



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

7 2011
Số 409

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 48

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Tri sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Web: <http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre>

**Bình luận về
ĐỀ THI TUYỂN SINH
ĐẠI HỌC KHỐI A,
NĂM 2011**





MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ HỢP SỐ VÀ ỨNG DỤNG

THÂN NGỌC THÀNH
(GV Đại học Nông nghiệp Hà Nội)

HỢP SỐ là một khái niệm cơ bản và đẹp đẽ của số học. Trong quá trình học, chúng ta đã gặp nhiều bài toán chứng minh một số là hợp số. Thông thường, phương pháp chủ yếu dựa vào định nghĩa: "Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có số ước số lớn hơn 2". Bài viết này xin giới thiệu một phương pháp khác dựa vào nhận xét sau đây.

Nhận xét. Số a là hợp số nếu tồn tại một tích các số nguyên dương $A = a_1 a_2 \dots a_n$ ($n \geq 2$) sao cho a là ước số của A và $a > a_i$ với $i = 1, 2, \dots, n$.

Thật vậy, giả sử a là số nguyên tố và $A : a$. Suy ra, tồn tại một chỉ số k ($1 \leq k \leq n$) sao cho a_k chia hết cho a . Điều này vô lí, vì $a > a_k$.

★ **Bài toán 1.** Giả sử $a = x^2 + xy + 3y^2$ là một ước số của $A = x^6 - y^6$, với mọi x, y là các số tự nhiên. Chứng minh rằng a là hợp số.

Lời giải. Ta có

$$A = x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2).$$

Do a là ước số của A và $a > x^2 - y^2$, $a > x^2 + xy + y^2$, $a > x^2 - xy + y^2$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$ nên theo nhận xét trên a là hợp số. □

★ **Bài toán 2.** Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $ac = bd$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải. Ta có

$$ac = bd \Leftrightarrow (a+b)(a+d) = a(a+b+c+d) = A.$$

Do $a+d < a+b+c+d$; $a+b < a+b+c+d$ và đều là ước số của A nên theo nhận xét trên ta có đpcm. □

★ **Bài toán 3.** Cho a, b, c là ba số nguyên dương đôi một phân biệt thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho $P = a + b + c$. Chứng minh rằng P là hợp số.

Lời giải. Ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Từ giả thiết suy ra P là ước số của $3abc$. Vì a, b, c là ba số tự nhiên đôi một phân biệt nên $P > a, P > b, P > c, P > 3$ và do đó theo nhận xét trên P là hợp số. □

★ **Bài toán 4.** Cho hai số tự nhiên m, n thỏa mãn $m + n + 1$ là một ước số nguyên tố của $2(m^2 + n^2) - 1$. Chứng minh rằng $m = n$.

(Thi Quốc gia Thuy Sĩ 2010).

Lời giải. Giả sử $m \neq n$. Vì $m + n + 1$ là ước số của $(m + n)^2 - 1 = (m + n + 1)(m + n - 1)$, kết hợp với giả thiết thì $m + n + 1$ phải là ước số của

$$\begin{aligned} & (2(m^2 + n^2) - 1) - ((m + n)^2 - 1) \\ &= (m - n)^2 = |m - n| \cdot |m - n|. \end{aligned}$$

Do $m + n + 1 > |m - n|$ nên theo nhận xét trên $m + n + 1$ là hợp số. Điều này mâu thuẫn với giả thiết đề bài hay điều giả sử là sai. Vậy $m = n$. □

★ **Bài toán 5.** Cho a, b, c, d, e, f là các số nguyên dương. Giả sử $S = a + b + c + d + e + f$ là ước số chung của $abc + def$ và $ab + bc + ca - de - df - fd$. Chứng minh rằng S là hợp số.

(Đề dự tuyển IMO 2005).

Lời giải. Xét đa thức

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + a)(x + b)(x + c) - (x + d)(x + e)(x + f) \\ &= Sx^2 + (ab + bc + ca - de - ef - fd)x + (abc + def). \end{aligned}$$

Từ giả thiết suy ra S là ước số của $f(x)$ với mọi x là số tự nhiên. Do vậy, S là ước của $f(d) = (a + d)(b + d)(c + d)$. Lại do $S > a + d$; $S > b + d$; $S > c + d$ nên theo nhận xét trên, S phải là hợp số. □

🌟 **Bài toán 6.** Cho a, b, c, d là các số tự nhiên đôi một phân biệt thỏa mãn

$$a^2 + d^2 = b^2 + c^2 = P.$$

Chứng minh rằng

1) P là hợp số.

2) $ab + cd$ và $ac + bd$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}(ab+cd)(ac+bd) &= ad(b^2+c^2) + bc(a^2+d^2) \\ &= (ad+bc)(a^2+d^2) \quad (*)\end{aligned}$$

Suy ra P là một ước số $(ab+cd)(ac+bd)$ (**)

1) Lại có

$$2(a^2+d^2-ab-cd) = (a-b)^2 + (c-d)^2 > 0.$$

Suy ra $a^2+d^2 > ab+cd$. Tương tự $a^2+d^2 > bd+ac$.

Từ (**), kết hợp với nhận xét trên ta được P là hợp số.

2) Do $a^2+d^2 > ab+cd$, $a^2+d^2 > ac+bd$ và theo (*), suy ra $ab+cd > ad+bc$, $ac+bd > ad+bc$. Giả sử $ab+cd, ac+bd$ đều là số nguyên tố. Khi đó $ad+bc$ phải là ước của $ab+cd$ hoặc $ac+bd$. Điều này là vô lí. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

🌟 **Bài toán 7.** Cho $a > b > c > d$ là các số tự nhiên thỏa mãn

$$ac+bd = (b+d+a-c)(b+d-a+c).$$

Chứng minh rằng $ab+cd$ là hợp số.

Lời giải. Đẳng thức đã cho tương đương với

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2.$$

Do vậy

$$\begin{aligned}(ab+cd)(ad+bc) &= ac(b^2+d^2) + bd(a^2+c^2) \\ &= ac(b^2-bd+d^2) + bd(a^2+ac+c^2) \\ &= (ac+bd)(a^2-ac+c^2) \quad (*)\end{aligned}$$

Ta có $(ab+cd) - (ac+bd) = (a-d)(b-c) > 0$,

và $(ac+bd) - (ad+bc) = (a-b)(c-d) > 0$.

Nên $ab+cd > ac+bd > ad+bc$.

Giả sử $ab+cd$ là số nguyên tố.

Suy ra $(ab+cd, ac+bd) = 1$, do đó theo (*),

$ac+bd$ là ước số của $ad+bc$ (vô lí vì $ac+bd > ad+bc$). Vậy $ab+cd$ là hợp số.



Cuối cùng, mời bạn đọc cùng luyện tập thông qua các bài toán sau đây

Bài 1. Cho các số nguyên dương a, b, c, d với $a \geq b \geq c$ thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $abc = d^3$,

b) $a + b + c - d$ là ước số nguyên tố của $ab + bc + cd - d^2$.

Chứng minh rằng $b = d$.

HD. Tương tự **Bài toán 5**, xét đa thức sau

$$f(x) = (x+a)(x+b)(x+c) - (x^2+d^2)(x+d).$$

Vậy $a + b + c - d$ là một ước nguyên tố của

$$f(-d) = (a-d)(b-d)(c-d).$$

Theo điều kiện a) và áp dụng BĐT Cauchy, suy ra $a + b + c \geq 3d$.

$$\text{Do đó, } a+b+c-d > |a-d|; a+b+c-d > |b-d|;$$

$$a+b+c-d > |c-d| \Rightarrow f(-d) = 0.$$

Từ đó, suy ra $b = d$.

Bài 2. Cho ba số tự nhiên a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng nếu $a + b$ là một ước số lẻ của

$$a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2$$

thì nó là hợp số.

HD. Tương tự **Bài toán 3**, sử dụng hằng đẳng thức

$$\begin{aligned}a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 \\ = (a+b)(b+c)(c+a) - 8abc.\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện bài toán, suy ra $a + b$ là ước số lẻ của abc . Do điều kiện a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $a+b > a, a+b > b, a+b > c$, suy ra $a + b$ là hợp số.

Bài 3. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $n^2 + 2$ là ước nguyên tố của $n^8 - 1$. Chứng minh rằng $n = 1$.

HD. Dựa vào phân tích

$$n^8 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1)(n^4 + 1).$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI

NĂM HỌC 2011 - 2012

VÒNG 1

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

(Thời gian làm bài : 120 phút)

Câu 1. (2 điểm). Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{x-y}{2y-x} + \frac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2} \right) : \frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$$

với $x > 0, y > 0, x \neq 2y, y \neq 2 - 2x^2$.

1) Rút gọn biểu thức A .

2) Cho $y = 1$, hãy tìm x sao cho $A = \frac{2}{5}$.

Câu 1. (2 điểm). Một nhóm công nhân đặt kế hoạch sản xuất 200 sản phẩm. Trong 4 ngày đầu họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành kế hoạch sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công nhân cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Câu 3. (2 điểm). Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - m^2 + 3$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 . Với giá trị nào của m thì x_1, x_2 là độ dài các

cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài

cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Câu 4. (2 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10$. Dây cung CD của đường tròn (O) vuông góc với AB tại điểm E sao cho $AE = 1$. Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại K , AK và CE cắt nhau tại M .

1) Chứng minh $\triangle AEC \sim \triangle OBK$. Tính BK .

2) Tính diện tích tam giác CKM .

Câu 5. (1 điểm). Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Các điểm M và N chạy trên các cạnh BC và CD tương ứng sao cho $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MAN thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 6. (1 điểm). Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4.$$

VÒNG 2

(Dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (2 điểm). Cho $a = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}} - \frac{\sqrt{2}}{8}$.

1) Chứng minh rằng $4a^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2} = 0$.

2) Tính giá trị của biểu thức $S = a^2 + \sqrt{a^4 + a + 1}$.

Câu 2. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y. \end{cases}$$

2) Cho hai số hữu tỉ a, b thỏa mãn đẳng thức

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0.$$

Chứng minh rằng $1 - ab$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Câu 3. (1,5 điểm). Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $p = a^2 + b^2 + c^2$, với a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p .

Câu 4. (3 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , BE và CF là các

đường cao. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S , các đường thẳng BC và OS cắt nhau tại M .

1) Chứng minh rằng $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{ME}$.

2) Chứng minh rằng $\triangle AEM \sim \triangle ABS$.

3) Gọi N là giao điểm của AM và EF , P là giao điểm của AS và BC . Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

Câu 5. (1 điểm). Trong hộp có chứa 2011 viên bi màu (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu), trong đó có 655 viên bi màu đỏ, 655 viên bi màu xanh, 656 viên bi màu tím và 45 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 178 viên bi bất kỳ. Chứng minh rằng trong số các viên bi vừa lấy ra, luôn có ít nhất 45 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 177 viên bi bất kỳ thì kết luận của bài toán còn đúng không?

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội) giới thiệu.

TOÁN HỌC
3 Tuổi trẻ

Số 409 (7-2011)

Lời giải ĐỀ THI VÀO LỚP 10

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2010 - 2011

(Đề thi đã đăng trên THPT số 408, tháng 6 năm 2011)

Câu 1. a) $a + b + c = 0 \Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3$
 $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a + b) = 3abc$. Lại có
 $a^3 + b^3 + c^3 = 0$ nên $3abc = 0$ suy ra đpcm.

b) Từ hai PT đầu của hệ, ta được
 $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 11$.

Thay vào PT thứ ba của hệ, ta có
 $x^3 + y^3 + z^3 + 6 = 33 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 27$.

Suy ra $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 0$

$$\Leftrightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = 0.$$

Xảy ra ba khả năng $x + y = 0$, hoặc $y + z = 0$, hoặc $z + x = 0$, thay vào HPT đã cho, giải ra thu được sáu cặp nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; -1; 3)$, $(-1; 1; 3)$, $(3; 1; -1)$, $(3; -1; 1)$, $(1; 3; -1)$, $(-1; 3; 1)$.

Câu 2. a) PT đã cho tương đương với

$$x^2 - x - 3\sqrt{x^2 - x - 2} = 0.$$

Đặt $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$ ($y \geq 0$), PT đã cho trở thành $y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = 2$.

Từ đó ta được $x = -2$; $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$; $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.
 $x = 3$ là bốn nghiệm của PT đã cho.

b) Theo bài ra $AB \cdot AC = 2$; $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
 Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \geq \sqrt{2AB \cdot AC} = 2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Và } \sqrt{2}(AB + AC) &= \sqrt{2(AB + AC)^2} \\ &= \sqrt{2(AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC)} \\ &= \sqrt{2(BC^2 + 4)} \geq BC + 2 \end{aligned} \quad (2)$$

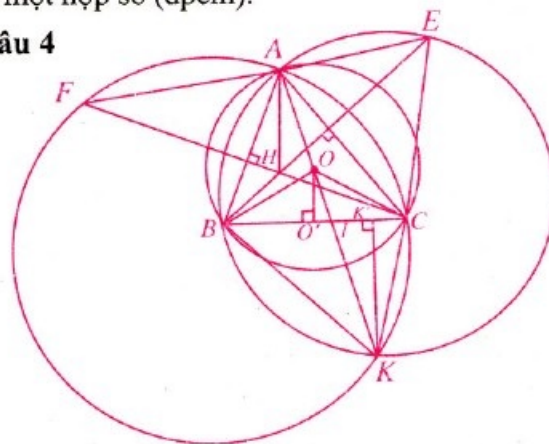
Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 3. a) Dễ thấy bốn số nguyên tố thỏa mãn đề bài là 1; 5; 7; 11.

b) Một số nguyên bất kì khi chia cho 3, số dư chỉ có thể là 0; 1; 2. Nếu trong năm số nguyên dương phân biệt, tồn tại ba số khi chia cho 3 có cùng số dư thì tổng của chúng sẽ chia hết cho 3, mặt khác tổng này lớn hơn 3 nên nó là một hợp số.

Nếu trong năm số nguyên dương phân biệt đó không tồn tại ba số nào chia cho 3 có cùng số dư thì tồn tại ba số chia cho 3 có số dư khác nhau. Tổng ba số này chia hết cho 3 và tổng này lớn hơn 3. Do vậy tổng của ba số đó cũng là một hợp số (đpcm).

Câu 4



a) Từ giả thiết, có $\widehat{AKC} = \widehat{AFC}$; $\widehat{AFC} = \widehat{ACF}$
 $\Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{ACF}$.

Tương tự $\widehat{AKB} = \widehat{ABE}$, mà $\widehat{ACF} = \widehat{ABE}$ suy ra $\widehat{AKC} = \widehat{AKB} = \widehat{ABE} = \widehat{ACF}$.

Lại có $\widehat{ABE} + \widehat{BAC} = 90^\circ$ và $2\widehat{BAC} = \widehat{BOC}$.
 Từ đó, suy ra $\widehat{BKC} + \widehat{BOC} = \widehat{AKC} + \widehat{AKB} + \widehat{BOC}$
 $= 2\widehat{ABE} + 2\widehat{BAC} + \widehat{BOC} = 180^\circ$.

Chúng tỏ tứ giác BOCK nội tiếp hay K thuộc đường tròn cố định ngoại tiếp tam giác OBC.

b) Vẽ $OO' \perp BC$ tại O' , $KK' \perp BC$ tại K' . Gọi I là giao điểm của BC và OK. Vì $BC = R\sqrt{3}$
 $\Rightarrow \widehat{OBC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$. Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC là R. Ta thấy $KK' \leq KI$ (vì $KK' \perp BC$), $OI \geq OO'$ ($OO' \perp BC$), $OK \leq 2R$ (OK là dây cung của đường tròn (OBC)). Do đó

$$\begin{aligned} S_{KBC} &= \frac{1}{2}KK' \cdot BC \leq \frac{1}{2}KI \cdot BC = \frac{1}{2}(OK - OI)BC \\ &\leq \frac{1}{2}\left(2R - \frac{R}{2}\right)R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}. \end{aligned}$$

(Xem tiếp trang 27)



LTS. Đề thi tuyển sinh vào Đại học Khối A năm nay sát với chương trình và Cấu trúc đề thi tuyển sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ban hành. Một số câu trong đề có một số ý mang tính phân loại học sinh, đặc biệt là Câu V. Dưới đây là phần hướng dẫn và nhận xét một số câu tương đối khó trong đề thi của các Thầy cô giáo: Thanh Loan (Hải Dương), Nguyễn Phúc (Nghệ An), Nguyễn Anh Dũng (Hà Nội).

Bình luận về ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A, NĂM 2011

CÂU I. Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x+1}$ (C).

Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) của hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn. PT hoành độ giao điểm của (C) với đường thẳng $d: y = x + m$ là

$$\frac{-x+1}{2x+1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

PT (1) có $\Delta' = (m+1)^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ và

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0$ nên PT (1) luôn có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{1}{2}$. Do đó d luôn cắt (C) tại hai

điểm phân biệt A, B có hoành độ thứ tự là x_1, x_2 và

$$x_1 + x_2 = -m; x_1 x_2 = -\frac{m+1}{2} \quad (\text{theo định lý Viète}).$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = m^2 + m + 1.$$

$$\text{Ta có } k_1 + k_2 = -\frac{1}{(2x_1-1)^2} - \frac{1}{(2x_2-1)^2}$$

$$= -\frac{4(x_1^2 + x_2^2) - 4(x_1 + x_2) + 2}{(4x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1)^2} = -4(m+1)^2 - 2.$$

Vậy $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất bằng -2 tại $m = -1$.

➤ **Nhận xét.** Đây là bài tập cơ bản ứng dụng định lý Viète của PT bậc hai và hệ số góc tại x_0 là $k = f'(x_0)$.

★ **Bài luyện tập.** Cho hàm số $y = \frac{(1+2m)x-2}{x-1}$.

Tìm m để đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$.

CÂU II.1. Giải phương trình

$$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x.$$

Hướng dẫn. ĐK. $\sin x \neq 0$. Biến đổi PT về dạng $\sin^2 x (2\cos^2 x + 2\sin x \cos x) = 2\sqrt{2} \sin^2 x \cos x$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x \cos x (\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0$$

Do ĐK $\sin x \neq 0$ nên

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x + \sin x = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{4} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

➤ **Nhận xét.** Thí sinh dễ quên đặt điều kiện $\sin x \neq 0$ nên không loại nghiệm $\sin x = 0$.

★ **Bài luyện tập.** Giải phương trình

$$\frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 + \tan^2 x} = \cos x \sin 2x.$$

CÂU II.2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x^2 y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 & (1) \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Hướng dẫn. Đặt $u = x + y, v = xy$ thì PT (2) có dạng $v(u^2 - 2v) + 2 = u^2 \Leftrightarrow (v-1)(u^2 - 2v - 2) = 0$.

$$\Leftrightarrow v = 1 \text{ hoặc } u^2 = 2v + 2.$$

• Với $v = 1$ thì $xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$, thay vào PT (1)

ta có

$$3y^4 - 6y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1.$$

Tìm được $(x; y) = (1; 1), (-1; -1)$ (*)

• Với $u^2 = 2v + 2$ thì $x^2 + y^2 = 2$, thay vào PT (1) và biến đổi được

$$(x - 2y)(xy - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ xy = 1 \end{cases} \text{ (đã xét ở trên)}$$

Từ hệ $\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ ta tìm thêm được

$$(x; y) = \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5} \right); \left(\frac{-2\sqrt{10}}{5}; \frac{-\sqrt{10}}{5} \right) (**)$$

Vậy HPT có bốn nghiệm ở (*) và (**).

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán tương đối khó. PT (2) đối xứng với x và y nên việc đặt biến phụ giúp ta dễ nhìn ra mối liên hệ giữa x và y .

★ **Bài luyện tập.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} -x^2y + 2xy^2 + 3y^3 - 4(x+y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) - 1 = 3xy - (x+y)^2. \end{cases}$$

CÂU III. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$$

Hướng dẫn. Biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân thành

$$1 + \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} = 1 + \frac{(x \sin x + \cos x)'}{x \sin x + \cos x}$$

$$I = \left(x + \ln |x \sin x + \cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{(\pi + 4\sqrt{2})}{8}$$

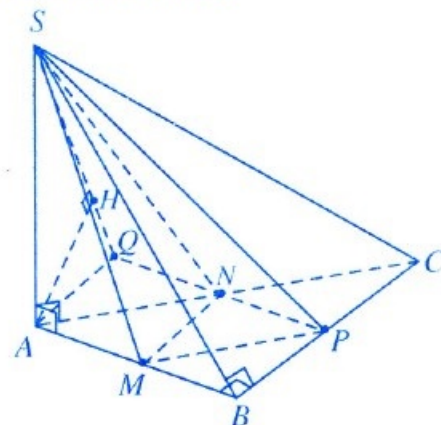
➤ **Nhận xét.** Ngoài cách trên có thể đặt $t = x \sin x + \cos x$ thì $dt = x \cos x dx$ và dùng phương pháp đổi biến số.

★ **Bài luyện tập.** Tính tích phân

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x \cos x + (x-2) \sin x}{x \cos x - \sin x} dx.$$

CÂU IV. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .

Hướng dẫn. • Từ giả thiết có $SA \perp mp(ABC)$ và $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Do đó $SA = AB\sqrt{3} = 2a\sqrt{3}$.



$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA.S_{ABC} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta thấy } V_{S.BCNM} = \frac{3}{4} V_{S.ABC} = a^3\sqrt{3}.$$

• Trong (ABC) dựng hình vuông $AMNQ$. Trong (ASQ) kẻ $AH \perp SQ$, thì do $NQ \perp SA$, $NQ \perp AQ$ nên $NQ \perp (SAQ) \Rightarrow NQ \perp AH$. Từ đó $AH \perp (SQN)$, nghĩa là $AH = d(AB, SN)$. Sử dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAQ với đường

$$\text{cao AH, ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AQ^2} = \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{a^2} \\ \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}. \text{ Do đó } d(AB, SN) = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

➤ **Nhận xét.** 1) Ở ý thứ nhất của câu IV đòi hỏi thí sinh xác định được SA là đường cao của hình chóp $S.ABC$ từ giả thiết cả hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đồng thời để tính được độ dài đường cao SA , từ đó suy ra $V_{S.BCNM}$ thì phải chỉ ra được $\widehat{SBA}$ là một góc phẳng nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

2) Ở ý thứ hai, có thể tính gián tiếp khoảng cách giữa AB và SN theo công thức: $V_{SABN} = \frac{1}{6} AB.SN.d(AB, SN). \sin \alpha$ (trong đó α là góc giữa AB và SN , hay là góc nhọn tạo bởi SN và PN , với P là trung điểm của đoạn thẳng BC).

★ **Bài luyện tập.** Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $CA = a$, $CB = b$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Số đo góc phẳng nhị diện cạnh BC của hình chóp $SABC$ bằng α . D là trung điểm của đoạn thẳng AB .

- Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD .

CÂU V. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 4]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

Hướng dẫn. (Sử dụng sự biến thiên của hàm số).

$$\text{Ta có } P = \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}}.$$

$$\text{Đặt } a = \frac{y}{x}; b = \frac{z}{y}; c = \frac{x}{z} \text{ thì}$$

$$abc = 1; \frac{1}{4} \leq a \leq 1; 1 \leq c \leq 4.$$

Ta được

$$P = \frac{1}{2+3a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{bc}{2bc+3} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{2}{1+\sqrt{bc}} \text{ với } bc = \frac{x}{y} \geq 1 \quad (2)$$

$$(\text{BĐT } (2) \Leftrightarrow (\sqrt{bc}-1)(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geq 0; \text{ đẳng thức xảy ra khi } bc=1 \text{ hoặc } b=c).$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{bc}{2bc+3} + \frac{2}{1+\sqrt{bc}}.$$

$$\text{Lại đặt } t = \sqrt{bc}; \text{ vì } 1 \leq bc = \frac{x}{y} \leq 4 \text{ nên } 1 \leq t \leq 2.$$

$$\text{Ta được } P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t} = f(t).$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-8t^4 + 6t^2(t-2) + 6(t-3)}{(2t^2+3)^2(1+t)^2} < 0$$

$$\text{với } 1 \leq t \leq 2, \text{ nên hàm số } f(t) \text{ nghịch biến trong } [1; 2]. \text{ Do đó } P \geq f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}.$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{34}{33} \text{ khi } t = \sqrt{bc} = 2; \text{ và } b = c;$$

$$\text{tương ứng với } x = 4; y = 1; z = 2.$$

➤ **Nhận xét.** 1) Đây là bài khó dành cho học sinh giỏi. Nếu hai số dương b, c thỏa mãn $bc < 1$ thì ta có $\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \leq \frac{2}{1+\sqrt{bc}}$, đẳng thức xảy ra khi $bc=1$ hoặc $b=c$.

2) Ngoài cách trên, ta có thể coi $P = g(z)$ là một hàm số của biến số z còn x, y là tham số thì

$$g'(z) = -\frac{y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(z+x)^2} = \frac{(x-y)(z^2-xy)}{(y+z)^2(z+x)^2}$$

$$g'(z) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ hoặc } z^2 = xy.$$

$$\bullet \text{ Nếu } x = y \text{ thì } P = \frac{6}{5}.$$

$\bullet$ Nếu $x > y$ thì $g'(z) = 0$ tại $z = \sqrt{xy}$ và $g'(z)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ qua $z = \sqrt{xy}$. Vì vậy

$$P = g(z) \geq g(\sqrt{xy}) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} = \frac{\frac{x}{y}}{2\frac{x}{y}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x}{y}}; \text{ do } 1 < \frac{x}{y} \leq 4, \text{ nên } 1 < t \leq 2.$$

$$\text{Ta được } P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t} = f(t); \text{ trở về lời giải ban đầu.}$$

★ **Bài luyện tập.** Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 9]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức } P = \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

CÂU VIb. 1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho

$$\text{elip } (E) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1. \text{ Tìm tọa độ các điểm } A$$

và B thuộc (E) , có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn. Giả sử $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$. Từ giả thiết có $x_A = x_B > 0$ và $y_B = -y_A$. Do đó

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(O; AB) = |x_A \cdot y_A|.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương và lưu ý rằng $A \in (E)$, ta thấy

$$|x_A \cdot y_A| = 2\sqrt{\frac{x_A^2}{4} \cdot y_A^2} \leq \frac{x_A^2}{4} + \frac{y_A^2}{1} = 1.$$

Nghĩa là $S_{OAB} \leq 1$. Từ đó suy ra S_{OAB} lớn nhất

$$\text{khi và chỉ khi } A\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); B\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{hoặc } A\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); B\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

★ **Bài luyện tập.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip

$$(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ và đường thẳng } d: x - y\sqrt{2} + 2 = 0.$$

a) Chứng minh rằng d luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A và B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

b) Tìm tọa độ điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 9

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) $y = |x|^3 - 3|x| + 2$ là hàm số chẵn và điểm $A(0; -2)$ thuộc trục tung. Trước hết ta xác định tiếp tuyến với đồ thị có tiếp điểm không âm (tiếp tuyến với phần đồ thị bên phải trục tung). Từ đó suy ra tiếp tuyến với phần đồ thị bên trái trục tung. Tiếp tuyến này có dạng $\Delta: y = kx - 2$.

Phần đồ thị bên phải trục tung có PT

$$y = x^3 - 3x + 2 \quad (C)$$

(Δ) là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = kx - 2 & (1) \\ 3x^2 - 3 = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Thế (2) vào (1) ta được $x = \sqrt[3]{2} > 0 \Rightarrow k = 3(\sqrt[3]{4} - 1)$.

PT $\Delta: y = 3(\sqrt[3]{4} - 1)x - 2$. Vậy PT tiếp tuyến kẻ từ $A(0; -2)$ đến phần đồ thị bên trái trục tung là $y = 3(1 - \sqrt[3]{4})x - 2$.

Câu II. 1) Đặt $y = \frac{2x+1}{x-1}$ với $x \in [2; +\infty)$

thì $y \geq 2$; $x = \frac{y+1}{y-2}$. Khi đó $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$, suy ra $y(x) \leq y(2) = 5$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$. Vậy $y \in (2; 5]$. Ta có

$$\sin 2y + \sqrt{2} \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow (\sin y - \cos y) + 2 \sin y \cos y - 1 = 0.$$

Đặt $t = \sin y - \cos y$ ta được PT $t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0$; $t = 1$. Tìm được

$$y = \frac{\pi}{4} + k\pi; y = \frac{\pi}{2} + k2\pi; y = \pi + k2\pi.$$

Vì $y \in (2; 5]$ nên $y = \frac{5\pi}{4}$; $y = \pi$.

$$\text{Khi đó } x = \frac{5\pi+4}{5\pi-8}; x = \frac{\pi+1}{\pi-2}.$$

$$2) \text{ ĐK: } -\frac{4}{3} \leq x \leq 5; x \neq 0 \quad (*)$$

PT thứ hai của hệ tương đương với

$$\log_2 2^y + \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot 2^y = 1 \Leftrightarrow 2^y = \frac{2}{x}$$

PT thứ nhất của hệ tương đương với

$$(\sqrt{3x+4} - \sqrt{5-x}) \cdot 2^y = \frac{2}{x} (19 - 3x^2 + 8x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+4} - \sqrt{5-x} = 19 - 3x^2 + 8x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+4} - 4) + (1 - \sqrt{5-x}) + (3x^2 - 8x - 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+4}+4} + \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} + (3x+4) \right) = 0.$$

Đáp số. $x = 4$.

Câu III

$$I = \int_1^5 \left((\sqrt{x-1}+1)^2 + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \right) dx$$

$$= \int_1^5 \left(\sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1| \right) dx$$

$$= 2 \int_1^2 dx + 2 \int_2^5 \sqrt{x-1} dx = \frac{34}{3}.$$

Câu IV. Xét hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Đặt a là cạnh của tam giác đều ABC , H là tâm giác đều ABC . Tính được

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}; SA = \frac{AH}{\cos 60^\circ} = \frac{3a\sqrt{3}}{3}.$$

Gọi M là trung điểm BC . Kẻ $AK \perp SM$ thì

$AK \perp (SBC)$. Do đó $AK = 6$.

Sử dụng mối liên hệ $AK \cdot SM = AM \cdot SH$, ta thấy $a = 2\sqrt{13}$. Tìm được

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{26\sqrt{39}}{3} \quad (\text{đvtt}).$$

Câu V. Ta có

$$P = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2 + (c+2)^2} + \sqrt{(a+9)^2 + (b-4)^2 + (c-9)^2}.$$

Trong hệ tọa độ $Oxyz$ xét mặt phẳng

$$(\beta): 2x - y + z + 1 = 0;$$

các điểm $A(-1; 3; -2); B(-9; 4; 9); M(a; b; c)$.

Kiểm tra được A, B cùng phía đối với (β) .

Lấy A' đối xứng với A qua (β) , $AA' \perp (\beta)$

tại M_0 , tìm được $M_0(-1; 2; 3)$ và $A'(3; 1; 0)$

$$\Rightarrow A'B = 3\sqrt{26}.$$

Với $M \in (\beta)$ thì $MA' = MA$, nên

$$MA + MB = MA' + MB \geq A'B = 3\sqrt{26}.$$

Do đó $P \geq 3\sqrt{26}$, $P = 3\sqrt{26} \Leftrightarrow M \equiv M_0$
 $\Leftrightarrow a = -1; b = 2; c = 3$. Vậy min $P = 3\sqrt{26}$.

Câu VIa

1) Tìm được $B(7;3)$. Đường thẳng Δ qua M song song với AB có PT $x - 2y = 0$. Gọi $F = BD \cap (\Delta)$,

tìm được $F\left(\frac{28}{5}; \frac{14}{5}\right)$.

Đường thẳng d qua M vuông góc với AB có PT $2x + y - 5 = 0$. $N = d \cap BD$, tìm được $N\left(\frac{21}{15}; \frac{33}{15}\right)$.

$I = AC \cap BD$ suy ra I là trung điểm NF , tìm được $I\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow D(0;2)$.

PT $BC: 2x + y - 17 = 0$; PT $DC: x - 2y + 4 = 0$, tìm được $C(6;5); A(1;0)$.

2) PT mp $(ABC): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Gọi $I(a;b;c)$, r lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ thì $a, b, c > 0$;
 $r < d(O, (ABC)) = \frac{6}{7}$.

Ta có $d(I, (ABC)) = c = a = b = r$.

Do đó $a = b = c = r = \frac{|11a - 6|}{\sqrt{49}} \Rightarrow a = b = c = r = \frac{1}{3}$

(chú ý $r < \frac{6}{7}$).

Vậy PT mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ là

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Câu VIIa. Giải PT $z + \frac{1}{z} = 1$ được nghiệm

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Khi đó } z^{2011} + \frac{1}{z^{2011}} = 2 \cos \left(2011 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Câu VIb. 1) Gọi I là tâm của hình chữ nhật. Đường phân giác góc I có chứa điểm $M(-3;5)$ có PT $x + 3y - 7 = 0$ (Δ).

PT cạnh hình chữ nhật chứa điểm $M(-3;5)$ vuông góc với (Δ), có VTCP $\vec{u}(1;3)$ là

$$F = BD \cap (\Delta) \quad \frac{x+3}{1} = \frac{y-5}{3} \text{ hay } 3x - y + 14 = 0.$$

2) Ta có $AC \perp (BB_1D_1D)$ do đó mặt phẳng (BB_1D_1D) có VTPT là $\vec{n} = \overrightarrow{AC}(1;1;0)$.

Mặt phẳng (α) qua C có PT $a(x-1) + b(y-1) + cz = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) có VTPT $\vec{n}_\alpha(a;b;c)$.

Mặt phẳng (α) qua C_1D và $\overline{C_1D}(-1;0;1)$ nên $\vec{n}_\alpha \cdot \overline{C_1D} = 0 \Rightarrow -a + c = 0 \Rightarrow a = c \Rightarrow \vec{n}_\alpha(a;b;a)$.

Gọi φ là góc giữa (α) và (BB_1D_1D) , ta có

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n})| = \frac{|a+b|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2a^2+b^2}} = \frac{\left|\sqrt{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + b \cdot 1\right|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2a^2+b^2}} \leq \frac{\sqrt{2a^2+b^2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

nên $\varphi \geq \frac{\pi}{6}$. Do đó φ nhỏ nhất bằng $\frac{\pi}{6}$ khi $2a = b$. Lúc đó PT (α) là $x + 2y + z - 3 = 0$.

Câu VIIb. Ta có

$$y = (x^2 - 1)(x^2 - 4) + m(x - 2)(x + 1) = (x - 2)(x + 1)(x^2 + x + m - 2) \quad (C)$$

(C) tiếp xúc trục hoành khi và chỉ khi HPT sau có nghiệm

$$\begin{cases} (x-2)(x+1)(x^2+x+m-2)=0 \\ (x+1)(x^2+x+m-2)+(x-2)(x^2+x+m-2) \\ \quad + (x-2)(x+1)(2x+1)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ PT $x^2 + x + m - 2 = 0$ nhận $x = 2$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm.

$$\text{Tìm được } m = -4; m = 2; m = \frac{9}{4}.$$

NGUYỄN THANH GIANG
 (GV THPT chuyên Hưng Yên)

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP MÔN VẬT LÝ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2011.

Đáp án số báo kì trước:

Câu 1: C; Câu 2: B; Câu 3: A. Câu 4: B



TỔNG QUÁT HÓA MỘT ĐỀ TOÁN HAY

TRẦN QUANG HÙNG

(GV trường chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

1. MỞ ĐẦU

Trong bài viết này chúng tôi xin đưa ra một hướng tiếp cận khác cho đề toán **T8/399** của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 399 tháng 9 năm 2010.

Ta đã biết một bài toán quen thuộc trong tam giác là

★ **Bài toán 1.** Cho tam giác ABC với trọng tâm G . Chứng minh rằng

$$\mathcal{P}_A(GBC) = \mathcal{P}_B(GCA) = \mathcal{P}_C(GAB).$$

Trong đó, kí hiệu (XYZ) chỉ đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ , kí hiệu $\mathcal{P}_K(XYZ)$ chỉ phương tích của điểm K đối với đường tròn (XYZ) . Các kí hiệu này sẽ dùng trong toàn bộ bài viết.

Trong bài toán **T8/399** chúng ta đã biết một tính chất đảo lại rất lí thú đó là

★ **Bài toán 2.** Cho tam giác ABC và điểm P không nằm trên các cạnh, không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó thỏa mãn hệ thức

$$\mathcal{P}_A(PBC) = \mathcal{P}_B(PCA) = \mathcal{P}_C(PAB).$$

Chứng minh rằng P là trọng tâm tam giác ABC .

Về phương diện hình học vectơ chúng ta có thể coi trọng tâm G là tâm tỉ cự của bộ ba điểm (A, B, C) với các hệ số $(1, 1, 1)$. Vậy tại sao chúng ta không xét bài toán cho tâm tỉ cự bất kì? Với ý tưởng đó, trong bài báo này chúng tôi xin trình bày một lời giải khác cho tính chất trên đồng thời tổng quát hơn, không những thế lời giải thu được sẽ dẫn chúng ta đến các kết quả tương tự trong không gian.

2. BÀI TOÁN CƠ BẢN

Trong bài này cách kí hiệu tâm tỉ cự chủ yếu dùng theo bài *Các thuật toán biến đổi tâm tỉ*

cự trong hình học phẳng, THPT số 403, tháng 1 năm 2011.

★ **Bài toán 3.** Cho tam giác ABC với điểm

$P\left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}\right]$ bất kì không nằm trên các cạnh, không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng

$$\alpha \cdot \mathcal{P}_A(PBC) = \beta \cdot \mathcal{P}_B(PCA) = \gamma \cdot \mathcal{P}_C(PAB) = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \mathcal{P}_P(ABC).$$

Ta sẽ đưa ra một bổ đề để giải bài toán trên.

Bổ đề. Cho tam giác ABC với điểm $P\left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}\right]$

bất kì. Phương tích của P với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC được cho bởi công thức

$$\mathcal{P}_P(ABC) = -\frac{\beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

Chứng minh. Từ hệ thức Leibniz, với mọi điểm M thì

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)MP^2 + \alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2.$$

Cho $M \equiv O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , ta suy ra

$$(\alpha + \beta + \gamma)R^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)OP^2 + \alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2 \quad (1)$$

Bằng phương pháp bình phương vô hướng ta có thể chỉ ra

$$\alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2 = \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha + \beta + \gamma} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có

$$\mathcal{P}_P(ABC) = OP^2 - R^2 = -\frac{\alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$= -\frac{\beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}. \quad \square$$

Nhận xét. Từ công thức tính phương tích ta thấy $P\left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}\right]$ thuộc đường tròn ngoại tiếp khi và chỉ khi

$$\mathcal{P}_{P(ABC)} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2 = 0.$$

Đây chính là phương trình biểu diễn đường tròn ngoại tiếp trong hệ tọa độ tỉ cự. Dùng hệ tọa độ tỉ cự để nghiên cứu hình học tam giác là một hướng đi rất hay và cho nhiều kết quả phong phú.

Với ý tưởng hoàn toàn tương tự khi sử dụng hệ thức Leibniz kết hợp định nghĩa phương tích ta có thể tính phương tích của điểm có tọa độ tỉ cự cho trước với một đường tròn bất kì hoặc với một số đường tròn đặc biệt như đường tròn nội tiếp hay đường tròn Euler của tam giác, từ đó suy ra phương trình các đường tròn đặc biệt này. Đây cũng là một chủ đề lớn, xin hẹn các bạn ở một bài viết khác.

Lời giải bài toán 3. Ta sẽ xét vị trí tương đối của P với tam giác ABC . Vì A, B, C, P là các điểm bất kì trên mặt phẳng nên ta cũng có thể tìm "tọa độ" tỉ cự của A trong tam giác PBC sau đó tính $\mathcal{P}_{A(PBC)}$ theo công thức trong bổ đề trên. Thật vậy, chúng ta sẽ đưa ra công thức đó thông qua một hệ thức quen thuộc của tâm tỉ cự nếu $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ thì với mọi điểm M ta có

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MP}.$$

Cho $M \equiv A$ ta thu được

$$\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AP}$$

$$\text{hay } -(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

$$\text{Từ đây ta thấy } A\left[\frac{P}{-(\alpha + \beta + \gamma)}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}\right].$$

Áp dụng bổ đề cho điểm A và tam giác PBC ta thu được

$$\mathcal{P}_{A(PBC)} = -\frac{\beta\gamma a^2 - \beta(\alpha + \beta + \gamma)PB^2 - (\alpha + \beta + \gamma)\gamma PC^2}{(-(\alpha + \beta + \gamma) + \beta + \gamma)^2}$$

$$= -\frac{\beta\gamma a^2 - (\alpha + \beta + \gamma)(\beta PB^2 + \gamma PC^2)}{\alpha^2} \quad (*)$$

Ta sẽ tính $\beta PB^2 + \gamma PC^2$. Từ hệ thức Leibniz cho mọi điểm M ta có

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)MP^2 + \alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2$$

$$\text{hay } \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)MP^2 + \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Nếu cho $M \equiv A$ thì ta thấy

$$\beta c^2 + \gamma b^2 = (\alpha + \beta + \gamma)AP^2 + \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

$$\text{Do đó } PA^2 = \frac{(\beta + \gamma)(\beta c^2 + \gamma b^2) - \beta\gamma a^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

Tương tự cho $M \equiv B, M \equiv C$ ta thu được

$$PB^2 = \frac{(\gamma + \alpha)(\gamma b^2 + \alpha c^2) - \gamma\alpha b^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2},$$

$$PC^2 = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha b^2 + \beta c^2) - \alpha\beta c^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

Tuy nhiên ta không tính trực tiếp mà sẽ tính thông qua công thức

$$\beta PB^2 + \gamma PC^2 = \alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2 - \alpha PA^2$$

$$= \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{\alpha(\beta + \gamma)(\beta c^2 + \gamma b^2) - \beta\gamma a^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta + \gamma)\beta\gamma a^2 + \alpha(\beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2)}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

Thế vào đẳng thức (*) ta thu được

$$\mathcal{P}_{A(PBC)} = -\frac{\beta\gamma a^2 - \frac{(\alpha + \beta + \gamma)\beta\gamma a^2 + \alpha(\beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2)}{\alpha + \beta + \gamma}}{\alpha^2}$$

$$= -\frac{\beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Mặt khác, cũng từ bổ đề ta đã có

$$\mathcal{P}_{P(ABC)} = -\frac{\beta\gamma a^2 + \gamma ab^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

Từ hai công thức trên suy ra

$$\alpha \mathcal{P}_{A/(PBC)} = (\alpha + \beta + \gamma) \mathcal{P}_{P/(ABC)}$$

Nếu làm tương tự với các đỉnh B, C ta sẽ thu được điều phải chứng minh.

$$\begin{aligned} \alpha \mathcal{P}_{A/(PBC)} &= \beta \mathcal{P}_{B/(PCA)} = \gamma \mathcal{P}_{C/(PAB)} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \mathcal{P}_{P/(ABC)}. \quad \square \end{aligned}$$

Tương tự, dựa vào hệ thức Leibniz có thể xây dựng được công thức tính phương tích của một điểm trong hệ tọa độ tỉ cự với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện như sau:

Bổ đề. Cho tứ diện $ABCD$ với điểm $P\left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}, \frac{D}{\delta}\right]$ bất kì. Kí hiệu $(XYZT)$ là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $XYZT$, ta luôn có phương tích của P đối với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ cho bởi công thức

$$\mathcal{P}_{P/(ABCD)} = -\frac{\sum_{A,B,C,D} \alpha\beta AB^2}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2}.$$

Áp dụng bổ đề trên và làm tương tự cho mặt phẳng ta sẽ thu được

✪ **Bài toán 4.** Cho tứ diện $ABCD$ với điểm

$P\left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}, \frac{D}{\delta}\right]$ bất kì không nằm trên các mặt, không nằm trên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \alpha \mathcal{P}_{A/(PBCD)} &= \beta \mathcal{P}_{B/(PCDA)} = \gamma \mathcal{P}_{C/(PDAB)} = \delta \mathcal{P}_{D/(PABC)} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \mathcal{P}_{P/(ABCD)}. \end{aligned}$$

3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CƠ BẢN

Ta thấy bài toán 3 ở trên tổng quát cho các tâm tỉ cự bất kì nên có ứng dụng khá lớn trong mặt phẳng và không gian, chẳng hạn như tính các phương tích $\mathcal{P}_{A/(PBC)}, \mathcal{P}_{B/(PCA)}, \mathcal{P}_{C/(PAB)}$ theo $\mathcal{P}_{P/(ABC)}$. Ở đây ta chỉ nêu ra một số ứng dụng của bài toán 3 với giả thiết trong tam giác có những điểm P thỏa mãn hệ thức $\mathcal{P}_{A/(PBC)} = \mathcal{P}_{B/(PCA)} = \mathcal{P}_{C/(PAB)}$.

Chúng ta quay lại chứng minh bài toán 2 ở phần mở đầu.

Chứng minh. Giả sử P có tọa độ tỉ cự $P\left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}\right]$

Áp dụng bài toán 3 ta có

$$\alpha \mathcal{P}_{A/(PBC)} = \beta \mathcal{P}_{B/(PCA)} = \gamma \mathcal{P}_{C/(PAB)}.$$

Như vậy

$$\mathcal{P}_{A/(PBC)} = \mathcal{P}_{B/(PCA)} = \mathcal{P}_{C/(PAB)}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha : \beta : \gamma) = (1 : 1 : 1) \Leftrightarrow P \equiv G\left[\frac{A}{1}, \frac{B}{1}, \frac{C}{1}\right].$$

là trọng tâm tam giác ABC . $\square$

Với các chứng minh tương tự, ta đi đến bài toán sau

✪ **Bài toán 5.** Cho tam giác ABC và P là điểm bất kì không nằm trên các cạnh, không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác với thỏa mãn hệ thức

$$\alpha \mathcal{P}_{A/(PBC)} = \beta \mathcal{P}_{B/(PCA)} = \gamma \mathcal{P}_{C/(PAB)}.$$

Chứng minh rằng $P\left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}\right]$.

Bài toán này chính là tổng quát hóa của đề toán T8/399 với nó có một số hệ quả đơn giản ví dụ như

✪ **Bài toán 6.** Cho tam giác ABC ($BC = a, AC = b, AB = c$) và P là điểm bất kì không nằm trên cạnh, không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác thỏa mãn hệ thức

$$\alpha \mathcal{P}_{A/(PBC)} = b \mathcal{P}_{B/(PCA)} = c \mathcal{P}_{C/(PAB)}.$$

Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Bài toán cho tứ diện được chứng minh hoàn toàn tương tự.

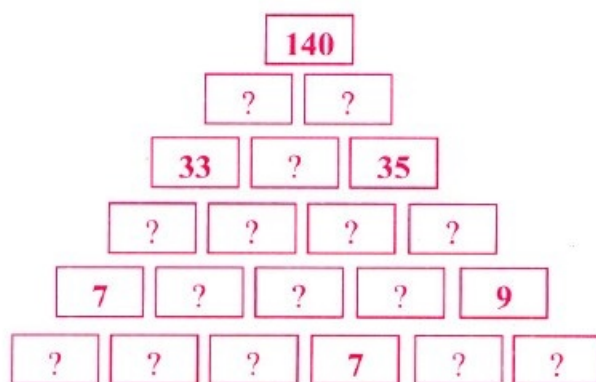
✪ **Bài toán 7.** Cho tứ diện $ABCD$ với P là điểm bất kì không nằm trên các mặt, không nằm trên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện thỏa mãn hệ thức

$$\alpha \mathcal{P}_{A/(PBCD)} = \beta \mathcal{P}_{B/(PCDA)} = \gamma \mathcal{P}_{C/(PDAB)} = \delta \mathcal{P}_{D/(PABC)}.$$

Chứng minh rằng $P\left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}, \frac{D}{\delta}\right]$.



Kim tự tháp số gồm sáu tầng, tầng thấp nhất có sáu số, tầng cao nhất có một số. Mỗi số ở tầng trên được tính bằng tổng của hai số liền kề nhau ở sát ngay tầng dưới nó. Bạn hãy dựa vào kiến thức toán học của mình để suy ra những số chưa biết trên Kim tự tháp số.

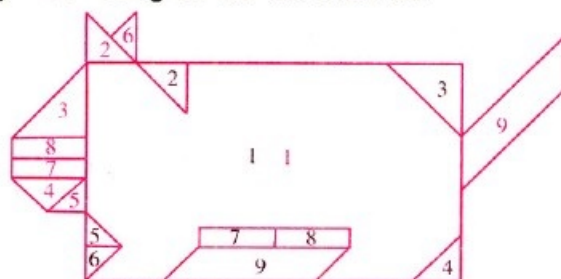


THANH THANH

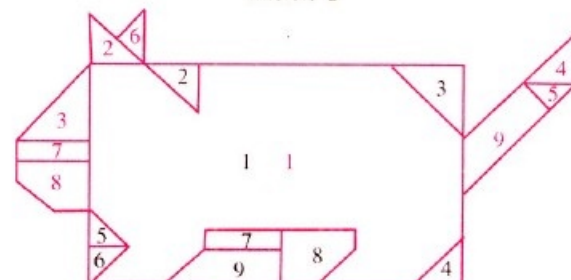
Giải đáp bài: GHÉP HÌNH CON MÈO

(Đề đăng trên THPT số 404, tháng 2 năm 2011)

Dưới đây trình bày hai cách cắt hình chữ nhật (hình 1, hình 2) để ghép lại thành hình con Mèo. Mỗi mảnh được cắt ra được ghi bởi số màu đen và mảnh ấy khi ghép lại được ghi bởi cùng số đó với màu đỏ.



Hình 1



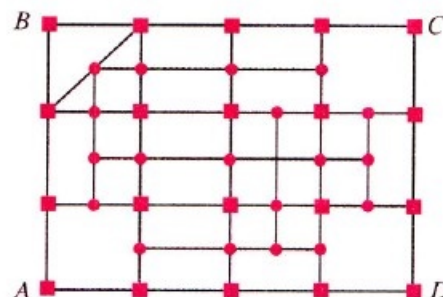
Hình 2

ĐAN QUỲNH

Đọc lại cho đúng

Trên tạp chí THPT số 408, tháng 6 năm 2011 xin được chỉnh lại hình vẽ trong Bài 6. CHIM ĂN QUẢ theo hình đúng dưới đây. Thành thật xin lỗi bạn đọc.

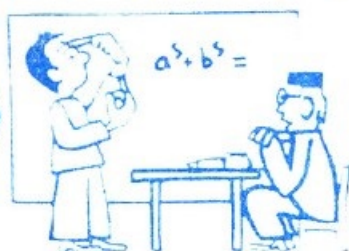
THPT



Các bạn nhớ đặt mua TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ cho Quý III năm 2011 và CÁC SẢN PHẨM CỦA TÒA SOẠN tại các bưu điện trên cả nước

DIỄN ĐÀN

DAY HOC TOAN



SUY NGHĨ SÂU THÊM về phương trình đẳng cấp đối với $\cos x$ và $\sin x$

LÊ QUỐC HÁN

(GV khoa Toán, Đại học Vinh, Nghệ An)

Sách giáo khoa Toán bậc THPT đã trình bày cách giải một số phương trình đẳng cấp đối với $\cos x$ và $\sin x$ qua các thí dụ bằng số và khá đơn giản. Trong bài viết này chúng tôi xin trình bày những suy nghĩ xung quanh lớp phương trình lượng giác đó thông qua việc xét các dạng tổng quát hoặc những thí dụ tương đối phức tạp.

1. Phương trình

$$a \cos x + b \sin x = c \quad (a^2 + b^2 \neq 0) \quad (*)$$

Biến đổi PT (*) về dạng $\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) = c$ với $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

- Nếu $c^2 > a^2 + b^2$ thì PT (*) vô nghiệm.
- Nếu $c^2 \leq a^2 + b^2$: Chọn được α sao cho

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Dẫn đến $\cos(x - \varphi) = \cos \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi + \alpha + k.2\pi \\ x_2 = \varphi - \alpha + l.2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } \cos(x_1 + x_2) &= \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 \\ &= \frac{2a^2}{a^2 + b^2} - 1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{và } \cos(x_1 - x_2) &= \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ &= \frac{2c^2}{a^2 + b^2} - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \cos^2 \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Hơn nữa, } y &= a \cos x + b \sin x + c \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) + c. \end{aligned}$$

Chú ý rằng $-1 \leq \cos(x - \varphi) \leq 1$ nên $-\sqrt{a^2 + b^2} + c \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c$.

Kết quả 1. Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Giả sử x_1, x_2 (với $x_1 - x_2 \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$) là hai nghiệm của PT (*), thì

$$\cos(x_1 + x_2) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad \text{và} \quad \cos^2 \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

Kết quả 2. Cho hàm số $y = a \cos x + b \sin x + c$ với $a^2 + b^2 \neq 0$. Khi đó

$$y_{\min} = -\sqrt{a^2 + b^2} + c, \quad y_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2} + c.$$

★ **Thí dụ 1.** Giả sử hàm số $f(x) = a \cos x + b \sin x$ triệt tiêu tại x_1, x_2 sao cho $x_1 - x_2 \neq k\pi$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$.

(Tuyển sinh Đại học năm 1970)

Lời giải. Giả sử $a^2 + b^2 \neq 0$. Khi đó theo Kết quả 1, có $\cos^2 \frac{x_1 - x_2}{2} = 0$ nên $\frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hay $x_1 - x_2 = (1 + 2k)\pi$ với $1 + 2k \in \mathbb{Z}$: trái giả thiết. Do đó $a^2 + b^2 = 0$ hay $a = b = 0$. Từ đó $f(x) = 0$ với mọi x hay $f(x) \equiv 0$. □

★ **Thí dụ 2.** Chứng minh rằng với mọi số thực x luôn có

$$\left| \frac{\cos x + a \sin x + 1}{\cos x + 2} \right| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}.$$

Lời giải. Miền giá trị của hàm số

$$y = \frac{\cos x + a \sin x + 1}{\cos x + 2}$$

là tập hợp tất cả các giá trị của y để phương trình (ẩn x) $\frac{\cos x + a \sin x + 1}{\cos x + 2} = y$ (1) có nghiệm.

Vì $\cos x + 2 \neq 0$ với mọi x nên PT(1) có nghiệm tương đương với $\cos x + a \sin x + 1 = y \cos x + 2y$ hay $(1 - y) \cos x + a \sin x = 2y - 1$ (2) có nghiệm.

Theo Kết quả 1, điều kiện để PT (2) có nghiệm là $(2y - 1)^2 \leq (1 - y)^2 + a^2$ hay $3y^2 - 2y - a^2 \leq 0$.

$$\text{Do đó } \frac{1 - \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \leq y \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}.$$

$$\text{Từ đó } |y| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}. \quad \square$$

2. Phương trình

$$a \cos^2 x + b \cos x \sin x + c \sin^2 x = d \quad (**)$$

(với $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$)

Sử dụng công thức hạ bậc đưa PT (**) về dạng

$$(a - c) \cos 2x + b \sin 2x = 2d - (a + c).$$

và $a \cos^2 x + b \cos x \sin x + c \sin^2 x + d =$

$$= \frac{a - c}{2} \cos 2x + \frac{b}{2} \sin 2x + \left(\frac{a + c}{2} + d \right).$$

Áp dụng các Kết quả 1 và 2, ta có

Kết quả 3. Điều kiện để PT (**) có nghiệm là

$(a - c)^2 + b^2 \geq (2d - (a + c))^2$. Gọi x_1, x_2 (với $x_1 - x_2 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$) là hai nghiệm của PT (**),

$$\text{thì } \cos(2x_1 + 2x_2) = \frac{(a - c)^2 - b^2}{(a - c)^2 + b^2} \text{ và}$$

$$\cos^2(x_1 - x_2) = \frac{(2d - (a - c))^2}{(a - c)^2 + b^2}.$$

Kết quả 4. Cho hàm số

$$y = a \cos^2 x + b \cos x \sin x + c \sin^2 x + d$$

(với $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$).

$$\text{Khi đó } y_{\min} = -\sqrt{A^2 + B^2} + C, \quad y_{\max} = \sqrt{A^2 + B^2} + C$$

$$\text{với } A = \frac{a - c}{2}; \quad B = \frac{b}{2}; \quad C = \frac{a + c}{2} + d.$$

★ Thí dụ 3. Cho phương trình

$$x^2 - (3 \sin \alpha - \cos \alpha)x - 4 - 4 \cos 2\alpha = 0.$$

a) Chứng minh phương trình có nghiệm với mọi α .

b) Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $x_1^2 + x_2^2$ khi α thay đổi.

Lời giải. a) Vì $ac = -4 - 4 \cos 2\alpha = 4.2 \cos^2 \alpha \leq 0$ với mọi α nên phương trình luôn có hai nghiệm (khác dấu) với mọi α .

b) Theo định lý Viète ta có

$$\begin{aligned} y &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \\ &= (3 \sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 8 + 8 \cos 2\alpha \\ &= 4 \cos 2\alpha - 3 \sin 2\alpha + 13. \end{aligned}$$

Theo Kết quả 4, ta có

$$y_{\min} = -\sqrt{4^2 + 3^2} + 13 = 8; \quad y_{\max} = \sqrt{4^2 + 3^2} + 13 = 18. \quad \square$$

3. Phương trình

$$a_0 \cos^n x + a_1 \cos^{n-1} x \sin x + \dots + a_{n-1} \cos x \sin^{n-1} x + a_n \sin^n x = b \quad (***)$$

Trường hợp 1. n chẵn ($n = 2m, m \in \mathbb{N}^*$).

• Kiểm tra $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ có phải là nghiệm của PT (***) không.

• Tìm những nghiệm $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ bằng cách

chia hai vế của PT (***) cho $\cos^n x \neq 0$, với chú ý

$$\frac{b}{\cos^n x} = b \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^m = b(1 + \tan^2 x)^m = b(1 + t^2)^m$$

với $t = \tan x$, ta được phương trình đại số ẩn t

$$a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n = b(1 + t^2)^m.$$

Giải tìm t , rồi tìm x .

Trường hợp 2. n lẻ, $b = 0$: Giải như trường hợp 1.

Trường hợp 3. n lẻ, $b \neq 0$:

• Kiểm tra $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ có phải là nghiệm của PT (***) không.

• Tìm những nghiệm $x \neq \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ bằng

$$\text{cách đặt } t = \tan \frac{x}{2} \text{ thì } \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

để đưa phương trình đã cho về phương trình đại số ẩn t .

★ Thí dụ 4. Giải phương trình

$$8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện $\cos x \neq 0, \sin x \neq 0$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 8 \sin^2 x \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x \quad (2)$$

Chú ý rằng

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = (\sqrt{3} \sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

nên PT (2) thuộc trường hợp 2. Chia hai vế phương trình đó cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được

$$8 \tan^2 x = (\sqrt{3} \tan x + 1)(\tan^2 x + 1), \text{ hay}$$

$$\sqrt{3} \tan^3 x - 7 \tan^2 x + \sqrt{3} \tan x + 1 = 0.$$

(Xem tiếp trang 30)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/409. (Lớp 6). Không quy đồng mẫu số biểu thức trong ngoặc, tìm số nguyên x biết

$$\left(\frac{2009}{2010} + \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2009} \right) \cdot (x - 2011) > 3x - 6033.$$

HOÀNG NGỌC LÂM

(GV THCS TTr Phú Bài, Hương Thủy,
Thừa Thiên Huế)

Bài T2/409. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có M, N, P thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Trên tia đối của các tia BA, CA, CB, AB, AC, BC thứ tự lấy các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sao cho $BA_1 = CA_2, CB_1 = AB_2, AC_1 = BC_2$. Gọi A_0, B_0, C_0 thứ tự là trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 . Chứng minh rằng các đường thẳng A_0M, B_0N, C_0P đồng quy.

ĐÀO QUỐC DŨNG

(GV THPT Diễn Châu IV, Nghệ An)

Bài T3/409. Cho b là một số nguyên dương thoả mãn hai điều kiện sau:

i) b là tổng của ba số chính phương.

ii) b có một ước nguyên dương dạng

$$a = 3k^2 + 3k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Chứng minh rằng b^n luôn biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số chính phương với mỗi số n nguyên dương.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/409. Cho a, b, c là các số không âm, chứng minh rằng

$$a + b + c \geq \frac{a-b}{b+2} + \frac{b-c}{c+2} + \frac{c-a}{a+2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

LÊ VIỆT HẢI

(Trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T5/409. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , I là trung điểm của cạnh BC . Trên đoạn IC lấy điểm M bất kì (M khác C và I). AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D . Trên đoạn BD lấy điểm E sao cho $\widehat{BME} = \widehat{MAI}$. Hai đường thẳng EM và DC cắt nhau tại F . Chứng minh rằng

$$\frac{CF}{CD} = \frac{BE}{BD}.$$

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/409. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x+2}{2}} - 1 = \sqrt[3]{3(x-3)^2} + \sqrt[3]{9(x-3)}.$$

LÊ TÂM THU

(Lê Xuyên, Triệu Trạch, Triệu Phong, Quảng Trị)

Bài T7/409. Xét các tam giác ABC nội tiếp một đường tròn (O) cho trước. Các trung tuyến xuất phát từ A, B, C cắt đường tròn (O) tương ứng tại A_1, B_1, C_1 . Hỏi trong số những tam giác đó, tam giác nào làm cho biểu thức

$$P = \frac{AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2} \quad \text{có giá trị nhỏ nhất?}$$

ĐÀO XUÂN LUYỆN

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T8/409. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng

$$\frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{\sin C \cdot \sin A}{\sin^2 \frac{B}{2}} \geq 9.$$

TẠ HOÀNG THÔNG

(GV TT Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/409. Cho tam giác ABC có các điểm A', B', C' thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB

sao cho $\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'A}{C'B}$. Gọi D là giao

điểm của AA' và BB' , E là giao điểm của BB' và CC' , F là giao điểm của CC' và AA' . Các đường thẳng qua điểm O nằm trong tam giác và song song với AA', BB', CC' tương ứng

cắt BC , CA , AB tại A_1 , B_1 , C_1 . Chứng minh rằng với điểm M bất kì, ta có

$$AD(MA_1 - OA_1) + BE(MB_1 - OB_1) + CF(MC_1 - OC_1) \geq 0.$$

ĐẬU THANH KỲ
(GV THPT Diễn Châu IV, Nghệ An)

Bài T10/409. Cho $P = (n+1)^7 - n^7 - 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng có vô hạn số tự nhiên n để P là một số chính phương.

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT Nguyễn Bình Khiêm,
Hoài An, Bình Định)

Bài T11/409. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) + f(x+y) = f(xy+x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

NGUYỄN TÀI CHUNG
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

Bài T12/409. Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $f(1) = 2011$

(ii) $f(x+1)f(x) = (f(x))^2 + f(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

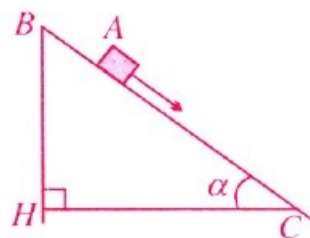
Đặt $S_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(i)-1}, S_2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(i)+1}.$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_1 + S_2).$

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/409. Một vật nhỏ A bắt đầu trượt từ đỉnh B của một khối hình nêm BHC có đáy $HC = 2,1\text{m}$ và góc $\widehat{BCH} = \alpha$. Hệ số



ma sát giữa vật và mặt BC là $k = 0,14$. Tính giá trị của góc α ứng với thời gian đi xuống từ B đến C là nhỏ nhất. Hỏi thời gian ấy bằng bao nhiêu? Cho $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/409. Một sợi dây không khối lượng một đầu dây treo vào trần nhà, đầu còn lại buộc vào vật m . Phía dưới vật m có nối với vật 2m thông qua một lò xo. Ban đầu hệ ở trạng thái cân bằng, độ biến dạng của lò xo khi đó là 3cm . Người ta đem đốt sợi dây.



- Tìm gia tốc của các vật ngay khi vừa đốt dây.
- Sau bao lâu lò xo lại trở về trạng thái ban đầu? Tìm vận tốc của các vật khi đó.

ĐỖ TUẤN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/409. (For 6th grade). Without taking common denominator, find the integer x given that

$$\left(\frac{2009}{2010} + \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2009} \right) (x - 2011) > 3x - 6033.$$

T2/409. (For 7th grade). In a triangle ABC , M , N , P are midpoints of sides BC , CA and AB respectively. Choose the points $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ on the opposite rays of rays BA, CA, CB, AB, AC , and BC respectively so that $BA_1 = CA_2$, $CB_1 = AB_2$, $AC_1 = BC_2$. A_0, B_0, C_0 are midpoints of A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 respectively. Prove that the lines A_0M, B_0N, C_0P meet at a common point.

T3/409. Let b be a positive integer with the following properties:

- b equals a sum of three squares.
- b possess a divisor of the form

$$a = 3k^2 + 3k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Prove that b^n is also a sum of three squares for any positive integer n .

T4/409. Given three non-negative numbers a, b, c , prove the inequality

$$a+b+c \geq \frac{a-b}{b+2} + \frac{b-c}{c+2} + \frac{c-a}{a+2}.$$

When does equality hold?

T5/409. Let ABC be a triangle with circumcircle (O) , I is the midpoint of side BC . M is chosen on IC (differ from both C and I). AM meets (O)

(Xem tiếp trang 27)

$$\widehat{NAP} = \widehat{BAC} - \widehat{BAN} - \widehat{CAP} = 96^\circ - 18^\circ - 18^\circ = 60^\circ$$

Suy ra tam giác APN đều, do đó $NP = NA = AP = NB$.

Hai tam giác ABC và ANP cân tại A , có cùng tia phân giác của góc A , đồng thời là trung trực của các cạnh BC và NP , do đó $NP \parallel BC \Rightarrow \widehat{NPB} = \widehat{PBC}$ (so le trong), mà $\widehat{NPB} = \widehat{NBP}$ (do tam giác NBP cân) nên $\widehat{NBP} = \widehat{PBC}$. Do $\widehat{NBC} = 42^\circ - 18^\circ = 24^\circ$ nên $\widehat{PBC} = 12^\circ$, suy ra tia BP trùng tia BM (**)

Từ (*) và (**) suy ra P trùng M . Vậy $MA = MC$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán khá quen thuộc và có nhiều cách giải. Nhưng không có nhiều bạn tham gia giải. Có thể tổng quát hóa bài toán trên như sau:

Cho tam giác ABC cân tại A , có $\widehat{BAC} = \alpha$ ($60^\circ < \alpha < 120^\circ$).

Lấy điểm K ở trong tam giác sao cho $\widehat{KCB} = 120^\circ - \alpha$, $\widehat{KBC} = 60^\circ - \frac{\alpha}{2} \left(= \frac{1}{2} \widehat{KCB} \right)$. Chứng minh rằng $KA = KC$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Phạm Ngọc Khánh, 7A1, THCS Lâm Thao;
Vĩnh Phúc: Phạm Văn Nhiệm, 7A, THCS Yên Lạc, Nguyễn Hiền Linh, Vũ Trung Hoa, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thúy Phương, Cao Thị Thủy Diễm, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, Trần Thị Mỹ Linh, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa. **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vinh Huy, 7A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/405.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\}$, trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$a + b + c = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 2 \quad (1)$$

Lời giải. Do vai trò của a, b, c trong bài toán là bình đẳng nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó $P = a - c \geq 0$.

Sử dụng (1) và hằng đẳng thức quen thuộc

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

ta được $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 1$.

Lại vì $a + b + c = 2$ nên

$$\begin{aligned} & 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a+b+c)^2 \\ \Leftrightarrow & a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } P^2 &= (a-c)^2 = b(-b+2a+2c) = b(4-3b) \\ &= -3\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} \leq \frac{4}{3} \quad (\text{do } a+c=2-b). \end{aligned}$$

Do đó $P \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-c=\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ b=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2+\sqrt{3}}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=\frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ khi $(a; b; c)$

là hoán vị của bộ số $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2-\sqrt{3}}{3}\right)$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) • Có thể chứng minh $0 \leq a, b, c \leq \frac{4}{3}$ (2) và đánh giá

$$P^2 = b(4-3b) = \frac{1}{3}3b(4-3b) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3b+4-3b}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

Từ đó cũng tìm ra kết quả $\max P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

• Khi có (2), một số bạn đã suy ra $P \leq \frac{4}{3}$ và kết luận

ngay $\max P = \frac{4}{3}$. Điều này không đúng, vì $P = \frac{4}{3}$ xảy ra

khi $a = \frac{4}{3}, c = 0$ (với giả sử $a \geq b \geq c$). Nhưng những bộ số này không thỏa mãn điều kiện (1).

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: Trần Thị Lan Hương, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Nguyên, 9C, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, Nguyễn Tấn Khánh, Lê Hồng Đức, Trương Công Phú, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/405.** Giải phương trình

$$21x - 25 + 2\sqrt{x-2} = 19\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x+1}.$$

Lời giải. Đặt $a = \sqrt{x+1}; b = \sqrt{x-2}$ ($a \geq 0, b \geq 0$), ta có

$$21x - 25 = 6(x+1) + 15(x-2) - 1 = 6a^2 + 15b^2 - 1;$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{(x+1)(x-2)} = ab.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$6a^2 + 15b^2 - 1 + 2b = 19ab + a \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (2a - 3b - 1)(3a - 5b + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b - 1 = 0 \\ 3a - 5b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3b+1}{2} \\ a = \frac{5b-1}{3} \end{cases}$$

• Với $a = \frac{3b+1}{2}$ thì $2\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x-2} + 1$

$$\Leftrightarrow 4x + 4 = 9x - 17 + 6\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-2} = 21 - 5x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{21}{5} \\ 25x^2 - 246x + 513 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 3.$$

• Với $a = \frac{5b-1}{3}$ thì $3\sqrt{x+1} + 1 = 5\sqrt{x-2}$

$$\Leftrightarrow 9x + 10 + 6\sqrt{x+1} = 25x - 50$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+1} = 8x - 30 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{15}{4} \\ 64x^2 - 489x + 891 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{297}{64}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là

$$S = \left\{ 3; \frac{297}{64} \right\}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Để tìm mối liên hệ giữa a và b , ta có thể làm cách khác: Biến đổi

$$(1) \Leftrightarrow 6a^2 - (19b + 1)a + 15b^2 - 2b + 1 = 0 \quad (2)$$

Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn a có $\Delta = (b - 5)^2$,

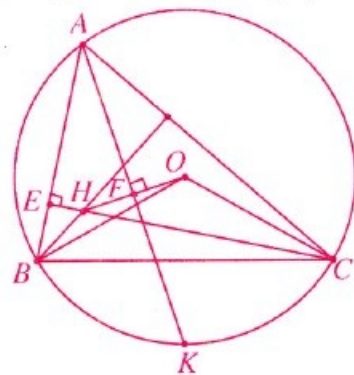
nên (2) có hai nghiệm $a = \frac{3b+1}{2}$ và $a = \frac{5b-1}{3}$.

2) Tuyên dương bạn **Trần Hồng Quân**, 9A6, THCS Lương Thế Vinh, **Thái Bình** có lời giải tốt.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/405.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, AK là phân giác của góc BAC (K thuộc đường tròn (O)). Gọi F là trung điểm của AK , tia OF cắt đường cao CE của tam giác ABC tại H . Chứng minh rằng BH vuông góc với AC .

Lời giải. (Theo bạn **Lê Hồng Đức**, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**).



Ta chứng minh cho trường hợp tam giác ABC nhọn, vị trí các điểm như hình vẽ. Các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự.

Trong đường tròn (O) ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$, suy ra $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 30^\circ$ (do $OB = OC$) (1)

Mặt khác $OF \perp AK$ (vì F là trung điểm của dây AK), suy ra tứ giác $AEHF$ nội tiếp, do đó $\widehat{OHC} = \widehat{BAK} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 30^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OHC} = \widehat{OBC}$ nên tứ giác $OHBC$ nội tiếp, do đó $\widehat{BHC} = \widehat{BOC} = 120^\circ$.

Từ đó $\widehat{ABH} = \widehat{BHC} - \widehat{BEH} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{ABH} + \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow BH \perp AC. \quad \square$

► **Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải trên, một số bạn chứng minh tứ giác $AHKO$ là hình thoi, suy ra $AH \parallel OK \Rightarrow AH \perp BC$ hay H là trực tâm tam giác ABC .

2) Khi tam giác ABC đều thì $O \equiv F$, ta không thể kẻ tia OF . Vì vậy, bạn **Vũ Tuấn Anh** (lớp 9A₄, THCS Trần Đăng Ninh, **Nam Định**) đề xuất sửa câu "Gọi F là trung điểm... tại H " ở đề bài thành "Đường thẳng qua O vuông góc với AK cắt đường cao CE của tam giác ABC tại H ".

3) Bạn **Vũ Tuấn Anh** cũng nhận ra một kết quả hay từ bài toán này "Trong tam giác có một góc bằng 60° , tâm đường tròn ngoại tiếp đối xứng với trực tâm qua đường phân giác góc 60° đó".

4) Ngoài bạn **Đức**, bạn **Anh**, các bạn sau đây cũng có lời giải ngắn gọn: **Vĩnh Phúc**: Nguyễn Thị Lan Hương, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Vũ Thị Quỳnh Anh**, 9A, THCS Vĩnh Yên; **Hà Nam**: Nguyễn Quang Huy, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; **Thái Bình**: Trần Hồng Quân, 9A₆, THCS Lương Thế Vinh, TP. Thái Bình. **Thanh Hóa**: Lê Phạm Kỳ Anh, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoảng Hóa. **Nghệ An**: Đậu Hồng Quân, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi**: Huỳnh Đặng

Hiếu, 9B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Hậu Giang:** Nguyễn Ái Ngân, 10L, THCS Chuyên Vị Thanh. **Đồng Nai:** Huỳnh Quốc Bảo, 9/3, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa. **Ninh Thuận:** Nguyễn Bình Chương, 9/1, THCS Lý Tự Trọng, Tháp Chàm. **Đồng Tháp:** Bùi Trần Hải Đăng, 9A9, THCS Kim Hồng, Cao Lãnh; **Bà Rịa Vũng Tàu:** Đỗ Nguyễn Hoàng Anh, 9A₁, THCS Hắc Dịch, Tân Thành; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Văn Hải, TTBDVH Vinh Hiền, Quận Tân Phú; Trịnh Ngọc Duy, 9A₃, THCS Trần Văn Ôn, Quận 1.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/405.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(5a + \frac{2}{b+c}\right)^3 + \left(5b + \frac{2}{c+a}\right)^3 + \left(5c + \frac{2}{a+b}\right)^3$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương, ta có

$$5a + \frac{2}{b+c} = a+a+a+a+a + \frac{2}{b+c} \geq 6\sqrt{\frac{2a^5}{b+c}},$$

$$\text{do đó } \left(5a + \frac{2}{b+c}\right)^3 \geq 216\sqrt{\frac{2a^5}{b+c}} = \frac{216\sqrt{2}a^4}{a\sqrt{ab+ac}}.$$

$$\text{Tương tự } \left(5b + \frac{2}{c+a}\right)^3 \geq \frac{216\sqrt{2}b^4}{b\sqrt{bc+ba}};$$

$$\left(5c + \frac{2}{a+b}\right)^3 \geq \frac{216\sqrt{2}c^4}{c\sqrt{ca+cb}}.$$

Sử dụng BĐT quen thuộc

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z},$$

suy ra

$$P \geq 216\sqrt{2} \left(\frac{a^4}{a\sqrt{ab+ac}} + \frac{b^4}{b\sqrt{bc+ba}} + \frac{c^4}{c\sqrt{ca+cb}} \right)$$

$$\geq \frac{216\sqrt{2}(a^2+b^2+c^2)^2}{a\sqrt{ab+ac} + b\sqrt{bc+ba} + c\sqrt{ca+cb}}.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$$a\sqrt{ab+ac} + b\sqrt{bc+ba} + c\sqrt{ca+cb}$$

$$\leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(2ab+2bc+2ca)}$$

$$= \sqrt{6(ab+bc+ca)} \leq \sqrt{6(a^2+b^2+c^2)} = 3\sqrt{2}.$$

Vậy $P \geq 648$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán trên có thể tổng quát như sau, lời giải xin dành cho bạn đọc:

Chúng minh rằng

$$\left(ma + \frac{n}{b+c}\right)^p + \left(mb + \frac{n}{c+a}\right)^p + \left(mc + \frac{n}{a+b}\right)^p$$

$$\geq 3 \left(m\sqrt{\frac{k}{3}} + \frac{n\sqrt{3}}{2\sqrt{k}}\right)^p$$

trong đó a, b, c là các số thực dương và m, n, p, k ($p \geq 2$) là các tự nhiên thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = k$.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và có nêu được bài toán tổng quát.

Thanh Hoá: Lê Văn Tuấn Anh, 10A1, THPT Nông Cống I; **Vĩnh Long:** Phạm Ngọc Trung, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nghe An:** Trần Trung Hiếu, A1K48, THPT Thái Hoà; **Chu Tự Tài**, 10A12, Nguyễn Duy Tùng, 11A12, THPT Diễn Châu 2; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hà Nội:** Lương Hữu Bằng, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Bắc Ninh:** Trương Giang Khang, 10 A1, Cao Trần Đình Huỳnh, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Đồng Nai:** Ông Thế Phương, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T7/405.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi OH là đường cao hạ từ đỉnh O của tứ diện và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $OH \leq \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Đặt $OA = a; OB = b; OC = c$.

$$\text{Ta có } V_{OABC} = \frac{1}{3}OH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6}abc$$

$$\text{suy ra } OH = \frac{abc}{2S_{ABC}} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{b^2+c^2} \cdot \sqrt{c^2+a^2}}{4R} \geq \frac{\sqrt{2ab} \cdot \sqrt{2bc} \cdot \sqrt{2ac}}{4R}.$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} \geq \frac{\sqrt{2}abc}{2R} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta thấy } OH \leq \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hay $OABC$ là tứ diện vuông cân tại O . □

➤ **Nhận xét.** Số lời giải gửi về Tòa soạn rất nhiều với nhiều cách giải khác nhau. Tất cả các bạn đều giải đúng. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải gọn hơn cả: **Vinh Phúc:** Đàm Văn Tú, 11A3, THPT Đội Cấn; **Phú Thọ:** Đinh Anh Hoàng, 10A, THPT LCS, Lâm Thao; **Hải Phòng:** Phan Đức Minh, 12A5, THPT Thái Phiên; **Hải Dương:** Nguyễn Việt An, Trần Quang Thanh, Nguyễn Thị Thanh Yên, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hà Nam:** Nguyễn Chí Linh, Lại Thị Thu Hương, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam Định:** Nguyễn Quang Nhân, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Hoàng Đình Quang, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, Nguyễn Anh Tuyến, 12 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** Vương Nhật Quân, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Nguyễn Thanh Long, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nguyễn Văn Hoàng, Lê Đình Tuấn, 11T7, THPT Đô Lương I, Lê Hoàng Hiệp, 10A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, Phan Nguyễn Thanh Sơn, 11A1, THPT Diễn Châu 3, Hoàng Danh Thắng, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III, Lê Thị Thảo, 12A1, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu; **Quảng Nam:** Nguyễn Phước Toàn, 11/5, THPT Trần Văn Dư, Phú Ninh; **Bình Định:** Trần Quang Trí, 11T-L, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nguyễn Quang Hải, 11TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Đồng Nai:** Ông Thế Phương, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa; **Hậu Giang:** Đường Ngọc Lan, 11H, THPT chuyên Vị Thanh; **Bến Tre:** Đào Bá Khả, Khưu Thành Quý, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **TP. Hồ Chí Minh:** Trần Ngọc Quỳnh, 11CT, THPT Nguyễn Hữu Huân, Quận 9.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T8/405.** a) *Hãy tính số các hoán vị khác nhau của từ TOANHOCTUOITRE.*

b) *Hỏi rằng trong số các hoán vị ở a) có bao nhiêu hoán vị có cụm TTT (ba chữ T liền nhau)?*

c) *Hỏi có bao nhiêu hoán vị ở a) không có hai chữ T đứng cạnh nhau?*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh rằng:

Số hoán vị của một từ gồm n chữ cái mà trong đó chữ cái thứ i xuất hiện k_i lần với $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ là

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \quad (1)$$

Thật vậy, có tất cả $(k_1 + k_2 + \dots + k_n)$ vị trí trong từ gồm các chữ cái nói trên.

Trong $(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!$ hoán vị của các chữ cái thì số từ lặp lại do hoán vị chữ cái thứ i với nhau là $k_i!$ lần với $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Từ đó suy ra (1).

a) Trong từ “TOANHOCTUOITRE” có 14 chữ cái gồm 3 chữ T, 3 chữ O và 8 chữ cái còn lại đôi một khác nhau (khác T và O). Sử dụng (1), ta được số hoán vị khác nhau phải tìm là $P(3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{14!}{3!3!}$.

b) Để có cụm “TTT” (ba chữ T liền nhau) ta thực hiện thủ thuật là “buộc” 3 chữ T lại với nhau và coi nó như một chữ cái mới. Khi đó trong từ trên còn 12 vị trí với 3 chữ O và 9 vị trí còn lại tương ứng với các chữ cái đôi một khác nhau (khác O). Số hoán vị phải tìm là $P(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{12!}{3!}$.

c) Để tính số hoán vị của TOANHOCTUOITRE sao cho không có hai chữ T đứng cạnh nhau, trước hết ta tính số hoán vị mà trong đó không có chữ T, nghĩa là các hoán vị của “OANHOCUOIRE”. Có tất cả 11 vị trí, trong đó có 3 chữ O và 8 chữ cái còn lại đôi một khác nhau. Số hoán vị là

$$P(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{11!}{3!}.$$

Tương ứng với mỗi hoán vị trên, ta chọn 3 trong số 12 vị trí khác nhau cho 3 chữ T (bao gồm vị trí đầu, cuối và 10 vị trí xen giữa 11 chữ cái của mỗi hoán vị đó), số cách chọn vị trí cho 3 chữ T là C_{12}^3 .

Vậy số hoán vị mà trong đó không có hai chữ T đứng cạnh nhau là $\frac{11!}{3!} \cdot C_{12}^3 = 110 \cdot \frac{12!}{3!3!}$. □

➤ **Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn tham gia giải bài đều đúng phần a) và b). Trong phần c) nhiều bạn làm như sau: Tính số hoán vị mà trong đó có hai chữ T đứng cạnh nhau. Kết quả ở c) bằng kết quả a) trừ đi kết quả trên. Làm như vậy phức tạp và dễ nhầm lẫn.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Trung Hiếu, 10 Toán, THPT Chu Văn An; **Nam Định:** Trần Văn Đạt, 11B1, THPT Hải Hậu A; **Hải Dương:** Nguyễn Thị Thanh Yên, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** Vương Nhật Quân, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Chu Tự Tài, 10A12, THPT Diễn Châu II; **Hà Tĩnh:** Phạm Tiến Dũng, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T9/405.** Giả sử k là số nguyên dương, α là số thực bất kỳ. Tìm giới hạn của dãy số (a_n) với

$$a_n = \frac{[1^k \cdot \alpha] + [2^k \cdot \alpha] + \dots + [n^k \cdot \alpha]}{n^{k+1}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ở đây kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Lời giải. (Theo bạn **Trần Quang Trí**, 11T-L, THPT Lê Quý Đôn, **Bình Định**).

Ta có $x-1 < [x] \leq x$. Do đó

$$\frac{\alpha(1^k + 2^k + \dots + n^k)}{n^{k+1}} - \frac{1}{n^k} < a_n \leq \frac{\alpha(1^k + 2^k + \dots + n^k)}{n^{k+1}} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

ở đó $f(x) = x^k$.

Theo định lí cơ bản của tích phân ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) áp dụng nguyên lí kẹp ta có

$$\lim a_n = \frac{\alpha}{k+1}. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** 1) Để chứng minh (2), một số bạn sử dụng các cách khác như sau:

$$\text{a) Chứng minh } \frac{1}{k+1} < \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} < \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{(k+1)n^{k+1}}.$$

$$\text{b) Dùng định lí Stolz: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n},$$

ở đó $x_n = [1^k \alpha] + \dots + [n^k \alpha]$, $y_n = n^{k+1}$.

(Tuy nhiên định lí Stolz nằm ngoài chương trình toán phổ thông).

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Lương Hữu Bằng, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Bắc Giang:** La Văn Quân, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nam:** Trương Công Minh, 11A1, THPT A Duy Tiên; **Hải Dương:** Nguyễn Thị Thanh Yên, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** Đỗ Thanh Tùng, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Hồ Diên Phúc, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Quảng Nam:** Nguyễn Phước Toàn, 11/5, THPT Trần Văn Dư; **Tiền Giang:** Nguyễn Khiết Thiên, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang, TP. Mỹ Tho.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/405.** Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- f tăng thực sự;
- $f(f(n)) = 4n + 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;
- $f(f(n) - n) = 2n + 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Từ điều kiện iii) suy ra

$$f(f(2n) - 2n) = 4n + 9, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Sử dụng ii), từ (1) ta thu được

$$f(f(2n) - 2n) = f(f(n)), \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

Do f tăng thực sự trên $\mathbb{N}^*$ nên từ (2) suy ra

$$f(2n) - 2n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{hay } f(2n) = f(n) + 2n, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3)$$

Giả sử $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(n_0 + 1) = f(n_0) + 1$ thì suy ra

$$f(n_0) - n_0 = f(n_0 + 1) - (n_0 + 1)$$

$$\text{hay } f(f(n_0) - n_0) = f(f(n_0 + 1) - (n_0 + 1)),$$

mà theo iii) thì

$$2n_0 + 9 = f(f(n_0) - n_0)$$

$$= f(f(n_0 + 1) - (n_0 + 1)) = 2n_0 + 11,$$

mâu thuẫn.

Vậy nên $f(n+1) \neq f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, do f tăng thực sự trên $\mathbb{N}^*$ nên $f(n+1) \geq f(n) + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

Do đó

$$\begin{aligned} f(n) + 2n &= f(2n) \geq f(2n-1) + 2 \\ &\geq f(2n-2) + 4 \geq \dots \geq f(n+1) + (2n-2) \geq f(n) + 2n, \end{aligned}$$

$$\text{suy ra } f(n+1) = f(n) + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy $\{f(n)\}$ là cấp số cộng với công sai là 2 nên $f(n) = 2(n-1) + f(1)$.

Thế vào ii) $f(f(n)) = 4n + 9$, ta thu được

$$4n + 9 = f(2(n-1) + f(1))$$

$$= 2(2(n-1) + f(1) - 1) + f(1),$$

$$\text{suy ra } f(1) = 5. \text{ Vậy nên } f(n) = 2n + 3.$$

Thử lại, ta thấy $f(n) = 2n + 3$ thỏa mãn bài ra. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Một số bạn tìm nghiệm trong lớp hàm bậc nhất $f(n) = an + b$ để xác định công thức nghiệm và chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán. Một số bạn khác thì sử dụng tính tăng ngặt để chứng minh

$f(n+1) \geq f(n) + 2$ và dùng giả thiết đã cho để chứng minh đẳng thức $f(n+1) = f(n) + 2$.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bắc Giang: La Văn Quân, 10T, THPT chuyên Bắc Giang; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Hà Phương, 10A1 THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Nguyễn Thị Thanh Yên, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** Phan Đức Minh, 12A15 THPT Thái Phiên; **Nam Định:** Vũ Xuân Trường, Vũ Hải Long, 10T1 THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** Trần Ngọc Tiến, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Lương Đức Hiếu, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** Hoàng Ngọc Sơn, 10A1, THPT Tây Tiền Hải, Trần Quang Đại, 11T, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Lê Văn Tuấn, 11T, Nguyễn Quốc Đạt, 10T THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Vương Nhật Quân, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** Trần Thị Phương Thảo, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Cần Thơ:** Hoàng Văn Anh, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Đồng Nai:** Nguyễn Ngọc Duy, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Phạm Văn Minh, 10C, THPT Xuân Lộc; **Hậu Giang:** Đường Ngọc Lan, 11H, THPT chuyên Vị Thanh; **Quảng Nam:** Phan Tuấn Anh, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Trị:** Võ Thị Hồng Hạnh, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Huỳnh Văn Thống, 10 Tin THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T11/405.** Có tồn tại số tự nhiên n ($n \geq 1$) sao cho đa thức

$$f(x) = 1 + 4x + 4x^2 + \dots + 4x^{2n} \quad (n \geq 2)$$

bằng bình phương của một đa thức khác hay không?

Lời giải. (Theo một số bạn học sinh)

Ta có

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= 1 + 4 \cdot \left(\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} \right) \\ &= -3 + 4 \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} \right) \\ &= -3 + 4 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -3 + \frac{8}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{2n+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\leq -3 + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2^5} \quad (\text{do } n \geq 2) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} < 0.$$

Bởi vậy không có số tự nhiên $n \geq 2$ nào thỏa mãn đa thức $f(x)$ bằng bình phương của một đa thức khác. $\square$

➤ **Nhận xét.** Xin tuyên dương các bạn có lời giải hay, ngắn gọn sau:

Bắc Ninh: Trương Giang Khang, 10A1, THPT Thuận Thành số 1; **Hải Phòng:** Phan Đức Minh, 12A15, THPT chuyên Thái Phiên; **Thanh Hóa:** Lê Thị Lan Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Quảng Nam:** Phạm Tuấn Anh, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

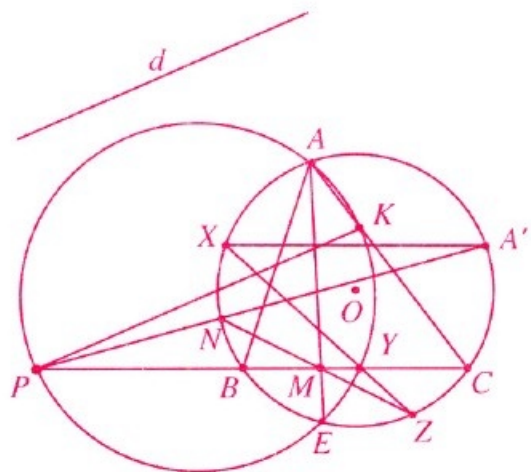
NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T12/405.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và A' là điểm cố định trên (O) . P là điểm di chuyển trên BC , K thuộc AC sao cho PK luôn song song với một đường thẳng d cố định. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E . AE cắt BC tại M . $A'P$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai N . Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

Lời giải. Cách 1. (Theo bạn Phan Đức Minh, 12A15, THPT Thái Phiên, **Hải Phòng**).

Kí hiệu (XYZ) là đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z ; $(XYZT)$ là đường tròn đi qua bốn điểm X, Y, Z, T .

Lấy điểm X thuộc (O) sao cho $XA' \parallel BC$; gọi Y là giao điểm thứ hai của BC và đường tròn (AKP) ; Z là giao điểm thứ hai của XY và đường tròn (O) (h.1).



Hình 1

Đương nhiên điểm X cố định.

Vì Y, A, P, K cùng thuộc một đường tròn và $PK \parallel d$ nên

$$(YA, BC) = (YA, YP) = (KA, KP) = (AC, d) \pmod{\pi}.$$

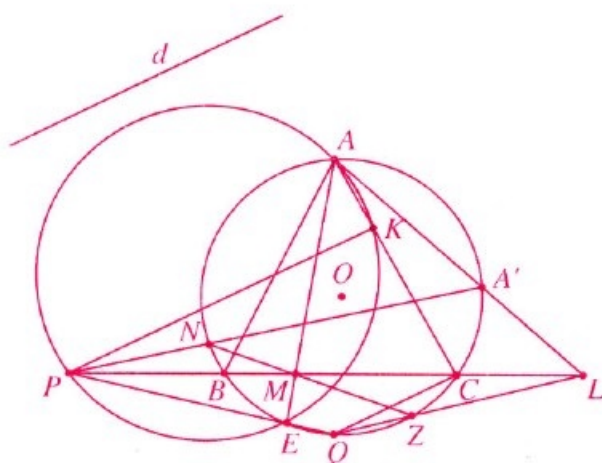
Từ đó, chú ý rằng điểm A cố định và các đường thẳng BC, AC, d cố định, suy ra điểm Y cố định. Từ đó điểm Z cố định.
Mặt khác, vì N, A', Z, X cùng thuộc một đường tròn và $XA' \parallel YP$ nên
 $(NP, NZ) \equiv (NA', NZ) \equiv (XA', XZ)$
 $\equiv (YP, XZ) \pmod{\pi}$.

Suy ra N, P, Z, Y cùng thuộc một đường tròn. Ta thấy NZ là trục đẳng phương của các đường tròn $(NPYZ), (O)$; AE là trục đẳng phương của các đường tròn $(O), (APK)$; PY là trục đẳng phương của các đường tròn $(APK), (NPYZ)$. Suy ra NZ, AE, PY đồng quy. Điều đó có nghĩa là NZ đi qua $M = AE \cap PY$.

Nói cách khác, đường thẳng MN luôn đi qua điểm Z cố định.

Cách 2. (Theo bạn **Lê Văn Tuấn**, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hoá**).

Gọi Q là giao điểm thứ hai của PE và (O) ; Z là giao điểm thứ hai của MN và (O) ; L là giao điểm của AA' và QZ (h.2).



Hình 2

Ta có $(d, AC) \equiv (PK, AK) \pmod{\pi}$ (vì $d \parallel PK$; AC trùng AK)
 $\equiv (PE, AE) \pmod{\pi}$ (vì P, K, A cùng thuộc một đường tròn)
 $\equiv (QE, AE) \pmod{\pi}$ (vì PE trùng QE)
 $\equiv (QC, AC) \pmod{\pi}$ (vì Q, E, A, C cùng thuộc một đường tròn).

Điều đó có nghĩa là $QC \parallel d$.

Từ đó, do C, d cố định, suy ra điểm Q cố định (1)

Áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm A, N, Q, Z, E, A' , chú ý rằng $AE \cap NZ = M$; $AA' \cap QZ = L$; $NA' \cap QE = P$, suy ra M, L, P thẳng hàng.

Mặt khác MP trùng BC , L thuộc BC , suy ra $L = AA' \cap BC$.

Điều đó có nghĩa là điểm L cố định (2)

Từ (1) và (2) suy ra điểm Z cố định.

Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm Z cố định. $\square$

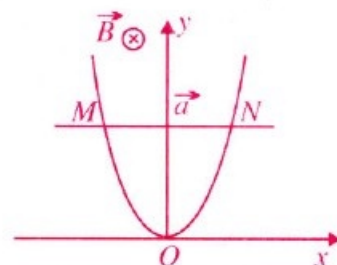
► **Nhận xét.** Bài toán này khá khó, có ít bạn tham gia giải. Vì không biết sử dụng góc định hướng nên lời giải của một số bạn đều phụ thuộc hình vẽ. Tuy nhiên, các bạn vẫn xứng đáng được nêu tên:

Thái Bình: Phạm Hoàng Giang, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hoá:** Trịnh Văn Tam, 11T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Hiền Trang, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Hồ Diên Phúc, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Đồng Nai:** Dương Quốc Khánh, THPT Lê Hồng Phong; **Quảng Nam:** Nguyễn Phước Toàn, 11/5, THPT Trần Văn Dư; **Bến Tre:** Lê Thị Minh Thảo, 10T, THPT chuyên Bến Tre; **Bắc Ninh:** Trương Giang Khang, 10A1, THPT Thuận Thành I.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/405.** Một dây dẫn uốn cong theo đường parabol $y = \alpha x^2$ (α là hằng số dương), được đặt trong từ trường đều, cảm ứng từ B vuông góc với mặt phẳng xOy và hướng vào trong (hình vẽ).

Tại thời điểm $t = 0$ (s), một thanh dẫn MN bắt đầu chuyển động tịnh tiến theo phương Oy từ gốc O với gia tốc không đổi a .



a) Tính từ thông qua diện tích mạch MON tại thời điểm t .

b) Suất điện động cảm ứng trong mạch theo tọa độ y và chiều của dòng điện cảm ứng trên cạnh MN .

Lời giải. a) Tại thời điểm t , tung độ của thanh dẫn MN bằng $y = \frac{at^2}{2}$ còn hoành độ của hai điểm M và N được xác định từ phương trình parabol:

$$y = \alpha x^2 = \frac{at^2}{2} \Rightarrow x_M = -\sqrt{\frac{a}{2\alpha}}t; x_N = \sqrt{\frac{a}{2\alpha}}t.$$

Diện tích giới hạn bởi thanh MN và dây dẫn ở thời điểm t bằng

$$S = \int_{x_M}^{x_N} \left(\frac{at^2}{2} - \alpha x^2 \right) dx.$$

Tính tích phân trên theo biến số x ta tìm được

$$S = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{2a}{\alpha}} t^3.$$

Chọn vector pháp tuyến hướng vào trong mặt phẳng hình vẽ thì từ thông qua diện tích của mạch MON ở thời điểm t bằng

$$\phi = B.S = \frac{Ba}{3} \sqrt{\frac{2a}{\alpha}} t^3.$$

b) Suất điện động cảm ứng trong mạch ở thời điểm t :

$$E_{cu} = \left| -\frac{d\phi}{dt} \right| = Ba \sqrt{\frac{2a}{\alpha}} t^2 = Ba \sqrt{\frac{2a}{\alpha}} \cdot \frac{2y}{a} = 2B \sqrt{\frac{2a}{\alpha}} y.$$

Theo quy tắc Lenxơ dòng điện cảm ứng chạy từ N tới M để tạo ra từ trường làm giảm sự tăng từ thông qua mạch. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng:

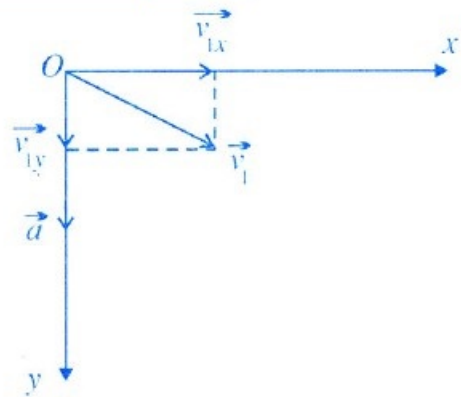
Bắc Ninh: Lê Văn Mạnh, 12 Hòa, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** Đinh Việt Thắng, Bùi Xuân Hiền, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Mai Văn Tùng, 12A1, THPT Hậu Lộc 4; **Bùi Thị Thúy,** 12A3, THPT Lê Hoàn 1, Thọ Xuân; **Nghệ An:** Bùi Hữu Vinh, Nguyễn Văn Hoàng, 11T7, THPT Đô Lương I; **Trần Hoàng Khánh,** K43A6, **Trần Văn Bắc,** 11A6, THPT chuyên, ĐH Vinh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/405.** Một vật chuyển động với gia tốc không đổi có độ lớn $a = 5\text{m/s}^2$. Tại thời điểm $t_1 = 2\text{s}$ vector vận tốc và vector gia tốc của vật hợp với nhau một góc $\alpha = 60^\circ$ và vận tốc có độ lớn $v_1 = 10\text{m/s}$. Hãy xác định:

- Thời điểm mà vận tốc của vật có độ lớn nhỏ nhất. Tính độ lớn nhỏ nhất đó của vận tốc.
- Khoảng cách giữa vị trí của vật ở thời điểm t_1 và thời điểm ban đầu $t = 0\text{s}$.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Góc tọa độ O ở vị trí của vật ở thời điểm t_1 ; gốc thời gian là lúc vật bắt đầu chuyển động; trục Oy theo hướng của vector gia tốc.



• Hình chiếu của vector gia tốc trên các trục tọa độ là $a_x = 0; a_y = a$.

Từ đó suy ra phương trình vận tốc của vật trên các trục tọa độ

$$v_x = v_{1x} = v_1 \sin \alpha = 5\sqrt{3},$$

$$v_y = v_{1y} + a(t - t_1) = v_1 \cos \alpha + a(t - t_1) = 5t - 5.$$

• Phương trình chuyển động của vật trên các trục tọa độ có dạng

$$x = x_1 + v_{1x}(t - t_1) = 5\sqrt{3}(t - 2).$$

$$y = y_1 + v_{1y}(t - t_1) + \frac{1}{2}a(t - t_1)^2 = 2,5t^2 - 5t.$$

a) Độ lớn của vận tốc tại thời điểm t bằng

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{25t^2 - 50t + 100}$$

$$\text{hay } v = \sqrt{25(t - 1)^2 + 75}.$$

Từ đây suy ra khi $t = 1(\text{s})$ thì

$$v = v_{\min} = 5\sqrt{3}(\text{m/s}).$$

b) Khoảng cách giữa hai vị trí của vật ở thời điểm t_1 và thời điểm ban đầu $t = 0$ là

$$l = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = 10\sqrt{3}(\text{m}). \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nam Định: Bùi Xuân Hiền, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý, Nguyễn Đức Nam, 10A5, THPT Duy Tiên B; **Thanh Hóa:** Mai Văn Tùng, 12A1, THPT Hậu Lộc 4, Đoàn Văn Hiệp, THPT Triệu Sơn IV, xóm 6, Thọ Thế, Triệu Sơn, **Bùi Thị Thúy,** 12A3, THPT Lê Hoàn; **Nghệ An:** Trần Văn Bắc, 11A5, **Trần Hoàng Khánh,** K43A6, THPT chuyên Đại học Vinh, **Nguyễn Thanh Long,** 12Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** Phạm Quang Dũng, 11 Lí, PTNK ĐHQG TP Hồ Chí Minh;

NGUYỄN VĂN THUẬN

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

at D . Point E is on BD such that $\widehat{BME} = \widehat{MAI}$. EM and DC intersect at F . Prove that

$$\frac{CF}{CD} = \frac{BE}{BD}.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/409. Solve for x :

$$\sqrt{\frac{x+2}{2}} - 1 = \sqrt[3]{3(x-3)^2} + \sqrt[3]{9(x-3)}.$$

T7/409. Triangle ABC is inscribed in a fixed circle (O) . The medians from A, B, C meet (O) at A_1, B_1, C_1 respectively. Which triangle makes the value of the expression $p = \frac{AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2}$ minimum possible?

T8/409. In a triangle ABC , prove that

$$\frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{\sin C \cdot \sin A}{\sin^2 \frac{B}{2}} \geq 9.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/409. Let ABC be a triangle with points A', B', C' on sides BC, CA and AB respectively

such that $\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'A}{C'B}$. AA' and BB' meet

at D , BB' meets CC' at E , and F is the intersection of CC' and AA' . Parallel lines to AA', BB', CC' through point O in the interior of ABC meet BC, CA, AB at A_1, B_1, C_1 respectively.

Prove that for any point M ,

$$AD(MA_1 - OA_1) + BE(MB_1 - OB_1) + CF(MC_1 - OC_1) \geq 0.$$

T10/409. Given

$$P = (n+1)^7 - n^7 - 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Prove that there are infinitely many natural numbers n so that P is a perfect square.

T11/409. Determine all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continuous on $\mathbb{R}$ such that

$$f(xy) + f(x+y) = f(xy+x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

T12/409. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a function with the following properties:

$$(i) \quad f(1) = 2011$$

$$(ii) \quad f(x+1)f(x) = (f(x))^2 + f(x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Let } S_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(i)-1}, \quad S_2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(i)+1}.$$

$$\text{Find } \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_1 + S_2).$$

Translated by LE MINH HA



LỜI GIẢI ĐỀ THI... (Tiếp trang 4)

Vậy tam giác KBC có diện tích lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$,

đạt được khi OK là đường kính của đường tròn (OBC) . Khi đó các điểm K', I, O' trùng nhau $\Leftrightarrow BK = CK \Leftrightarrow \triangle ABK = \triangle ACK \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa của cung lớn BC .

c) Theo câu a) ta có $\widehat{ACF} = \widehat{ABE} = \widehat{AEB}$, suy ra $\widehat{ACH} = \widehat{AEH}$ hay tứ giác $AHCE$ nội tiếp, từ đó có $\widehat{AHE} = \widehat{ACE}$. Mặt khác $\widehat{AKC} = \widehat{AFC}$, $\widehat{AFC} = \widehat{ACF}$, $\widehat{ACF} = \widehat{ABE}$, $\widehat{ABE} = \widehat{AKE} \Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{AKE} \Rightarrow KC = KE$.

Nên có $\widehat{AHB} = \widehat{ACK}$. Lại có $\widehat{ABE} = \widehat{AKE}$ hay $\widehat{ABH} = \widehat{AKC}$. Suy ra $\triangle AHB \sim \triangle AKC$ (g.g). Hơn nữa $\widehat{ABH} = \widehat{AKC} = 90^\circ - \widehat{BAC}$.

$$\text{Mà } \widehat{OKC} = \widehat{OBC} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BOC}) = 90^\circ - \widehat{BAC},$$

nên $\widehat{AKC} = \widehat{OKC} \Rightarrow KO \equiv KA$. Vậy AK luôn đi qua điểm O cố định.

Câu 5. a) Có 12 đội, mỗi đội thi đấu đúng 4 trận nên tìm được hai đội chưa thi đấu với nhau. Gọi hai đội đó là A và B .

Mỗi đội A, B thi đấu đúng bốn trận, do vậy trong 10 đội còn lại có ít nhất hai đội chưa thi đấu với cả A và B . Gọi một trong hai đội đó là C . Khi đó A, B, C là ba đội bóng đôi một chưa thi đấu với nhau.

b) Khẳng định trên không còn đúng nếu mỗi đội đã thi đấu đúng năm trận. Thật vậy

Chia 12 đội bóng thành hai nhóm, mỗi nhóm có sáu đội, các đội trong mỗi nhóm đôi một đã thi đấu với nhau và mỗi đội đã thi đấu đúng năm trận.

Xét ba đội bóng tùy ý, luôn có ít nhất hai đội bóng ở cùng một nhóm. Như vậy với ba đội bóng bất kì luôn có ít nhất hai đội đã thi đấu với nhau.

NGUYỄN ĐỨC TẤN – NGUYỄN ANH HOÀNG
(TP Hồ Chí Minh) sưu tầm và hướng dẫn giải.



Cuộc bầu cử Đại biểu Quốc hội và Đại biểu Hội đồng nhân dân các cấp vừa diễn ra trên cả nước vào ngày 22/5/2011. Nhiều bạn đọc đặt câu hỏi "Kiểm phiếu như thế nào cho chính xác, nhanh và dễ làm?" Bài viết này xin đề cập đến vấn đề đó.

ÁP DỤNG TOÁN HỌC VÀO KIỂM PHIẾU BẦU ĐẠI BIỂU QUỐC HỘI VÀ HỘI ĐỒNG NHÂN DÂN CÁC CẤP

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

Ở mỗi đơn vị bầu cử trong cuộc bầu cử vừa qua, hoặc bầu 3 trong 5 ứng viên, hoặc bầu 4 trong 6 ứng viên, hoặc bầu 5 trong 7 ứng viên, như vậy

- Số người bị loại là 2;
- Số người được bầu là 3, hoặc 4, hoặc 5 (số người được bầu nhiều hơn số người bị loại).

A. CÁCH THỨ NHẤT (Kiểm phiếu xuôi bằng cách ghi số phiếu bầu).

Ghi số phiếu bầu cho mỗi ứng viên theo từng nhóm 5 phiếu $\square \square \dots$ Ta không dùng cách này vì nó không thích hợp khi số người được bầu nhiều hơn số người bị loại.

B. CÁCH THỨ HAI (Kiểm phiếu ngược bằng cách ghi số phiếu không bầu).

Ghi số phiếu không bầu cho mỗi ứng viên theo từng nhóm 5 phiếu $\square \square \dots$ rồi dùng phép trừ để tính số phiếu bầu cho mỗi ứng viên. Cách này nhanh hơn cách thứ nhất, nhưng ta cũng không dùng vì việc ghi như vậy mất nhiều thời gian hơn việc xếp phiếu theo từng dạng rồi đếm.

C. CÁCH THỨ BA (Kiểm phiếu ngược bằng cách xếp phiếu theo từng dạng rồi đếm). Cách này được nhiều nơi sử dụng trong cuộc bầu cử vừa qua.

Công việc 1. Xếp phiếu theo từng loại và từng dạng.

- Mở phiếu ra và xếp theo ba loại:
 - Phiếu hợp lệ bầu đủ (gạch tên đúng 2 người);
 - Phiếu hợp lệ bầu thiếu (gạch tên nhiều hơn 2 người, nhưng không gạch tên tất cả);
 - Phiếu không hợp lệ.
- Trong ba loại phiếu trên, các phiếu hợp lệ bầu đủ chiếm hầu hết (thông thường là trên 90% số phiếu). Do đó, ta xếp các phiếu loại này theo từng dạng phiếu gạch tên các ứng viên 1-2, 1-3, ... Bài viết này lấy thí dụ minh họa trong trường hợp bầu 3 trong 5 ứng viên. Khi đó có 10 dạng phiếu gạch tên các ứng viên 1-2, 1-3, 1-4, 1-5,

2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5, 4-5. (Các trường hợp bầu 4 trong 6 ứng viên, bầu 5 trong 7 ứng viên được làm hoàn toàn tương tự).

Công việc 2. Kiểm phiếu hợp lệ bầu đủ.

Ghi số phiếu của mỗi dạng vào bảng sau (các số liệu trong bảng là một thí dụ minh họa).

1-2	1-3	1-4	1-5	
10	13	20	8	51
1-2	2-3	2-4	2-5	
10	14	21	7	52
1-3	2-3	3-4	3-5	
13	14	16	5	48
1-4	2-4	3-4	4-5	
20	21	16	11	68
1-5	2-5	3-5	4-5	
8	7	5	11	31

Cộng các số ở từng hàng ngang rồi ghi kết quả vào ô cuối cùng, đó chính là số phiếu không bầu cho các ứng viên 1, 2, 3, 4, 5.

Ở thí dụ minh họa trên, số phiếu không bầu cho các ứng viên 1, 2, 3, 4, 5 theo thứ tự là 51, 52, 48, 68, 31.

Công việc 3. Kiểm các phiếu hợp lệ bầu thiếu.

Số phiếu loại này rất ít, ta ghi số phiếu không bầu cho mỗi ứng viên (tương tự như cách thứ hai). Chẳng hạn có 11 phiếu loại này, trong đó số phiếu không bầu cho các ứng viên 1, 2, 3, 4, 5 theo thứ tự là 7, 8, 11, 8, 2.

Công việc 4. Tổng hợp kết quả. Có ba bước:

Bước 1. Tính số phiếu không bầu cho mỗi ứng viên.

Cộng số phiếu không bầu cho mỗi ứng viên ở hai loại phiếu hợp lệ bầu đủ và bầu thiếu ở ví dụ trên, ta có:

$$\text{Ứng viên 1: } 51 + 7 = 58 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 2: } 52 + 8 = 60 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 3: } 48 + 11 = 59 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 4: } 68 + 8 = 76 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 5: } 31 + 2 = 33 \text{ (phiếu).}$$

Bước 2. Tính số phiếu hợp lệ.

Lấy số phiếu hợp lệ bầu đủ (là tổng số các phiếu của 10 dạng 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5, 4-5) cộng với số phiếu hợp lệ bầu thiếu, được số phiếu hợp lệ.

Ở thí dụ minh họa trên, ta có số phiếu hợp lệ là $125 + 11 = 136$.

Bước 3. Tính số phiếu bầu cho mỗi ứng viên bằng cách lấy số phiếu hợp lệ trừ đi số phiếu không bầu cho ứng viên đó.

$$\text{Ứng viên 1 được } 136 - 58 = 78 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 2 được } 136 - 60 = 76 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 3 được } 136 - 59 = 77 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 4 được } 136 - 76 = 60 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 5 được } 136 - 33 = 103 \text{ (phiếu).}$$

D. CÁCH THỨ TƯ (Cách cải tiến).

Công việc 1. Xếp phiếu theo từng loại và từng dạng. Như công việc 1 của cách thứ ba.

Công việc 2. Kiểm các phiếu hợp lệ bầu đủ theo hai bước.

Bước 1. Ghi số phiếu của mỗi dạng vào bảng sau.

1-2	1-3	1-4	1-5	1
10	13	20	8	51
	2-3	2-4	2-5	2
	14	21	7	42
		3-4	3-5	3
		16	5	21
			4-5	4
			11	11
2'	3'	4'	5'	n
10	27	57	31	125

Cộng các số ở từng hàng ngang rồi ghi kết quả vào cột cuối (kí hiệu là $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$).

Cộng các số ở từng cột dọc rồi ghi kết quả vào dòng cuối (kí hiệu là $2', 3', 4', 5'$).

Tiếp tục cộng các số ở hàng ngang cuối cùng rồi ghi kết quả vào cột cuối (kí hiệu là n). Chú ý rằng

$$\overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \overline{4} = 2' + 3' + 4' + 5' = n.$$

Bước 2. Tính số phiếu bầu cho mỗi ứng viên (trong các phiếu hợp lệ bầu đủ).

Ứng viên 1 được

$$n - \overline{1} = 125 - 51 = 74 \text{ (phiếu).}$$

Ứng viên 2 được

$$n - \overline{2} - 2' = 125 - 42 - 10 = 73 \text{ (phiếu).}$$

Ứng viên 3 được

$$n - \overline{3} - 3' = 125 - 21 - 27 = 77 \text{ (phiếu).}$$

Ứng viên 4 được

$$n - \overline{4} - 4' = 125 - 11 - 57 = 57 \text{ (phiếu).}$$

Ứng viên 5 được

$$n - 5' = 125 - 31 = 94 \text{ (phiếu).}$$

Công việc 3. Kiểm các phiếu hợp lệ bầu thiếu bằng cách ghi số phiếu bầu cho mỗi ứng viên (tương tự như cách thứ nhất).

Với số liệu minh họa trên, có 11 phiếu loại này, trong đó số phiếu bầu cho các ứng viên 1, 2, 3, 4, 5 theo thứ tự là 4, 3, 0, 3, 9.

Công việc 4. Tổng hợp kết quả.

Cộng số phiếu bầu cho mỗi ứng viên ở hai loại phiếu hợp lệ bầu đủ và bầu thiếu.

$$\text{Ứng viên 1 được } 74 + 4 = 78 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 2 được } 73 + 3 = 76 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 3 được } 77 + 0 = 77 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 4 được } 57 + 3 = 60 \text{ (phiếu).}$$

$$\text{Ứng viên 5 được } 94 + 9 = 103 \text{ (phiếu).}$$

E. SO SÁNH CÁCH THỨ BA VÀ CÁCH THỨ TƯ

Cách thứ ba có nhiều ưu điểm hơn cách thứ nhất và cách thứ hai nhờ việc xếp theo từng dạng rồi đếm phiếu. Tuy nhiên, cách thứ tư còn có nhiều ưu điểm hơn cách thứ ba.

Ở công việc 2 (Kiểm các phiếu hợp lệ bầu đủ).

Cách thứ ba đòi hỏi ghi kết quả vào 20 ô và mỗi kết quả phải viết hai lần nên rất dễ nhầm. Trong khi đó cách thứ tư chỉ đòi hỏi ghi kết quả vào 10 ô.

Trong cách thứ tư còn có phép thử

$$\overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \overline{4} = 2' + 3' + 4' + 5'$$

cho phép phát hiện ngay ra lỗi cộng sai (nếu có).

Ở công việc 3 (Kiểm các phiếu hợp lệ bầu thiếu).

Cách thứ tư thực hiện kiểm phiếu xuôi, nhanh hơn cách thứ ba thực hiện kiểm phiếu ngược vì ở các phiếu hợp lệ bầu thiếu thì số người được bầu thường ít hơn nhiều so với số người bị gạch tên.

Ở công việc 4 (Tổng hợp kết quả).

Với cách thứ tư, không phải tìm số phiếu hợp lệ bầu đủ, vì nó đã được thể hiện là số n trong bảng. Còn ở cách thứ ba, để tìm số phiếu loại này phải cộng số phiếu của 10 dạng: 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5, 4-5.

Cách thứ tư còn cho ta công thức tính số phiếu bầu cho mỗi ứng viên trong các phiếu hợp lệ bầu đủ (các phiếu này chiếm đại bộ phận trong các phiếu bầu), công thức đó là

$$P_a = n - \bar{a} - a',$$

trong đó

n là số phiếu hợp lệ bầu đủ (gạch tên đúng 2 người);

$\bar{a}$ là số phiếu mà ứng viên thứ a là người đầu tiên kể từ trên xuống dưới trong số hai người bị gạch tên;

a' là số phiếu mà ứng viên thứ a là người thứ hai kể từ trên xuống dưới trong số hai người bị gạch tên;

P_a là số phiếu bầu cho ứng viên thứ a .

Chẳng hạn, số phiếu bầu cho ứng viên thứ ba (trong các phiếu hợp lệ bầu đủ) là $n - \overline{3} - 3'$, trong đó

n là số phiếu hợp lệ bầu đủ (đã được tính trong bảng);

$\overline{3}$ là số phiếu gạch tên các ứng viên 3-4, 3-5 (ứng viên thứ ba là người đầu tiên bị gạch tên).

$3'$ là số phiếu gạch tên các ứng viên 1-3, 2-3 (ứng viên thứ ba là người thứ hai bị gạch tên).

Công việc 2 và công việc 3 được giao cho hai nhóm tiến hành đồng thời. Sau đó chỉ với vài phép cộng hai số là đã hoàn tất kết quả kiểm phiếu.

Như vậy, nếu thực hiện kiểm phiếu theo cách thứ tư thì việc kiểm phiếu sẽ nhanh và đơn giản hơn nhiều so với cách thứ ba.

Các bạn hãy tự tìm cách kiểm phiếu trong trường hợp số người bị loại khác 2.

SUY NGHĨ SÂU THÊM... (Tiếp trang 15)

Xảy ra 3 khả năng

- $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$
- $\tan x = \sqrt{3} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi.$
- $\tan x = \sqrt{3} - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \square$

★ **Thí dụ 5.** Giả sử $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Chứng minh rằng

$$\sin x (\cos^2 x + \sin 2x) + \sin 3x < 9 \cos^3 x.$$

Lời giải. Vì $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ nên $\cos x > 0$. Chia hai vế bất

đẳng thức phải chứng minh cho $\cos^3 x > 0$ với chú ý $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ rồi đặt $t = \tan x$ ($0 \leq t \leq 1$), ta có

$$t(1+2t)+3t(1+t^2)-4t^3 < 9 \text{ hay } t^3 - 2t^2 - 4t + 9 > 0.$$

Xét hàm số $y = t^3 - 2t^2 - 4t + 9$, $t \in [0; 1]$, có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 4 = 0. \text{ Tìm ra } t_1 = 2, t_2 = -\frac{2}{3}.$$

Lập bảng biến thiên của hàm y trên $[0; 1]$ ta nhận được $y_{\min} = 4$, $y_{\max} = 9$ nên $y > 0$ với mọi $t \in [0; 1]$, suy ra điều phải chứng minh. $\square$

BÀI TẬP

1. Cho phương trình $m \cos x + \sin x = -1$.

- Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm.
- Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm chung với phương trình $m \sin x + \cos x = m^2$.

2. Cho phương trình $(m+1) \cos x + m \sin x = \frac{m}{\cos x}$.

- Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm.
- Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm

$$x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } |x_1 - x_2| = \frac{\pi}{3}.$$

3. Giải các phương trình

- $\cos^3 x + \sin x - 3 \sin^2 x \cos x = 0$;
- $5 \cos^4 x + 3 \cos^3 x \sin x + 6 \cos^2 x \sin^2 x - \cos x \sin^3 x + \sin^4 x = 2$

4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số

- $y = (3 \cos x + 4 \sin x)^2 + 2(3 \cos x + 4 \sin x) + 5$;
- $y = \frac{3 \cos x + 2 \sin x + 5}{3 \sin x + 2 \cos x + 5}$.

5. Giả sử $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x (\cos x - \sin x)} > 8.$$



Kỉ niệm một số Nhà Toán học

Bạn *Sử* đã lập một danh sách các nhà toán học có tên dưới đây mà năm sinh của họ tính đến năm 2011 vừa tròn chục năm, đồng thời họ có các công trình nghiên cứu liên quan đến nội dung toán học ở trường phổ thông.

A. Tên và họ

A_1 : Bolzano B.	A_2 : Cardano G.
A_3 : Chebyshev P.L.	A_4 : Fermat P.
A_5 : Galois E.	A_6 : Kepler J.
A_7 : Zermelo E.F.F.	

B. Năm sinh, năm mất

B ₁ : 1501 – 1576	B ₂ : 1571 – 1630
B ₃ : 1601 – 1665	B ₄ : 1781 – 1848
B ₅ : 1811 – 1832	B ₆ : 1821 – 1894
B ₇ : 1871 – 1953	

C. Quốc tịch

C₁: Đức C₂: Đức C₃: Pháp C₄: Pháp
C₅: Nga ; C₆: Italia C₇: Sec

D. Công trình toán học liên quan đến nội dung toán ở trường phổ thông

D_1 : Xây dựng những tập hợp mới bằng các phép hợp, giao, ...

D₂: Sự phân bố các số nguyên tố trong dãy số tự nhiên. Có bất đẳng thức mang tên ông.

D₃: Định lí: Số $a^p - a$ (a là số tự nhiên) chia hết cho số nguyên tố p .

D₄: Phương trình bậc ba và công thức nghiệm.

D₅: Điều kiện cần và đủ để phương trình đại số bậc cao hơn bốn giải được bằng căn thức.

D₆. Các đường conic. Ba định luật về quỹ đạo các hành tinh.

D_7 : Tính liên tục, giới hạn, đạo hàm của hàm số.
 Bạn hãy sắp xếp lại các mục A_i, B_i, C_i, D_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) sao cho phù hợp với từng nhà toán học nêu trên.

AN MINH

Giải đáp bài: Năm Thanh niên 2011

(Đã đăng trên THTT số 405 tháng 3.2011)



Từ ở cột màu là **THANH NIÊN**.

Các bạn sau có lời giải đúng, được nhận tặng phẩm:

- 1) *Tạ Diệu Ly*, 8A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**;
- 2) *Phan Đức Minh*, 12A15, THPT Thái Phiên, **Hải Phòng**;
- 3) *Nguyễn Ngọc Minh*, 10A2, K48, THPT Thái Hòa, Nghĩa Đàn, **Nghe An**;
- 4) *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, K50, THPT Đô Lương I, **Nghe An**;

- 5) *Cao Thanh Nhân*, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diên Châu, **Nghe An**;
6) *Trần Võ Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên **Hà Tĩnh**;
7) *Nguyễn Trọng Khiêm*, 6A1, THCS Võ Xán, Tây Sơn, **Bình Định**;
8) *Nguyễn Thị Thúy Hoa*, 10A2, THPT Sơn Mỹ, Sơn Tịnh, **Quảng Ngãi**.

VÂN KHANH



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 409 (7.2011)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1** **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Thân Ngọc Thành – Một phương pháp chứng minh một số là hợp số và ứng dụng.
- 3** **Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2011 – 2012.**
- 4** **Lời giải Đề thi vào lớp 10 Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011.**
- 5** **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Bình luận về Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2011.
- 8** **Thử sức trước kì thi – Hướng dẫn giải đề số 9.**
- 10** **Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contributions**
Trần Quang Hùng – Tổng quát hóa một đề toán hay.
- 13** **Giải trí toán học – Math Recreation?**
- 14** **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Lê Quốc Hán – Suy nghĩ sâu thêm về phương trình đẳng cấp đối với $\cos x$ và $\sin x$.
- 16** **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/409 ..., T12/409, L1/409, L2/409.
- 18** **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 405.
- 28** **Toán học và đời sống – Advanced Elementary Mathematics**
Vũ Hữu Bình – Áp dụng toán học vào kiểm phiếu bầu Đại biểu Quốc hội và Hội đồng nhân dân các cấp.
- 31** **Câu lạc bộ – Math Club**

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH

Trĩ sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật : MINH THO

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

VỚI NGÀY BÁO CHÍ CÁCH MẠNG VIỆT NAM 21/6/2011



NGUT. Ngô Trần Ái, Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam (đứng giữa hàng trước) tặng hoa chúc mừng Tạp chí TH&TT.



GS. TSKH Trần Văn Nhung, PGS. TS Nguyễn Đăng Phát, GS. TSKH Đặng Hùng Thắng với các Cán bộ tạp chí TH&TT.



Ban Cố vấn Khoa học, các Ủy viên Hội đồng biên tập, Cán bộ Tòa soạn TH&TT trong ngày vui.



Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội chúc mừng tạp chí TH&TT.



Tổng biên tập Tạp chí Toán Tuổi thơ, ThS. Vũ Kim Thủy chúc mừng Tạp chí TH&TT.