thì MN là đường trung bình của tam giác BCB' . Từ đó $MN \parallel CB'$

$$\Rightarrow CB' \parallel (AMN)$$

$$\Rightarrow d(AM; B'C)$$

$$= d(B'C; (AMN)) = d(B'; (AMN)).$$



Hình 6

Mặt khác $\frac{d(B';(AMN))}{d(B;(AMN))} = \frac{B'N}{BN} = 1$, nên
 $d(AM;B'C) = d(B;(AMN))$.

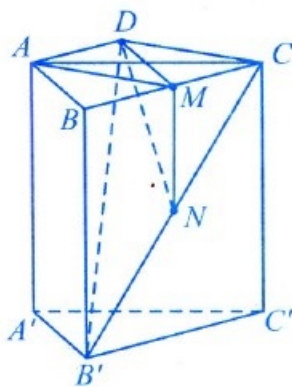
Vì tứ diện $BAMN$ có BA, BM, BN đôi một vuông góc nên theo Bài toán 1 ta có

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Cách 2. (h. 7). Gọi N là trung điểm của $B'C$ thì $MN \parallel BB'$
 $\Rightarrow MN \perp (ABC)$.

Vẽ hình bình hành $AMCD$ ta có $AM \parallel CD$
 $\Rightarrow AM \parallel (CDB')$.

Suy ra $d(AM;B'C)$
 $= d(AM;(CDB'))$
 $= d(M;(CDB'))$
 $= d(M;(CDN))$.



Hình 7

Vì $DM \parallel AB$ và $AB \perp BC$ nên $DM \perp BC$.
 Tứ diện $MDCN$ có MD, MC, MN đôi một vuông góc. Theo Bài toán 1 ta có

$$\frac{1}{(d(M;(CND)))^2} = \frac{1}{MD^2} + \frac{1}{MC^2} + \frac{1}{MN^2} = \frac{7}{a^2}.$$

Suy ra $d = \frac{a\sqrt{7}}{7}$. $\square$

★Thí dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông ở A và B , $AB=BC=a$, $AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Chứng minh rằng tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) .

(Câu V.b.2 đề thi Đại học khối D năm 2007)

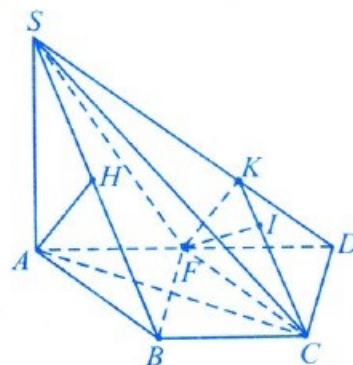
Lời giải. Trong tam giác SAB vuông tại A , đường cao AH có $SH.SB = SA^2$

$$\Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{d(H;(SCD))}{d(B;(SCD))} = \frac{HS}{BS} = \frac{2}{3}.$$

Cách 1. (h. 8).

Gọi F là trung điểm của AD . Vì $AD=2BC$ nên $AF=DF=BC$. Do đó $AFCB, BFDC$ là các hình bình hành, suy ra $CF=AB=a, BF \parallel CD$,



Hình 8

$CF \parallel AB \Rightarrow CF \perp AD$.

Vì $CF=AF=DF=a$ nên tam giác ACD vuông tại $C \Rightarrow AC \perp CD$. Mặt khác AC là hình chiếu của SC trên mp($ABCD$) nên $CD \perp SC$ hay tam giác SCD vuông tại C .

Ta có $BF \parallel (SCD) \Rightarrow d(B;(SCD)) = d(F;(SCD))$
 $\Rightarrow d(H;(SCD)) = \frac{2}{3} d(F;(SCD))$.

Lại có $CF \perp AD$ nên $CF \perp (FSD)$. Do đó theo Bài toán 2, hạ $FK \perp SD; FI \perp CK$ thì FI là khoảng cách từ F đến (SCD) và

$$\frac{1}{FI^2} = \frac{1}{FC^2} + \frac{1}{FK^2}.$$

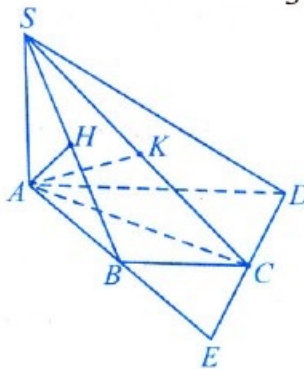
Ta có $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{6}$.

Từ $\Delta SAD \sim \Delta FKD$ suy ra $\frac{FK}{SA} = \frac{FD}{SD}$

$$\Rightarrow FK = \frac{SA.FD}{SD} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{FI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow FI = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(H;(SCD)) = \frac{2}{3} FI = \frac{a}{3}. \quad \square$$



Hình 9

Cách 2. (h. 9)

Gọi $E=AB \cap CD$.

Vì $BC \parallel AD$ nên

$$\frac{EB}{EA} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$EB=AB=a=BC.$$

Do đó tam giác ACE vuông tại C hay $AC \perp CE$.

(Xem tiếp trang 31)

ĐIỂM GIAO THỪA

Điểm giao thừa tôi là một lát cắt
Trong không gian trù mật của thời gian.
Là điểm đầu tôi cũng là điểm cuối
Hai vec-tơ nối tiếp của thời gian.
Bên trái tôi một ep-xi-lon
Là năm cũ sắp tàn trong tiếc nhớ.
Bên phải tôi một ep-xi-lon
Là năm mới với bao niềm mơ ước.
Tôi đứng giữa nhưng không là trung điểm,
Vì trước tôi là thời gian vô tận.
Và sau tôi là vô tận thời gian.
Hàm thời gian tại thời điểm giao thừa
Có bước nhảy giữa hai bờ mới cũ.

PHAN THANH QUANG
(TP. Hồ Chí Minh)

BẠN RỒNG

Ở đâu?

Lớp học mười hai con giáp,
Đầu năm tổ chức liên hoan,
Bạn Chuột luôn là lớp trưởng,
Phân công mọi việc rõ ràng...

Năm nay bạn Rồng trực nhật,
Chờ mãi chẳng thấy bạn đũa,
Bạn Chó sốt ruột gâu gâu:
“Tìm được bạn Rồng thật khó”...

Năm qua bạn Mèo trực nhật,
Hoàn thành nhiệm vụ được giao,
Lớp học gọn gàng sạch đẹp,
Học sinh tiến bộ rất nhiều...

Bạn Rồng đi mây về gió,
Chỉ làm việc lớn trong mơ,
Những buổi đầu năm họp lớp,
Bạn không có mặt bao giờ...

PHAN CUNG ĐỨC
(Hà Nội)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1} (C)$.

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
- 2) Tìm những điểm trên trục tung để từ đó kẻ được đúng một tiếp tuyến với (C) .

Câu II. (2 điểm)

- 1) Giải phương trình

$$\frac{1}{2 \cot^2 x + 1} + \frac{1}{2 \tan^2 x + 1} = \frac{15 \cos 4x}{8 + \sin^2 2x}.$$

- 2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \\ 3xy = x + y + 1. \end{cases}$$

Câu III. (1 điểm) Cho (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = \frac{2}{x}$, $y = 4$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi (D) khi nó quay quanh trục hoành.

Câu IV. (1 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi C' là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng (α) đi qua AC' và song song với BD cắt các cạnh SB , SD lần lượt tại B' , D' . Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

Câu V. (1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Phương trình đường thẳng BC là $4x - 3y - 4 = 0$. Các đỉnh A, B thuộc trục hoành và diện tích tam giác ABC bằng 6. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

2) Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho điểm $A(-1; 0; 2)$, mặt phẳng

$(P): 2x - y - z + 3 = 0$ và đường thẳng

$$(d): \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-6}{1}.$$

Viết phương trình đường thẳng (d') đi qua điểm A , cắt (d) tại B và cắt (P) tại C sao cho $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Câu VIIa. (1 điểm)

Tìm số phức z thỏa mãn

$$(z+1)^4 + 2(z+1)^2 + (z+4)^2 + 1 = 0.$$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIIb. (2 điểm)

1) Cho hai đường thẳng

$$d: (m+1)x - my + 2m + 1 = 0,$$

$$d': mx + (m+1)y - 5m - 2 = 0.$$

Chứng minh rằng tập hợp các giao điểm của d và d' là một đường tròn. Tìm phương trình của đường tròn đó.

2) Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 2 = 0$ và điểm $A(0; 0; 1)$. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại A và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) .

Câu VIIb. (1 điểm)

Cho số phức $z = \frac{7 - i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}$.

Tính $S = 1 + z + z^2 + \dots + z^{2009}$.

HUỖNH TẤN CHÂU

(GV THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Giả sử $M\left(x_M; \frac{2x_M-3}{x_M-2}\right)$. PTTT của đồ thị (C)

tại M có dạng $y - \frac{2x_M-3}{x_M-2} = -\frac{1}{(x_M-2)^2}(x-x_M)$.

Từ giả thiết bài toán, ta thấy $A\left(2; 2 + \frac{2}{x_M-2}\right)$;
 $B(2x_M-2; 2); I(2; 2)$.

Ta có $\cos \widehat{ABI} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ nên $\tan \widehat{ABI} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$IB^2 = 16IA^2$. Từ đó tìm được $x_M = 0$ hoặc $x_M = 4$. Có hai tiếp tuyến thỏa mãn đề bài là

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}.$$

Câu II. 1) ĐK $x > 0$ và $x + 2\ln x > 0$.

Đặt $g(x) = x + 2\ln x$ thì $g'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0, \forall x > 0$.

Suy ra $g(x)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Lưu ý rằng do $x > 0$ nên $x + 2\ln x = 0$ khi $\ln x < 0$ hay $0 < x < 1$. Do đó PT $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \alpha$, với $0 < \alpha < 1$.

Đặt $f(x) = \sqrt[3]{3 + 2\ln x}$, với $x \in (\alpha; +\infty)$ thì

$$f(f(x)) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3 + 2\ln x} + \frac{2}{3}\ln(x + 2\ln x)}.$$

PT đã cho trở thành $f(f(x)) = x$. Chứng minh được $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $f(x) = x$.

Khảo sát hàm $u(x) = x^3 - x - 2\ln x$ trên $(\alpha; +\infty)$ ta thấy PT $x^3 - x - 2\ln x = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

2) Đặt $v = \sqrt{xy}, u = x + y (u > 0)$. Hệ đã cho

$$\text{trở thành } \begin{cases} (3u^2 + 4v^2)v = 14 \\ u(u^2 + 12v^2) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = 3. \end{cases}$$

Đáp số. Hệ đã cho có các nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2; \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right); \left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2; \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right).$$

Câu III. Ta có

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{2(1 - \cos^2 x)(1 - \cos x)} = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{dt}{2(1 - t^2)(1 - t)}$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{(1-t)^2} \right) dt = -\frac{1}{8} \ln 3 - \frac{1}{4}.$$

Câu IV. Do ABCD là tứ diện đều nên

$AB = CD = OO' = \frac{2R}{3}$. Lại vì $AB \parallel CD$ mà

$AB \perp \text{mp}((O; R))$ suy ra $CD \parallel \text{mp}((O; R))$. Kẻ các đường sinh C_1C_2 qua C, D_1D_2 qua D ta

có $C_2D_2 \parallel CD$ và $C_2D_2 = CD = \frac{2R}{3}$. Khi đó

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{AC_2D_2} \cdot AB. \text{Đáp số. } V_{ABCD} = \frac{2R^3}{81} (3 + 2\sqrt{2}).$$

Câu V. Do $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ nên $\frac{1}{4-ab} \leq \frac{2}{8-(a^2+b^2)}$.

$$\text{Vậy } F \leq \frac{2}{8-(a^2+b^2)} + \frac{2}{8-(b^2+c^2)} + \frac{2}{8-(c^2+a^2)}.$$

Đặt $x = (b^2 + c^2)^2; y = (c^2 + a^2)^2; z = (a^2 + b^2)^2$ thì $x > 0, y > 0$ và $z > 0$ và $x + y + z \leq 12$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{8-\sqrt{t}}$ trên $(0; 12)$, ta

thấy PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại $t = 4$ là $y = \frac{1}{144}t + \frac{5}{36}$. Hơn nữa

$$\frac{1}{8-\sqrt{t}} - \left(\frac{1}{144}t + \frac{5}{36} \right) = -\frac{1}{144}(\sqrt{t}-2)^2(4-\sqrt{t}) \leq 0,$$

$\forall t \in (0; 12)$. Từ đó $\frac{1}{2}F \leq$

$$f(x) + f(y) + f(z) \leq \frac{1}{144}(x + y + z) + \frac{15}{36} \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy $\max F = 1$, đạt được khi $a = b = c = 1$.

Câu VIa. 1) Đường thẳng cần tìm đi qua

$A(3; 0)$ và nhận $\overline{IA}(4; -2)$ làm VTPT. PT đường thẳng cần lập là $2x - y - 6 = 0$.

2) Hai mặt phẳng thỏa mãn đề bài có PT

$$(P_1): \frac{18 + \sqrt{114}}{21}x + y + \frac{15 + 2\sqrt{114}}{21}z - \frac{3 - \sqrt{114}}{21} = 0;$$

$$(P_2): \frac{18 - \sqrt{114}}{21}x + y + \frac{15 - 2\sqrt{114}}{21}z - \frac{3 + \sqrt{114}}{21} = 0.$$

Câu VIIa. Gọi A là tập các số có 4 chữ số $\overline{abcd}$ ($a \geq 1$) sao cho $(a+b+c+d) : 4$.

Gọi B tập các số $\overline{bcd}$ ($0 \leq b, c, d \leq 9$) mà $b+c+d = 4k+r$ ($(0 \leq r \leq 2)$).

Gọi C là tập các số $\overline{bcd}$ ($0 \leq b, c, d \leq 9$) mà $b+c+d = 4k+3$.

Khi đó $|A| = 2 \times |B| + 3 \times |C| = 2(|B| + |C|) + |C| = 2 \cdot 10^3 + |C|$.

Gọi D là tập các số $\overline{cd}$ ($0 \leq c, d \leq 9$) mà $c+d = 4m+s$ ($0 \leq s \leq 1$) và E là tập các số $\overline{cd}$ ($0 \leq c, d \leq 9$) mà $c+d = 4m+s$ ($2 \leq s \leq 3$).

Khi đó $|C| = 2 \times |D| + 3 \times |E| = 2(|D| + |E|) + |E| = 2 \cdot 10^2 + |E|$.

Xét tập E , đếm trực tiếp theo tổng $c+d$ được $|E| = 24 + 15 = 49$. Do đó

$$|A| = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 49 = 2249.$$

Câu VIb. 1) Có hai elip thỏa mãn đề bài là

$$(E_1): \frac{x^3}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \quad (E_2): \frac{x^2}{52} + \frac{4y^2}{39} = 1.$$

2) Có hai điểm M thỏa mãn đề ra là $M_1(1; 1; 2)$

$$\text{và } M_2\left(\frac{23}{3}; \frac{23}{3}; -\frac{14}{3}\right).$$

Câu VIIb. • Giả sử lập được số $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ thỏa mãn đề ra. Do $a_1 \neq 0$ nên a_1 có 4 cách chọn. Với mỗi cách chọn a_1 , có 4 cách chọn a_2 ; với mỗi cách chọn a_1 , a_2 có 3 cách chọn a_3 ; với mỗi cách chọn a_1, a_2, a_3 có 2 cách chọn a_4 ; với mỗi cách chọn a_1, a_2, a_3, a_4 có 1 cách chọn a_5 . Vậy số các số cần lập là $S = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$.

• Trong tập X , mỗi chữ số 0, 1, 2, 3, 4 xuất

hiện $\frac{P_5}{5} = \frac{5!}{5} = 24$ lần, nên

$$S(X) = 24(0+1+2+3+4)(1+10+10^2+10^3+10^4) = 2666640.$$

Trong tập Z , mỗi chữ số 1, 2, 3, 4 xuất hiện

$$\frac{P_4}{4} = \frac{4!}{4} = 6 \text{ lần, nên}$$

$$S(Z) = 6(1+2+3+4)(1+10+10^2+10^3) = 66660.$$

Tổng các số cần tìm là $S(X) - S(Z) = 2599980$.

NGUYỄN VĂN THÔNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

DÙNG BIỂU THỨC... (Tiếp trang 2)

Lời giải. Từ đẳng thức đã cho ta có

$$x + \sqrt{x^2 + 2011} = \sqrt{y^2 + 2011} - y$$

$$\text{và } y + \sqrt{y^2 + 2011} = \sqrt{x^2 + 2011} - x.$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được

$$x + y = -(x + y) \text{ hay } x + y = 0. \quad \square$$

★ **Thí dụ 11.** Không dùng máy tính, hãy so sánh hai số $A = \sqrt{2010} + \sqrt{2012}$ và $B = 2\sqrt{2011}$.

Lời giải. Ta xét hiệu

$$A - B = (\sqrt{2012} - \sqrt{2011}) + (\sqrt{2010} - \sqrt{2011})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2012} + \sqrt{2011}} - \frac{1}{\sqrt{2010} + \sqrt{2011}} < 0.$$

Từ đó suy ra $A < B$. $\square$

Sau cùng là một số bài tập dành cho các bạn tự luyện.

BÀI TẬP DÈ NGHỊ

Bài 1. Giải các phương trình và bất phương trình sau

$$1) 2\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1} + x\sqrt{x+2}.$$

$$2) \sqrt{2x+5} - \sqrt{3-x} = x^2 - 5x + 8.$$

$$3) 2 + \sqrt{3-8x} = 6x + \sqrt{4x-1}.$$

$$4) \sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}.$$

$$5) 1 + \sqrt{x^2+4x} = \sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{2x^2+x+2}.$$

$$6) \sqrt{x^2+15} = 3x-2 + \sqrt{x^2+8}.$$

$$7) (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2+7x+10}) = 3.$$

$$8) \sqrt{3x^2-7x+3} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3x^2-5x-1} - \sqrt{x^2-3x+4}.$$

$$9) \sqrt{2x^2+x-1} + \sqrt{3x^2+x-1} = \sqrt{x^2+4x-3} + \sqrt{2x^2+4x-3}.$$

$$10) \frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4.$$

$$11) \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \geq x.$$

$$12) \frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{x} < 3.$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau

$$1) A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

$$2) B = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}.$$

Bài 3. Cho $a > b > c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{b}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} < \frac{c}{\sqrt{a+c} - \sqrt{a-c}}.$$



Định lí nhỏ FERMAT

(Tiếp theo kì trước)

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN TP. Hồ Chí Minh)

ĐỊNH LÍ ERDOS-GINZBURG-ZIEVE

Định lí. Từ $2n - 1$ số nguyên bất kì luôn tìm được n số có tổng chia hết cho n .

Chứng minh. Với n nhỏ, định lí có thể chứng minh khá dễ dàng bằng cách xét các trường hợp. Ví dụ, với $n = 3$, ta chia 5 số nguyên vào 3 nhóm, nhóm chia 3 dư 0, nhóm chia 3 dư 1 và nhóm chia 3 dư 2. Nếu mỗi nhóm đều chứa ít nhất 1 số thì chọn từ 3 nhóm, mỗi nhóm một số, ta được 3 số cần tìm. Nếu có 1 nhóm nào đó rỗng thì sẽ có ít nhất 1 nhóm có 3 số và đó chính là 3 số cần tìm.

Với $n = 5$, có thể lặp lại cách chứng minh tương tự, tuy nhiên số trường hợp cần xét sẽ nhiều hơn.

Nếu n là hợp số, chẳng hạn $n = 9$, có thể sử dụng cách sau: Áp dụng kết quả với $n = 3$, từ 17 số $\{a_1, a_2, \dots, a_{17}\}$ dĩ nhiên có thể chọn ra 3 số có tổng chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là a_1, a_2, a_3 . Tiếp theo, từ 13 số $\{a_4, a_5, \dots, a_{17}\}$, có thể chọn ra 3 số có tổng chia hết cho 3, giả sử đó là a_4, a_5, a_6 . Tiếp tục như vậy, ta được các bộ ba số có tổng chia hết cho 3, mà bằng cách đánh số lại nếu cần, giả sử đó là $(a_7, a_8, a_9), (a_{10}, a_{11}, a_{12}), (a_{13}, a_{14}, a_{15})$. Xét các số

$$s_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \quad s_2 = \frac{a_4 + a_5 + a_6}{3}, \quad s_3 = \frac{a_7 + a_8 + a_9}{3},$$

$$s_4 = \frac{a_{10} + a_{11} + a_{12}}{3}, \quad s_5 = \frac{a_{13} + a_{14} + a_{15}}{3}.$$

Theo cách xây dựng, 5 số $s_1, s_2, \dots, s_5$ là các số nguyên. Áp dụng kết quả với $n = 3$, suy ra

tồn tại 3 số trong 5 số này có tổng chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là s_1, s_2, s_3 . Khi đó $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 3(s_1 + s_2 + s_3)$ chia hết cho 9 (đpcm).

Bằng cách làm tương tự, ta thấy rằng nếu định lí đã đúng với $n = p$ và $n = q$ thì nó cũng đúng với $n = pq$. Như vậy, ta chỉ cần chứng minh bài toán đúng với $n = p$ là số nguyên tố. Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại $2p - 1$ số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_{2p-1}$ sao cho mọi tổng con gồm p phần tử của nó đều không chia hết cho p . Khi đó, theo định lí nhỏ Fermat ta có

$$(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p})^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Từ đó ta có

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq 2p-1} (a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p})^{p-1} \equiv C_{2p-1}^p \pmod{p}$$

(do có C_{2p-1}^p tổng ở vế trái).

Ta có C_{2p-1}^p không chia hết cho p . Vì thế sẽ suy ra điều mâu thuẫn nếu chứng minh được rằng vế trái chia hết cho p . Ta chứng minh điều này bằng cách chứng tỏ rằng, trong khai triển tổng vế trái, hệ số của $a_{i_1}^{s_1} \dots a_{i_k}^{s_k}$ với

$$s_1 + \dots + s_k = p - 1 \text{ chia hết cho } p.$$

Để có những số hạng như vậy, cần chọn thêm $p - k$ phần tử $i_{k+1}, \dots, i_p$ để bổ sung thành p số và xét $(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p})^{p-1}$. Khai triển biểu thức

$$\text{này, ta được hệ số của } a_{i_1}^{s_1} \dots a_{i_k}^{s_k} \text{ là } \frac{(p-1)!}{s_1! \dots s_k!}.$$

Có C_{2p-1-k}^{p-k} cách bổ sung, do đó hệ số của $a_{i_1}^{s_1} \dots a_{i_k}^{s_k}$ trong khai triển ở vế trái là

$$C_{2p-1-k}^{p-k} \frac{(p-1)!}{s_1! \dots s_k!}.$$

Chú ý rằng $1 \leq k \leq p - 1$ nên

$$C_{2p-1-k}^{p-k} = \frac{(2p-1-k)!}{(p-k)!(p-1)!} \text{ chia hết cho } p.$$

Từ đó, tất cả các số hạng $a_{i_1}^{s_1} \dots a_{i_k}^{s_k}$ trong khai triển ở vế trái đều có hệ số chia hết cho p , tức là vế trái chia hết cho p . Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử là sai. Định lí được chứng minh cho $n = p$ và như vậy cho n bất kì.

Bài tập

10. Chứng minh rằng từ 5 số nguyên bất kì luôn tìm được một số hoặc một số số có tổng chia hết cho 5.

11. Chứng minh rằng từ 9 số nguyên bất kì luôn tìm được 5 số có tổng chia hết cho 5.

12*. Cho p là số nguyên tố và a, b, c là các số nguyên bất kì. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên x, y, z không đồng thời chia hết cho p sao cho $ax^2 + by^2 + cz^2$ chia hết cho p .

Hướng dẫn. Nếu $ax^2 + by^2 + cz^2$ không chia hết cho p thì $(ax^2 + by^2 + cz^2)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

ĐỊNH LÝ LUCAS

Ta nhận thấy rằng tất cả các số trong dòng thứ 3 và dòng thứ 7 của tam giác Pascal đều lẻ.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Nhận xét này có thể phát biểu thành một kết quả tổng quát: Các hệ số nhị thức C_n^k lẻ với mọi $k = 0, 1, \dots, n$, khi và chỉ khi n có dạng $n = 2^m - 1$. Và kết quả này lại chỉ là một trường hợp riêng của định lý Lucas sau

Định lý Lucas. Cho m, n là hai số tự nhiên và p là một số nguyên tố. Giả sử

$$m = m_k \cdot p^k + m_{k-1} \cdot p^{k-1} + \dots + m_2 \cdot p^2 + m_1 \cdot p + m_0;$$

$$n = n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-1} + \dots + n_2 \cdot p^2 + n_1 \cdot p + n_0$$

$$\text{Khi đó } C_n^m \equiv \prod_{i=0}^k C_{n_i}^{m_i} \pmod{p}.$$

(quy ước rằng $C_b^a = 0$ với $a > b$).

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $m > n$ (nếu $m = n$ thì bổ đề hiển nhiên đúng).

Ta thấy $(p, i) = 1, i = \overline{1, p-1}$ nên

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}; \text{ tức là}$$

$$C_p^k \equiv 0 \pmod{p}, k = \overline{1, p-1}.$$

Ta có

$$(x+1)^p = x^p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i x^{p-i} \equiv x^p + 1 \pmod{p} \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh nhận xét

$$(x+1)^{p^j} \equiv x^{p^j} + 1 \pmod{p}, \forall j \in \mathbb{N}^*$$

bằng quy nạp. Thật vậy

• Với $j = 1$, nhận xét đúng theo (*).

• Giả sử nhận xét này đúng với $j = h \geq 1$. Ta chứng minh nó cũng đúng với $j = h+1$.

$$\text{Ta có } (x+1)^{p^h} \equiv x^{p^h} + 1 \pmod{p}.$$

$$\text{Suy ra } ((x+1)^{p^h})^p \equiv (x^{p^h})^p + 1 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow (x+1)^{p^{h+1}} \equiv x^{p^{h+1}} + 1 \pmod{p}.$$

Do đó nhận xét đúng với $j = h+1$. Theo nguyên lý quy nạp, nhận xét được chứng minh.

Ta xét khai triển

$$(1+x)^m = (1+x)^{\sum_{i=0}^k m_i \cdot p^i} \equiv \prod_{i=0}^k (1+x^{p^i})^{m_i} \pmod{p}.$$

$$\text{nên } (1+x)^m \equiv \prod_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i} C_{m_i}^j x^{j \cdot p^i} \pmod{p}.$$

Hệ số của x^n ở $(1+x)^m$ là C_m^n ; do biểu diễn $n = n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-1} + \dots + n_2 \cdot p^2 + n_1 \cdot p + n_0$ là

duy nhất nên hệ số của x^n ở $\prod_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i} C_{m_i}^j x^{j \cdot p^i}$ là

$\prod_{i=0}^k C_{m_i}^{n_i}$. Từ đó $C_m^n \equiv \prod_{i=0}^k C_{m_i}^{n_i} \pmod{p}$. Định lý được chứng minh.

Ta có thể thấy rất rõ ý tưởng chứng minh định lý Lucas cũng xuất phát từ tính chất C_p^k chia hết cho p nếu p là số nguyên tố và $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

❖ Bài tập

13. Cho số nguyên dương n . Chứng minh rằng C_n^k lẻ với mọi $k = 0, 1, \dots, n$ khi và chỉ khi n có dạng $n = 2^m - 1$.

14. (Vietnam TST 2010). Gọi S_n là tổng bình phương các hệ số trong khai triển của nhị thức $(1+x)^n$; trong đó n là số nguyên dương, x là số thực bất kì. Chứng minh rằng $S_{2n} + 1$ không chia hết cho 3 với mọi n .

MỘT SỐ ỨNG DỤNG KHÁC TRONG TOÁN SỐ CẤP

Trong mục này, chúng tôi đưa ra một số định lý, bổ đề, bài toán có liên quan đến định lý nhỏ Fermat.

Bổ đề 1. Số nguyên dạng $x^2 + 1$ không có ước nguyên tố dạng $4k+3$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $p = 4k + 3$ sao cho $x^2 + 1$ chia hết cho p , tức là $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Nâng hai vế lên lũy thừa $2k + 1$, ta có $x^{4k+2} \equiv -1 \pmod{p}$.

Theo định lý nhỏ Fermat thì $x^{4k+2} \equiv 1 \pmod{p}$.

Suy ra $2 \equiv 0 \pmod{p}$, mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, và ta có điều phải chứng minh.

Chú ý số nguyên dạng $4k + 3$ có ít nhất một ước số dạng $4k + 3$, từ đó ta có

Hệ quả. Số nguyên dạng $x^2 + 1$ không có ước nguyên dương dạng $4k+3$.

Bổ đề 1 và hệ quả trên có những ứng dụng hết sức hiệu quả trong việc chứng minh sự vô nghiệm của một số phương trình Diophant.

❖ Bài tập

15. (Euler) Chứng minh rằng phương trình

$4xy - x - y = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

16. (Lebesgue) Chứng minh rằng phương trình $x^2 - y^3 = 7$ không có nghiệm nguyên dương.

17. Chứng minh rằng có vô số số nguyên tố dạng $4k + 1$.

Bổ đề 2. Chứng minh rằng số nguyên dạng $x^2 + 3$ không có ước số nguyên tố dạng $6k+5$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, tồn tại số nguyên x và $p = 6k+5$ sao cho $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$.

Vì nếu x thỏa mãn đồng dư thức trên thì $x + p$ cũng thỏa mãn đồng dư thức, nên có thể giả sử x lẻ. Đặt $x = 2y + 1$ ta thì

$$\begin{aligned} 4y^2 + 4y + 4 &\equiv 0 \pmod{p} \\ \Rightarrow y^2 + y + 1 &\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow y^3 \equiv 1 \pmod{p} \\ \Rightarrow y^{6k+3} &\equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Từ định lý nhỏ Fermat ta có $y^{6k+4} \equiv 1 \pmod{p}$ nên $y \equiv 1 \pmod{p}$, suy ra $3 \equiv 0 \pmod{p}$, mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh.

❖ Bài tập

18. Chứng minh có vô số số nguyên tố dạng $6k+1$.

❖ **Bài toán 2.** Chứng minh rằng không tồn tại số lẻ n lớn hơn 1 sao cho $3^n + 1$ chia hết cho n .

Lời giải. Phản chứng. Giả sử tồn tại n lẻ, $n > 1$ sao cho $3^n + 1$ chia hết cho n . Gọi p là ước

nguyên tố nhỏ nhất của n , khi đó p lẻ và $3^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Suy ra $3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$.

Mặt khác, theo định lý nhỏ Fermat thì ta có $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Vì p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n nên ta có $(n, p-1) = 1$. Suy ra $(2n, p-1) = 2$. Theo định lý Bezout, tồn tại các số nguyên x, y sao cho $2nx + (p-1)y = 2$. Áp dụng các đồng dư thức ở trên suy ra $3^2 = 3^{2nx + (p-1)y} \equiv 1 \pmod{p}$.

Suy ra $8 \equiv 0 \pmod{p}$. Mâu thuẫn vì p là số nguyên tố lẻ. Vậy điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh.

❖ **Bài toán 3.** Chứng minh rằng mọi ước số nguyên tố của số $F_n = 2^{2^n} + 1$ có số dư bằng 1 khi chia cho 2^{n+1} .

Lời giải. Giả sử $F_n = 2^{2^n} + 1$ chia hết cho số nguyên tố p . Khi đó $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$.

Gọi h là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^h \equiv 1 \pmod{p}$. Khi đó do $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$ nên $2^{n+1} \mid h$, suy ra $h = 2^k$. Nếu $k \leq n$ thì từ đây ta suy ra $2^{2^n} \equiv 1 \pmod{p}$, mâu thuẫn với điều kiện $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$. Vậy $h = 2^{n+1}$.

Từ định lý nhỏ Fermat có $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Từ định nghĩa của h suy ra $p-1$ chia hết cho $h = 2^{n+1}$ và đó chính là điều phải chứng minh.

❖ Bài tập

19. (VMO 2001) Cho số nguyên dương n và cho hai số nguyên nguyên tố cùng nhau a, b lớn hơn 1. Giả sử p, q là hai ước lẻ lớn hơn 1 của $a^{6^n} + b^{6^n}$. Hãy tìm số dư trong phép chia $p^{6^n} + q^{6^n}$ cho 6.12^n .

20. Chứng minh rằng phương trình $x^7 + y^7 = 1998^z$ không có nghiệm nguyên dương.

21. Cho k là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $2^{2^n} + k$ là hợp số.

22. (VMO 2011) Cho dãy số nguyên (a_n) xác định bởi $a_0 = 1, a_1 = -1, a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011.

HỆ MÃ RSA

Với sự bùng nổ của Internet, các giao thức giao dịch điện tử đã trở thành một thành phần không thể thiếu được trong đời sống, những khái niệm như thanh toán điện tử, ngân hàng

điện tử, chữ kí điện tử ... đã trở nên quen thuộc. Và nền tảng bảo mật của các giao thức điện tử đó là các hệ thống mã công khai mà thông dụng và nổi bật nhất là hệ mã RSA do ba nhà toán học Rivest, Shamir và Adleman đề xuất vào năm 1978. Cơ sở toán học của thuật toán này chính là định lý Euler.

Thuật toán được xây dựng như sau: Người ta lấy hai số nguyên tố đủ lớn p, q và tính $n = p \cdot q$; $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$. Sau đó người ta chọn một số nguyên dương e sao cho $(e, \varphi(n)) = 1$. Cặp (e, n) được công khai và là khóa lập mã. Người ta dùng thuật toán Euclide tìm được số nguyên dương d sao cho $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$. d sẽ là khóa bí mật, dùng để giải mã; $p, q, \varphi(n)$ và d được giữ bí mật.

Để lập mã, với văn bản cần mã hóa là P , người ta tính $C = P^e \pmod{n}$. C chính là văn bản đã được mã hóa.

Sau khi nhận được văn bản đã được mã hóa C , muốn tìm lại P , người ta tính $C^d \pmod{n}$ thì có $C^d = (P^e)^d = P^{ed} = P^{1+k\varphi(n)} \equiv P \pmod{n}$ (theo định lý Euler).

Tính an toàn của hệ mã RSA dựa trên độ khó của hai bài toán sau:

1) Nếu biết $P^e \pmod{n}$, e và n thì khó tìm được P (bài toán logarithm rời rạc).

2) Việc phân tích số nguyên dương n ra thừa số nguyên tố (để tìm p, q , qua đó tìm được $\varphi(n)$ và sau đó tìm được d) là khó (bài toán phân tích ra thừa số).

Chính hệ mã RSA đã biến lý thuyết số từ một khoa học thuần túy lý thuyết thành một môn khoa học ứng dụng. Hiện nay, số học thuật toán là một môn học không thể thiếu được trong các khoa máy tính của các trường đại học.

❖ Bài tập

23. Cho $n = p \cdot q$. Chứng minh rằng nếu ta biết n và $\varphi(n)$ thì ta biết được p, q . Từ đó suy ra độ khó của bài toán tìm $\varphi(n)$ tương đương với độ khó của bài toán phân tích n ra thừa số.

TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT – Cách chứng minh thứ ba đối với định lý nhỏ Fermat

Cách chứng minh thứ ba khá độc đáo. Bằng tổ hợp! Ta sẽ giải một bài toán đếm mà đáp

số là $\frac{a^p - a}{p}$. Vì đáp số của một bài toán đếm phải là số tự nhiên, nên từ đây có $a^p - a$ chia hết cho p .

❖ **Bài toán 4.** Cho p là số nguyên tố, a là số nguyên dương. Ta chia đường tròn thành p cung bằng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô các cung bằng a màu? Hai cách tô có thể thu được từ nhau qua một phép quay được coi là giống nhau.

Lời giải. Nếu không tính đến điều kiện hai cách tô màu có thể thu được từ nhau qua một phép quay được coi là giống nhau thì ta có a^p cách tô màu khác nhau (mỗi cung có a cách tô). Có a cách tô chỉ dùng một màu. Với mỗi cách tô loại này, các phép quay không cho ra cách tô mới. Còn lại $a^p - a$ cách tô sử dụng ít nhất hai màu. Với mỗi cách tô này, nếu quay

các góc $\frac{2\pi}{p}, \frac{4\pi}{p}, \dots, \frac{2(p-1)\pi}{p}$ ta sẽ được $p-1$

cách tô khác (không tính đến điều kiện) đồng thời lại không tạo ra cách tô mới nếu tính đến điều kiện. Như vậy, số cách tô khác

nhau theo đúng điều kiện chỉ bằng $\frac{1}{p}$ số cách

tô không tính đến điều kiện.

Từ đó đáp số của bài toán là $a + \frac{a^p - a}{p}$.

Quay trở lại phép chứng minh định lý nhỏ Fermat, đáp số ở trên là kết quả của một bài toán đếm nên phải là số nguyên. Từ đó $a^p - a$ phải chia hết cho p và định lý nhỏ Fermat được chứng minh.

Dưới đây chúng tôi nêu ra một số bài tập có thể giải được bằng phương pháp tương tự.

❖ Bài tập

24. Cho p, q là hai số nguyên tố phân biệt, a là số nguyên dương. Ta chia đường tròn thành pq cung bằng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô các cung bằng a màu? Hai cách tô có thể thu được từ nhau qua một phép quay được coi là giống nhau.

25. (VMO 2010) Cho bảng 3×3 và n là một số nguyên dương cho trước. Tìm số các cách tô màu không như nhau khi tô mỗi ô bởi 1 trong n màu. Hai cách tô màu gọi là như nhau nếu 1 cách nhận được từ cách kia bởi 1 phép quay quanh tâm.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/416. (Lớp 6). Tìm tất cả các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $2010^x + 2011^y = 2012^z$.

ĐÀO HUY TRƯỜNG

(GV THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T2/416. (Lớp 7). Cho 100 số tự nhiên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ thỏa mãn

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{100}} = \frac{101}{2}.$$

Chứng minh rằng ít nhất hai trong 100 số tự nhiên trên bằng nhau.

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T3/416. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} \geq 9 + 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

HOÀNG KIỀU NAM

(Hà Nội)

Bài T4/416. Giải phương trình

$$4x^2 + 14x + 11 = 4\sqrt{6x+10}.$$

PHẠM QUỐC PHONG

(GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Bài T5/416. Cho tam giác ABC . Gọi D, E theo thứ tự là tiếp điểm đường tròn (I) nội tiếp tam giác với các cạnh BC, CA . Gọi K là điểm đối xứng của D qua trung điểm cạnh BC , đường thẳng qua K vuông góc với BC cắt DE tại L . Gọi N là trung điểm của KL , chứng minh rằng BN vuông góc với AK .

TA HỒNG SƠN

(SV Lớp Ngân hàng A, K50, Khoa Ngân hàng - Tài chính ĐH KTQD Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/416. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{mn}{(m+1)(n+1)(m+n+1)}$$

trong đó m, n là các số tự nhiên.

TRỊNH XUÂN TÌNH

(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T7/416. Cho tam giác ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác ngoài góc BAC cắt lại đường tròn (O) tại điểm E ; M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA ; F là hình chiếu của E trên AB , K là giao điểm của MN và AE . Chứng minh rằng KF song song với BC .

NGUYỄN VĂN NHIỆM

(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T8/416. Giải phương trình

$$\sin^{2n+1} x + \sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 - 2 = 0$$

với n là số nguyên dương cho trước.

TRẦN DIỆU MINH

(GV THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/416. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ sao cho

$$\begin{cases} P(2) = 12 \\ P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

NGUYỄN VĂN THÔNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T10/416. Cho n số hữu tỉ $r_1, r_2, \dots, r_n$ thỏa mãn $0 < r_i \leq \frac{1}{2}, \sum_{i=1}^n r_i = 1 (n > 1)$, và hàm số

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right].$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức $P(k) = 2k - \sum_{i=1}^n f(kr_i)$ khi k chạy

trên tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ (kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của số thực x).

HÀN NGỌC ĐỨC

(Trung tâm CNTT EVNIT, Hà Nội)

Bài T11/416. Giả sử hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(x+1006)$ là số hữu tỉ khi và chỉ khi $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+20) + f(x+12) + f(x+2012)$$

là số vô tỉ. Chứng minh rằng $f(x) = f(x+2012)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

TRẦN NGỌC THẮNG

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T12/416. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r}$, trong đó m_a, m_b, m_c theo thứ tự là độ dài các đường trung tuyến; h_a, h_b, h_c theo thứ tự là độ dài các đường cao xuất phát từ A, B, C và R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên DHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/416. Hai lò xo nhẹ L_1 và L_2 có độ cứng lần lượt là $k_1 = 100\text{N/m}$, $k_2 = 400\text{N/m}$. Hai vật nhỏ (1) và (2) có thể trượt không ma sát trên mặt bàn nằm ngang và có khối lượng lần lượt là $m_1 = 100\text{g}$, $m_2 = 400\text{g}$. Người ta bỏ trí hệ như hình vẽ.



Hai đầu mỗi lò xo gắn cố định vào tường tại điểm M và điểm N , hai đầu còn lại gắn vào hai vật sao cho trục hai lò xo trùng nhau và luôn luôn nằm trên đường thẳng nằm ngang MN . Ở vị trí cân bằng, hai vật cách nhau một đoạn $a = 2\text{cm}$. Lúc đầu vật (2) đứng yên, còn vật (1) được đưa đến vị trí để lò xo L_1 bị nén

một đoạn $\Delta l_1 = 2\sqrt{5}\text{cm}$ rồi thả nhẹ. Biết rằng vật (1) sau va chạm lần đầu tiên với vật (2) thì lò xo L_1 bị nén cực đại một đoạn $\Delta l_2 = 2\sqrt{2}\text{cm}$. Tính khoảng thời gian từ lần va chạm đầu tiên đến lần va chạm thứ hai của hai vật.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Nghệ An)

Bài L2/416. Cho đoạn mạch điện xoay chiều R, L, C có hai đầu A và D ; B là một điểm trên AD .

a) Khi cho dòng điện qua mạch có cường độ $i = 10^{-3}\sin 1000t(\text{A})$ thì

$$u_{AB} = 1\sin 1000t(\text{V}); u_{BD} = \sqrt{3}\sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right)(\text{V}).$$

Có thể viết $i = \frac{u_{AB}}{Z_{AB}}, i = \frac{u_{BD}}{Z_{BD}}$ được không? Tại sao?

b) Cho dòng điện qua mạch có cường độ $i' = 10^{-3}\sin 2000t(\text{A})$ thì

$$u'_{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(2000t + \frac{\pi}{6}\right)(\text{V})$$

$$u'_{BD} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(2000t + \frac{\pi}{2}\right)(\text{V}).$$

Tìm u'_{AD} .

c) Trên AB và BD có những linh kiện gì? Xác định độ lớn của chúng. Vẽ sơ đồ mạch AD .

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/416. (For 6th grade). Find all natural numbers x, y, z such that $2010^x + 2011^y = 2012^z$.

T2/416. (For 7th grade). The natural numbers $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ satisfy the equation

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{100}} = \frac{101}{2}.$$

Prove that there are at least two equal numbers.

T3/416. Let a, b, c be positive real numbers. Prove the inequality

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} \geq 9 + 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

T4/416. Solve the equation

$$4x^2 + 14x + 11 = 4\sqrt{6x + 10}.$$

T5/416. In a triangle ABC , the incircle (I) meets BC, CA at D, E respectively. Let K be the point of reflection of D through the midpoint of BC , the line through K and perpendicular to BC meets DE at L , N is the midpoint of KL . Prove that BN and AK are orthogonal.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/416. Determine the maximum value of the

$$\text{expression } A = \frac{mn}{(m+1)(n+1)(m+n+1)}$$

where m, n are natural numbers.

(Xem tiếp trang 27)



★ **Bài T1/412.** Trong 100 số tự nhiên từ 1 đến 100 hãy chọn n số ($n \geq 2$) sao cho hai số phân biệt bất kì được chọn có tổng chia hết cho 6. Hỏi có thể chọn n số thỏa mãn điều kiện trên với n lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải. Gọi $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số thỏa mãn đề bài. Vì 6, 12, 18 thỏa mãn đề bài nên chỉ cần xét $n \geq 3$. Theo giả thiết thì $a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_2 + a_3$ đều chia hết cho 6 nên $2a_1 + a_2 + a_3 \div 6$, suy ra $2a_1 \div 6$ do đó $a_1 \div 3$. Lập luận tương tự thì mọi số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ đều chia hết cho 3, nghĩa là khi chia cho 6 chúng có dạng $6k$ hoặc $6k + 3$ (k là số tự nhiên).

Trong n số đang xét không thể có hai số thuộc cả hai dạng trên, vì lúc đó tổng của chúng không chia hết cho 6.

Vậy chỉ có hai dãy số ($n \geq 3$) thỏa mãn đề bài là

1) Các số có dạng $6k$, với $1 \leq k \leq 16$, gồm 16 số.

2) Các số có dạng $6k + 3$ với $0 \leq k \leq 16$ gồm 17 số.

Kết luận. Có thể chọn dãy với n lớn nhất là $n = 17$ số thỏa mãn đề bài. □

➤ **Nhận xét.** Nhiều bạn chỉ xét hai dạng $6k$ và $6k + 3$ mà không lập luận để loại trừ các trường hợp khác. Các bạn có lời giải với lập luận chính xác là:

Vĩnh Phúc: Lê Anh Tuấn, Nguyễn Khánh Lâm, 6A, THCS Sơn Đông, Lập Thạch; **Bắc Ninh:** Trương Vô Kỵ, 6A, THCS Đại Đồng Thành, Thuận Thành; **Hà Nội:** Lưu Việt Hà, 6C, THPT Hà Nội – Amsterdam,

Nguyễn Phương Linh, 6A1, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Nghệ An:** Nguyễn Hoàng Thảo Hiền, Đào Mỹ Linh, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Chu Thị Linh, 6C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nguyễn Văn Quân, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Lương Đình An, 6B, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Việt Anh, 6D, Nguyễn Văn Báo, 6A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc.

NGUYỄN VIỆT HẢI

★ **Bài T2/412.** Cho $A = \frac{5^a}{5^{b+c}}$ và $B = \frac{5^a + 2011}{5^{b+c} + 2011}$

với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. So sánh A và B .

Lời giải. Xét các tích

$$5^a(5^{b+c} + 2011) = 5^{a+b+c} + 5^a \cdot 2011 \quad (1)$$

$$5^{b+c}(5^a + 2011) = 5^{a+b+c} + 5^{b+c} \cdot 2011 \quad (2)$$

Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên $a < b + c$, suy ra $5^a < 5^{b+c} \Rightarrow 5^a \cdot 2011 < 5^{b+c} \cdot 2011 \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$5^a(5^{b+c} + 2011) < 5^{b+c}(5^a + 2011)$$

$$\Rightarrow \frac{5^a}{5^{b+c}} < \frac{5^a + 2011}{5^{b+c} + 2011}. \text{ Vậy } A < B. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** 1) Ngoài cách chứng minh trực tiếp trên đây, ta có thể chứng minh dựa vào tính chất:

"Cho m, n, p, q là các số dương. Nếu $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ thì

$$\frac{m}{n} < \frac{m+p}{n+q} < \frac{p}{q}." \text{ (Bạn đọc tự chứng minh tính chất này).}$$

2) Rất đông các bạn tham gia giải bài toán này và đều cho kết quả đúng. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn, trình bày rõ ràng hơn cả:

Phú Thọ: Lê Hữu Hùng, 7A3, Đinh Minh Hà, 7A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Lê Anh Tuấn, Nguyễn Khánh Lâm, 6A, THCS Sơn Đông, Lập Thạch, Nguyễn Thị Nga, Nguyễn Thị Thơm, Hoàng Thị Minh Anh, Nguyễn Thị Bích, Nguyễn Thị Tú Linh, 7A1, THCS Yên Lạc; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Phương Anh, 7A, THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi; **Thanh Hóa:** Phạm Tuấn Linh, 7B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Nghệ An:** Trần Thị Diệu Hương, 7A, Hoàng Khánh Linh, 7B, Nguyễn Phương Tây, Phan Thị Minh Châu, 7C, THCS Cao Xuân Huy, Hoàng Văn Phượng, 7A, THCS

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCD PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẬP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

Diễn Đàn, Diễn Châu, *Lương Đình An*, 6B, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, *Nguyễn Hoàng Thảo Hiền*, 6A, *Hoàng Tiến Dũng*, *Nguyễn Đình Quý*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Lưu Quốc Thước*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trương Thị Phương Hoa*, *Phạm Thị Lệ Thanh*, 7A, *Bùi Thị Huyền Trang*, 7B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Phúc*, *Phạm Thiên Trang*, 6A, *Nguyễn Hiếu Ngân*, 6B, *Phạm Thị Mỹ Hằng*, *Cao Thị Thúy Diễm*, *Nguyễn Thị Hạnh*, *Võ Trần Thùy Hương*, 7A, THCS Hành Phước, *Nguyễn Phan Thanh Xuân*, 7A, THCS Hành Thuận, Nghĩa Hành, *Đoàn Tú Nhi*, 7A, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Quảng Ngãi; **Quảng Trị:** *Hoàng Quang Hiền*, 7B, THCS Hiếu Giang, Đông Hà.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/412.** Có hay không các số nguyên x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$|x - 2005y| + |y - 2007z| + |z - 2009x| = 2011^x + 2013^y + 2015^z? \quad (1)$$

Lời giải. Đặt vế phải của (1) là A , vế trái của (1) là B .

Do $a + |a| \in \{0; 2a\}$ nên với mọi số nguyên a thì $|a| + a$ là số nguyên chẵn. Suy ra với x, y, z nguyên thì

$$|x - 2005y| + |y - 2007z| + |z - 2009x| + (x - 2005y) + (y - 2007z) + (z - 2009x)$$

là số chẵn

$$\Leftrightarrow A - (2008x + 2004y + 2006z) \text{ là số chẵn}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ là số chẵn.}$$

1) Nếu x, y, z đều là các số nguyên âm thì

$$0 < B = \frac{1}{2011^{-x}} + \frac{1}{2013^{-y}} + \frac{1}{2015^{-z}} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Suy ra B không là số nguyên.

2) Nếu trong x, y, z có đúng hai số nguyên âm, chẳng hạn là x, y thì

$$2015^z < B = \frac{1}{2011^{-x}} + \frac{1}{2013^{-y}} + 2015^z < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2015^z = 1 + 2015^z.$$

Suy ra B không là số nguyên.

3) Nếu trong x, y, z có đúng một số nguyên âm, chẳng hạn là x thì $B = \frac{1}{2011^{-x}} + 2013^y + 2015^z$.

Suy ra B không là số nguyên.

4) Nếu x, y, z đều là số tự nhiên thì $2011^x, 2013^y, 2015^z$ là số lẻ nên B là số lẻ.

Vậy với mọi x, y, z nguyên thì B là số không nguyên hoặc là số lẻ, trong khi A là số chẵn. Do đó không tồn tại các số x, y, z để đẳng thức (1) xảy ra. □

➤ **Nhận xét.** 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Đa số các bạn đều quan niệm nhầm x, y, z là số tự nhiên nên chỉ phân chia trường hợp x, y, z tự nhiên chẵn hoặc lẻ. Một số bạn lập luận trường hợp B không nguyên còn quá vắn tắt, không rõ ràng.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nam Định: *Phạm Văn Phúc*, 9A2, THCS Lương Thế Vinh; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Phương*, 9H, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, *Hoàng Bảo Long*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Lê Trung Anh*, *Nguyễn Mai Lê*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, *Phạm Tiến Minh Đức*, 9B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **TP. Hồ Chí Minh:** *Huỳnh Vĩnh Anh*, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T4/412.** Tính tổng gồm 2011 số hạng

$$S = \frac{1}{1^4 + 1^2 + 1} + \frac{2}{2^4 + 2^2 + 1} + \frac{3}{3^4 + 3^2 + 1} + \dots + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} + \dots + \frac{2011}{2011^4 + 2011^2 + 1}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) \quad (*)$$

Áp dụng (*) với n lấy lần lượt từ 1 đến 2011, ta có

$$S = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{4042111} - \frac{1}{4046133} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4046133} \right) = \frac{2023066}{4046133}. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** 1) Chìa khóa của bài toán này chính là công thức (*).

2) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này, cách giải của các bạn tương tự như lời giải trên. Các bạn có lời giải gọn gàng hơn là:

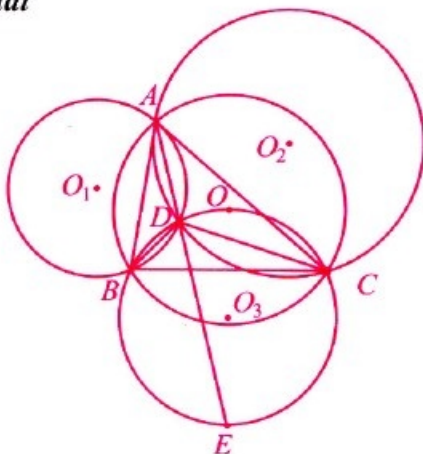
Vĩnh Phúc: *Đại Thị Hoàng Yến*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nam:** *Đỗ Đăng Dương*, 8A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** *Tạ Thị Trang*, 9A, THCS Hoàng Hợp, *Hoàng Bảo Long*, 7D, THCS Nhữ

Bá Sỹ, Hoàng Hóa; *Phạm Tuấn Linh*, 7B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Nghệ An**: *Nguyễn Hoàng Việt*, 7C, *Hoàng Thanh Lưu*, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diên Châu, *Nguyễn Thị Hà Trang*, 9A, *Nguyễn Văn Quân*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Hoàng Thảo Hiền*, *Trần Ngọc Linh*, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Ngãi**: *Cao Thị Thúy Diễm*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đào Trần Trí*, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Vĩnh Long**: *Đoàn Hoàng Gia Bảo*, 7/11, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vĩnh Long.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T5/412.** Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định (BC khác đường kính). A là điểm chuyển động trên cung lớn BC . Vẽ đường tròn (O_1) đi qua B và tiếp xúc với AC tại A ; vẽ đường tròn (O_2) đi qua C và tiếp xúc với AB tại A . Các đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại điểm thứ hai D khác A . Chứng minh rằng đường thẳng AD luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Vẽ đường tròn (O_3) qua ba điểm B, C, D . Đường thẳng AD cắt lại (O_3) tại E . Ta sẽ chứng minh E là điểm cố định.

Ta có $\widehat{BDE} = \widehat{DBA} + \widehat{DAB}$ mà $\widehat{DBA} = \widehat{DAC}$ (cùng chắn cung $\widehat{AD}$ của (O_1)) nên $\widehat{BDE} = \widehat{DAC} + \widehat{DAB} = \widehat{BAC}$.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\widehat{CDE} = \widehat{BAC}$.

Từ đó suy ra $\widehat{BDC} = 2\widehat{BAC}$ (không đổi), tức đường tròn (O_3) là cố định. Ngoài ra, do $\widehat{BDE} = \widehat{CDE}$ nên E là điểm chính giữa của cung $\widehat{BC}$. Vậy điểm E cố định (đpcm). $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Dễ thấy đường tròn (O_3) cũng đi qua điểm O , các đường BE và CE chính là hai tiếp tuyến

của đường tròn (O) . Nhiều bạn đưa ra cách chứng minh xuất phát từ các ý tưởng này.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

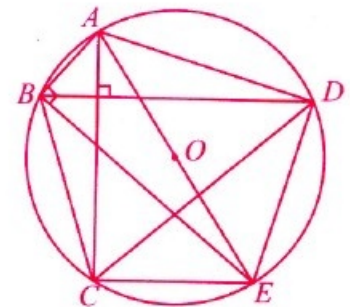
Phú Thọ: *Bùi Đức Thịnh, Nguyễn Hoàng Việt, Cao Trung Đức*, 9A3, THCS Lâm Thao; *Bùi Tuấn Nam*, 9A, THCS Lương Lễ, Thanh Ba; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Quân*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Hồ Hoàng Hiệp, Lê Trần Kiên*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Lương Đình Ân*, 6B, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên. **Quảng Ngãi**: *Tổng Thành Nguyên*, 9A, THCS Hành Phước; *Nguyễn Thị Ly*, 9B, THCS Hành Thuận, Nghĩa Hành.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/412.** Cho tứ giác $ABCD$ thay đổi thỏa mãn $AC \perp BD$ và luôn nội tiếp trong một đường tròn $(O; R)$ cố định. Gọi p là chu vi của tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng

$$\frac{AB^2}{p-AB} + \frac{BC^2}{p-BC} + \frac{CD^2}{p-CD} + \frac{DA^2}{p-DA} \geq \frac{4R\sqrt{2}}{3}.$$

Lời giải. Kẻ đường kính AE của đường tròn (O) . Khi đó $CE \perp AC$, nên $BD \parallel CE$. Vậy tứ giác $BDEC$ là hình thang cân, dẫn đến $CD = BE$. Từ



định lý Pythagore trong tam giác vuông ABE có $AE^2 = AB^2 + BE^2$ nên $AB^2 + CD^2 = 4R^2$. Tương tự có $BC^2 + AD^2 = 4R^2$.

Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ thì

$$p = a + b + c + d \text{ và } a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4R^2.$$

Nhận xét. Ta có bất đẳng thức

$$2\left(\frac{a^2}{p-a} + \frac{c^2}{p-c}\right) \geq (a^2 + c^2)\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c}\right) \quad (1)$$

Thật vậy, BĐT (1) tương đương với

$$(a^2 - c^2)\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-c}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2 \left(\frac{a+c}{(p-a)(p-c)}\right) \geq 0 \text{ (BĐT đúng).}$$

$$\text{Lại có } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{(p-a) + (p-c)}$$

$$= \frac{4}{a+c+2(b+d)} \geq \frac{4}{\sqrt{2(a^2+c^2)}+2\sqrt{2(b^2+d^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{3R} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy

$$\frac{a^2}{p-a} + \frac{c^2}{p-c} \geq \frac{1}{2}(a^2+c^2) \frac{\sqrt{2}}{3R} = \frac{2R\sqrt{2}}{3} \quad (3)$$

Tương tự cũng có

$$\frac{b^2}{p-b} + \frac{d^2}{p-d} \geq \frac{2R\sqrt{2}}{3} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{a^2}{p-b} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c} + \frac{d^2}{p-d} \geq \frac{4R\sqrt{2}}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=R\sqrt{2}$, hay $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $R\sqrt{2}$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Tất cả các lời giải gửi về tòa soạn đều đúng. Hầu hết các bạn đều sử dụng *Bất đẳng thức Chebyshev* cho hai dãy đơn điệu cùng chiều để chứng minh bất đẳng thức đã cho. Sau đây là những bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Phan Anh Tuấn, 10A2 Toán, Vũ Thị Mỹ Hạnh, 11A1 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, Hoàng Công Hậu, 12 Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Q. Hà Đông; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** Trần Hồng Quân, 10 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** Lưu Trọng Chiến, Hoàng Nghĩa Bảo, Phan Tô Đình Trung, 10A1, Vương Nhật Quân, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Nguyễn Đức Nguyễn, 10A1, Nguyễn Hiền Trang, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Lê Hoàng Hiệp, Trần Trung Hiếu, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, Hồ Bá Đức, 11A12, THPT Diễn Châu 2, Nguyễn Văn Hoàng, 12T7, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** Lê Trần Nhạc Long, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Nguyễn Quang Hải, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Võ Trạch Dân, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Đồng Nai:** Phạm Công Danh, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Dương Quốc Khánh, 11B1, THPT Lê Hồng Phong, Biên Hòa; **Cần Thơ:** Hoàng Công Đức, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **TP. Hồ Chí Minh:** Lê Quang Nghĩa, 11CT, THPT Nguyễn Hữu Huân, Trần Anh Tuấn, 10A3, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Cao Minh Hiệp, 10A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

HỒ QUANG VINH

★ Bài T7/412. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0 & (1) \\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \leq 5; y \leq 4; 2x+y+5 \geq 0; 3x+2y+11 \geq 0$.

Phương trình (1) tương đương với

$$(3(5-x)+2)\sqrt{5-x}=(3(4-y)+2)\sqrt{4-y} \quad (3)$$

Xét hàm $f(t)=(3t+2)\sqrt{t}$ với $t \geq 0$, ta có

$$f'(t)=3\sqrt{t}+\frac{3t+2}{2\sqrt{t}}>0, \forall t \geq 0.$$

Kết hợp với (3) ta có

$$f(5-x)=f(4-y) \Leftrightarrow 5-x=4-y \Leftrightarrow y=x-1.$$

Thay vào PT (2) của hệ, ta được

$$2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13, \text{ với } x \geq -\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{3x+4}-2(x+2))+(3\sqrt{5x+9}-3(x+3))=x^2+x$$

$$\frac{-2x(x+1)}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\frac{-3x(x+1)}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}=x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)\left(\frac{2}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\frac{3}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=-1.$$

$$(\text{Vì } \frac{2}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\frac{3}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}+1>1).$$

• Với $x=0$ thì $y=-1$.

• Với $x=-1$ thì $y=-2$.

Thử lại ta thấy tập nghiệm của HPT đã cho là

$$(x;y) \in \{(0;-1);(-1;-2)\}. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** Bài toán này có rất nhiều bạn tham gia và đa số cho lời giải đúng. Một số bạn sử dụng đạo hàm cấp 2 để đánh giá số nghiệm tối đa của hệ phương trình đã cho, từ đó nhầm và kết luận nghiệm. Các bạn sau đây cho lời giải gọn.

Cà Mau: Lê Hoàng Minh, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Đặng Hiếu, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Đồng Tháp:** Võ Hoài Bảo, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hậu Giang:** Đường Ngọc Lan, 12H, THPT chuyên Vị Thanh; **Nghệ An:** Hồ Đức Nhân, 11A1, THPT Quỳnh Lưu II; **Trần**

Tuấn Anh, 10A2, THPT Quỳnh Lưu I; Trần Ngọc Ánh, 11T1, THPT Hà Huy Tập; Trương Công Phú, 10A2, THPT chuyên Phan Bội Châu; Nguyễn Tất Khánh, 10A1, THPT Đô Lương III; **Thái Bình:** Nguyễn Quang Trọng, 11A1, THPT Tây Tiến Hải; **Phú Thọ:** Đào Văn Lập, 11A1, THPT Thanh Thủy.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T8/412.** Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi tam giác ABC:

$$\cos^2 \frac{A-B}{2} + \cos^2 \frac{B-C}{2} + \cos^2 \frac{C-A}{2} \geq 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Lời giải. Ta có

$$\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \text{ và}$$

$$\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2} \text{ nên}$$

$$\cos \frac{A-B}{2} = \sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $(a+b)^2 \geq 4ab$, ta được

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{A-B}{2} &= \left(\sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right)^2 \\ &\geq 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

Tương tự

$$\cos^2 \frac{B-C}{2} \geq 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (2)$$

$$\cos^2 \frac{C-A}{2} \geq 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta được

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{A-B}{2} + \cos^2 \frac{B-C}{2} + \cos^2 \frac{C-A}{2} \\ \geq 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\cos^2 \frac{A-B}{2} = \cos^2 \frac{B-C}{2} = \cos^2 \frac{C-A}{2}$$

$$= 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Leftrightarrow A = B = C \text{ (tam giác } ABC \text{ đều)}. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** 1) Có thể chứng minh BĐT (1) bằng cách biến đổi

$$\cos^2 \frac{A-B}{2} - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \left(\cos \frac{A-B}{2} - 2 \cos \frac{A+B}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Một số bạn đã sử dụng hệ thức

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

để chứng minh BĐT (1), làm như vậy dài và phức tạp.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

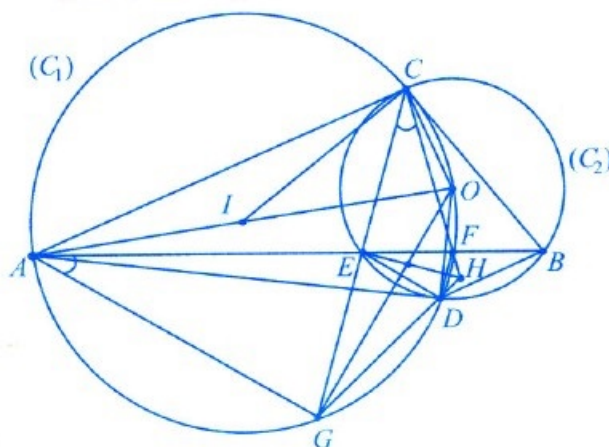
Thái Bình: Nguyễn Xuân Hùng, 11A2, THPT Bắc Đông Quan, Đông Hưng; **Hưng Yên:** Dương Mạnh Cường, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Trần Trung Hiếu, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; **Hà Tĩnh:** Trần Võ Hoàng, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** Trần Đức Anh, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** Phạm Minh Châu, 11 Toán, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Đồng Nai:** Dương Quốc Khánh, 11B1, THPT Lê Hồng Phong, Biên Hòa; **Lâm Đồng:** Nguyễn Vũ Trung Quân, 11 Toán 1, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Tiền Giang:** Nguyễn Xuân Quang, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T9/412.** Cho hai đường tròn (C_1) , (C_2) sao cho tâm O của (C_2) nằm trên (C_1) . Gọi C , D là hai giao điểm của (C_1) và (C_2) . Gọi A là điểm nằm trên (C_1) , B là điểm nằm trên (C_2) sao cho AC tiếp xúc với (C_2) tại C và BC tiếp xúc với (C_1) tại C . Đường thẳng chứa đoạn AB lần nữa cắt (C_2) tại E và (C_1) tại F . Đường thẳng CE cắt (C_1) lần nữa tại G , CF cắt GD tại H .

Chứng minh rằng giao điểm của GO và EH là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF .

Lời giải. (hình vẽ).



Vì CA, CB theo thứ tự tiếp xúc với $(C_2), (C_1)$ nên $\widehat{CEF} = \widehat{ECA} + \widehat{EAC} = \widehat{CBE} + \widehat{FCB} = \widehat{CFE}$. Do đó $CE = CF$ (1)

Ta thấy $\widehat{CEF} = \widehat{CFE}$ (chứng minh trên) $= \widehat{CFA} = \widehat{COA} = \widehat{DOA}$ (vì AO là trung trực của CD) $= \widehat{DFA}$. Do đó $FD \parallel CG$.

Từ đó tứ giác $FCGD$ là hình thang cân. Có nghĩa là $CF = GD$ và $CH = GH$ (2)

Gọi I là tâm của đường tròn (C_1) . Vì AC tiếp xúc với (C_2) nên $\widehat{ACO} = 90^\circ$. Do đó I là trung điểm của AO . Suy ra IO là đường trung trực của CD .

Ta thấy $\widehat{DEG} = \widehat{DBC}$ (vì tứ giác $EDBC$ nội tiếp) $= \frac{1}{2}\widehat{DOC} = \widehat{AOC}$ (vì AO là đường trung trực của DC).

Mặt khác $\widehat{DGE} = \widehat{DGC} = \frac{1}{2}\widehat{DIC} = \widehat{OIC}$ (vì IO là đường trung trực của DC). Suy ra $\triangle GED \sim \triangle ICO$.

Kết hợp với $IO = IC$, ta có $GD = GE$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $CE = GE$.

Từ (2) suy ra EH là đường trung trực của GC . Do $FCGD$ là hình thang cân nên EH là đường trung trực của DF (4)

Vì AO là đường trung trực của CD nên O là trung điểm của cung $\widehat{CD}$. Do đó GO là phân giác của góc $\widehat{CGD}$.

Từ (3) suy ra GO là đường trung trực của ED (5)

Từ (4) và (5) suy ra đpcm. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán cơ bản, nhiều bạn tham gia giải và cùng cho lời giải đúng.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt.

Phú Thọ: Đào Văn Lập, 11A₁, THPT Thanh Thủy, Thanh Thủy; **Nam Định:** Trịnh Thị Việt Hà, 11T₂, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Thái Bình:** Bùi Đình Hiếu, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Quỳnh Loan, THPT Đô Lương 1; **Quảng Trị:** Trần Đức Anh, 10T, THPT Lê Quý Đôn, TP. Quảng Trị; **Quảng Nam:** Phạm Tuấn Anh, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Quảng Nam; **Bình Định:** Nguyễn Quang Hải, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Đông Nai:** Dương Quốc Khánh, 11B1, THPT Lê Hồng Phong, Nguyễn Ngọc Sơn, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hoà; **Hà Nội:** Phan Anh Tuấn, 10T2, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T10/412.** Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn điều kiện

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 \leq \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

với mọi $k = 1, 2, \dots, n$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n.$$

Lời giải. (Theo bạn Lê Hoàng Hiệp, 11A₁, THPT Thái Hòa, **Nghệ An**).

Bổ đề. Cho $2n$ số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

1) $b_i \leq b_{i+1}$ $i = 1, 2, \dots, n-1$.

2) $\sum_{i=1}^k a_i^2 \leq \sum_{i=1}^k b_i^2$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$.

Khi đó $\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i$.

Chứng minh. Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \leq \sum_{i=1}^n b_i$.

Đặt $A_k = \sum_{i=1}^k a_i^2$, $B_k = \sum_{i=1}^k b_i^2$.

Theo giả thiết $A_k \leq B_k$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$.

Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} (A_i - A_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{b_i} - \frac{1}{b_{i+1}} \right) A_i + \frac{A_n}{b_n} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{b_i} - \frac{1}{b_{i+1}} \right) B_i + \frac{B_n}{b_n} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{b_i} (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^n b_i. \end{aligned}$$

Vậy bổ đề được chứng minh. Chú ý rằng

$$\sum_{i=1}^k (2i-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

nên áp dụng bổ đề với $b_i = 2i-1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ta có

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = n^2.$$

Trở lại bài toán. Ta có

$$P + \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n (a_k + 1)k \left(\text{do } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right).$$

Do đó từ BĐT Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} \left(P + \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) \sum_{k=1}^n (a_k + 1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k + n \right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \left(\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + 2n^2 + n \right) \\ &= \frac{1}{9} (n(n+1)(2n+1))^2. \end{aligned}$$

Từ đó $P \leq \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a_k = 2k - 1$, với mọi $k = 1, 2, \dots, n$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Đây là một bài toán khó nếu không biết sử dụng bổ đề đã nêu (nhiều bạn học sinh chuyên toán đã biết bổ đề này, tuy nhiên trong lời giải vẫn cần phải nêu lại phép chứng minh).

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Trương Giang Khang, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Nghệ An:** Bùi Hải Vân, 11T1, THPT Hà Huy Tập, TP. Vinh; **Hà Nội:** Hoàng Công Hậu, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Cần Thơ:** Hoàng Công Đức, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T11/412.** Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$x_n = 2n + a\sqrt[3]{8n^3 + 1}, \forall n = 1, 2, \dots,$$

ở đây a là tham số thực.

a) Tìm a sao cho dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

b) Tìm a sao cho dãy số (x_n) là dãy số tăng (kể từ số hạng nào đó).

Lời giải. a) Ta có $x_n = (a+1)2n + a.y_n$, trong đó

$$\begin{aligned} y_n &= \sqrt[3]{8n^3 + 1} - 2n \\ &= \frac{8n^3 + 1 - (2n)^3}{\sqrt[3]{(8n^3 + 1)^2} + 2n\sqrt[3]{8n^3 + 1} + 4n^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

khi $n \rightarrow +\infty$. (1)

Do đó tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ khi và chỉ khi $a = -1$.

b) Từ lí luận ở phần a) ta suy ra

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a > -1 \\ 0 & \text{nếu } a = -1 \\ -\infty & \text{nếu } a < -1. \end{cases}$$

Bởi vậy điều kiện cần để tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x_m < x_{m+1} < x_{m+2} < \dots$ là $a \geq -1$.

Ta chứng minh $a \geq -1$ là điều kiện đủ để có kết luận trên.

Thật vậy với $a \geq -1$

$$x_{n+1} - x_n = 2(n+1) + a\sqrt[3]{8(n+1)^3 + 1} - 2n - a\sqrt[3]{8n^3 + 1}$$

$$= 2 + a(\sqrt[3]{8(n+1)^3 + 1} - \sqrt[3]{8n^3 + 1})$$

$$\geq 2 - (\sqrt[3]{8(n+1)^3 + 1} - \sqrt[3]{8n^3 + 1})$$

$$= 2 + \sqrt[3]{8n^3 + 1} - \sqrt[3]{8(n+1)^3 + 1} > 0, \text{ vì}$$

$$(2 + \sqrt[3]{8n^3 + 1})^3 = 8 + 12\sqrt[3]{8n^3 + 1} + 6(\sqrt[3]{8n^3 + 1})^2 + 8n^3 + 1$$

$$> 8 + 12.2n + 6(2n)^2 + 8n^3 + 1$$

$$= 8(1 + 3n + 3n^2 + n^3) + 1 = 8(n+1)^3 + 1.$$

Suy ra $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$

Vậy dãy số (x_n) là dãy số tăng kể từ số hạng nào đó khi và chỉ khi $a \geq -1$ và trong trường hợp đó (x_n) là dãy số tăng ngay từ số x_1 . $\square$

➤ **Nhận xét.** Rất nhiều bạn nhầm lẫn trong lí luận cho phần cuối của bài toán. Chỉ có hai bạn sau có lời giải đúng:

Quảng Nam: Phạm Tuấn Anh, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **TP. Cần Thơ:** Hoàng Công Đức, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T12/412.** Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^3 + y^3) = x^2 f(x) + y^2 f(y) \quad (1)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải (Theo đa số các bạn).

Từ (1) cho $y = 0$, ta được

$$f(x^3) = x^2 f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Từ đó suy ra

$$f(x^3 + y^3) = f(x^3) + f(y^3) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

hay $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (3)

Từ (3) cho $x = 0, y = 0$, ta được $f(0) = 0$ và vì vậy $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (4)

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thu được $f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{Z}$.

Sử dụng hệ thức $(x+1)^3 + (x-1)^3 = 2x^3 + 6x$ và (2) thu được

$$\begin{aligned} f((x+1)^3 + (x-1)^3) &= f(2x^3 + 6x) \\ &= 2f(x^3) + 6f(x) = 2x^2 f(x) + 6f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{hay } f((x+1)^3 + (x-1)^3) & \\ &= 2x^2 f(x) + 6f(x), \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5)$$

Mặt khác, sử dụng (2), (3) và (4) ta có

$$\begin{aligned} f((x+1)^3 + (x-1)^3) &= f((x+1)^3) + f((x-1)^3) \\ &= (x+1)^2 f(x+1) + (x-1)^2 f(x-1) \\ &= (x+1)^2 (f(x) + f(1)) + (x-1)^2 (f(x) + f(-1)) \\ &= (2x^2 + 2)f(x) + 4xf(1), \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{hay } f((x+1)^3 + (x-1)^3) & \\ &= (2x^2 + 2)f(x) + 4xf(1), \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $f(x) = xf(1)$ hay $f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn điều kiện bài ra.

Kết luận. Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$ tùy ý. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là dạng toán quen biết về phương trình hàm nên có số lượng lớn các bài giải gửi đến Toà soạn. Các bạn đều có lời giải đúng và cách giải tương tự như cách đã trình bày trên đây. Một số bạn sử dụng các đẳng thức khác như $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ và $x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1 \dots$ để thiết lập hệ thức $f(x) = xf(1)$.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài L1/412.** Đường kính góc của Mặt Trời nhìn từ Trái Đất là $\alpha = 10^{-2}$ rad. Xác định tỉ số mật độ trung bình (khối lượng riêng) của Trái Đất và Mặt Trời. Cho biết độ dài năm

của Trái Đất là $T = 10^{-7} \pi$ (s), gia tốc trọng trường của Trái Đất là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, mà bán kính Trái Đất là $R_1 = 6400 \text{ km}$.

Lời giải. Khi Trái Đất quay quanh Mặt Trời thì chịu lực hấp dẫn $F = G \frac{MM_1}{L^2}$ trong đó M, M_1 lần lượt là khối lượng Mặt Trời và Trái Đất. Lực này truyền cho Trái Đất một gia tốc hướng tâm $a = \omega^2 L = \frac{4\pi^2}{T^2} L$

Từ định luật II Newton ta có

$$G \frac{MM_1}{L^2} = M_1 \frac{4\pi^2}{T^2} L \quad (1)$$

Thay $\frac{GM_1}{R_1^2} = g$ vào (1) ta được

$$\frac{M_1}{M} = \frac{gR_1^2 T^2}{4\pi^2 L^3} \quad (2)$$

Thay $M_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3 D_1; M = \frac{4}{3} \pi R^3 D$ vào (2) ta

$$\text{được } \frac{D_1}{D} = \frac{gT^2}{32\pi^2 R_1} \left(\frac{2R}{L} \right)^3 \quad (3)$$

Thay $\frac{2R}{L} = \alpha$ vào (3) ta được $\frac{D_1}{D} = \frac{gT^2 \alpha^3}{32\pi^2 R_1}$

Thay số ta tính được $\frac{D_1}{D} \approx 4,79. \square$

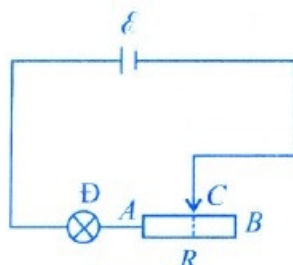
► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Thái Bình: Nguyễn Văn Sơn, 11A2, THPT Bắc Đông Quan; **Nam Định:** Đinh Việt Thắng, 11 Lí; Bùi Xuân Hiền, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, 12 Lí, THPT chuyên Biên Hòa; **Nghệ An:** Trần Nhật Minh, Trần Văn Bắc 12A6, Phan Văn Sao, K43A6, THPT chuyên ĐH Vinh; Lê Xuân Bào 10A3 THPT chuyên Phan Bội Châu; **Tiền Giang:** Võ Việt Tân, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang.

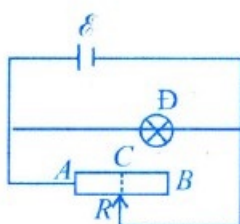
NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/412.** Một nguồn điện có suất điện động $E = 9 \text{ V}$ và điện trở trong $r = 0,5 \Omega$ được dùng để thắp sáng một bóng đèn ghi $6 \text{ V} - 6 \text{ W}$ ở mạch ngoài. Để bóng đèn sáng bình thường, người ta phải mắc bóng đèn với một biến trở có con chạy. Tìm các cách mắc bóng đèn với biến trở (vẽ hình) và nêu cách chọn giá trị của biến trở ứng với mỗi cách mắc. Cách mắc đèn nào là có lợi nhất?

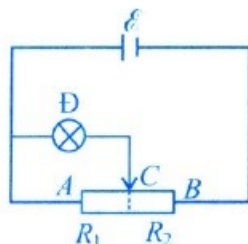
Lời giải. Có 6 cách mắc (tương ứng với các hình 1, 2, 3, 4, 5, 6).



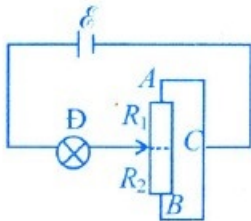
Hình 1



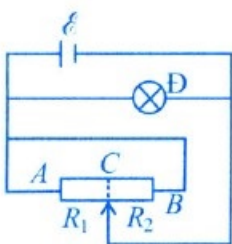
Hình 2



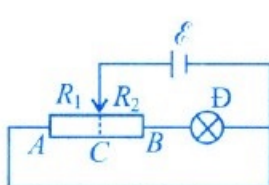
Hình 3



Hình 4



Hình 5



Hình 6

• **Cách 1.** (hình 1). Dễ dàng tính được $R_{AC} = 2,5(\Omega)$, do đó điện trở toàn phần của biến trở là $R \geq 2,5(\Omega)$.

• **Cách 2.** (hình 2). Dễ dàng tính được $R_{AC} = 1,2(\Omega)$, do đó điện trở toàn phần của biến trở là $R \geq 1,2(\Omega)$.

• **Cách 3.** (hình 3). Ta chọn biến trở có điện trở toàn phần $R = R_1 + R_2$ và con chạy C ở vị trí chia biến trở thành các phần thỏa mãn điều kiện $R_1 \geq 1,2(\Omega)$ (1) và $R_2 = \frac{2,5R_1 - 3}{6 + R_1}(\Omega)$.

Cho R_1 một giá trị nào đó thỏa mãn (1), ta tìm được giá trị R_2 tương ứng. Ví dụ cho $R_1 = 2(\Omega)$

$$\Rightarrow R_2 = 0,25(\Omega) \text{ và } R = 2,25(\Omega).$$

• **Cách 4.** (hình 4). Tương tự cách 1, nhưng ở đây ta chọn biến trở có con chạy C nằm ở vị trí chia biến trở thành các phần thỏa mãn điều

$$\text{kiện } R_{id} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2,5(\Omega). \text{ Cho } R_1 \text{ một}$$

giá trị nào đó ta tìm được giá trị R_2 tương ứng. Điện trở toàn phần của biến trở là $R = R_1 + R_2$. Ví dụ cho $R_1 = 5(\Omega) \Rightarrow R_2 = 5(\Omega)$ và $R = 10(\Omega)$.

• **Cách 5.** (hình 5). Tương tự cách 2, nhưng ở đây ta chọn biến trở có con chạy C nằm ở vị trí chia biến trở thành các phần thỏa mãn điều

$$\text{kiện } R_{id} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1,2(\Omega). \text{ Cho } R_1 \text{ một giá}$$

trị nào đó ta tìm được giá trị R_2 tương ứng. Điện trở toàn phần của biến trở là $R = R_1 + R_2$. Ví dụ cho $R_1 = 2,4(\Omega) \Rightarrow R_2 = 2,4(\Omega)$ và $R = 4,8(\Omega)$.

• **Cách 6.** (hình 6). Ta chọn biến trở có con chạy C nằm ở vị trí chia biến trở thành các phần thỏa mãn điều kiện $0 \leq R_2 < 2,5(\Omega)$ (2)

$$\text{và } R_1 = \frac{R_2 + 6}{5 - 2R_2}(\Omega). \text{ Cho } R_2 \text{ một giá trị nào}$$

đó trong khoảng (2), ta tìm được giá trị R_1 tương ứng. Điện trở toàn phần của biến trở là $R = R_1 + R_2$. Ví dụ cho $R_2 = 2(\Omega) \Rightarrow R_1 = 8(\Omega)$ và $R = 10(\Omega)$.

*Cách mắc đèn có lợi nhất khi tổng công suất tiêu thụ trên biến trở và trong nguồn điện là nhỏ nhất. Dễ dàng thấy rằng mắc theo cách 1 có lợi nhất. □

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải khá tốt:

Hà Nam: Đinh Ngọc Hải, 12 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý; **Nam Định:** Đinh Việt Thắng, 12 Lí, Đặng Phúc Cường, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Nguyễn Văn Sơn, 11A2, THPT Bắc Đông Quan, Đông Hưng; **Nghệ An:** Nguyễn Hiền Trang, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Bình:** Nguyễn Duy Khánh, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Giải đáp Câu lạc bộ: CÁC BINH CHỦNG TRONG QUÂN ĐỘI

(Đề đăng trên THPT số 414, tháng 12 năm 2011)

[illegible]

Từ khóa trong cột sẫm
màu là

BIÊN GIỚI BIỂN ĐẢO KHÔNG PHÂN

Các bạn có lời giải tốt là:

- 1) *Lương Thị Cẩm Tú*, 7D, THCS Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**.
- 2) *Hoàng Ngọc Kim Chi*, 9A2, THCS TT. Đông Hưng, **Thái Bình**.
- 3) *Nguyễn Quang Trọng*, 11A1, THCS Tây Tiền Hải, **Thái Bình**.
- 4) *Nguyễn Thị Ngọc Mai*, 8B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, **Thanh Hóa**.
- 5) *Trần Võ Hoàng*, 12 Toán 1, K19, THPT chuyên **Hà Tĩnh**.
- 6) *Nguyễn Hữu Chánh*, 35SPTA-A, CĐSP **Vĩnh Long**.
- 7) *Cao Thị Hà Lê*, 12A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**.

ĐAN OUỖNH

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T7/416. Triangle ABC ($AB > AC$) is inscribed in circle (O) . The exterior angle bisector of BAC meets (O) at another point E ; M, N are the midpoints of BC, CA respectively; F is the perpendicular foot of E on AB , K is the intersection of MN and AE . Prove that KF and BC are parallel.

T8/416. Solve the equation

$$\sin^{2n+1} x + \sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 - 2 = 0$$

where n is a given positive integer.

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/416. Find all polynomials $P(x)$ such that

$$\begin{cases} P(2)=12 \\ P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

T10/416. Let $r_1, r_2, \dots, r_n$ be n rational numbers such

that $0 < r_i \leq \frac{1}{2}$, $\sum_{i=1}^n r_i = 1$ ($n > 1$), and let $f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right]$.

Find the greatest value of the expression $P(k) = 2k - \sum_{i=1}^n f(kf_i)$ where k runs over the integers $\mathbb{Z}$ (the notation $[x]$ means the greatest integer not exceeding x).

T11/416. Suppose that $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ is a continuous function such that $f(x)+f(x+1006)$ is a rational number if and only if $x\in\mathbb{R}$.

$$f(x+20)+f(x+12)+f(x+2012)$$

is irrational. Prove that $f(x)=f(x+2012)$ for all $x\in\mathbb{R}$

T12/416. Prove the following inequality

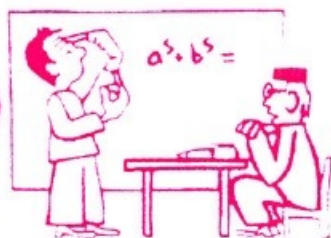
$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r},$$

where m_a, m_b, m_c are the medians; h_a, h_b, h_c are the altitudes from A, B, C and R, r are the circumradius and inradius, respectively.

Translated by LE MINH HA

DIỄN ĐÀN

DAY HỌC TOÁN



Trong sách Bài tập Đại số 10 Nâng cao, trang 117 có Bài tập 4.87 như sau:

Chứng minh rằng nếu các số a, b, c đều dương thì

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc \quad (I)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Việc chứng minh BĐT (I) là dễ dàng, bằng cách áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương.

BĐT (I) tương đương với hai BĐT sau:

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) \geq 9 \quad (II)$$

$$\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)(a^2+b^2+c^2) \geq 9 \quad (III)$$

Bây giờ chúng ta sẽ vận dụng các BĐT (I), (II), (III) để sáng tạo một số bài toán trong Lượng giác và Hình học.

VẬN DỤNG SÁNG TẠO MỘT BẤT ĐẲNG THỨC trong sách Bài tập Đại số 10 Nâng cao

NGUYỄN VĂN THIẾT

(GV THPT Vinh Xuân, Phú Vang, Thừa Thiên - Huế)

I. VẬN DỤNG VÀO LƯỢNG GIÁC

1) Nếu tam giác ABC nhọn thì vận dụng BĐT (I) cho ba số dương $\tan A, \tan B, \tan C$ ta có

$$(\tan A + \tan B + \tan C)(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C) \geq 9 \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

Lại có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$,

$$\text{suy ra } \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9 \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\tan A = \tan B = \tan C \Leftrightarrow A = B = C. \text{ Vậy}$$

Trong tam giác nhọn ABC ta có BĐT

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

2) Với tam giác ABC bất kì. Áp dụng BĐT (I)

với ba số dương $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ ta có

$$\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right) \left(\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2}\right) \geq 9 \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}.$$

$$\text{Lại có } \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2},$$

$$\text{suy ra } \cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\cot \frac{A}{2} = \cot \frac{B}{2} = \cot \frac{C}{2} \Leftrightarrow A = B = C. \text{ Vậy}$$

Trong tam giác ABC ta có BĐT

$$\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} \geq 9$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

3) Chúng ta đã biết các BĐT trong tam giác:

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow 18 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$$

$$\text{và } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

Vậy thì, hãy so sánh hai biểu thức

$$18 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \text{ và } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C.$$

Vận dụng BĐT (I) với ba số dương $\sin A, \sin B, \sin C$ ta có

$$(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \geq 9 \sin A \sin B \sin C.$$

Lại có $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
và áp dụng công thức góc nhân đôi suy ra
 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 18 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$. Vậy

Trong tam giác ABC ta có BĐT kép sau đây:

$$18 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

Các đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

4) Từ BĐT $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9$ và
 $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C$

$$\geq \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A,$$

hỏi có tồn tại BĐT mạnh hơn:

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A \geq 9?$$

Câu trả lời là **có**. Thật vậy, trong tam giác nhọn ABC, áp dụng BĐT (II) với ba số dương $\cos A, \cos B, \cos C$ ta có

$$(\cos A + \cos B + \cos C) \times \left(\frac{\cos A}{\cos B \cos C} + \frac{\cos B}{\cos C \cos A} + \frac{\cos C}{\cos A \cos B} \right) \geq 9 \quad (*)$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\cos A}{\cos B \cos C} &= \frac{-\cos(B+C)}{\cos B \cos C} \\ &= \frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C}{\cos B \cos C} = \tan B \tan C - 1. \end{aligned}$$

Tương tự $\frac{\cos B}{\cos C \cos A} = \tan C \tan A - 1,$

$$\frac{\cos C}{\cos A \cos B} = \tan A \tan B - 1.$$

Kết hợp với BĐT (*) suy ra

$$\begin{aligned} &\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A \\ &\geq \frac{9}{\cos A + \cos B + \cos C} + 3 \quad (**) \end{aligned}$$

Lại có $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ nên

$$\frac{9}{\cos A + \cos B + \cos C} + 3 \geq 6 + 3 = 9 \quad (***)$$

Từ (**) và (***) suy ra BĐT

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\cos A = \cos B = \cos C \Leftrightarrow A = B = C. \text{ Vậy}$$

Trong tam giác nhọn ABC ta có

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

5) Chúng ta đã biết các BĐT trong tam giác:

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}; \\ \cot A + \cot B + \cot C &\geq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Hãy so sánh tích số $\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{2}$ với tích

$$(\sin A + \sin B + \sin C)(\cot A + \cot B + \cot C).$$

Áp dụng BĐT (II) với ba số dương $\sin A, \sin B, \sin C$ ta có

$$\begin{aligned} &(\sin A + \sin B + \sin C) \times \\ &\times \left(\frac{\sin A}{\sin B \sin C} + \frac{\sin B}{\sin C \sin A} + \frac{\sin C}{\sin A \sin B} \right) \geq 9. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\sin A}{\sin B \sin C} &= \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin B \sin C} \\ &= \cot C + \cot B. \end{aligned}$$

Tương tự $\frac{\sin B}{\sin C \sin A} = \cot A + \cot C,$

$$\frac{\sin C}{\sin A \sin B} = \cot B + \cot A.$$

Suy ra $(\sin A + \sin B + \sin C)(\cot A + \cot B + \cot C) \geq \frac{9}{2}.$

Đẳng thức trong (5) xảy ra khi và chỉ khi $\sin A = \sin B = \sin C \Leftrightarrow A = B = C$. Vậy

Trong tam giác ABC ta có

$$(\sin A + \sin B + \sin C)(\cot A + \cot B + \cot C) \geq \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

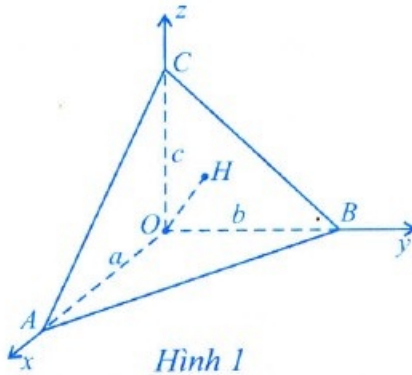
II. VẬN DỤNG VÀO HÌNH HỌC

★ **Bài toán 1.** Cho tứ diện OABC vuông tại O. Gọi α, β, γ lần lượt là số đo các góc tạo

bởi đường cao OH với các cạnh OA , OB , OC .
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{1}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}.$$

Lời giải. Đặt $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình 1. Khi đó $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.



Hình 1

Phương trình $mp(ABC)$ là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + cay + abz - abc = 0.$$

Vì $OH \perp mp(ABC)$ nên đường thẳng OH nhận $\vec{n} = (bc; ca; ab)$ làm VTCP. Rõ ràng $\vec{i} = (1;0;0)$ là VTCP của đường thẳng OA .

$$\text{Do đó } \cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

$$\text{Suy ra } \cos^2 \alpha = \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$\text{tương tự } \cos^2 \beta = \frac{c^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

$$\text{Từ đó ta có } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \quad (1)$$

Áp dụng BĐT (III) với ba số dương $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ ta có

$$\left(\frac{1}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{1}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma \cdot \sin \alpha} \right) \times (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) \geq 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$P = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{1}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma \cdot \sin \alpha} \geq \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma$
 $\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta = \cos^2 \gamma \Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy $\min P = \frac{9}{2} \Leftrightarrow OABC$ là tứ diện vuông cân ở O . $\square$

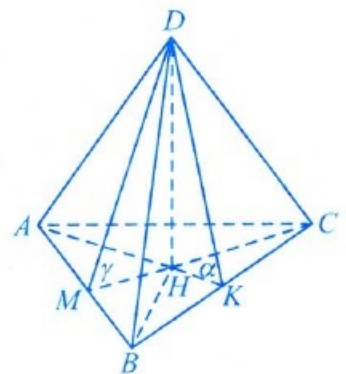
★ Bài toán 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$ và số đo các góc tạo bởi các mặt phẳng (DBC) , (DCA) , (DAB) với mặt phẳng (ABC) tương ứng là α , β , γ đều nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

Lời giải. Ta có $\triangle ABC = \triangle DBC = \triangle DCA = \triangle DAB$ (c.c.c).

Kí hiệu diện tích các tam giác này là S .

Gọi H , K , N , M theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của D trên $mp(ABC)$, BC , CA , AB như hình 2.



Hình 2

Khi đó $\widehat{DKH} = \alpha$,

$\widehat{DNH} = \beta$, $\widehat{DMH} = \gamma$.

Theo định lý hình chiếu ta có

$$S_{HBC} = S_{DBC} \cdot \cos \alpha = S \cdot \cos \alpha,$$

$$\text{Tương tự } S_{HCA} = S \cdot \cos \beta, S_{HAB} = S \cdot \cos \gamma.$$

Do các góc α , β , γ đều nhọn nên điểm H nằm trong tam giác ABC , suy ra

$$S_{ABC} = S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}$$

$$\Leftrightarrow S = S(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 \quad (3)$$

Áp dụng BĐT (II) với ba số dương $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ ta có

$$(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \times \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \right) \geq 9 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$T = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} HK = HN = HM \\ S_{HBC} = S_{HCA} = S_{HAB} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} H \text{ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác } ABC \\ H \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow ABC \text{ là tam giác đều.}$$

Vậy $\min T = 9$ khi $ABCD$ là tứ diện đều. $\square$

★ Bài toán 3. Cho tứ diện $OABC$ vuông ở O có đường cao $OH = h$. Kí hiệu S_1, S_2, S_3 theo thứ tự là diện tích các tam giác OAB, OBC, OCA . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Lời giải. Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình 1.
Độ dài đường cao OH là

$$OH = h = d(O, (ABC)) = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$
$$\text{Suy ra } h^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad (5)$$

Áp dụng BĐT (III) với ba số dương $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$
ta có $(ab + bc + ca) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9 \quad (6)$

Từ (5) và (6) suy ra $ab + bc + ca \geq 9h^2$
 $\Leftrightarrow S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{9}{2}h^2$, suy ra $S \geq \frac{9}{2}h^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$
 $\Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy $\min S = \frac{9}{2}h^2$, khi $OABC$ là tứ diện vuông cân ở O .

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tứ diện $OABC$ vuông ở O . Kí hiệu S, S_1, S_2, S_3 theo thứ tự là diện tích của các tam giác ABC, OBC, OCA, OAB . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{S_1S_2} + \frac{1}{S_2S_3} + \frac{1}{S_3S_1} \geq \frac{9}{S^2}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác thì

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 18Rr.$$

trong đó R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác đó.

TỪ MỘT BÀI TOÁN... (Tiếp trang 7)

Mặt khác AC là hình chiếu của SC trên mp($ABCD$) nên $SC \perp CD$. Vậy tam giác SCD vuông tại C .

$$\text{Vì } \frac{d(B; (SCD))}{d(A; (SCD))} = \frac{BE}{AE} = \frac{1}{2} \text{ nên}$$
$$d(H; (SCD)) = \frac{1}{3}d(A; (SCD)).$$

Tứ diện $ASCD$ có $SA \perp (ACD)$ và $AC \perp CD$ nên theo Bài toán 3 ta có $d(A; (SCD)) = AK$ (trong đó K là hình chiếu của A trên SC) và

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AK = a.$$

$$\text{Vậy } d(H; (SCD)) = \frac{AK}{3} = \frac{a}{3}. \quad \square$$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$. Các mặt phẳng $(SAB), (SAD)$ vuông góc với đáy; SC tạo với đáy một góc 45° . Tính khoảng cách giữa AD và mặt phẳng (SBC) .

2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2a, BC = 2a, AA' = a$. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AM = 3MD$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$.

3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BN .

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB \parallel CD$. Tam giác ABC vuông tại A , $AB = a, BC = CD = 2a, SA = SB = SC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .

5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc mặt phẳng đáy (ABC) . Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) theo a , biết rằng

$$SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; $\widehat{ABC} = 90^\circ, SA = AB = BC = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 416 (2.2012)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHÁC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Nguyễn Việt Hùng – Dùng biểu thức liên hợp để giải toán.
- 3 Hướng dẫn giải Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011.
- 4 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2011 – 2012.
- 5 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Cao Thị Thanh Lê – Từ một bài toán tính khoảng cách trong Sách giáo khoa Hình học 11.
- 8 Phan Thanh Quang – Điểm giao thừa.
Phan Cung Đức – Bạn Rỗng ở đâu?
- 9 Thử sức trước kì thi – Đề số 5.
- 10 Hướng dẫn giải Đề số 3.
- 12 **Từ kho tàng toán học – From Math Treasure**
Trần Nam Dũng – Định lí nhỏ Fermat.
- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/416 ..., T12/416, L1/416, L2/416.
- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 412.
- 27 **Giải đáp Câu lạc bộ: Các binh chủng trong quân đội.**
- 28 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Nguyễn Văn Thiết – Vận dụng sáng tạo một bất đẳng thức trong sách Bài tập Đại số 10 Nâng cao.

Bìa 4: Câu lạc bộ – Math Club

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH

Trĩ sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật : MINH THƠ, THANH LONG

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



Hình tượng RỒNG VIỆT NAM



Hình 3a

Con Rồng có vị trí đặc biệt trong văn hóa, tín ngưỡng của dân tộc Việt Nam. Rồng là biểu tượng linh thiêng của người Việt từ thời xa xưa; được chạm khắc trong kiến trúc cung điện, đền đài; được thể hiện trong hội họa, thi ca,... Hình tượng Rồng được thay đổi qua từng thời đại. Bạn hãy sắp xếp các hình ảnh Rồng dưới đây cho phù hợp với thời gian và triều đại.

Thời gian: 1a) Thế kỉ X-XII, 1b) Thế kỉ XII- XIV, 1c) Thế kỉ XIV-XVII, 1d) Thế kỉ XVIII, 1e) Thế kỉ XIX- XX.

Triều đại: 2a) Nhà Lê, 2b) Nhà Nguyễn, 2c) Nhà Lý, 2d) Nhà Tây Sơn, 2e) Nhà Trần.

Hình ảnh Rồng: Hình 3a, Hình 3b, Hình 3c, Hình 3d, Hình 3e.

VÂN KHANH



Hình 3b



Hình 3c



Hình 3d



Hình 3e