



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

1 2012
Số 415

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 49

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
TẠI TP. HỒ CHÍ MINH

Chúc Mừng Năm Mới! 2012

Sức khỏe
An Khang
Thịnh Vượng
Hạnh Phúc



Xuân
2012
NHÂM THÌN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
TẠI TP. HỒ CHÍ MINH
ĐỊA CHỈ: 231 NGUYỄN VĂN CÚ, QUẬN 5
ĐIỆN THOẠI: (08) 38356111, FAX: (08) 38350983
WEBSITE: www.hxbgd.vn



KHAI THÁC NHẢM NGHIỆM của phương trình bậc hai

TRẦN XUÂN UY
(Nam Định)

Trong Sách giáo khoa Toán 9, ở bài "Hệ thức Vi-ét và ứng dụng" đã nêu hai cách nhằm nghiệm của phương trình bậc hai như sau

1) Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có
a) $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là

$$x_1 = 1, \text{ còn nghiệm kia là } x_2 = -\frac{c}{a}.$$

b) $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là
 $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

2) Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

Sách giáo khoa Toán 9 còn có một ví dụ "Tính nhẩm nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$ ", với lời giải "Vì $2 + 3 = 5$; $2 \cdot 3 = 6$ nên $x_1 = 2, x_2 = 3$ là hai nghiệm của phương trình đã cho".

Trong rất nhiều trường hợp, nếu khéo léo phát hiện, triệt để khai thác nhằm nghiệm thì ta có được lời giải ngắn gọn, thuyết phục. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

★ **Thí dụ 1. Giải phương trình**

$$x^2 - x - 4m^2 + 6m - 2 = 0 \quad (1)$$

Phân tích. Ta có $S = 1$; $P = -2(2m^2 - 3m + 1) = (-4m + 2)(m - 1) = (2m - 1)(-2m + 2) = \dots$

Ta chọn $P = (2m - 1)(-2m + 2)$ để
 $(2m - 1) + (-2m + 2) = 1 = S$.

Lời giải. Ta có $S = 1 = (2m - 1) + (-2m + 2)$,

$$P = -4m^2 + 6m - 2 = (2m - 1)(-2m + 2).$$

Suy ra PT(1) có hai nghiệm $x_1 = 2m - 1$; $x_2 = -2m + 2$. □

★ **Thí dụ 2. Giải hệ phương trình**

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Lời giải. (2) $\Leftrightarrow y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0$ (2a)

Coi (2a) là phương trình bậc hai với ẩn y , x là tham số, có $S = x + 1$ và

$$P = -2x^2 + 5x - 2 = -(x - 2)(2x - 1) = (-x + 2)(2x - 1) = (x - 2)(-2x + 1).$$

Ta chọn $P = (-x + 2)(2x - 1)$ để
 $(-x + 2) + (2x - 1) = x + 1 = S$.

Suy ra PT (2a) có hai nghiệm $y_1 = 2 - x$; $y_2 = 2x - 1$.

Dẫn đến

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Giải ra ta được HPT đã cho có hai nghiệm là

$$(x; y) = (1; 1), \text{ và } (x; y) = \left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5}\right). \quad \square$$

Nhận xét. Để biến đổi $2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0$ thành $(x + y - 2)(2x - y - 1) = 0$ thu được $y = 2 - x$ và $y = 2x - 1$ bằng cách tách, thêm bớt, ... rõ ràng khó khăn hơn nhiều so với phân tích $-2x^2 + 5x - 2$ thành $(2 - x)(2x - 1)$.

★ **Thí dụ 3. Tìm m để phương trình sau có nghiệm.**

$$\frac{(1+x)x^3}{2} = (x+m)(x+2m) \quad (3)$$

Lời giải. (3) $\Leftrightarrow 4m^2 + 6xm - x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + \frac{3x}{2}m + \frac{-x^4 - x^3 + 2x^2}{4} = 0 \quad (3a)$$

Coi (3a) là phương trình bậc hai với ẩn m , x là tham số. Ta có $S = -\frac{3x}{2} = \frac{-x^2 - 2x}{2} + \frac{x^2 - x}{2}$;

$$P = \frac{-x^4 - x^3 + 2x^2}{4} = \frac{-x^4 + x^3 - 2x^3 + 2x^2}{4} = \frac{-x^2(x^2 - x) - 2x(x^2 - x)}{4} = \frac{-x^2 - 2x}{2} \cdot \frac{x^2 - x}{2}.$$

Do đó PT(3a) có hai nghiệm

$$m_1 = \frac{-x^2 - 2x}{2}; \quad m_2 = \frac{x^2 - x}{2}. \quad \text{Vì vậy ta có}$$

$$x^2 + 2x + 2m = 0 \quad (3b) \text{ hoặc } x^2 - x - 2m = 0 \quad (3c)$$

PT(3) có nghiệm $\Leftrightarrow$ PT(3b) hoặc PT(3c) có

$$\text{nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \geq 0 \\ 1 + 8m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}; m \geq -\frac{1}{8}.$$

Suy ra PT (3) luôn có nghiệm với mọi m . $\square$

Nhận xét. Phân tích bằng cách tách, thêm, bớt,... để đưa PT(3) trực tiếp về PT(3b), hoặc PT (3c) khó hơn rất nhiều so với phân tích $-x^4 - x^3 + 2x^2$ thành $(-x^2 - 2x)(x^2 - x)$.

✪Thí dụ 4. Cho phương trình

$$x^2 - m(m+1)x + m^3 = 0 \quad (4)$$

Xác định tham số m để nghiệm lớn hơn của phương trình (4) không nhỏ hơn $\frac{1}{4}$.

Lời giải. Ta có $P=m^3=n^2m$, $S=m(m+1)=m^2+m$ nên PT(4) luôn có hai nghiệm $x_1=m^2$, $x_2=m$. Xảy ra hai khả năng

$$1) \begin{cases} m^2 < m \\ m \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq m < 1; 2) \begin{cases} m^2 > m \\ m^2 \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m > 1. \end{cases}$$

Vậy $m \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $m \geq \frac{1}{4}$ và $m \neq 1$ là các giá trị cần tìm. $\square$

✪Thí dụ 5. Giải phương trình

$$x^2 - 2x - 1 = 2(1-x)\sqrt{x^2 + 2x - 1} \quad (5)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{x^2 + 2x - 1} = t$ (*) thì PT (5) trở thành $t^2 + 2(x-1)t - 4x = 0$ (5a)

Coi (5a) là phương trình bậc hai với ẩn t , x là tham số, ta có

$$P = -4x = -2x \cdot 2; S = -2(x-1) = -2x + 2.$$

Suy ra PT (5a) có hai nghiệm $t_1 = -2x$; $t_2 = 2$.

Thay t tìm được vào PT(*), giải ra ta có $x = -1 - \sqrt{6}$ và $x = -1 + \sqrt{6}$ là hai nghiệm của PT(5). $\square$

✪Thí dụ 6. Giải phương trình

$$x - 2\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - x} = 0 \quad (6)$$

Lời giải. ĐK $x \geq 1$. Đặt $\sqrt{x-1} = t \geq 0$, $\sqrt{x} = u \geq 1$ thì $u > t$ và $t^2 - u^2 = -1 \Rightarrow u^2 - t^2 - 1 = 0$.

PT(6) trở thành $u^2 - 2t - t^2u + tu = u^2 - t^2 - 1$

$$\Leftrightarrow (u-1)t^2 + (2-u)t - 1 = 0 \quad (6a)$$

+) Nếu $u = 1$ thì PT(6a) trở thành $t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ trái với $u > t$.

+) Nếu $u > 1$, coi (6a) là phương trình bậc hai với ẩn t và u là tham số, ta có

$$a + b + c = u - 1 + 2 - u - 1 = 0$$

nên PT(6a) có hai nghiệm $t_1 = 1$; $t_2 = \frac{-1}{u-1} < 0$ (loại)

Suy ra $x = 2$ là nghiệm duy nhất của PT (6). $\square$

Nhận xét. Nhiều bài toán không bắt buộc phải tìm nghiệm của phương trình bậc hai, nhưng nếu có thể nhằm nghiệm (theo tổng và tích hoặc theo $a \pm b + c = 0$) thì cách giải sẽ tối ưu hơn. Sau đây là hai thí dụ minh họa.

✪Thí dụ 7. Tìm m ($m \neq 0$) và n để phương trình

$$mx^2 + (mn+1)x + n = 0 \quad (7)$$

có nghiệm duy nhất bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải. Cách 1. PT(7) có nghiệm duy nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = (mn-1)^2 = 0 \\ m\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (mn+1)\frac{1}{2} + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Cách 2. Ta có

$$S = -\frac{mn+1}{m} = (-n) + \left(-\frac{1}{m}\right); P = \frac{n}{m} = (-n) \cdot \left(-\frac{1}{m}\right).$$

Suy ra PT (7) luôn có nghiệm $x_1 = -n$; $x_2 = -\frac{1}{m}$.

Để PT (7) có nghiệm duy nhất là $\frac{1}{2}$, thì phải có

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2; n = -\frac{1}{2}. \square$$

✪Thí dụ 8. Cho phương trình

$$(m+2)x^2 + (1-3m)x + 2m-3 = 0 \quad (8)$$

Trong trường hợp phương trình (8) có hai nghiệm x_1, x_2 tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

Lời giải. Cách 1. Điều kiện để PT (8) có hai

$$\text{nghiệm } x_1, x_2 \text{ là } \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \Delta = (m-5)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -2.$$

$$\text{Khi đó } x_1 + x_2 = \frac{3m-1}{m+2}; x_1 \cdot x_2 = \frac{2m-3}{m+2}.$$

Tiếp theo dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng để khử m , ta thu được $x_1 + x_2 = 1 + x_1 \cdot x_2$.

(Xem tiếp trang 15)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2010 - 2011

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (4 điểm) Thu gọn các biểu thức

a) $A = \frac{(2-\sqrt{a})^2 - (3+\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}+1}$ với $a \geq 0$.

b) $B = \frac{\sqrt{a}+1}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}} : \frac{1}{a^2-\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Câu 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng

$$ad+bc \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$$

với a, b, c, d là các số thực.

b) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab+bc+ca.$$

Câu 3. (3 điểm) Cho phương trình

$$x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 3 = 0,$$

x là ẩn số.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm dương.

c) Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm âm.

Câu 4. (3 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4. \end{cases}$$

b) Chứng minh rằng số có dạng

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$$

chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n .

Câu 5. (4 điểm) Trên hai cạnh Ox, Oy của góc vuông xOy lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho $OA = OB$. Một đường thẳng đi qua A cắt OB tại M (M ở trong đoạn thẳng OB). Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AM , cắt AM tại H , cắt AO kéo dài tại I .

a) Chứng minh rằng $OI = OM$ và tứ giác $OMHI$ nội tiếp được.

b) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với BI tại K . Chứng minh rằng $OK = KH$. Điểm K di động trên đường cố định nào khi M di động trên OB ?

Câu 6. (2 điểm) Cho tam giác ABC cân tại B có $\widehat{ABC} = 80^\circ$. Lấy điểm I trong tam giác ABC sao cho $\widehat{IAC} = 10^\circ$ và $\widehat{ICA} = 30^\circ$. Hãy tính số đo góc $\widehat{AIB}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh) sưu tầm và giới thiệu

TIN BUỒN

Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ vô cùng thương tiếc báo tin:

ThS. HOÀNG NGỌC CẢNH

Sinh ngày: 22.12.1953.

Quê quán: Xã Đức Đông, huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh.

Giáo viên Trường THPT chuyên Hà Tĩnh, Cộng tác viên thân thiết của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Do mắc bệnh hiểm nghèo, đã từ trần vào hồi 21 giờ 45 phút ngày 18.12.2011 tại nhà riêng.

Tòa soạn xin chia buồn cùng gia đình và nhà trường.

Toán học và Tuổi trẻ

Số 415 (1-2012)

TOÁN HỌC
Tuổi trẻ 3

Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH THÁI BÌNH

NĂM HỌC 2010 - 2011

(Đề thi đã đăng trên THPT số 414, tháng 12 năm 2011)

Câu 1. Đặt $A = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{201\sqrt{2010}}$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} &= \frac{\sqrt{k}}{(k+1)k} = \frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k}}{k+1} > \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ \Rightarrow A &> \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2010}} - \frac{1}{\sqrt{2011}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2011}} > \frac{87}{89}. \end{aligned}$$

Lại có $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}}$

$$\begin{aligned} &< \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}} \\ &= \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\ \Rightarrow A &< 2 \left(\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2010}} - \frac{1}{\sqrt{2011}} \right) \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2011}} \right) < \frac{88}{45}. \end{aligned}$$

Câu 2. Phần dư của phép chia đa thức $p(x)$ cho $(x-1)(x^3+1)$ phải có bậc nhỏ hơn 4. Do đó $p(x)$ có dạng

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x^3+1)q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c \in \mathbb{R}) \\ &= (x^3+1)((x-1)q(x) + a) + bx^2 + cx + d - a. \\ \Rightarrow bx^2 + cx + d - a &\equiv x^2 + x + 1 \text{ hay } b = 1; c = 1; d - a = 1. \end{aligned}$$

Vì $p(x)$ chia cho $x-1$ dư 1 nên $p(1) = 1$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 1 \text{ hay } a = -1; d = 0.$$

Vậy phần dư cần tìm là $-x^3 + x^2 + x$.

Câu 3. Đặt $\sqrt[3]{x+1} = y - 5 \Rightarrow x = y^3 - 15y^2 + 75y - 126$.
Khi đó ta có HPT

$$\begin{cases} x = y^3 - 15y^2 + 75y - 126 & (1) \\ y = x^3 - 15x^2 + 75x - 126 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 15(x+y) + 76) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 - 15(x+y) + 76 = 0. \end{cases}$$

• Nếu $x = y$, thì thay vào PT (2) ta có $x^3 - 15x^2 + 74x - 126 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-7)(x^2 - 8x + 18) = 0 \Leftrightarrow x = 7.$$

• Nếu $x^2 + xy + y^2 - 15(x+y) + 76 = 0$ thì $x^2 + (y-15)x + y^2 - 15y + 76 = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta_x &= y^2 - 30y + 225 - 4y^2 + 60y - 304 \\ &= -3y^2 + 30y - 79 < 0, \forall y. \end{aligned}$$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 7$.

Câu 4. Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{\frac{a}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a+2b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b+2c}} \right)^2 \\ &\leq 3 \left(\frac{a}{b+c+2a} + \frac{b}{c+a+2b} + \frac{c}{a+b+2c} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} b+c+2a=4x \\ c+a+2b=4y \\ a+b+2c=4z. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } &\frac{a}{b+c+2a} + \frac{b}{c+a+2b} + \frac{c}{a+b+2c} \\ &= \frac{3x-y-z}{4x} + \frac{3y-z-x}{4y} + \frac{3z-x-y}{4z} \end{aligned}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right).$$

Mà $\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right) \geq 6$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c+2a} + \frac{b}{c+a+2b} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{9}{4} - \frac{6}{4} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

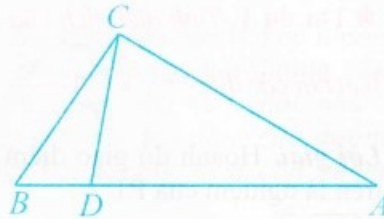
Câu 5. Vì

$$\hat{C} = 2\hat{A} + \hat{B}$$

$$\Rightarrow \hat{C} > \hat{B}$$

$$\Rightarrow AB > AC$$

Gọi D là điểm trên cạnh AB sao cho $AD = AC$.



$$\text{Ta có } \hat{C} = \widehat{BCD} + \widehat{DCA} = \widehat{BCD} + \widehat{CDA} = \widehat{BCD} + \hat{B} + \widehat{BCD} = 2\widehat{BCD} + \hat{B}.$$

$$\text{Mà } \hat{C} = 2\hat{A} + \hat{B} \text{ suy ra } \widehat{BCD} = \hat{A}$$

$$\Rightarrow \triangle BCD \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow BC^2 = BA \cdot BD = AB(AB - AD) = AB^2 - AB \cdot AC$$

$$\text{hay } c^2 = a^2 + b \cdot c \leq a^2 + \frac{b^2 + c^2}{2}$$

$$\Rightarrow c^2 \leq 2a^2 + b^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = c \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C}$.

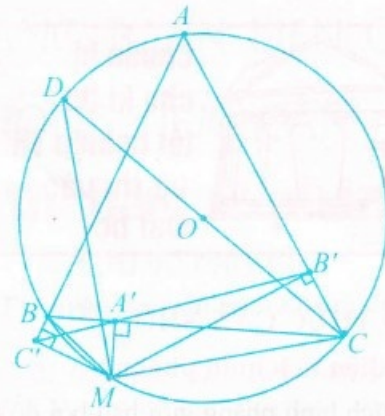
Suy ra $\hat{A} = 0$ (vô lí). Vậy $c^2 < 2a^2 + b^2$.

Câu 6. a) Vì các tứ giác $MA'B'C'$; $MC'BA'$ và $ABMC$ nội tiếp đường tròn nên có $\widehat{MA'B} + \widehat{MCB} = 180^\circ$; $\widehat{MA'C'} = \widehat{MBC'}$; $\widehat{MBC'} = \widehat{MCA}$.

Suy ra $\widehat{MA'B} + \widehat{MA'C'} = \widehat{MA'B} + \widehat{MCB'} = 180^\circ$, do đó A' , B' , C' thẳng hàng

b) Gọi D là điểm đối xứng của C qua O , ta có $\triangle DMC \sim \triangle BA'M$ (vì $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$; $\widehat{DMC} = \widehat{MA'B} = 90^\circ$).

$$\text{Suy ra } \frac{MC}{MA'} = \frac{CD}{MB} \Leftrightarrow MA' = \frac{MB \cdot MC}{2R}.$$



$$\text{Tương tự, ta có } MB' = \frac{MC \cdot MA}{2R}; MC' = \frac{MA \cdot MB}{2R}.$$

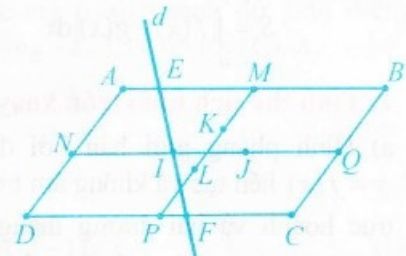
$$\text{Vậy } \frac{BC}{MA'} = \frac{CA}{MB'} + \frac{AB}{MC'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BC \cdot 2R}{MB \cdot MC} = \frac{CA \cdot 2R}{MC \cdot MA} + \frac{AB \cdot 2R}{MA \cdot MB}$$

$$\Leftrightarrow AC \cdot MB + AB \cdot MC = BC \cdot MA. (\text{định lí Ptolemy}).$$

Câu 7. Gọi

d là đường thẳng bất kì trong số n đường thẳng đã cho. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm



của các cạnh AB, AD, DC, CB . Giả sử d cắt AB tại E , d cắt DC tại F . Gọi I là giao điểm của d và NQ , h là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD . Ta có

$$\frac{S_{AEFD}}{S_{EBCF}} = m \Leftrightarrow \frac{AE + DF}{2} \cdot h = m \cdot \frac{BE + CF}{2} \cdot h$$

$$\Leftrightarrow NI = m \cdot IQ \Leftrightarrow NI = \frac{m}{m+1} \cdot NQ, \text{ suy ra điểm}$$

I cố định (vì m cho trước).

Tương tự ta tìm được ba điểm J, K, L cố định mà $n = 4k + 1$ đường thẳng đã cho đi qua chúng.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một điểm mà có ít nhất $k + 1$ đường thẳng đi qua.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN

(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

sưu tầm và giới thiệu



I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tính diện tích hình phẳng

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x)| dx \quad (1)$$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (2)$$

2. Tính thể tích khối tròn xoay

a) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$, quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay có thể tích là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (3)$$

b) Hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình $x = g(y)$ liên tục và không âm trên đoạn $[c; d]$, trục tung và hai đường thẳng $y = c, y = d$, quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay có thể tích là

$$V = \pi \int_c^d g^2(y) dy \quad (4)$$

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Tính diện tích hình phẳng

Các bài toán tính diện tích hình phẳng thường có lược đồ chung để giải như sau

- Tìm tọa độ giao điểm của các đường tạo nên hình phẳng.

MỘT SỐ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

LÊ HỒ QUÝ
(GV THPT Duy Tân, Kon Tum)

- Về minh họa miền cần tính diện tích (nếu thấy cần thiết).

- Sử dụng các công thức (1) hoặc (2) để tính toán.

★ **Thí dụ 1.** Tính diện tích của hình phẳng giới

hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$.

Lời giải. Hoành độ giao điểm của hai đường trên là nghiệm của PT

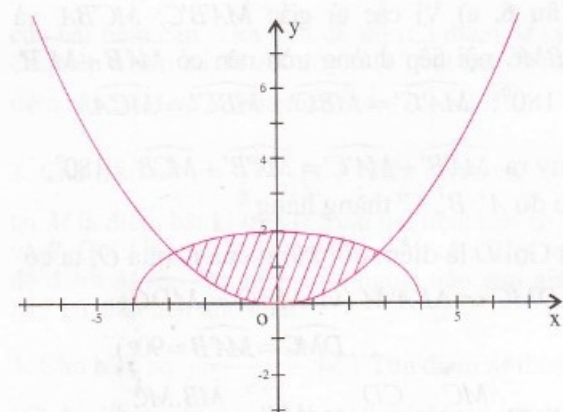
$$\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x^4}{32} + \frac{x^2}{4} - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}.$$

Trên đoạn $[-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$ ta có $\frac{x^2}{4\sqrt{2}} \leq \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và do hình nhận trục tung là trục đối xứng (h.1) nên

$$S = \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{8}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16 - x^2} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8}} x^2 dx.$$

• Ta có $\int_0^{\sqrt{8}} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{8}} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$



Hình 1

- Đặt $x = 4\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $dx = 4\cos t dt$.

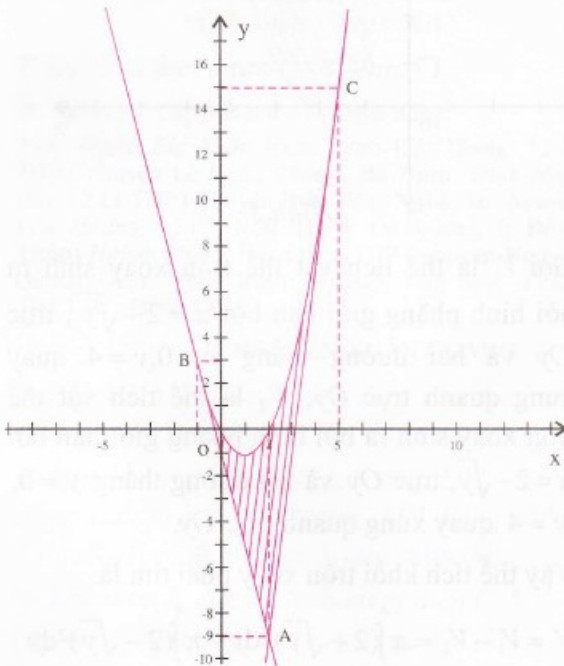
Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; khi $x = \sqrt{8} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Do đó } \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16-x^2} dx = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt \\ = (8t + 4\sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4.$$

Vậy $S = 2\pi + \frac{4}{3}$ (đvdt). $\square$

★ **Thí dụ 2.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P): $y = x^2 - 2x$ và hai tiếp tuyến của (P) đi qua điểm $A(2; -9)$.

Lời giải. (h. 2).



Hình 2

PT của hai tiếp tuyến với (P) đi qua điểm $A(2; -9)$ là $d_1: y = -4x - 1$; $d_2: y = 8x - 25$.

d_1 tiếp xúc với (P) tại điểm $B(-1; 3)$ và d_2 tiếp xúc với (P) tại điểm $C(5; 15)$. Diện tích hình phẳng phải tìm là

$$S = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x - (-4x - 1)) dx + \int_2^5 (x^2 - 2x - (8x - 25)) dx \\ = \int_{-1}^2 (x+1)^2 dx + \int_2^5 (x-5)^2 dx = 18 (\text{đvdt}). \quad \square$$

Lưu ý. Trong thực hành, nếu miền đang xét là miền không quen thuộc hoặc khó có thể vẽ minh họa được thì cách tốt nhất khi tính diện tích S là dùng công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$

và xử lý theo cách tính tích phân các hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối.

★ **Thí dụ 3.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x \ln^2(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \sqrt{e-1}$.

Lời giải. Gọi S là diện tích cần tìm. Vì $\frac{x \ln^2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \geq 0, \forall x \in [0; \sqrt{e-1}]$ nên

$$S = \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x \ln^2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow dt = \frac{2x dx}{x^2 + 1}.$$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; khi $x = \sqrt{e-1} \Rightarrow t = 1$.

$$\text{Vì vậy } S = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{6} (\text{đvdt}). \quad \square$$

★ **Thí dụ 4.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (e+1)x, y = (1+e^x)x$.

Lời giải. Hoành độ giao điểm của hai đường trên là nghiệm của PT $(e+1)x = (1+e^x)x$
 $\Leftrightarrow x(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

Gọi S là diện tích cần tìm. Khi $0 < x < 1$ thì $e^x - e < 0$ nên ta có

$$S = \int_0^1 |x(e^x - e)| dx = \int_0^1 x(e - e^x) dx = e \int_0^1 x dx - \int_0^1 x e^x dx.$$

Ta có $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Từ công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{e}{2} - 1 (\text{đvdt}). \quad \square$$

DẠNG 2. Tính thể tích vật thể tròn xoay

Để tính thể tích của khối tròn xoay khi quay một hình phẳng xung quanh một trục tọa độ, ta làm như sau :

- Tìm tọa độ giao điểm của các đường tạo nên hình phẳng.
- Viết PT $h(x,y)=0$ (nếu có) thành $y=f(x)$ hoặc $x=g(y)$.
- Sử dụng công thức (3) hoặc (4) để tính toán.

★**Thí dụ 5.** Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y=x\ln x$, $y=0$, $x=e$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox .

Lời giải. PT hoành độ giao điểm của các đường $y=x\ln x$ và $y=0$ là $x\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=0$ (Do $x>0$) $\Leftrightarrow x=1$.

Thể tích khối tròn xoay phải tìm là

$$V = \pi \int_1^e y^2 dx = \pi \int_1^e (x \ln x)^2 dx = \pi \int_1^e x^2 \ln^2 x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^e x^2 \ln^2 x dx &= \frac{x^3}{3} \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

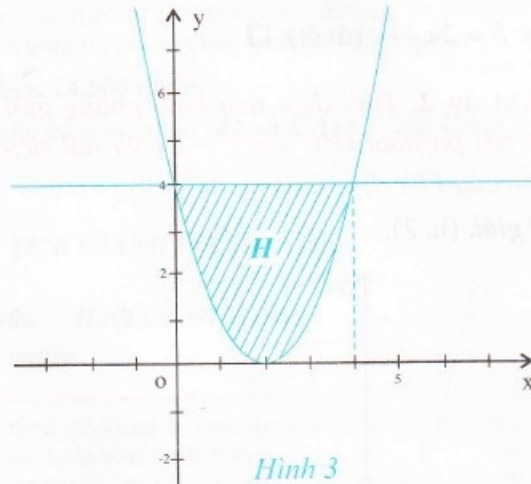
$$\Rightarrow \int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{2e^3 + 1}{9}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{\pi(5e^3 - 2)}{27} \text{ (đvtt)}. \quad \square$$

★**Thí dụ 6.** Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) giới

hạn bởi đường thẳng $y=4$ và parabol $y=(x-2)^2$ quanh trục Oy .

Lời giải. (h. 3) Ta có $y=(x-2)^2 \Leftrightarrow x=2 \pm \sqrt{y}$, và khi $x \in [0;4]$ thì $y \in [0;4]$. Do đó parabol gồm hai nhánh: nhánh thứ nhất có phương trình $x=2+\sqrt{y}$; nhánh thứ hai có phương trình $x=2-\sqrt{y}$.



Hình 3

Gọi V_1 là thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi $x=2+\sqrt{y}$, trục Oy và hai đường thẳng $y=0, y=4$ quay xung quanh trục Oy ; V_2 là thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi $x=2-\sqrt{y}$, trục Oy và hai đường thẳng $y=0, y=4$ quay xung quanh trục Oy .

Vậy thể tích khối tròn xoay phải tìm là

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \pi \int_0^4 (2+\sqrt{y})^2 dy - \pi \int_0^4 (2-\sqrt{y})^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 ((2+\sqrt{y})^2 - (2-\sqrt{y})^2) dy \\ &= \pi \int_0^4 8\sqrt{y} dy = \frac{128\pi}{3} \text{ (đvtt)}. \quad \square \end{aligned}$$

BÀI TẬP

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = -\sqrt{4-x^2}$, $x^2 + 3y = 0$.

b) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{8}$, $y = \frac{8}{x}$.

LỄ TỔNG KẾT VÀ TRAO GIẢI

CUỘC THI VIẾT CÂU CHUYỆN TÌNH HUỐNG ĐẠO ĐỨC VÀ PHÁP LUẬT

Ngày 17/12/2011, tại Hội trường UBND huyện Hoài Đức, Hà Nội đã diễn ra Lễ tổng kết và trao giải Cuộc thi viết câu chuyện tình huống Đạo đức và Pháp luật do Bộ GD&ĐT phối hợp cùng Công đoàn Giáo dục Việt Nam tổ chức. Các đơn vị Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, Vụ Pháp chế, Vụ Giáo dục Tiểu học và Vụ Giáo dục Trung học trực tiếp theo dõi cuộc thi. Tham dự buổi Lễ có PGS. TS Trần Quang Quý, Thứ trưởng Bộ GD&ĐT; bà Hồ Thị Lan Trà, Phó Chủ tịch Công đoàn Giáo dục Việt Nam; NGƯT Ngô Trần Ái, Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam; ông Lê Danh Ngân, Phó Chủ tịch UBND huyện Hoài Đức; Lãnh đạo các ngành, các vụ trong Bộ GD&ĐT và địa phương, Ban Tổ chức cuộc thi cùng đông đảo các giáo viên và học sinh, các phóng viên báo đài và tạp chí.

Cuộc thi đã được tổ chức nghiêm túc, thu hút được sự quan tâm của giáo viên, học sinh và của toàn ngành. Tính từ khi phát động tháng 6.2010 đến tháng 9.2011, Ban Tổ chức đã nhận được 33252 bài dự thi (chủ yếu là của giáo viên và học sinh) ở 63 tỉnh thành trong cả nước. Nội dung các bài dự thi hướng tới các giá trị chuẩn mực

đạo đức như sống giản dị, trung thực, tiết kiệm, yêu thương con người, yêu quê hương, tích cực tham gia các hoạt động tập thể, tôn trọng và học hỏi các giá trị tốt đẹp, tinh hòa các dân tộc, vun đắp tình hữu nghị,... Về pháp luật, các bài thi hướng tới các chủ đề về bảo vệ quyền trẻ em, hôn nhân và gia đình, an toàn giao thông, phòng chống tệ nạn xã hội,..., sẽ góp phần tạo sự chuyển biến tích cực đối với công tác giáo dục đạo đức và ý thức thực hiện pháp luật trong nhà trường đồng thời có thêm tư liệu hỗ trợ cho việc dạy và học môn Đạo đức ở Tiểu học và môn Giáo dục công dân ở THCS và THPT. TS Nguyễn Quý Thao, Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam - Phó Ban Tổ chức đã tổng kết và công bố kết quả Cuộc thi với 1 giải Nhì, 4 giải Ba và 7 giải Khuyến khích. NXBGD Việt Nam và ông Vũ Xuân Vinh đã được Bộ GD&ĐT trao Bằng khen về thành tích xuất sắc, góp phần cho thành công của Cuộc thi.

Nhân buổi lễ này, NGƯT Ngô Trần Ái - Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam đã trao tặng sách cho Thư viện Phòng Giáo dục huyện Hoài Đức trị giá 20 triệu đồng.

PV

c) $y^2 = x^3$, $y^2 = (2-x)^3$.

d) $y = -x^3 + 3x + 1$, $y = x^2 + x + 1$, $x = 2$.

e) $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = x + 3$.

f) $y = (x+1)(e^{2x} + 3)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

g) $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

h) Parabol (P): $y = -x^2 + 4x - 3$ và các tiếp tuyến của (P) tại các điểm A(0; -3) và B(3; 0).

Đáp số. a) $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$; b) $8 \ln 2$; c) $\frac{8}{5}$; d) $\frac{37}{6}$.

e) $\frac{109}{6}$; f) $\frac{3e^2 + 17}{4}$; g) $\frac{\pi}{4}$; h) $\frac{9}{4}$.

2. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi các hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ khi nó quay xung quanh

• Trục Ox. • Trục Oy.

b) $y = \sqrt{\cos^6 x + \sin^6 x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ khi nó quay quanh trục Ox.

c) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ khi nó quay quanh trục Oy.

Đáp số. a) $\frac{16\pi}{15}$; b) $\frac{8\pi}{3}$; c) $\frac{3\pi^2}{16}$; d) $\pi \ln 2$.

3. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình tròn $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ quanh trục Oy.
Đáp số. $4\pi^2$.

Thử sức TRƯỚC KỶ THI

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

2) Gọi M là một điểm nằm trên đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 1, I là giao điểm hai đường tiệm cận. Tiếp tuyến với (C) tại M cắt tiệm cận đứng tại A , cắt tiệm cận ngang tại B . Tính diện tích tam giác AIB .

Câu II. (2 điểm)

1) Giải phương trình

$$\frac{1 + \cot 2x \cdot \cot x}{\cos^2 x} + 1 = 6(\sin^4 x + \cos^4 x).$$

2) Giải phương trình

$$\sqrt{36x^2 - 63x + 27} = 15 - 27x + 2\sqrt{9x^2 - 9x + 3}.$$

Câu III. (1 điểm) Tính tích phân

$$I = \int_0^2 \frac{x+2}{(x+1)(x^2+2x+4)} dx.$$

Câu IV. (1 điểm) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. M và N là hai điểm lần lượt thuộc cạnh AB và

AD sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$; $AN = \frac{3}{4}AD$. E và F là hai điểm lần lượt thuộc cạnh $B'N$ và $A'M$ sao cho $EF \parallel AC$. Hãy xác định tỉ số $\frac{EB'}{NB'}$.

Câu V. (1 điểm) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+15} = \frac{x+y}{2}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 điểm) 1) Cho tam giác ABC có $AB = 3AC$. Đường phân giác trong của góc BAC có phương trình $x - y = 0$, đường cao BH có phương trình $3x + y - 16 = 0$. Hãy xác định tọa độ các điểm A, B, C , biết rằng đường thẳng AB đi qua điểm $M(4; 10)$.

2) Trong không gian cho điểm $A(1; 0; 0)$ và hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}; \quad \Delta_2: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{3}.$$

Gọi B và C là hai điểm lần lượt thuộc Δ_1 và Δ_2 sao cho A, B, C thẳng hàng. Tìm điểm M trên trục tung sao cho diện tích tam giác BMC bằng 3.

Câu VIIa. (1 điểm). Tìm m để phương trình

$$12\sqrt{4+x-3x^2} = 3x - 24 + m(3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-3x})$$

có nghiệm.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb. (2 điểm)

1) Trong hệ tọa độ Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

M và N là hai điểm trên (E) sao cho tam giác OMN vuông tại O (O là gốc tọa độ). Gọi H là hình chiếu của O lên MN . Chứng minh rằng khi M, N thay đổi thì H chạy trên đường tròn tâm O cố định. Hãy viết phương trình đường tròn đó.

2) Trong đợt ủng hộ Sách giáo khoa của NXBGD Việt Nam cho những học sinh bị ảnh hưởng lũ lụt vừa qua, lớp 12A₁ nhận được 20 cuốn gồm 5 cuốn sách Toán, 7 cuốn sách Vật lý, 8 cuốn sách Hóa học, các sách cùng loại giống nhau. Số sách này được chia đều cho 10 học sinh, mỗi học sinh chỉ nhận được 2 cuốn khác loại. $Hạnh$ và $Vân$ là 2 trong số 10 học sinh đó. Tính xác suất để 2 cuốn sách mà $Hạnh$ nhận được giống 2 cuốn sách của $Vân$.

Câu VIIb. (1 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\log_2 x}{1 + \log_2^2 x} + \frac{\log_2 y}{1 + \log_2^2 y} = \frac{9}{10} \\ (1 + \log_x 2 \cdot \log_y 2) \log_2(xy) = \frac{9}{2} \end{cases}$$

ĐƯỜNG ĐỨC HÀO
(GV THPT Hương Khê, Hà Tĩnh)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Điểm $M \in (C)$ nên $M(t; t^3 - 6t^2 + 9t - 2)$ với $t \neq 1; t \neq 3$; Hàm số có đồ thị (C) nhận điểm cực tiểu $A(3; -2)$, điểm cực đại $B(1; 2)$.

Phương trình $AB: 2x + y - 4 = 0$.

Ta có $S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot d(M, AB) = 6$

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-4)^2} \frac{|2t + t^3 - 6t^2 + 9t - 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow |t^3 - 6t^2 + 11t - 6| = 6 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = 4.$$

Câu II. 1) ĐK $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$ (*)

$$\text{Khi đó } \frac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{(\sin x + \cos x)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{1 + \sin 2x} = -1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1 = -1 - \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0.$$

Đáp số. $x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

2) ĐK $x \geq 0; y \geq 0$ (*). Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy} = 4 & (1) \\ x + y + 6 + 2\sqrt{xy + 3(x + y) + 9} = 16 & (2) \end{cases}$$

Đặt $t = \sqrt{xy} \geq 0$. Từ (1) có $x + y = 4 - 2t$.

Thay các kết quả đó vào (2) ta được

$$\sqrt{t^2 - 6t + 21} = t + 3 \Leftrightarrow t = 1.$$

Đáp số. Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Câu III. 1) Ta có $I = \int_1^2 \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)\left(x + \frac{1}{x} + 3\right)}$.

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$. Khi đó

$$I = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{dt}{(t-1)(t+3)} = \frac{1}{4} \int_2^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \frac{1}{4} \ln \frac{15}{11}.$$

$$2) \text{ ĐK } \begin{cases} 6 + x - x^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 3 \quad (*)$$

Khi đó BPT đã cho tương đương với

$$(\sqrt{6 + x - x^2} + 1 - x)(x \log_2 5) > 0 \quad (1)$$

• Với $0 < x \leq 1$ ta thấy $x \log_2 5 - 5 < 0$;

$\sqrt{6 + x - x^2} + 1 - x > 0$ nên BPT (1) vô nghiệm.

• Với $1 < x \leq 3$ thì $x \log_2 5 - 5 \leq 3 \log_2 3 - 5 < 0$

nên (1) $\Leftrightarrow \sqrt{6 + x - x^2} + 1 - x < 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6 + x - x^2} < x - 1 \Leftrightarrow (x + 1)(2x - 5) > 0$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{5}{2}. \text{ Vậy BPT có nghiệm } \frac{5}{2} < x \leq 3.$$

Câu IV. Gọi K là trung điểm của BC . Ta có

$SG \perp (ABC)$; $\widehat{SAG} = 60^\circ$, $AG = \frac{3a}{2}$. Từ đó

$$AK = \frac{9a}{4}; SG = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

Trong tam giác ABC đặt $AB = x$ thì $AC = 2x$;

$BC = x\sqrt{3}$. Ta có $AK^2 = AB^2 + BK^2$

$$\text{nên } x = \frac{9a\sqrt{7}}{14}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SG \cdot S_{ABC} = \frac{243}{112} a^3 \text{ (đvtt)}.$$

Câu V. Đặt $P = \frac{2}{\sqrt{xyz}} + \frac{27}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{xyz}} + \frac{1}{\sqrt{xyz}} + \frac{27}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số $\frac{1}{\sqrt{xyz}}, \frac{1}{\sqrt{xyz}},$

$$\frac{27}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)} \text{ ta có}$$

$$\frac{1}{3} P \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(2xz + yz)(2xy + xz)(2zy + xy)}} \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số $(2xz + yz)$, $(2xy + xz)$, $(2yz + xy)$ ta được

$$\sqrt[3]{(2xz + yz)(2xy + xz)(2yz + xy)} \leq \frac{(2xz + yz) + (2xy + xz) + (2yz + xy)}{3} \leq 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Câu VIa

1) Phương trình $BC: x + y - 10 = 0$.

Do $B \in BC$ nên $B(b; 10 - b)$.

Từ M là trung điểm của BC , tìm được $C(10 - b; b)$. $\overrightarrow{BH} = (1 - b; b - 7)$; $\overrightarrow{AC} = (11 - b; b - 1)$.

Ta có $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\Leftrightarrow (1 - b)(11 - b) + (b - 7)(b - 1) \Leftrightarrow b = 1; b = 9.$$

• Với $b = 1$ thì $B(1; 9), C(9; 1)$.

• Với $b = 9$ thì $B(9; 1), C(1; 9)$.

2) Từ giả thiết có $\overrightarrow{OA} = t\vec{u} = (0; t; t)$ với $t \geq 0$

$A(0; t; t)$. $\overrightarrow{BC} = (0; 1; -2)$, $\overrightarrow{BD} = (3; 1; -4)$,

$\overrightarrow{BA} = (1; t; t - 2) \Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (-2; -6; -3)$

suy ra $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BA} = -9t + 4$.

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BA}|$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{1}{6} |-9t + 4| \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -\frac{1}{9}.$$

• Với $t = -\frac{1}{9} < 0$ (loại).

• Với $t = 1$ ta tìm được $A(0; 1; 1)$.

Mặt cầu cần lập có phương trình là

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - \frac{7}{5}x + \frac{29}{5}y + \frac{7}{5}z - \frac{46}{5} = 0.$$

Câu VIb. 1) Kiểm tra được điểm M nằm trong đường tròn (C) . Khi đó

$$\mathcal{P}_M / (C) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB = IM^2 - R^2 = -3.$$

Suy ra $MA \cdot MB = 3$.

Theo BĐT Cauchy ta có

$$AB = AM + MB \geq 2\sqrt{MA \cdot MB} = 2\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi M là trung điểm của đoạn AB .

Δ là đường thẳng qua $M(2; 1)$ nhận $\overrightarrow{IM} = (1; -1)$ là vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình đường thẳng cần lập là $\Delta: x - y - 1 = 0$.

2) Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}_d = (2; -1; -3)$;

Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}_P = (7; 9; 2)$.

Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) và H là hình chiếu của M trên Δ thì $M(4; -1; -6)$. Đường thẳng Δ có VTCP

$$\vec{u}_\Delta = \frac{1}{25} [\vec{n}_P, \vec{u}_d] = (1; -1; 1).$$

MH đi qua điểm $M(4; -1; -6)$ nhận $[\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P] = (-11; 5; 16)$ là VTCP nên có PT

$$\begin{cases} x = 4 - 11t \\ y = -1 + 5t \\ z = -6 + 16t \end{cases} \Rightarrow H(4 - 11t; -1 + 5t; -6 + 16t).$$

Ta thấy Δ, d là hai đường thẳng chéo nhau và có khoảng cách bằng $\frac{1}{\sqrt{42}}$ nên

$$\frac{|[\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d] \cdot \overrightarrow{MH}|}{|[\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d]|} = \frac{3}{\sqrt{42}} \Leftrightarrow \frac{|3t|}{\sqrt{42}} = \frac{3}{\sqrt{42}} \Leftrightarrow t = 1$$

hoặc $t = -1$.

Có hai đường thẳng thỏa mãn đầu bài là

$$\Delta_1: \begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 - t \\ z = 10 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 15 + t' \\ y = -6 - t' \\ z = -22 + t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

SÁCH MỚI

Tạp chí THPT phát hành cuốn **ĐỒNG TẬP TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM 2011**.

Tất cả 12 số Tạp chí TH&TT trong năm và số **ĐẶC SAN** của Tạp chí TH&TT Số 1 được đóng thành tập bìa cứng. Đây là cách để lưu giữ tạp chí tốt nhất, có hệ thống và tiện tra cứu đối với các Thư viện, các Thầy cô giáo và các bạn yêu toán. Số lượng sách có hạn, bạn muốn có trọn bộ TH&TT năm 2011 hãy liên hệ ngay với Tòa soạn. Giá bán lẻ: 126.000 đồng.



Định lí nhỏ FERMAT

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN TP. Hồ Chí Minh)

Trong các định lí của Toán phổ thông, với tôi, có lẽ định lí nhỏ Fermat là định lí có nhiều ứng dụng đa dạng và thú vị nhất. Kể từ ngày làm quen với định lí nhỏ Fermat ở những bài toán chia hết lớp 9, cho đến nay, khi đã trở thành giảng viên được gần 20 năm, tôi vẫn còn tìm thấy ở định lí nhỏ Fermat nhiều điều mới mẻ. Có thể nói nếu định lí lớn Fermat nổi tiếng nhờ vào sự hóc búa của nó thì định lí nhỏ Fermat lại được biết đến nhờ sự đơn giản bề ngoài cùng với nội dung sâu sắc bên trong và những ứng dụng rất đa dạng của nó.

Bài viết này sẽ giống như một câu chuyện kể về định lí nhỏ Fermat thông qua những bài toán, những định lí, những cách chứng minh, những ứng dụng của định lí nhỏ Fermat mà trong quá trình học và dạy toán tôi có dịp làm quen và tìm hiểu.

Để tiện theo dõi, xin nhắc lại định lí nhỏ Fermat - định lí được Cố vấn Quốc hội Toulouse (Pháp) Pierre Fermat (1601-1665) phát biểu vào năm 1640: "Nếu p là số nguyên tố và a là số nguyên thì $a^p - a$ chia hết cho p ".

NHỮNG TRƯỜNG HỢP RIÊNG

Ở cấp THCS ta sẽ gặp bài toán sau đây.

★ **Bài toán 1.** Chứng minh rằng nếu a là số nguyên thì $a^3 - a$ chia hết cho 3.

Phép chứng minh khá đơn giản: Cách 1 là xét ba trường hợp $a = 3k$, $a = 3k+1$, $a = 3k+2$ ($k \in \mathbb{Z}$);

Cách 2 là phân tích $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$ và lí luận trong ba số nguyên liên tiếp, luôn có một số chia hết cho 3.

Cách 1 rõ ràng có thể áp dụng để chứng minh $a^5 - a$ chia hết cho 5, $a^7 - a$ chia hết cho 7. Tuy nhiên, khối lượng tính toán ngày càng tăng và rõ ràng không thể áp dụng cho trường hợp tổng quát.

Để nhanh hơn, có thể phân tích

$$a^5 - a = (a-1)a(a+1)(a^2+1).$$

Nếu $a = 5k$, $a = 5k \pm 1$ thì tích ba số hạng đầu chia hết cho 5, còn nếu $a = 5k \pm 2$ thì $a^2 + 1 = 25k^2 \pm 10k + 5$ chia hết cho 5. Nếu khéo hơn, ta có thể viết

$$\begin{aligned} a^5 - a &= (a-1)a(a+1)(a^2+1) \\ &= (a-1)a(a+1)(a^2-4+5) \\ &= 5(a-1)a(a+1) + (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2). \end{aligned}$$

Số hạng thứ nhất chia hết cho 5, số hạng thứ hai chia hết cho 5 vì nó là tích của năm số nguyên liên tiếp.

Để tiện lợi hơn trong tính toán, tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng đồng dư.

Ta viết $a \equiv b \pmod{n}$ nếu như a và b có cùng số dư khi chia cho n hay nói cách khác $a - b$ chia hết cho n . Ta sẽ sử dụng các tính chất cơ bản của đồng dư là

Nếu $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$ thì

- a) $a + c \equiv b + d \pmod{n}$;
- b) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$;
- c) $a^m \equiv b^m \pmod{n}$.

Tiếp tục chứng minh với $p = 7$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a^7 - a &= a(a^6 - 1) \\ &= (a-1)a(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } a^2 + a + 1 &= (a^2 + a - 6) + 7 \equiv a^2 + a - 6 \pmod{7} \\ \text{hay } a^2 + a + 1 &\equiv (a-2)(a+3) \pmod{7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự } a^2 - a + 1 &\equiv (a+2)(a-3) \pmod{7} \text{ nên} \\ a^7 - a &\equiv (a-3)(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)(a+3). \end{aligned}$$

Tích của bảy số nguyên liên tiếp là bội của 7 nên ta có điều phải chứng minh.

❖ Bài tập

1. Chứng minh nếu a là số nguyên thì $a^{11} - a$ chia hết cho 11.

2. Chứng minh rằng nếu a là số nguyên thì $a^9 - a$ chia hết cho 30.

3. Cho n là một số tự nhiên chẵn khác 0. Hãy tìm ước số chung lớn nhất của tất cả các số có dạng $a^n - a$ với a là số nguyên.

4. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng ước chung lớn nhất của tất cả các số có dạng $a^n - a$, trong đó a chạy khắp tập các số nguyên trùng với ước chung lớn nhất của tất cả các số $a^n - a$ với $a = 1, 2, \dots, 2n$.

TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

Cách chứng minh thứ nhất

Phương pháp chứng minh cho $p = 5, p = 7$ ở trên có thể tiếp tục mở rộng cho $p = 11, p = 13, \dots$ với ngày càng nhiều những kĩ xảo hơn (giống như $a^2 + a + 1 \equiv a^2 + a - 6 = (a+3)(a-2) \pmod{7}$ ở trên). Thế nhưng phương pháp đó rõ ràng không thể giúp chúng ta chứng minh cho trường hợp tổng quát.

Chứng minh dưới đây tôi được biết khi còn là một học sinh lớp 10. Còn nhớ rõ tôi đọc được chứng minh này trên báo Toán học và Tuổi trẻ của tác giả Lê Quốc Hán. Tôi đã rất thích thú với chứng minh này do tính đơn giản và dễ hiểu của nó.

Cách chứng minh của tác giả Lê Quốc Hán như sau:

Với p là số nguyên tố, $p > 2$, do $(-a)^p - (-a) = -(a^p - a)$ nên chỉ cần chứng minh định lí đúng với a nguyên dương. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Với $a = 1$, vì $1^p - 1 = 0$ chia hết cho p nên định lí đúng. Giả sử định lí đã đúng đến a , tức là đã có $a^p - a$ chia hết cho p . Ta chứng minh định lí đúng đến $a + 1$. Thật vậy

$$\begin{aligned} & (a+1)^p - (a+1) \\ &= a^p + C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} a + 1 - (a+1) \\ &= (a^p - a) + \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i a^i. \end{aligned}$$

Để ý rằng với $1 \leq i \leq p-1$, ta có $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$

chia hết cho p (do từ số có thừa số p , còn mẫu số thì không) nên tổng phía sau chia hết cho p . Theo giả thiết quy nạp ta có $(a+1)^p - (a+1)$ chia hết cho p . Phép chứng minh kết thúc.

Rất đơn giản. Phép chứng minh này chỉ dựa vào tính chất C_p^i chia hết cho p với mọi $i = 1, 2, \dots, p-1$.

2, ..., $p-1$. Sau này tôi mới được biết rằng, tính chất này, cũng như chính định lí nhỏ Fermat, có một nội dung toán học rất sâu sắc. Chúng ta sẽ còn quay trở lại với tính chất này trong phần ứng dụng.

❖ Bài tập

5. Cho p là số nguyên tố, chứng minh rằng

$$C_{p+1}^i \equiv \begin{cases} 1 & \text{khi } i \in \{1, p\} \\ 0 & \text{khi } i \in \{2, \dots, p-1\}. \end{cases} \pmod{p}$$

6. Chứng minh rằng nếu x, y là các số nguyên và p là số nguyên tố thì ta có

$$a) (x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}.$$

$$b) (x+y)^{p^2} \equiv x^{p^2} + y^{p^2} \pmod{p}.$$

Cách chứng minh thứ hai

Đây là cách mà tôi thường dùng để dạy bài về định lí nhỏ Fermat. Cái hay của cách này là có thể mở rộng sang định lí Euler và dẫn dắt một cách tự nhiên đến khái niệm hệ thặng dư thu gọn.

Ta phát biểu lại định lí nhỏ Fermat dưới dạng: Nếu p nguyên tố và $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Chúng ta hãy bắt đầu bằng một trường hợp riêng: $p = 11$ và $a = 4$. Ta lần lượt có

$$\begin{aligned} 4.1 &\equiv 4 \pmod{11}; & 4.2 &\equiv 8 \pmod{11}; \\ 4.3 &\equiv 1 \pmod{11}; & 4.4 &\equiv 5 \pmod{11}; \\ 4.5 &\equiv 9 \pmod{11}; & 4.6 &\equiv 2 \pmod{11}; \\ 4.7 &\equiv 6 \pmod{11}; & 4.8 &\equiv 10 \pmod{11}; \\ 4.9 &\equiv 3 \pmod{11}; & 4.10 &\equiv 7 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Nhân các đồng dư thức theo vế, chú ý ở vế phải ta có các số 1, 2, ..., 10 xếp theo một thứ tự khác, nên có $4^{10} \cdot 10! \equiv 10! \pmod{11}$.

Do $(10!, 11) = 1$ nên rút gọn hai vế cho $10!$, ta được $4^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Vậy ta đã chứng minh được định lí nhỏ Fermat trong trường hợp $p = 11$ và $a = 4$. Có thể sử dụng ý tưởng của cách chứng minh trên để chứng minh định lí tổng quát và hơn nữa, chứng minh mở rộng sau đây của định lí nhỏ Fermat:

Định lí Euler. Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1, a là một số nguyên bất kì nguyên tố cùng nhau với n , khi đó

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Trong đó $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n .

Chứng minh. Xét $n > 1$, $(a, n) = 1$. Gọi $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(n)}$ là tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n . Gọi $s_1, s_2, \dots, s_{\varphi(n)}$ tương ứng là số dư trong phép chia $ar_1, ar_2, \dots, ar_{\varphi(n)}$ cho n . Theo định nghĩa như vậy, ta có

- 1) $s_1, s_2, \dots, s_{\varphi(n)}$ nhỏ hơn n ;
- 2) $s_1, s_2, \dots, s_{\varphi(n)}$ nguyên tố cùng nhau với n ;
- 3) $s_1, s_2, \dots, s_{\varphi(n)}$ đôi một phân biệt.

Như thế $s_1, s_2, \dots, s_{\varphi(n)}$ cũng là tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n , tức là

$$\{s_1, s_2, \dots, s_{\varphi(n)}\} = \{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(n)}\} \quad (1)$$

Bây giờ nhân các đồng dư thức

$$a.r_1 \equiv s_1 \pmod{n}; a.r_2 \equiv s_2 \pmod{n}; \dots;$$

$$a.r_{\varphi(n)} \equiv s_{\varphi(n)} \pmod{n} \text{ theo vế, ta được}$$

$$a^{\varphi(n)}.r_1 r_2 \dots r_{\varphi(n)} \equiv s_1 s_2 \dots s_{\varphi(n)} \pmod{n}.$$

Từ (1) suy ra $r_1 r_2 \dots r_{\varphi(n)} = s_1 s_2 \dots s_{\varphi(n)}$. Chú ý $(r_1 r_2 \dots r_{\varphi(n)}, n) = 1$, nên giản ước hai vế cho $r_1 r_2 \dots r_{\varphi(n)}$ ta được $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ (đpcm).

❖ Bài tập

7. Chứng minh định lý Wilson: Số nguyên dương p là số nguyên tố khi và chỉ khi $(p-1)! + 1$ chia hết cho p .

Hướng dẫn. Hãy chứng minh rằng nếu p là hợp số thì $(p-1)! + 1$ không chia hết cho p . Với p nguyên tố lẻ, hãy chứng minh với mọi $i \in A = \{2, \dots, p-2\}$, tồn tại duy nhất $k \in A$ sao cho $i.k \equiv 1 \pmod{p}$, đồng thời $k \neq i$.

8. Chứng minh rằng nếu $(m, n) = 1$ thì

$$\varphi(m.n) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Hướng dẫn. Xếp các số $1, 2, \dots, mn$ vào bảng $m \times n$ như hình vẽ dưới đây

1	2	...	m
$m+1$	$m+2$		$2m$
...	...	...	...
$(n-1)m+1$	$(n-1)m+2$	...	nm

Sau đó đếm các cột gồm các số nguyên tố cùng nhau với m . Trong mỗi cột đó, đếm các số nguyên tố cùng nhau với n .

9. Chứng minh rằng nếu $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ thì

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

(Kì sau đăng tiếp)

KHAI THÁC... (Tiếp trang 2)

Cách 2. ĐK $m \neq -2$. Khi đó PT (8) là một PT bậc hai thỏa mãn $a+b+c=0$ nên có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{2m-3}{m+2}$. Lại có

$$x_1 + x_2 = x_1 + 1.x_2 = 1 + x_1.x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 + x_1.x_2. \square$$

Xin “bật mí”, các phương trình (1), (2a), (3a), (4), (5a), (6a), (7), (8) đều có biệt thức Δ dạng $\Delta = A^2$. Bạn đọc hãy giải lại các phương trình này bằng cách dùng công thức nghiệm hoặc bằng cách khác để lựa chọn cho mình cách giải phù hợp. Cuối cùng là một số bài tập để bạn đọc rèn luyện nhằm nghiệm

1. Giải phương trình $4x^2 - 8x + 3 = (1-2x)\sqrt{4x^2 - 6x + 3}$.

2. Giải phương trình $4\sqrt{1-x} + 3x = 1 + 2\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - \frac{4}{x} = 2y - \frac{2}{y} \\ 2x = y^3 + 3. \end{cases}$

4. Tìm m để phương trình

$$1 + \frac{5m-3}{x-m} = \frac{5(2m+1)(1-m)}{(x-m)(x-3m+1)}$$

chỉ có một nghiệm và tìm nghiệm đó.

5. Tìm m để phương trình $(2m+1)x^2 - (2m^2+m+1)x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2012.

6. Tìm m để phương trình $2x^3 - (m+2)x^2 - mx + m^2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt; tìm hai nghiệm đó.

7. Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 4m - 12 = 0$.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

b) Tìm m sao cho i) $x_1 = x_2^2$ ii) $1 < x_1 < x_2 < 3$.

8. Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - m^2 + 4m - 3 = 0$. Tìm m sao cho

a) $x_1 = 5x_2$.

b) $(x_1 + 1)x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

9. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi A và B là hai giao điểm của đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x - m$ và parabol $(P): y = (m-2)x^2 (m \neq 2)$. Tìm m sao cho

a) A và B cùng nằm trong góc phần tư thứ nhất.

b) $x_A^3 + x_B^3 = 9$.

10. Cho phương trình $mx^2 - 5x - (m+5) = 0$. Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , tìm m để $10x_1x_2 - 3(x_1^2 + x_2^2) = 0$.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/415. (Lớp 6). Cho $A = \frac{2011^{2011}}{2012^{2012}}$ và

$$B = \frac{2011^{2011} + 2011}{2012^{2012} + 2012}.$$
 So sánh A và B .

LÊ MINH HÒA

(GV THCS Võ Miếu, Thanh Sơn, Phú Thọ)

Bài T2/415. (Lớp 7). Cho $A = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}$,

$$B = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}}, A \text{ và } B \text{ đều có } n \text{ dấu căn.}$$

Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Hãy tìm $\left[\frac{A-B}{A+B} \right]$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(SV K50A1S, Khoa Toán - Cơ - Tin
ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Bài T3/415. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn
 $x^2 - 5x + 7 = 3^y$.

VŨ HỮU BÌNH

(Hà Nội)

Bài T4/415. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 3.$$

TRƯỜNG QUANG AN

(Quảng Ngãi)

Bài T5/415. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đường thẳng AB và BC lấy các điểm tương ứng H và K , sao cho các tam giác KAB và HCB cân ($KA = AB$, $HC = CB$). Chứng minh rằng

1) Tam giác KDH cân.

2) Các tam giác KAB , BCH , KDH đồng dạng với nhau.

NGUYỄN ĐỀ

(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/415. Cho tam giác ABC với $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Gọi A_1 là trung điểm cạnh BC và O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác. Chứng minh rằng nếu AA_1 vuông góc với OI thì

$$\min(b, c) \leq a \leq \max(b, c).$$

PHAN CUNG ĐỨC

(Hà Nội)

Bài T7/415. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sin \alpha + \sqrt{y} \cdot \cos \alpha - \sqrt{z} = 2\sqrt{2(x+y+z)} \\ 2x + 2y - 13\sqrt{z} = 7 \end{cases}$$

$\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$. Hãy tính $(x+y) \cdot z$.

PHAN MẠNH HÀ

(GV THPT Nam Yên Thành, Nghệ An)

Bài T8/415. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2 x = 2^{y+2} \\ 4\sqrt{1+x} + xy\sqrt{4+y^2} = 0. \end{cases}$$

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/415. Ta gọi một bộ số nguyên tố đẹp khi tích của các số nguyên tố này bằng 10 lần tổng của chúng. Hãy tìm tất các bộ số nguyên tố đẹp nói trên. (Các số trong bộ không nhất thiết phải phân biệt).

TRẦN BÁ DUY LINH

(SV lớp 30, K34, ĐH Kinh tế TP. Hồ Chí Minh)

Bài T10/415. Cho năm điểm A, B, C, D và E cùng nằm trên một đường tròn (các điểm được liệt kê theo chiều kim đồng hồ). Gọi M, N, P và Q theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của E xuống các đường thẳng AB, BC, CD và DA . Chứng minh rằng bốn đường thẳng MN, NP, PQ và QM là tiếp tuyến của một parabol có tiêu điểm là E .

TRẦN VIỆT HÙNG

(Sở GD-ĐT Sóc Trăng)

Bài T11/415. Cho dãy số (a_n) được xác định

$$\text{bởi } a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} - \sqrt{2}, n = 1, 2, \dots$$

Hãy tìm giới hạn của dãy số (b_n) với

$$b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T12/415. Gọi α, β là hai nghiệm thực phân biệt của phương trình $4x^2 - 4tx - 1 = 0$

(t là tham số thực) và hàm số $f(x) = \frac{2x-t}{x^2+1}$

xác định trên đoạn $[\alpha; \beta]$.

Xét hàm số $g(t) = \max_{x \in [\alpha; \beta]} f(x) - \min_{x \in [\alpha; \beta]} f(x)$.

Chứng minh rằng với $a, b, c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa

mãn $\sin a + \sin b + \sin c = 1$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{g(\tan a)} + \frac{1}{g(\tan b)} + \frac{1}{g(\tan c)} < \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

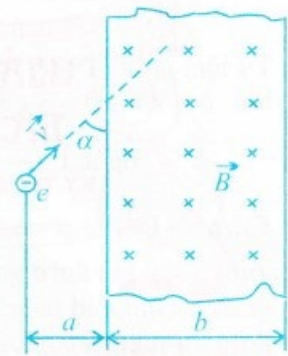
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/415. Một vùng từ trường đều với cảm ứng từ $B = 2.10^{-4}T$ nằm trong miền giới hạn bởi hai mặt phẳng song song với các đường sức từ và cách nhau đoạn $b = 15cm$. Từ vị trí cách mặt giới hạn vùng từ trường đoạn $a = 3cm$, một electron được bắn về phía vùng từ trường với vận tốc $\vec{v}$ có phương vuông góc với các đường sức từ và hợp với mặt giới hạn vùng từ trường góc $\alpha = 45^\circ$ như hình vẽ. Biết khối lượng và điện tích của electron lần lượt

là $m = 9.1.10^{-31}kg$ và $e = -1.6.10^{-19}C$. Bỏ qua tác dụng của trọng trường. Tính độ lớn vận tốc của electron để nó:

a) Ra khỏi vùng từ trường theo phương vuông góc với mặt giới hạn vùng từ trường.

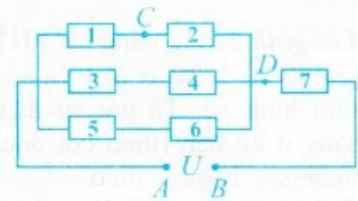
b) Có thể quay trở về vị trí ban đầu. Điều kiện của b khi đó là gì?



NGUYỄN CAO CƯỜNG

(GV THPT Đội Cấn, Vĩnh Phúc)

Bài L2/415. Cho bảy điện trở giống hệt nhau, mỗi cái có giá trị là R , được mắc theo sơ đồ như hình vẽ.



Đặt giữa A và B một điện áp U có giá trị không đổi.

a) Mắc giữa C và B một vôn kế lí tưởng thì vôn kế chỉ 12 V.

b) Thay vôn kế bằng một ampe kế lí tưởng thì ampe kế chỉ 4 A.

Hãy xác định U và R .

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/415. (For 6th grade). Let $A = \frac{2011^{2011}}{2012^{2012}}$

and $B = \frac{2011^{2011} + 2011}{2012^{2012} + 2012}$. Which number is greater, A or B ?

T2/415. (For 7th grade). Given

$$A = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}, \text{ and } B = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}},$$

where there are exactly n square roots in A and n cube roots in B . Write $[x]$ for the greatest

integer not exceeding x . Determine the value of

$$\left[\frac{A-B}{A+B} \right].$$

T3/415. Find all pairs of natural numbers x, y such that $x^2 - 5x + 7 = 3^y$.

T4/415. Prove the inequality

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 3.$$

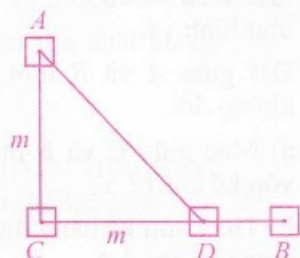
(Xem tiếp trang 26)



★ **Bài T1/411.** Đặt các số tự nhiên $1, 2, \dots, 2011^2$ trên một bảng ô vuông kích thước 2011×2011 , mỗi số ở một ô. Chứng minh rằng tồn tại hai ô vuông kề nhau (là hai ô vuông hoặc có chung một cạnh, hoặc có chung một đỉnh) mà hiệu của hai số đặt ở đó không nhỏ hơn 2012.

Lời giải. Trong bảng có 2011×2011 ô vuông giả sử số 1 đặt ở ô A và số 2011^2 đặt ở ô B như hình vẽ. Ta gọi sự di chuyển từ một ô sang ô kề bên (theo cột dọc, hoặc theo hàng ngang, hoặc theo đường chéo của ô) là một bước.

Xét ô C sao cho AC nằm theo cột dọc và CB nằm theo hàng ngang. Gọi số bước từ A đến C là m và số bước từ C đến B là n .



• Nếu $m \leq n$ thì tìm được ô D nằm trên BC sao cho số bước đi từ ô C đến ô D bằng m (hình vẽ). Vì số bước đi theo đường chéo AD bằng số bước đi từ ô C đến ô D và bằng m , nên khi chọn cách đi từ ô A đến ô D (theo đường chéo) rồi từ ô D đến ô B thì đi từ ô A đến ô B chỉ cần n bước. Rõ ràng $n \leq 2011 - 1 = 2010$.

Nếu hiệu hai số ở hai ô kề nhau bất kì trong cách đi đã chọn đều không lớn hơn 2011 thì số ở ô cuối cùng không thể lớn hơn $1 + 2011n \leq 1 + 2011(2011 - 1) < 2011^2$. Điều này trái

với giả thiết là ô B chứa số 2011^2 . Như vậy trong cách đi đã chọn thì phải tồn tại hai ô kề nhau có hiệu số lớn hơn 2011, tức là hiệu của hai số ở hai ô đó không nhỏ hơn 2012.

• Nếu $m > n$, ta lấy ô E nằm trên AC sao cho số bước từ ô E đến ô C bằng số bước từ ô C đến ô B và bằng n . Chọn cách đi từ ô A đến ô E , rồi đi từ ô E đến ô B theo đường chéo thì đi từ ô A đến ô B chỉ cần m bước với $m \leq 2010$. Lại lập luận tương tự như trên cũng dẫn đến kết quả. $\square$

➤ **Nhận xét.** Chỉ có một bạn giải đúng bài này là Nguyễn Văn Quân, 6, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/411.** Tính tổng gồm 2009 thừa số sau

$$S = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2009.2011}\right).$$

Lời giải. Với n là số nguyên dương, ta có

$$1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

Cho n các giá trị lần lượt từ 1 đến 2009 ta được

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{2008.2010}\right) \left(1 + \frac{1}{2009.2011}\right) \\ &= \frac{(1+1)^2}{1.3} \cdot \frac{(2+1)^2}{2.4} \cdot \frac{(3+1)^2}{3.5} \dots \frac{(2008+1)^2}{2008.2010} \cdot \frac{(2009+1)^2}{2009.2011} \\ &= \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{2009^2}{2008.2010} \cdot \frac{2010^2}{2009.2011} \\ &= 2 \cdot \frac{2010}{2011} = \frac{4020}{2011}. \quad \square \end{aligned}$$

➤ **Nhận xét.** 1) Ta chứng minh được kết quả tổng quát: Với n nguyên dương ta có

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCD PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẬP CHÍ TOÀN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Phú Thọ: Tạ Phương Thủy, 6A3, Lê Hữu Hùng, 7A3, THCS Lâm Thao, **Kiều Thế Hưng**, 7C, THCS TTr. Sông Thao, Cẩm Khê; **Vĩnh Phúc:** Dương Xuân Duy, Nguyễn Thị Thủy Hòa, Nguyễn Thị Duyên, 6A1, Lê Thu Trang, 6A3, Nguyễn Thị Hồng Nhung B, Nguyễn Thị Thu Trang, Hoàng Quốc Việt, Lưu Quỳnh Trang, 6A5, Hoàng Thị Minh Anh, 7A1, THCS Yên Lạc, Hoàng Thu Hà, 6E, THCS Vĩnh Yên; **Nam Định:** Trần Hoàng Chuẩn, 7A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Nghệ An:** Ngô Huyền Linh, Nguyễn Văn Quân, Nguyễn Hồ Khánh Linh, Dương Thị Khánh Linh, Hoàng Thanh Lâm, 6A, Đào Mỹ Linh, Nguyễn Đình Quý, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Dương Thị Phương Anh, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Lê Hải Sâm, 7C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** Đặng Trần Đức Anh, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Hiền Thực, 6A, THCS Đức Thắng, Mộ Đức, Bùi Diễm Hương, 6A, Huỳnh Tiến Vỹ, 7A, THCS Hành Phước, Nguyễn Tấn Trung, 6H, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Bình Định:** Nguyễn Trọng Khiêm, 7A1, THCS Võ Xán, Tây Sơn; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Thanh Phương, 7A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Tiền Giang:** Hoàng Vĩnh Thụy, 7/7, THCS Lê Ngọc Hân, TP. Mỹ Tho.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/411.** Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 4(x^2 + y^2 + xy + 3) \quad (1)$$

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) = 4(x+y)^2 - 4xy + 12.$$

Đặt $x+y=a, xy=b (a, b \in \mathbb{Z})$. Khi đó PT (1) có dạng

$$a^3 - 2ab - 4a^2 + 4b = 12 \Leftrightarrow 2b(a-2) = a^3 - 4a^2 - 12$$

$$\Leftrightarrow 2b = \frac{a^3 - 4a^2 - 12}{a-2} = a^2 - 2a - 4 - \frac{20}{a-2}$$

(dễ thấy $a \neq 2$).

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $a-2 \in U(20) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20\}$. Ta tìm được các cặp

$$\bullet a = 4, b = -3 \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=-3. \end{cases}$$

Hệ không có nghiệm nguyên.

$$\bullet a = 0, b = 3 \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=3. \end{cases} \text{ Hệ vô nghiệm.}$$

$$\bullet a = 12, b = 57 \Rightarrow \begin{cases} x+y=12 \\ xy=57. \end{cases} \text{ Hệ vô nghiệm.}$$

$$\bullet a = -8, b = 30 \Rightarrow \begin{cases} x+y=-8 \\ xy=39. \end{cases} \text{ Hệ vô nghiệm.}$$

Vậy không có các số nguyên x, y nào thỏa mãn PT (1). $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Nếu viết PT (1) dưới dạng

$$(x^2 + y^2)(x + y - 4) = 4xy + 12 \quad (2)$$

thì ta thấy ngay x, y có cùng tính chẵn lẻ và $x + y - 4$ chẵn. Khi đó ta có thể giải như sau

TH1. $x + y - 4 \geq 4 \Leftrightarrow x + y \geq 8$. Khi đó

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq 32$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)(x + y - 4) \geq 128$$

$$\geq 4(x^2 + y^2) = 2(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2)$$

$$\geq 2(x^2 + y^2) + 4xy \geq 64 + 4xy > 4xy + 12.$$

Do đó PT (2) vô nghiệm.

TH2. $x + y - 4 \leq -2 \Leftrightarrow x + y \leq 2$. Khi đó

$$(x^2 + y^2)(x + y - 4) \leq -2(x^2 + y^2) \leq 4xy < 4xy + 12.$$

Vậy PT (2) vô nghiệm.

TH3. $-2 < x + y - 4 < 4$. Do $x + y - 4$ chẵn nên $x + y - 4 = 0$ hoặc $x + y - 4 = 2$.

• Với $x + y - 4 = 0$ thì $xy = -3$. Hệ $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ xy = -3 \end{cases}$ không

có nghiệm nguyên.

• Với $x + y - 4 = 2 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = 4xy + 12 \Rightarrow xy = \frac{15}{2}$.

Hệ $\begin{cases} x + y - 4 = 2 \\ xy = \frac{15}{2} \end{cases}$ không có nghiệm nguyên.

Vậy PT (1) không có nghiệm nguyên.

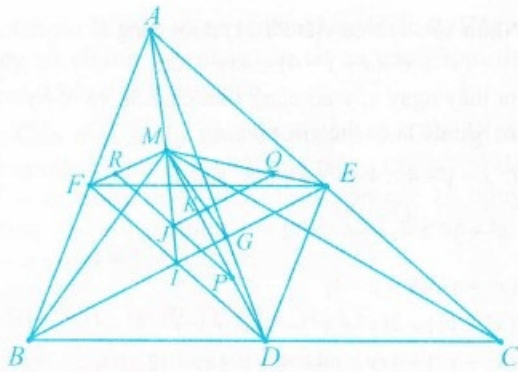
2) Nhiều bạn tham gia giải bài này. Các cách giải khá phong phú. Các bạn có lời giải tốt là:

Hà Nội: Nguyễn Chí Tùng, 9A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Thanh Hóa:** Nguyễn Tuấn Anh, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Bút Sơn, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Mạc Hữu Thắng, Thái Bá Tuấn, Thái Văn Đạt, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nguyễn Thảo My, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** Lê Trung Anh, 8B, THCS Hoàng Xuân Hân, Đức Thọ; **Thừa Thiên - Huế:** Lê Phú Thanh, 8B, THCS Trần Cao Vân, TP. Huế; **Quảng Ngãi:** Đỗ Đức Thịnh, 9A, THCS Đức Thắng, Mộ Đức, Nguyễn Thủy Phương, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/411.** Cho tam giác ABC . M là điểm nằm trong tam giác. Gọi P, Q, R, H, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác MBC, MAC, MAB, PQR, ABC . Chứng minh rằng ba điểm M, H, G thẳng hàng.

Lời giải. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB thì AG đi qua trung điểm của EF BG đi qua trung điểm I của FD nên G cũng là trọng tâm của tam giác DEF .



Giả sử MI cắt RP tại J . Theo giả thiết, ta có $\frac{MR}{MF} = \frac{MP}{MD} = \frac{2}{3}$ nên $RP \parallel FD$, áp dụng định lí Thales, suy ra J là trung điểm của RP và $\frac{MJ}{MI} = \frac{2}{3}$. Kết hợp với $\frac{MQ}{ME} = \frac{2}{3}$ (giả thiết) suy ra $JQ \parallel IE$. Vậy nếu JQ cắt MG tại K thì từ định lí Thales suy ra $\frac{JK}{KQ} = \frac{IG}{GE} = \frac{1}{2}$.

Hơn nữa QJ là đường trung tuyến của tam giác PQR , suy ra K là trọng tâm tam giác đó hay $K \equiv H$. Vậy ba điểm M, H, G thẳng hàng. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Các bạn đưa ra khá nhiều cách giải xoay quanh việc sử dụng định lí Thales và tam giác đồng dạng. Tất cả đều đúng (trừ một bạn vẽ hình sai).

Đa số chứng minh $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ theo tỉ số $\frac{1}{3}$, từ đó có hai trung tuyến song song PH và AD . Áp dụng định lí Thales để chứng minh MH đi qua trọng tâm G của tam giác ABC .

2) Các bạn lưu ý ở đây không chấm bài làm tập thể, mỗi cá nhân nên tự tìm cho mình một cách giải độc lập. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Cao Trung Đức, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Trung Hiếu, 8A, THCS Phương Khoan, Sông Lô; **Hà Nam:** Đặng Vũ Đức, 9A2, THCS Trần Phú, Phù Lý; **Hải Phòng:** Nguyễn Khánh Hưng, 8A1, THCS Hồng Bàng, Ngô Quyền. **Thái Bình:** Trương Trung Kiên, Tô 11, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa. **Nghệ An:** Hoàng Anh Tài, 9A, THCS Lý Nhật Quang. **Hà Tĩnh:** Đặng Trần Đức Anh, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Bình Định:** Nguyễn Trọng Khiêm, 7A1, THCS Võ Xán, Tây Sơn; **TP. Hồ Chí Minh:** Phan Huỳnh Lan Chi, Đào Trần Trí, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T5/411.** Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{(a+b)^3} + \frac{4}{(b+c)^3} + \frac{4}{(c+a)^3} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $a+b=x, b+c=y, c+a=z$.

Do a, b, c là các số dương và $a+b+c=3$ nên x, y, z là các số dương và $a=3-y, b=3-z, c=3-x$.

Khi đó BĐT (1) có dạng

$$\frac{4}{x^3} + \frac{4}{y^3} + \frac{4}{z^3} \geq \frac{3-y}{y} + \frac{3-z}{z} + \frac{3-x}{x} \quad (2)$$

Xét hiệu

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{x^3} + \frac{4}{y^3} + \frac{4}{z^3} - \left(\frac{3-y}{y} + \frac{3-z}{z} + \frac{3-x}{x} \right) \\ &= \left(\frac{4}{x^3} - \frac{3-x}{x} \right) + \left(\frac{4}{y^3} - \frac{3-y}{y} \right) + \left(\frac{4}{z^3} - \frac{3-z}{z} \right) \\ &= \frac{(x+1)(x-2)^2}{x^3} + \frac{(y+1)(y-2)^2}{y^3} + \frac{(z+1)(z-2)^2}{z^3}. \end{aligned}$$

Do x, y, z là các số dương nên $A \geq 0$, suy ra BĐT (2) đúng. Vì vậy BĐT (1) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2 \Leftrightarrow a=b=c=1$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Toà soạn nhận được nhiều bài giải của các bạn. Một số bạn đã đi chứng minh bổ đề (BĐT Cauchy cho ba số không âm). "Với x, y, z không âm thì $x+y+z \geq \sqrt[3]{xyz}$ " rồi áp dụng với các bộ ba số

$$\left(\frac{4}{(a+b)^3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{4}{(b+c)^3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{4}{(c+a)^3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

cũng suy ra BĐT (1).

Bạn Nguyễn Thế Duy, 9B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, Hà Tĩnh đã nêu được bài toán tổng quát:

Cho n số thực dương $k_1, k_2, \dots, k_n$ có tổng bằng n . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} &\frac{(n-1)^{n-1}}{(k_1+k_2+\dots+k_{n-1})^n} + \frac{(n-1)^{n-1}}{(k_2+k_3+\dots+k_n)^n} + \dots \\ &+ \frac{(n-1)^{n-1}}{(k_n+k_1+\dots+k_{n-2})^n} \\ &\geq \frac{k_1}{k_2+k_3+\dots+k_n} + \frac{k_2}{k_1+k_3+\dots+k_n} + \dots + \frac{k_n}{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}}. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, có bạn đã vận dụng ngay BDT Cauchy cho ba số không âm mà không chứng minh được coi là vượt quá chương trình toán cấp THCS. Ngoài ra có ba bạn lớp 10 cũng gửi bài nhưng không được tính (vì bài toán dành cho các lớp THCS).

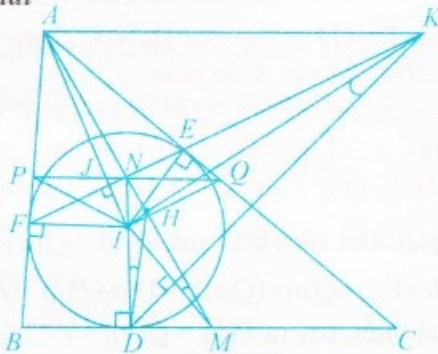
2) Tuyên dương các bạn có lời giải tốt sau đây:

Phú Thọ: Nguyễn Hồng Quân, Nguyễn Hoàng Việt, 9A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** Mạc Hiếu Thắng, Nguyễn Văn Vinh, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bùi Thị Trà My**, 7C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Sơn Lâm, 9A, Nguyễn Thế Duy, 9B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hoá; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Tiến Vỹ, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, Nguyễn Hồ Bửu Đạt, Đỗ Đăng Thịnh, 9A, THCS Đức Thắng, Mộ Đức; **TP. Hồ Chí Minh:** Phan Huỳnh Lan Chi, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Nga, 8A, THCS Yên Lạc.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T6/411.** Giả sử đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC , CA , AB theo thứ tự tại D , E , F . Đường thẳng qua A và song song với BC cắt EF tại K . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng IM vuông góc với DK .

Lời giải



Gọi N là giao điểm của ID và EF . Qua N kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB , AC theo thứ tự tại P và Q . Vì hai tứ giác $IFPN$ và $IQEN$ nội tiếp nên $\widehat{IFN} = \widehat{IPN}$; $\widehat{IEN} = \widehat{IQN}$.

Mặt khác $\widehat{IEN} = \widehat{IFN}$, suy ra $\widehat{IPN} = \widehat{IQN}$. Do đó tam giác IPQ cân tại I . Vậy N là trung điểm của PQ . Từ đó ba điểm A , N , M thẳng hàng. Lại có $IN \perp AK$, $KN \perp IA$ nên N là trực tâm tam giác AIK . Do vậy $AM \perp IK$. Gọi H là giao điểm của AM và IK ; J là giao điểm của IA và EF thì $\widehat{IH} \cdot \widehat{IK} = \widehat{IJ} \cdot \widehat{IA} = IE^2 = ID^2$. Từ đó $\triangle IHD \sim \triangle IDK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{IKD}$, mà tứ giác $IHMD$ nội tiếp nên $\widehat{IDH} = \widehat{IMH}$. Dẫn

đến $\widehat{IKD} = \widehat{IMH}$. Từ đây ta dễ dàng suy ra $IM \perp DK$ (đpcm). □

➤ **Nhận xét.** 1) Bài toán này được nhiều bạn tham gia với nhiều cách giải khác nhau: Sử dụng khái niệm phương tích, trục đẳng phương, tâm đẳng phương; Phương pháp vector; Tính chất của hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa, tứ giác điều hòa; Cực - đối cực...

2) Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Hoàng Công Hậu, 12 Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Minh Phương, 10A1, Hoàng Đỗ Kiên, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Việt Hà, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Phạm Trường Giang, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Trần Hồng Quân, 10 Toán 1, Trần Trung Hiếu, 11 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Lê Văn Hùng, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Lê Thế Sơn, 10C8, THPT Bim Sơn; **Nghệ An:** Trần Chí Công, 12A1 Toán, THPT chuyên ĐH Vinh, Nguyễn Hiền Trang, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nguyễn Thị Quỳnh Loan, 10T1, Nguyễn Văn Hoàng, 12T7, THPT Đô Lương I, Chu Tự Tài, 11A12, THPT Diễn Châu 2; **Hà Tĩnh:** Trần Thị Minh Thùy, 10 Toán 1, Trắc Quang Thịnh, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** Trần Đức Anh, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** Dương Quốc Khánh, 11B1, THPT Lê Hồng Phong, Biên Hòa; **TP. Hồ Chí Minh:** Trịnh Nhật Minh, 10 Toán, PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T7/411.** Tìm các giá trị thực của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Lời giải. ĐK $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2y-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2. \end{cases}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x = (y-1)^3 - 3(y-1)$ (3)

Hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ có $f'(t) = 3t^2 - 3 < 0, \forall t \in (-1; 1)$ nên $f(t)$ là hàm số liên tục và nghịch biến trong đoạn $-1 \leq t \leq 1$.

Từ (3) ta có $f(x) = f(y-1)$ với $-1 \leq x \leq 1$; $-1 \leq y-1 \leq 1$, suy ra $x = y-1 \Leftrightarrow y = x+1$.

Thay $y = x+1$ vào PT(2) và rút gọn, ta được $x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 + 2\sqrt{1-x^2}$.

Dễ thấy hàm số $g(t) = -t + 2\sqrt{1-t}$ liên tục và nghịch biến khi $t \leq 1$ nên với $0 \leq x^2 \leq 1$ ta có $2 \geq -x^2 + 2\sqrt{1-x^2} \geq -1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm khi $-1 \leq m \leq 2$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Điều mấu chốt của lời giải là biến đổi PT (1) về PT (3), rồi từ đó chứng minh $x = y - 1$. Trong rất nhiều bài toán, ta thường dùng mệnh đề sau: Nếu $f(t)$ là hàm số liên tục và đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) thì từ $f(u) = f(v)$ suy ra $u = v$ (trong đó u, v là các biểu thức có chứa ẩn số).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hưng Yên: Nguyễn Trung Hiếu, 11 Li, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Cẩm Nhung, 12 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Trần Quang Toàn, 11 Toán, THPT chuyên Quảng Bình, TP Đồng Hới; **Phú Yên:** Nguyễn Chí Thanh, 12 Toán II, THPT Lương Văn Chanh, Tuy Hòa; **Bến Tre:** Nguyễn Hoàng Duy, Khưu Thành Quý, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Đồng Tháp:** Au Anh Minh, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Cần Thơ:** Hoàng Công Đức, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ; **Cà Mau:** Lê Hoàng Minh, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, TP. Cà Mau.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T8/411.** Xét các số thực a, b, c sao cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thực thuộc đoạn $[0; 1]$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}.$$

Lời giải. (Theo bạn Dương Quốc Khánh, 11B1, THPT Lê Hồng Phong, **Đồng Nai**).

Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là m, n ($0 \leq m \leq 1, 0 \leq n \leq 1$).

Theo định lý Viète, ta có $m + n = -\frac{b}{a}$ và $mn = \frac{c}{a}$.

Từ đó suy ra

$$M = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(2 - \frac{c}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{(1+m+n)(2-mn)}{1+m+n+mn}.$$

• Vì $2 - mn \leq 2$, và $mn \geq 0$ nên

$$M \leq \frac{(1+m+n) \cdot 2}{1+m+n} = 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 2, đạt được khi $mn = 0$ hay $c = 0$.

• Do $0 \leq m \leq 1, 0 \leq n \leq 1$ nên $mn \leq 1$, suy ra $m(n-1) + n(m-1) + (mn-1) \leq 0$, hay

$$mn \leq \frac{1}{3}(1+m+n).$$

$$\text{Do đó } M \geq \frac{1+m+n}{1+m+n+\frac{1}{3}(1+m+n)} = \frac{3}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{3}{4}$, đạt được khi $m = n = 1$ hay $a + b + c = 0$ và $a = c$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Có khá đông các bạn tham gia giải bài toán trên. Nhiều bạn sử dụng đạo hàm để xét sự biến thiên của M và cũng cho lời giải đúng. Ngoài bạn Khánh, các bạn sau cũng có lời giải tốt

Bắc Ninh: Chu Văn Trang, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** Hoàng Công Hậu, 12 Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Nghệ An:** Trần Trung Hiếu, 11A1, THPT Thái Hoà; **Nguyễn Văn Hoàng**, 12T7, THPT Đô Lương I, **Vương Nhật Quân**, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Nguyễn Tất Khánh**, 10A1, THPT Đô Lương III; **Tiền Giang:** Nguyễn Minh Mẫn, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Thanh Hoá:** Nguyễn Xuân Nghĩa, 11A10, THPT Đông Sơn 1; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 11A1, Hoàng Minh Phương, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Vũ Thị Ánh Huyền**, 10A1, THPT Lê Xoay; **Phú Thọ:** Vũ Tuấn Linh, 10 Tin, THPT chuyên Hùng Vương; **Thái Bình:** Trần Hồng Quân, 10 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Quảng Bình:** Nguyễn Hữu Lê, 11 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Nam:** Lê Vũ Văn Phi, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T9/411.** Cho hai đa thức với hệ số thực $P(x)$ và $Q(x)$ thỏa mãn

$P(1+x+Q(x)+(Q(x))^2) = Q(1+x+P(x)+(P(x))^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $P(x) = Q(x)$ có nghiệm thực thì $P(x) \equiv Q(x)$.

Lời giải. Giả sử $a \in \mathbb{R}$ mà $P(a) = Q(a)$.

Xét $b = 1 + a + Q(a) + (Q(a))^2 = 1 + a + P(a) + (P(a))^2$.

Từ giả thiết, suy ra $P(b) = Q(b)$.

$$\text{Chú ý } b = \frac{3}{4} + a + \left(Q(a) + \frac{1}{2}\right)^2 > a.$$

Do đó nếu xét dãy số (x_n) với $x_0 = a, x_{n+1} = 1 + x_n + Q(x_n) + (Q(x_n))^2, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh bằng quy nạp theo n theo cách như trên, ta có $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$,

$$P(x_i) = Q(x_i), \forall i = 0, 1, \dots, n, \dots$$

Từ đó suy ra $P(x) \equiv Q(x)$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Do sơ suất, đề bài bị nhầm lẫn. Xin được sửa lại như trên, Toà soạn thành thật xin lỗi bạn đọc.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/411.** Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a \geq b \geq c \geq d$ và $abcd = 1$.

Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{k}{d+1} \geq \frac{3+k}{2}.$$

Lời giải. (Theo bạn Dương Quốc Khánh, 11B1, THPT Lê Hồng Phong, Biên Hòa, Đồng Nai).

Cho $a = b = c = t, d = \frac{1}{t^3}$ ($t \geq 1$). Khi đó ta có

$$\frac{3}{t+1} + \frac{k}{\frac{1}{t^3}+1} \geq \frac{3+k}{2} \text{ với mọi } t \geq 1.$$

Cho $t \rightarrow +\infty$ ta được $k \geq \frac{3+k}{2} \Leftrightarrow k \geq 3$.

Tiếp theo ta chứng minh BĐT đã cho đúng với $k = 3$, tức là

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{3}{d+1} \geq \frac{3+3}{2} = 3 \quad (1)$$

Thật vậy do $a \geq b \geq c \geq d$ và $abcd = 1$ nên

$$\sqrt{ab} \geq 1 \geq \sqrt{cd} \geq d. \text{ Từ đó, ta có}$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{ab}-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \quad (2)$$

Lại do $d \leq \sqrt{cd}$ nên

$$\frac{2}{1+\sqrt{ab}} = \frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{cd}}} \geq \frac{2}{1+\frac{1}{d}} = \frac{2d}{d+1} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{2}{d+1} \geq \frac{2d}{d+1} + \frac{2}{d+1} = 2 \quad (4)$$

Do $cd \leq 1$ nên

$$\frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} \geq \frac{1}{c+1} + \frac{1}{\frac{1}{c}+1} = 1 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta suy ra (1). Vậy $k_{\min} = 3$. $\square$

► **Nhận xét.** Bài này được khá nhiều bạn tham gia giải và có nhiều cách giải khác nhau. Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Hoàng Minh Phương, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Lương Hữu Bằng, 12A1, THPT Đồng Quan; **Nam Định:** Phạm Trường Giang, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Vương Nhật Quân, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh;

Quảng Trị: Trần Đức Anh, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Tạ Gia Sơn, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T11/411.** *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$\{f(x+y)\} = \{f(x)+f(y)\}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ (1)
(trong đó $[t]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá t và $\{t\} = t - [t]$).

Lời giải. Từ giả thiết, ta có

$$f(x+y) - [f(x+y)] = f(x) + f(y) - [f(x) + f(y)]$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, hay

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = [f(x+y)] - [f(x) + f(y)] \quad (2)$$

Nhận xét rằng vế trái của (2) là hàm số liên tục theo x ứng với mọi y cố định cho trước còn vế phải nhận các giá trị nguyên, nên từ (2) suy ra

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = C \in \mathbb{Z} \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Đặt $f(x) = -C + g(x)$, thì $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cũng là hàm liên tục. Thế vào (3), ta thu được phương trình hàm Cauchy

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}$$

có nghiệm $g(t) = at, a \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Suy ra $f(t) = at - C, C \in \mathbb{Z}$.

Thử lại ta thấy hàm số $f(t) = at - C, C \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn (1). $\square$

► **Nhận xét.** Rất ít bạn gửi lời giải bài này. Các bạn đều tìm được nghiệm $f(t) = at - C, C \in \mathbb{Z}$.

Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Hoàng Đỗ Kiên, Đặng Quang Tuấn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 12T7, Nguyễn Tất Phú, 11T1, THPT Đô Lương 1; **Quảng Trị:** Lê Quang Hải, 11 Lí, Nguyễn Thiện Hải, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Trương Đình Sách, 12T1, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/411.** *Cho tam giác ABC, P là điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ P đến BC, CA, AB. Gọi R_a, R_b, R_c lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng*

$$\frac{(d_a + d_b + d_c)^2}{P.A.P.B.P.C} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sin A}{R_a} + \frac{\sin B}{R_b} + \frac{\sin C}{R_c} \right).$$

Lời giải. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AC = c$.

Bổ đề. Nếu điểm P nằm trong tam giác ABC thì

$$(PA + PB + PC)^2 \geq \sqrt{3}(aPA + bPB + cPC).$$

Chứng minh. Vì $\widehat{BPC} + \widehat{CPA} + \widehat{APB} = 2\pi$ nên

$$\cos \widehat{BPC} + \cos \widehat{CPA} + \cos \widehat{APB} \geq -\frac{3}{2} \quad (\text{kết quả quen thuộc}).$$

Theo định lý côsin, BDT Bunyakovsky, ta có

$$\begin{aligned} & a^2 PA + b^2 PB + c^2 PC \\ &= PA(PB^2 + PC^2) + PB(PC^2 + PA^2) + PC(PA^2 + PB^2) \\ &\quad - 2PA \cdot PB \cdot PC (\cos \widehat{BPC} + \cos \widehat{CPA} + \cos \widehat{APB}) \\ &\leq PA(PB^2 + PC^2) + PB(PC^2 + PA^2) \\ &\quad + PC(PA^2 + PB^2) + 3PA \cdot PB \cdot PC \\ &= (PA + PB + PC)(PB \cdot PC + PC \cdot PA + PA \cdot PB) \\ &\leq \frac{1}{3}(PA + PB + PC)^3. \end{aligned}$$

Từ đó, lại theo BDT Bunyakovsky, ta có

$$\begin{aligned} & (PA + PB + PC)^4 \\ &\geq 3(a^2 PA + b^2 PB + c^2 PC)(PA + PB + PC) \\ &\geq 3(aPA + bPB + cPC)^2. \text{ Hay} \end{aligned}$$

$$(PA + PB + PC)^2 \geq \sqrt{3}(aPA + bPB + cPC).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và P là tâm của tam giác đều đó.

Trở lại giải bài toán T12.

Gọi A' , B' , C' theo thứ tự là hình chiếu của P trên BC , CA , AB (hình vẽ).

$$\begin{aligned} & \text{Ta có } PA' \cdot a = 2S_{PBC} \\ &= PB \cdot PC \sin \widehat{BPC}. \end{aligned}$$

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , từ định lý sin ta có

$$\begin{aligned} & B'C' \cdot PA' = PA \sin A \cdot PA' = PA \cdot \frac{a}{2R} \cdot PA' \\ &= \frac{PA \cdot S_{PBC}}{2R} = \frac{1}{2R} PA \cdot PB \cdot PC \sin \widehat{BPC} \\ &= \frac{1}{2R} PA \cdot PB \cdot PC \cdot \frac{a}{2R_a} = \frac{1}{2} PA \cdot PB \cdot PC \cdot \frac{\sin A}{R_a}. \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } C'A' \cdot PB' = \frac{1}{2} PA \cdot PB \cdot PC \cdot \frac{\sin B}{R_b},$$

$$A'B' \cdot PC' = \frac{1}{2} PA \cdot PB \cdot PC \cdot \frac{\sin C}{R_c}.$$

Theo bổ đề trên, chú ý rằng $d_a = PA'$, $d_b = PB'$, $d_c = PC'$ ta có

$$\frac{(d_a + d_b + d_c)^2}{PA \cdot PB \cdot PC} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sin A}{R_a} + \frac{\sin B}{R_b} + \frac{\sin C}{R_c} \right). \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** Nhiều bạn tỏ ra lúng túng trong việc trình bày lời giải. Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tương đối tốt.

Bắc Ninh: Chu Văn Trang, Lê Thị Hải Linh, 9A, THCS Yên Phong; **Nghệ An:** Hoàng Anh Tài, Nguyễn Xuân Tuấn Trung, 9A, Trần Ngọc Duy, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN MINH HÀ

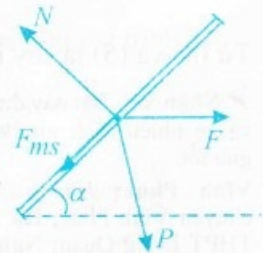
★ **Bài L1/411.** Một ống thủy tinh hình trụ thẳng dài 20cm, kín hai đầu, được đặt cố định và nghiêng góc 40° so với phương ngang tại nơi có gia tốc trọng trường bằng $9,8 \text{ m/s}^2$. Bên trong ống có một quả cầu nhỏ nặng $0,1 \text{ g}$ và tích điện $q = 5 \mu\text{C}$. Biết đường kính của quả cầu nhỏ hơn đường kính ống thủy tinh và hệ số ma sát giữa quả cầu và thành ống là $0,06$. Ban đầu quả cầu nằm yên tại đầu dưới của ống thủy tinh. Người ta tạo ra một điện trường đều nằm ngang và có cường độ 520 V/m ở không gian xung quanh ống thủy tinh làm cho quả cầu chuyển động trong ống. Va chạm giữa quả cầu với hai đầu ống là hoàn toàn đàn hồi. Điện tích của quả cầu không bị ảnh hưởng bởi ma sát và va chạm giữa quả cầu với ống.

a) Tính quãng đường mà quả cầu đi được cho đến khi dừng lại.

b) Sau đó, người ta đột ngột đổi chiều điện trường. Tính quãng đường quả cầu đi thêm được.

Lời giải. a) Sau một số lần va chạm với đầu trên của ống, quả cầu sẽ dừng lại ở đầu này. Phần thế năng tăng thêm bằng tổng đại số công của lực điện trường và công của lực ma sát

$$mgL \sin \alpha = qEL \cos \alpha - \mu(qE \sin \alpha + mg \cos \alpha) \cdot s.$$



Suy ra tổng quãng đường quả cầu đi được đến khi dừng là

$$s = \frac{qEL\cos\alpha - mgL\sin\alpha}{\mu(qE\sin\alpha + mg\cos\alpha)}$$

Thay số vào ta tính được $s = 1,87\text{m}$.

b) Khi đột ngột đổi hướng điện trường, quả cầu sẽ chuyển động xuống. Sau một số lần va chạm với đáy dưới, quả cầu sẽ dừng lại ở đó.

Độ biến thiên thế năng của quả cầu vẫn bằng tổng đại số công của lực điện trường và công của ma sát

$$-mgL\sin\alpha = qEL\cos\alpha - \mu(qE\sin\alpha - mg\cos\alpha)s$$

Suy ra tổng quãng đường quả cầu đi được đến khi dừng là

$$s = \frac{qEL\cos\alpha + mgL\sin\alpha}{\mu(qE\sin\alpha - mg\cos\alpha)}$$

Thay số ta tính được $s = 9,49\text{m}$. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Nam Định: Bùi Xuân Hiền, Đinh Việt Thắng, 12 Lí THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, 12 Lí THPT chuyên Biên Hòa; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 12T7, K50 THPT Đô Lương I; **Đồng Tháp:** Huỳnh Thanh Đức, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thái Bình:** Nguyễn Văn Sơn, 11A2, THPT Bắc Đông Quan.

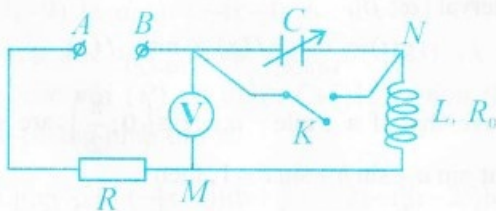
NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/411.** Cho mạch điện như hình vẽ. Biết $u_{AB} = 150\sin 100\pi t (\text{V})$, vôn kế lí tưởng.

a) Khi khóa K đóng: $U_{AM} = 35\text{V}$, $U_{MN} = 85\text{V}$, công suất trên đoạn mạch MN bằng 40W. Tính R_0 , R và độ tự cảm L của cuộn dây.

b) Khi khóa K mở, điều chỉnh tụ điện C để U_C cực đại. Tính $U_{C\max}$ và U_{AM} , U_{MN} khi đó.

c) Khi khóa K mở, điều chỉnh tụ điện C để số chỉ của vôn kế là nhỏ nhất. Tìm C và chỉ số của vôn kế khi đó.



Lời giải. a) Khi khóa K đóng. Ta có

$$U_{AB}^2 = (U_R + U_{R_0})^2 + U_L^2 = (35 + U_{R_0})^2 + U_L^2 = (75\sqrt{2})^2 \quad (1)$$

$$U_d^2 = U_{R_0}^2 + U_L^2 = 85^2 \quad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta được $U_{R_0} = 40\text{V}$, $U_L = 75\text{V}$.

$$\mathcal{P}_{MN} = U_{R_0} I = 40I = 40 \Rightarrow I = 1\text{A}$$

Suy ra $R_0 = 40\Omega$; $R = 35\Omega$; $Z_L = 75\Omega$

$$\Rightarrow L = \frac{0,75}{\pi} \text{H}.$$

b) Khi khóa K mở

Điều chỉnh tụ điện C để $U_C = U_{C\max}$ thì khi đó

$$Z_C = \frac{(R + R_0)^2 + Z_L^2}{Z_L} = 150\Omega$$

$$U_{C\max} = \frac{U}{R + R_0} \sqrt{(R + R_0)^2 + Z_L^2} = 150\text{V}$$

$$\Rightarrow I = \frac{U_{C\max}}{Z_C} = 1\text{A}$$

$$\Rightarrow U_{AM} = RI = 35\text{V}, U_{MN} = IZ_{MN} = 1\sqrt{R_0^2 + Z_L^2} = 85\text{V}.$$

c) Khi khóa K mở. Ta có

$$\begin{aligned} U_{MB} &= \frac{U}{Z} Z_{MB} = U \sqrt{\frac{R_0^2 + (Z_L - Z_C)^2}{(R + R_0)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \\ &= U \sqrt{\frac{1600 + x}{5625 + x}} \text{ với } x = (Z_L - Z_C)^2. \end{aligned}$$

U_{MB} có cực tiểu khi $x=0$, hay $Z_L = Z_C = 75\Omega$

$$\Rightarrow C = \frac{10^{-3}}{7,5\pi} \text{F}. \text{ Số chỉ của vôn kế là}$$

$$U_{MB} = U_{AB} \sqrt{\frac{1600}{5625}} = 40\sqrt{2}\text{V}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Quảng Nam: Nguyễn Thị Vi, 12A1, THPT Trần Quý Cáp; **Bắc Ninh:** Nguyễn Minh Trí, Nguyễn Khắc Tuấn, Trần Danh Khôi, Nguyễn Thị Mai Loan, 12 Toán, Lê Văn Mạnh, 12 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh; **Tiền Giang:** Lê Minh Trung, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Bắc Giang:** Vũ Thị Huyền, 12A2, THPT Lục Ngạn Số 1; **Thái Bình:** Nguyễn Văn Sơn, Nguyễn Văn Minh, 11A2, THPT Bắc Đông Quan; **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, 12 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý; **Vĩnh Phúc:** Bùi Minh Hiếu, 12A2, THPT Lê Xoay; **Nam Định:** Đặng Phúc Cường, 11 Lí, Bùi Xuân Hiền, Đinh Việt Thắng, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 12T7, THPT Đô Lương I, Nguyễn Ngọc Minh, 11A3, THPT Thái Hòa.

NGUYỄN VĂN THUẬN



ĐÓN ĐỌC ẤN PHẨM MỚI

ĐẶC SAN CỦA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

SỐ 2

Đặc san của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ Số 1 phát hành đã được nhiều độc giả trên toàn quốc đón nhận và hưởng ứng rất sôi nổi. Vào tháng 2 năm 2012, Tòa soạn sẽ phát hành tiếp cuốn **Đặc san Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ Số 2**. Các chuyên mục trong Đặc san số 2 được các nhà giáo, các nhà sư phạm có kinh nghiệm biên soạn, giúp các giáo viên trong việc giảng dạy, giúp các em học sinh ôn tập, hệ thống kiến thức để đạt kết quả cao trong các kì kiểm tra chương, học kì, thi vào lớp 10 THPT, thi tốt nghiệp THPT và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng. Tòa soạn rất mong có sự hưởng ứng đọc, viết bài của các thầy cô giáo và các em học sinh trên toàn quốc.

Đặc san số 2 dày 48 trang, khổ $19 \times 26,5$ cm. **Giá bìa: 14.500 đồng.**

Các bạn có thể đặt mua tại các Cơ sở Bưu điện trên cả nước theo **Mã số C.168.1**, các Công ty Sách và Thiết bị trường học ở địa phương.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VỖ, HÀ NỘI

ĐT Biên tập: (04)35121607

ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)35121606 Hotline: 0912828687

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T5/415. Let $ABCD$ be a parallelogram. Points H and K are chosen on lines AB and BC such that triangles KAB and HCB are isosceles ($KA = AB$, $HC = CB$). Prove that

- 1) Triangle KDH is also isosceles.
- 2) Triangles KAB , BCH , and KDH are similar.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/415. In a triangle ABC with $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, A_1 is the midpoint of BC ; O and I are its circumcenter and incenter respectively. Prove that if AA_1 is perpendicular to OI then $\min(b, c) \leq a \leq \max(b, c)$.

T7/415. The real numbers x, y , and z are such that

$$\begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sin \alpha + \sqrt{y} \cdot \cos \alpha - \sqrt{z} = -\sqrt{2(x+y+z)} \\ 2x+2y-13\sqrt{z}=7 \end{cases}$$

$\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$. Determine the value of $(x+y)z$.

T8/415. Solve the following system of equations in two variables

$$\begin{cases} \log_2 x = 2^{y+2} \\ 4\sqrt{1+x} + xy\sqrt{4+y^2} = 0. \end{cases}$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/415. A collection of prime numbers (each prime can be repeated) is said to be *beautiful* if

their product is exactly ten times their sum. Find all *beautiful* collections.

T10/415. Points A, B, C, D and E , in clockwise order, lie on the same circle. M, N, P and Q are the feet of perpendicular lines from E onto AB, BC, CD and DA . Prove that MN, NP, PQ and QM are tangent lines to a certain parabola whose focus point is E .

T11/415. The sequence (a_n) is defined recursively by the following rules:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} - \sqrt{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Find the limit of the sequence (b_n) where

$$b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

T12/415. Let α , and β be two real roots of the equation $4x^2 - 4tx - 1 = 0$ (t is a parameter) and let $f(x) = \frac{2x-t}{x^2+1}$ be a function defined on the interval $[\alpha; \beta]$.

$$g(t) = \max_{x \in [\alpha; \beta]} f(x) - \min_{x \in [\alpha; \beta]} f(x).$$

Prove that if a triple $a, b, c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ are such that $\sin a + \sin b + \sin c = 1$, then

$$\frac{1}{g(\tan a)} + \frac{1}{g(\tan b)} + \frac{1}{g(\tan c)} < \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

Translated by LE MINH HA

DIỄN ĐÀN**DAY
HOC
TOÁN**

CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TIỆM CẬN của đồ thị hàm số phân thức

LƯU VŨ PHONG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long)

Khi khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số dạng phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad-bc \neq 0$),

ta thấy các đường tiệm cận của (C) có những tính chất như: giao điểm của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của (C), hai nhánh của đồ thị luôn nằm về hai phía của đường tiệm cận đứng, hai đường tiệm cận vuông góc với nhau...

Sau đây chúng tôi xin giới thiệu việc vận dụng các tính chất đó trong việc giải một số bài toán liên quan đến tiệm cận.

✪ DẠNG 1. Bài toán liên quan đến khoảng cách

★ **Thí dụ 1.** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$ (C).

a) Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm M thuộc (C) đến hai đường tiệm cận bằng một số không đổi.

b) Tìm điểm M thuộc (C) để tổng các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. a) Tiệm cận đứng $x = 2$; tiệm cận ngang $y = 1$, $M\left(x_0; 1 + \frac{1}{x_0-2}\right) \in (C)$.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang thì

$$d_1 \cdot d_2 = |x_0 - 2| \cdot \left| 1 + \frac{1}{x_0-2} - 1 \right| = 1 \text{ (không đổi)}.$$

b) Ta có $d_1 + d_2 = |x_0 - 2| + \frac{1}{|x_0 - 2|} \geq 2$.

$$\min(d_1 + d_2) = 2 \Leftrightarrow |x_0 - 2| = \frac{1}{|x_0 - 2|} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy các điểm cần tìm là $M_1(3; 2), M_2(1; 0)$. □

DẠNG 2. Dựa vào tính chất hai nhánh của đồ thị (C) nằm về hai phía của đường tiệm cận đứng

★ **Thí dụ 2.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+1}$ (C). Với

giá trị nào của m, đường thẳng

$(d_m): y = mx + m - 1$ cắt (C).

a) Tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị.

b) Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d_m) và đồ thị (C) là

$$mx + m - 1 = \frac{x+2}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ 2mx^2 + 3(m-1)x + m-3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

a) Đường thẳng (d_m) cắt (C) tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị khi PT (1)

có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < -\frac{1}{2}$

(hoặc $-\frac{1}{2} < x_1 < x_2$).

Đặt $t = x + \frac{1}{2}$. Từ PT (1) ta có

$$2mt^2 + (m-3)t - \frac{3}{2} = 0 \quad (2)$$

Đòi hỏi PT (2) có hai nghiệm t_1, t_2 sao cho $t_1 < t_2 < 0$ (hoặc $0 < t_1 < t_2$). Do đó $m < 0$ và $m \neq -3$.

b) Đường thẳng (d_m) cắt (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị khi PT (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 < 0 < t_2$. Do đó

$$2m \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow m > 0. \quad \square$$

★ **Thí dụ 3.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C).

a) Tìm các điểm thuộc hai nhánh của (C) sao cho khoảng cách của chúng là ngắn nhất.

b) Gọi (d) là đường thẳng qua $A(1; 0)$ có hệ số góc k. Tìm k để (d) cắt (C) tại hai điểm M, N thuộc hai nhánh của (C) sao cho $\overline{AM} = -2\overline{AN}$.

Lời giải. a) Gọi P và Q lần lượt là các điểm thuộc nhánh phải và nhánh trái của (C) thì

$$P\left(1+a; 1+\frac{3}{a}\right) (a > 0); Q\left(1-b; 1-\frac{3}{b}\right) (b > 0),$$

$$PQ^2 = (a+b)^2 + 9\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 \geq 4ab + \frac{36}{ab} \geq 24,$$

$$\min PQ = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 4ab = \frac{36}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\sqrt{3}.$$

Vậy $P(1+\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$, $Q(1-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3})$.

b) PT của (d): $y = k(x-1)$. PT hoành độ giao điểm của (d) và (C) là $\frac{x+2}{x-1} = k(x-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ kx^2 - (2k+1)x + k - 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $t = x - 1$. Thay vào PT (1) ta được

$$kt^2 - t - 3 = 0 \quad (2)$$

Để d cắt (C) tại hai nhánh của (C) thì PT (1) có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

$\Leftrightarrow$ PT (2) có hai nghiệm thỏa mãn

$$t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow \frac{-3}{k} < 0 \Leftrightarrow k > 0 \quad (*)$$

Ta có $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ nên $\overline{AM} = (x_1 - 1; y_1)$;

$$\overline{AN} = (x_2 - 1; y_2).$$

$$\overline{AM} = -2\overline{AN} \Leftrightarrow x_1 - 1 = -2(x_2 - 1) \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2k+1}{k} \quad (4) \quad x_1 x_2 = \frac{k-2}{k} \quad (5)$$

Từ (3) và (4) tìm được x_1, x_2 sau đó thay vào

(5) tìm được $k = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn điều kiện (*)). $\square$

DẠNG 3. Tính chất của tiếp tuyến tại điểm M tùy ý trên (C)

★ **Thí dụ 4.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$ (C).

Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận, M là một điểm trên (C). Tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận tại P và Q.

a) Chứng tỏ rằng M là trung điểm của PQ và diện tích tam giác IPQ không đổi.

b) Tìm trên đồ thị (C) điểm M sao cho

$$|\overline{IP} + \overline{IQ}| = 2\sqrt{2}.$$

Lời giải. Ta có $I(1; -2)$, $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{1-x_0}\right) \in (C)$,

tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -2$.

Phương trình tiếp tuyến (Δ) tại M là

$$y = \frac{1}{(1-x_0)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{1-x_0}.$$

(Δ) cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang theo

thứ tự tại $P\left(1; \frac{2x_0}{1-x_0}\right)$ và $Q(2x_0-1; -2)$.

a) Ta có $x_P + x_Q = 2x_M$. Vậy M là trung điểm

$$\text{của } PQ, S_{IPQ} = \frac{1}{2} \overline{IP} \cdot \overline{IQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|1-x_0|} \cdot 2|x_0-1| = 2.$$

b) Theo kết quả a) thì M là trung điểm PQ nên $|\overline{IP} + \overline{IQ}| = 2|\overline{IM}| \Rightarrow IM = \sqrt{2}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (x_0+1)^2 + \frac{1}{(x_0+1)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2. \end{cases}$$

Tìm được hai điểm $M_1(0; -1)$ và $M_2(-2; 5)$. $\square$

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{1+x}$ (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm trên đồ thị (C) điểm M sao cho tiếp tuyến tại M với đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận tại A và B thỏa mãn $|\overline{IA} + \overline{IB}| = 2\sqrt{10}$.

2. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ (C). Tiếp tuyến của (C) tại M là điểm bất kì trên (C) cắt hai tiệm cận tại A và B. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm tọa độ điểm M sao cho hình tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất.

3. Cho hàm số $y = \frac{-2x-4}{x+1}$ (C). Tìm điểm M thuộc (C) để tiếp tuyến với đồ thị (C) tại M tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.



MỘT CÁCH TÍNH TỔNG

Một học sinh nêu lời giải cho bài toán tính toán hình học như ở dưới đây.

Bài toán. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R , M là một điểm tùy ý trên đường tròn. Tính tổng $MA^4 + MB^4 + MC^4$ theo R .

Lời giải. Ta có hằng đẳng thức

$$(a-b)^4 = a^4 + b^4 + 6a^2b^2 - 4ab(a^2 + b^2).$$

Áp dụng vào bài toán trên ta có

$$\begin{aligned} MA^4 &= (\overline{OA} - \overline{OM})^4 \\ &= \overline{OA}^4 + \overline{OM}^4 + 6\overline{OA}^2\overline{OM}^2 \\ &\quad - 4\overline{OA}\cdot\overline{OM}(\overline{OA}^2 + \overline{OM}^2) \\ &= 8R^4 - 8R^2\cdot\overline{OM}\cdot\overline{OA} \text{ (vì } OA=OB=OC=OM=R). \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } MB^4 = 8R^4 - 8R^2\cdot\overline{OM}\cdot\overline{OB};$$

$$MC^4 = 8R^4 - 8R^2\cdot\overline{OM}\cdot\overline{OC}.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } MA^4 + MB^4 + MC^4 \\ &= 24R^4 - 8R^2\cdot\overline{OM}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) = 24R^4 \end{aligned}$$

(do tam giác ABC đều nên $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$).

$$\text{Vậy } MA^4 + MB^4 + MC^4 = 24R^4.$$

Bạn hãy kiểm tra xem lời giải của bạn đó đã đúng chưa nhé! Cách tính của bạn như thế nào?

TRẦN VĂN THƯỜNG
(GV THPT Phú Mỹ, Tân Thành,
Bà Rịa - Vũng Tàu)

Giải đáp:

BÀI TOÁN thật đơn giản!

(Đề đăng trên THPT số 412,
tháng 10 năm 2011)

Rõ ràng lời giải của bạn Nam là sai. Vì trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes thì phương trình $x^2 + y^2 = 1$ là phương trình của một mặt trụ tròn xoay chứ không phải là phương trình của một đường tròn.

Ta có thể giải lại bài toán như sau:

Ta thấy họ mặt cầu (S_a) tồn tại, vì

$$a^2 + b^2 - c = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 8 = 9 > 0.$$

Gọi $I(x_I; y_I; z_I)$ là tâm của một mặt cầu thuộc họ (S_a) . Ta có $I(\sin \alpha; \cos \alpha; 0)$.

Từ đó suy ra $x_I^2 + y_I^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Dẫn đến I luôn nằm trên đường tròn có PT

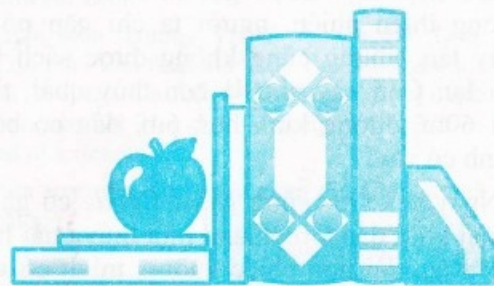
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

(Đường tròn này là giao của mặt trụ tròn xoay có PT $x^2 + y^2 = 1$ và mặt phẳng xOy) (đpcm).

Nhận xét. Các bạn sau có đáp án đúng:

Đinh Ngọc Hân, 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, Quận Thanh Xuân, Hà Nội; Hoàng Đình Quang, 12A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, Thái Bình; Đinh Việt Thắng, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định; Đường Ngọc Lan, 12H, THPT chuyên Vị Thanh, TP. Vị Thanh, Hậu Giang.

NGỌC HIỂN



Số 415 (1-2012)

TOÁN HỌC
Tuổi trẻ 29

BẠN CÓ BIẾT?

Tìm hiểu con Rồng **Trong thiên nhiên và trong đời sống**

NGUYỄN TIẾN BÌNH

(Hà Nội) sưu tầm

Trong số 12 con vật làm biểu tượng cho 12 con giáp năm Âm lịch, thì có 9 con vật thuộc lớp thú (Chuột, Trâu, Hổ, Mèo, Ngựa, Dê, Khỉ, Lợn, Chó); một con thuộc lớp chim (Gà); một con thuộc lớp bò sát (Rắn); Chỉ có một con không thuộc lớp động vật nào rõ ràng, và hừ câu là Rồng. Nhưng con Rồng lại được coi là linh thiêng, biểu tượng cho điều kì, địa vị, quyền lực và sự cao quý.

Chính vì vậy mà con Rồng được bàn thảo ở rất nhiều thời đại, mà cũng chưa hết tranh cãi về con Rồng trong thiên nhiên và trong đời sống. Ta thử xem những bản luận về con Rồng trong thiên nhiên và trong đời sống nhân Tết con Rồng năm nay.

Con Rồng trong thiên nhiên

Trong thiên nhiên, một số con vật có một vài đặc điểm của Rồng, cũng được gọi là Rồng, ví dụ như:

- **Cá Rồng:** Là loại cá cảnh có kích thước lớn, thân dài, có vây rồng, râu rồng. Loài cá này được nuôi làm cảnh ở nhiều địa phương từ lâu đến nay.
- **Rồng đất:** Là một loài bò sát, họ hàng với thằn lằn, đầu và sống lưng nổi lên hàng vây và gai giống như Rồng trong sách vở. Rồng đất có nhiều ở vùng nhiệt đới nước ta.
- **Tôm Rồng:** Là loài Tôm hùm lớn, đầu có sừng, miệng có râu như đầu và miệng rồng huyền thoại. Loài Tôm này có ở Vịnh Hạ Long và biển miền Nam nước ta.
- Có một loại được gọi là *Rồng* thực sự. Trong thiên nhiên, người ta chỉ gặp nó có mấy lần, nhưng cũng không được sách báo ghi lại. Con này như là con thủy quái, thân dài 60m, đường kính hơn 6m, đầu có bờm, mình có vây.
- Ngày 6.7.1734, ông Hans Egude có gặp ở ngoài khơi đảo Groenland một thủy quái hình con Rắn, dài hơn chiếc xuồng, mình có vây, có 4 cái vây rộng như cánh con Dơi.

• Ở Hồ Loch Ness (Anh), có một người đã chụp ảnh được một quái vật nhô đầu lên mặt hồ như một cột ống khói, làm cả nước Anh sôi động một thời gian.

• Ở Việt Nam: Hồi đầu thế kỉ XX, thủy thủ đoàn một tàu chiến Pháp cũng gặp ở Vịnh Hạ Long một quái vật, nó ngóc đầu lên trên mặt nước dài hơn 2m, da màu xanh biếc.

• Con Rồng được giới khoa học thừa nhận là con Rồng nước. Nay nó vẫn tồn tại. Thực ra, là luồng mây và nước, do gió xoáy tạo thành và cuộn lên cao. Khi cuộn lên nó cuốn mạnh lên thành hình vòi rồng, trông xa như cái vòi voi.

Con Rồng trong đời sống

Con Rồng trong đời sống vô cùng phong phú, đa dạng, có ở khắp mọi vật. Các nước Phương Đông chọn Rồng làm biểu tượng cho sự kì diệu, sức mạnh, quyền lực. Vua chúa là Rồng (Long thể). Mọi vật dùng của Vua đều được mang tên Rồng (Long sàng). Người Việt Nam là con Rồng cháu Tiên, nên ta thường cho mình là Rồng. Trong yêu đương, Rồng cũng hiển hiện, nam giới được coi là Rồng, nữ là mây, Rồng, mây quần quýt mới hay. Nhiều cây quý hiếm được mang tên Rồng (cây Xương Rồng, cây Móng Rồng...). Nhiều món ăn ngon được mang tên Rồng như món "Long diên hương" (nước dãi Rồng); đó là vị thuốc bổ, quý hơn vàng. Đồ vật quý được mang tên Rồng (thuyền Rồng). Danh thắng, di tích được mang tên Rồng (Vịnh Hạ Long). Trên mái đình, chùa... đắp hình Rồng, đầu Rồng. Hộp, túi đựng kẹo, bánh có hình Rồng. Rồng đã đi vào văn chương, văn học dân gian, như vào ca dao:

*Tình cờ anh gặp mình đây
Như cá gặp nước như mây gặp Rồng.*

Từ thời cha ông đến nay, Rồng là biểu tượng quý, có mặt ở khắp nơi của đời sống.



VỊNH CON RỒNG

Xuân Nhâm Thìn

BÀI XƯỚNG

Bao nhiêu linh khí của trời Đông
Tụ lại chỉ trong một chữ "Rồng".
Vây Cá, bờm Sư, thân Rắn Chúa,
Sừng Hươu, nanh Hổ, vuốt Chim Ưng.
Uy danh lừng lẫy trùm thiên hạ,
Linh vật tôn thờ khắp núi sông.
Thế đấy, con Rồng ai cũng biết,
Có ai tận mắt thấy hay không?

LÝ VĂN TOÁN

BÀI HỌA

Phải đâu "đặc sản" của phương Đông?
Mà cả phương Tây cũng có "Rồng"!
Quý dữ, trời Âu bao kẻ ghét^(*),
Vật thiêng, châu Á lắm người ưng.
Hạ Long, "Rồng xuống" thành di sản,
Hà Nội, "Rồng lên" rạng núi sông.
Quý dữ, vật thiêng đều biểu tượng,
Việc gì trần trở có hay không!

NGUYỄN KHÁC PHI

Chú thích. ^(*)Quý dữ: Ở nhiều nước phương Tây, "con Rồng được coi là biểu tượng của quý dữ", do đó, "các đầu Rồng bị đập vỡ là chiến thắng của chúa Kitô chống lại các Ác" (Jean Chevalier, Alain Gheerbrant. Từ điển *Biểu tượng văn hóa thế giới*. NXB Đà Nẵng, trường Viết văn Nguyễn Du, 1977, trang 780).

Số 415 (1-2012)

TOÁN HỌC
& Tuổi trẻ **31**



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

SỐ 415 (1.2012)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN. NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHỤNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Trần Xuân Uy – Khai thác nhằm nghiệm của phương trình bậc hai.
- 3 **Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011.**
- 4 **Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 9 tỉnh Thái Bình, năm học 2010 – 2011.**
- 6 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Lê Hồ Quý – Một số ứng dụng hình học của tích phân.
- 9 **Lễ tổng kết và trao giải Cuộc thi viết Câu chuyện tình huống đạo đức và pháp luật.**
- 10 **Thử sức trước kì thi – Đề số 4.**
- 11 **Hướng dẫn giải Đề số 2.**
- 13 **Từ kho tàng toán học – From Math Treasure**
Trần Nam Dũng – Định lí nhỏ Fermat.
- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/415 ..., T12/415, L1/415, L2/415.
- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 411.
- 27 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Lưu Vũ Phong – Các dạng toán liên quan đến đường tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức.
- 29 **Sai lầm ở đâu – Where's Mistake?**
- 30 **Bạn có biết? – Do you know?**
Nguyễn Tiến Bình – Tìm hiểu con Rồng trong thiên nhiên và trong đời sống.
- 31 **Câu lạc bộ – Math Club**
Lý Văn Toán, Nguyễn Khắc Phi – Vịnh con Rồng.

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH

Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mỹ thuật : MINH THỎ, THANH LONG

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI

**CHÚC MỪNG
NĂM MỚI**

Nhâm Thìn



**HẠNH PHÚC
AN KHANG
THỊNH DƯƠNG**



TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG DUY TÂN - KON TUM

15 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN



Hiệu trưởng
NGUYỄN TRÍ ÂN



Trường THPT Duy Tân - Kon Tum được xây dựng trên cơ sở của trường THPT Bán công Duy Tân, thành lập năm 1997. Từ đó đến nay trường đã trải qua mười lăm năm phát triển và từng bước trưởng thành.

Khi mới thành lập, trường có 7 lớp với 350 học sinh, 18 cán bộ giáo viên. Hiệu trưởng nhà trường là thầy ThS. *Nguyễn Hóa* (hiện nay là Phó Giám đốc Sở GD&ĐT Kon Tum), cơ sở mượn tạm của trường CDSP Kon Tum. Cuối năm 1999, trường chuyển đến cơ sở mới, số 192, đường Đinh Công Tráng, phường Duy Tân, thị xã Kon Tum (nay là thành phố Kon Tum). Số lượng học sinh từng năm học liên tục tăng, chất lượng giáo dục không ngừng phát triển. Tỷ lệ học sinh đỗ tốt nghiệp THPT liên tục xếp ở top các trường dẫn đầu toàn tỉnh, nhất là ở giai đoạn từ năm 2000–2006, năm cao nhất là 99,8%. Số lượng học sinh đỗ vào các trường ĐH-CĐ và THCN ngày một cao. Đặc biệt, có một số em đạt học sinh giỏi cấp Quốc gia. Số lượng học sinh giỏi cấp tỉnh được duy trì ở các môn có thế mạnh. Đội ngũ giáo viên không ngừng nâng cao chất lượng giảng dạy. Nhiều giáo viên đạt danh hiệu giáo viên dạy giỏi cấp tỉnh, danh hiệu giáo viên dạy giỏi chuyên đề “Công nghệ thông tin”, chuyên đề “Làm và sử dụng đồ dùng dạy học”,...

Cuối năm học 2008 - 2009, trường chuyển sang công lập. Hiệu trưởng hiện nay là thầy *Nguyễn Trí Ân* và ba Phó hiệu trưởng: Cô *Trần Thị Hà*; Thầy ThS. *Nguyễn Công Lý*; Thầy ThS. *Hồ Hùng Linh*. Dù chưa tròn ba năm ở mô hình trường công lập, nhưng trường THPT Duy Tân đã từng bước phát triển vững chắc. Số lượng giáo viên có trình độ thạc sĩ, giáo viên dạy giỏi cấp tỉnh, giáo viên dạy giỏi chuyên đề được bổ sung hàng

năm. Do cơ chế tuyển sinh, sau khi một số trường trên địa bàn đã thi tuyển, đối tượng đầu vào của trường phần lớn là học sinh có học lực trung bình. Tuy vậy, hai năm qua, tỉ lệ học sinh đạt trung bình về học tập tăng xấp xỉ 25%, tỉ lệ học sinh có đạo đức khá tốt tăng 15%, tỉ lệ học sinh bỏ học giảm 7%, tỉ lệ học sinh lưu ban cũng giảm hẳn; tỉ lệ đỗ tốt nghiệp THPT sau ba năm thực hiện “hai không” là 94,9%; tỉ lệ học sinh đỗ Đại học, Cao đẳng là 60%. Số lượng học sinh giỏi khu vực trong kì thi Olympic các tỉnh phía Nam đã được khẳng định với các Huy chương Bạc, Huy chương Đồng ở một số môn. Số lượng và chất lượng học sinh giỏi cấp tỉnh cũng ngày được nâng lên. (Đặc biệt, đã có nhiều học sinh lớp 11 thi học sinh giỏi cấp tỉnh lớp 12 và đoạt giải). Nhiều tổ chuyên môn được Sở GD&ĐT Kon Tum, UBND tỉnh Kon Tum công nhận là tổ Lao động Tiên tiến Xuất sắc; 2 cán bộ, giáo viên được Bộ GD&ĐT tặng Bằng khen; một số cán bộ, giáo viên đạt danh hiệu Lao động Tiên tiến Xuất sắc, Chiến sĩ thi đua cấp tỉnh được UBND tỉnh tặng Bằng khen và nhiều giáo viên được công nhận là Chiến sĩ thi đua cấp cơ sở... Công đoàn nhà trường phối hợp với Đoàn thanh niên tổ chức được nhiều hoạt động bề nổi có ý nghĩa như Hội thi “Duyên dáng- Trí tuệ”, Lễ “Tri ân và trưởng thành”, Hội thi “Giáo viên tài năng”,... và đã được Liên đoàn Lao động tỉnh tặng Bằng khen. Đoàn thanh niên phát huy vai trò xung kích được Tỉnh đoàn tặng Bằng khen trong năm học 2009-2010.

Phát huy những thành tích đã đạt được, phấn đấu cho mục tiêu xây dựng trường Chuẩn Quốc gia năm 2015, thầy và trò trường THPT Duy Tân - Kon Tum không ngừng nỗ lực phấn đấu để xứng đáng với tên trường DUY TÂN.

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT01M2

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010

In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP

In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2012

Giá : 8000 đồng

Tám nghìn đồng