



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

6 2011
Số 408

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 48

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Tri sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



**ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM
THAM DỰ KỲ THI IMO 2011**





Chứng minh định lý PYTHAGORE BẰNG CÁCH GHÉP HÌNH



NGUYỄN PHƯỚC

(GV THCS Lê Hồng Phong, Huế) sưu tầm và giới thiệu

Pythagore (khoảng năm 570 – 500 trước Công nguyên) sinh ra ở đảo Samos. Ông là nhà toán học và triết học cổ Hy Lạp. Đem lại vinh quang lớn nhất cho Pythagore là định lý ngày nay mang tên ông.

Định lý Pythagore: “Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông”.

Thời đó, người ta đã ứng dụng định lý này vào việc đo đạc đất đai, xây cất các lâu đài, đình chùa, miếu mạo. Cho đến nay, đã có rất nhiều cách chứng minh định lý Pythagore trong đó chủ yếu là bằng cách ghép hình, nhưng cách chứng minh của chính ông vẫn chưa được tìm thấy. Tôi đã sưu tập được hơn 100 cách chứng minh định lý Pythagore nhưng do khuôn khổ của bài viết có hạn chỉ xin giới thiệu với bạn đọc 15 cách chứng minh định lý Pythagore bằng cách ghép hình kèm theo tên của các tác giả.

Phương pháp chứng minh định lý Pythagore bằng cách ghép hình. Cho tam giác ABC vuông, cạnh huyền $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$. Dựng ba hình vuông có các cạnh lần lượt là a , b , c . Ta cần chứng minh diện tích của hình vuông cạnh a bằng tổng diện tích của hai hình vuông cạnh b và cạnh c bằng cách ghép hình như sau: Cắt hai hình vuông cạnh b và cạnh c thành nhiều miếng rồi ghép lại thành hình vuông cạnh a .

Cách 1. (h.1) Tác giả R. Nelsen.

Cách 2. (h.2) Tác giả J. Adams.

Cách 3. (h.3) Tác giả JE Bottcher.

Cách 4. (h.4) Tác giả Benjir Von Gutheil.

Cách 5. (h.5) Tác giả Perigal Henry.

Cách 6. (h.6) Tác giả Olof Hanner.

Cách 7. (h.7) Tác giả K. O. Friedrichs.

Cách 8. (h.8) Tác giả J. Versluys.

Cách 9. (h.9) Tác giả Chiba Tanehide .

Cách 10. (h.10) Tác giả Frans Van Schooten.

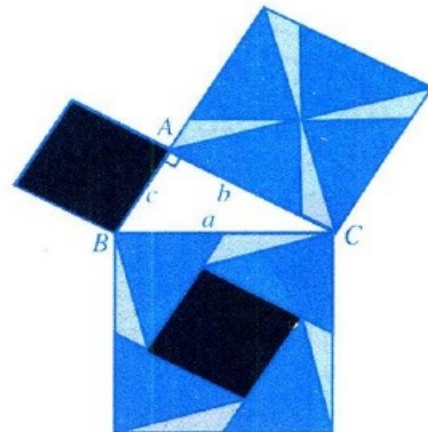
Cách 11. (h.11) Tác giả John Molokach.

Cách 12. (h.12) Tác giả Bill Casselman.

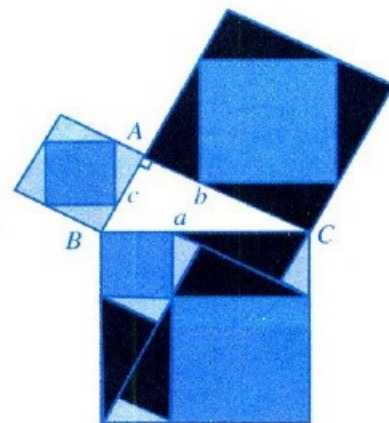
Cách 13. (h.13) Tác giả Monty Phister.

Cách 14. (h.14) Tác giả Maurice Laisnez.

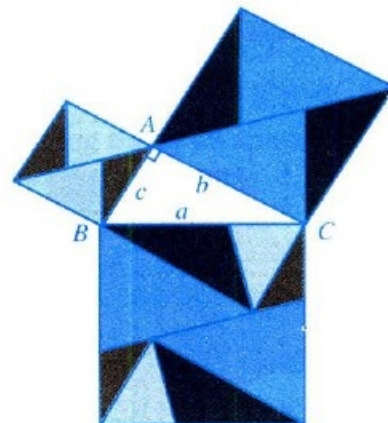
Cách 15. (h.15) Tác giả Leonardo Da Vinci .



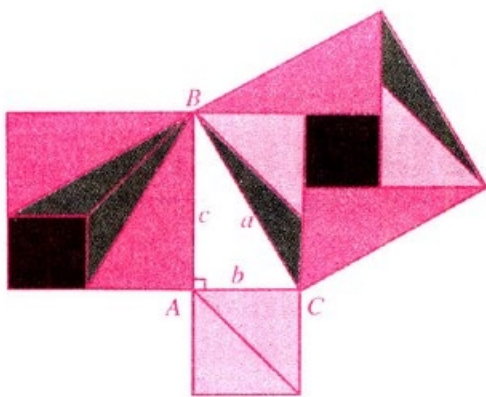
Hình 1



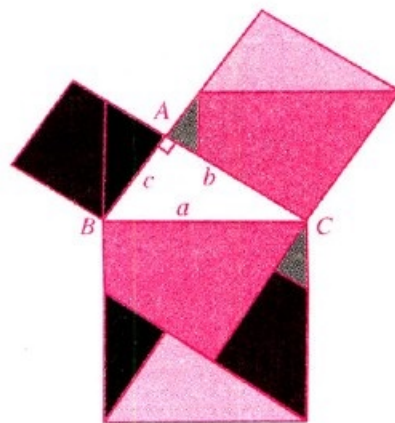
Hình 2



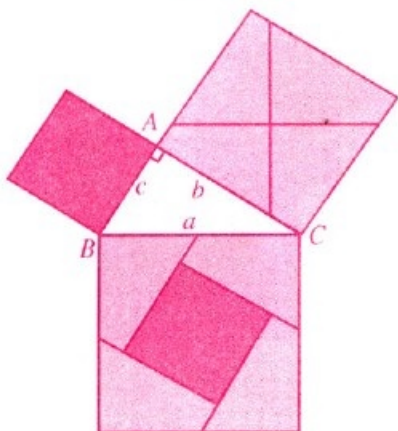
Hình 3



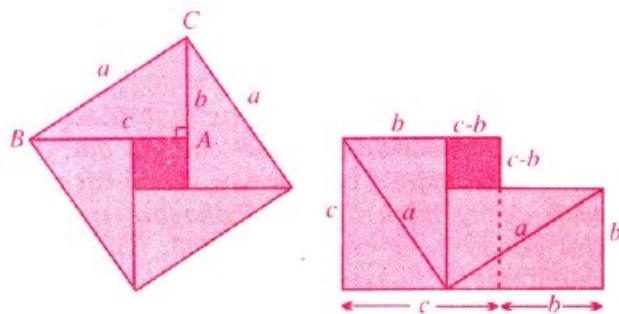
Hình 4



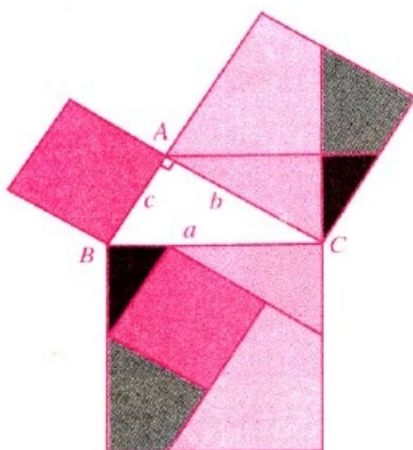
Hình 8



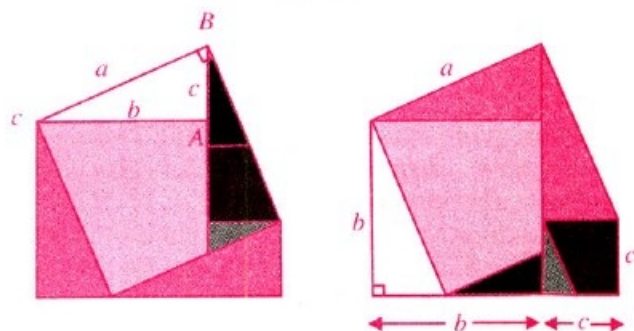
Hình 5



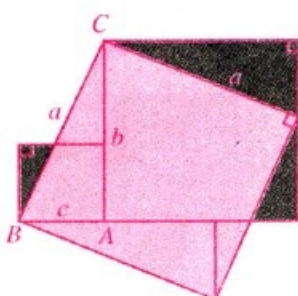
Hình 9



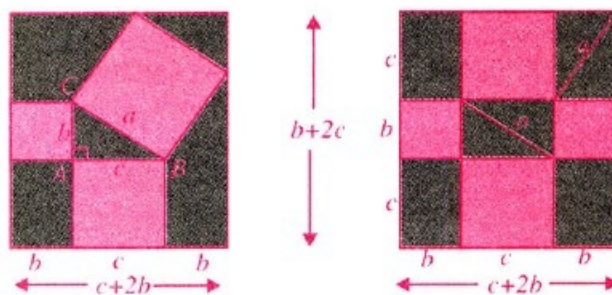
Hình 6



Hình 10



Hình 7



Hình 11

(Xem tiếp trang 10)

Lời giải đề thi vào lớp 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG, BÌNH PHƯỚC

NĂM HỌC 2010 - 2011

(Đề thi đã đăng trên THPT số 407, tháng 5 năm 2011)

Câu 1. ĐK $m \geq 0, m \neq 2010$. Để hàm số đồng

thăng trên $\mathbb{R}$ thì $\frac{\sqrt{m} + \sqrt{2010}}{\sqrt{m} - \sqrt{2010}} > 0 \Leftrightarrow m > 2010$.

Câu 2. Biến đổi PT đầu của hệ về dạng

$$(-y)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 1-x \end{cases}$$

Với $x = y$, thay vào PT thứ hai, ta được

$$x^3 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 1) = 0.$$

• Với $y = 1 - x$, thay vào PT thứ hai, ta được

$$x^3 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 3) = 0.$$

Từ đó các nghiệm $(x; y)$ của hệ là

$$(-1; -1), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right), (1; 0).$$

Câu 3. PT đã cho có hai nghiệm khi

$$\Delta' = 9 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 9.$$

$$\text{Khi đó, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Suy ra $m = x_1 \cdot x_2 = 5$ (thỏa mãn).

Đáp số. $m = 5$.

Câu 4. Viết lại PT đã cho dưới dạng

$$(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0.$$

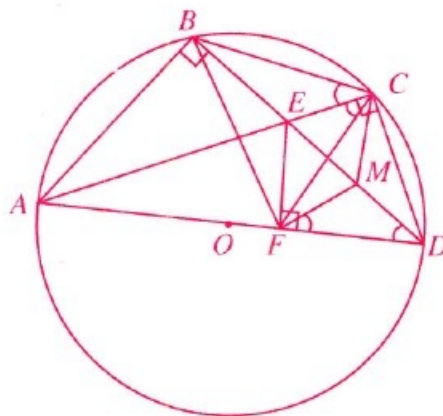
Từ đó, nhận được $x^2 - 2x = -1$ hoặc $x^2 - 2x = 3$.

Giải hai PT này ta thấy $x = -1; x = 1; x = 3$ là ba nghiệm của PT đã cho.

Câu 5. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$a^2 - b^2 + c^2 > a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac \\ \Leftrightarrow (b-c)(b-a) < 0, \text{ (luôn đúng do } a > b > c \text{)}.$$

Câu 6. (hình vẽ). a) Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{AFE} = 90^\circ$ và $\widehat{ECD} = \widehat{EFD} = 90^\circ$. Chứng tỏ tứ giác ABEF và tứ giác DCEF nội tiếp.



b) Ta có $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{BA}$,

$$\widehat{ACF} = \widehat{BDA} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{EF}.$$

Từ đó, suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{ACF}$, hay CA là tia phân giác của góc BCF.

c) Theo câu b) thì $\widehat{BCF} = 2\widehat{BCA}$ (1)

Tam giác EFD vuông tại F có M là trung điểm của ED, nên tam giác MFD cân tại M, do đó $\widehat{MFD} = \widehat{MDF}$.

Từ đó, kết hợp với tính chất góc ngoài, ta có

$$\widehat{BMF} = 2\widehat{MDF} \quad (2)$$

$$\text{Mà } \widehat{MDF} = \widehat{BCA} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{BCF} = \widehat{BMF}$, và C, M cùng phía của BF, do đó tứ giác BCMF nội tiếp.

Câu 7. Đường thẳng đã cho có giao điểm với trục hoành nên suy ra $a \neq 0$. Giao điểm của đường thẳng với trục tung là $(0; b)$, với trục

$$\text{hoành là } \left(-\frac{b}{a}; 0 \right).$$

Theo đề bài, b và $-\frac{b}{a}$ là các số nguyên dương.

Điểm $A(4; 3)$ thuộc đường thẳng nên $3 = 4a + b$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2010 - 2011

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (2 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + b + c = a^3 + b^3 + c^3 = 0$.

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có ít nhất một số bằng 0.

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = -1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + 6 = 3(x^2 + y^2 + z^2). \end{cases}$$

Câu 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình

$$(2x - 1)^2 = 12\sqrt{x^2 - x - 2} + 1.$$

b) Cho tam giác ABC vuông tại A và có diện tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$2 \leq BC \leq \sqrt{2}(AB + AC - \sqrt{2}).$$

Câu 3. (2 điểm)

a) Hãy chỉ ra một bộ bốn số nguyên dương phân biệt sao cho tổng ba số bất kì trong chúng là một số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng không tồn tại năm số nguyên dương phân biệt mà tổng ba số bất kì trong chúng là một số nguyên tố.

Câu 4. (2 điểm)

Cho đường tròn tâm O , bán kính R và dây cung BC cố định có độ dài bằng $R\sqrt{3}$. Một

điểm A thay đổi trên cung lớn BC . Gọi E là điểm đối xứng của B qua AC và F là điểm đối xứng của C qua AB . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K ($K \neq A$).

a) Chứng minh rằng K luôn thuộc một đường tròn cố định.

b) Xác định vị trí của điểm A để tam giác KBC có diện tích lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo R .

c) Gọi H là giao điểm của BE và CF . Chứng minh rằng tam giác ABH đồng dạng với tam giác AKC và đường thẳng AK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (2 điểm)

Trong một giải bóng đá có 12 đội tham dự, thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kì thi đấu với nhau đúng một trận).

a) Chứng minh rằng sau bốn vòng đấu (mỗi đội thi đấu đúng bốn trận) luôn tìm được ba đội bóng đôi một chưa thi đấu với nhau.

b) Khẳng định trên còn đúng không nếu mỗi đội đã thi đấu đúng năm trận?

NGUYỄN ĐỨC TẤN – NGUYỄN ANH HOÀNG
(TP Hồ Chí Minh) sưu tầm và giới thiệu.

Do đó $-b = 4a - 3 \Leftrightarrow -\frac{b}{a} = 4 - \frac{3}{a}$. Mặt khác,

$-\frac{b}{a}$ và b là các số nguyên dương nên a phải là số nguyên âm và a phải là ước của 3. Từ đó, suy ra $a \in \{-1; -3\}$. Do vậy các cặp số $(a; b)$ cần tìm là $(-1; 7), (-3; 15)$.

Câu 8. Gọi số học sinh giỏi Quốc gia của trường trong năm học 2009 – 2010 là $\overline{ab}$ ($1 \leq a < b \leq 9$).

Theo bài ra ta có $\overline{ba} + \overline{ab} = 11(a + b)$ là một số chính phương, mà 11 là số nguyên tố nên $a + b$ phải là bội của 11. Do $1 \leq a < b \leq 9$ nên $a + b = 11$. Suy ra $\overline{ab} \in \{29, 38, 47, 56\}$. Nhưng trong các số trên, khi viết theo thứ tự ngược lại để được số nguyên tố chỉ có thể là số 38. Vậy số học sinh giỏi của trường trong năm học 2009 – 2010 là 38 (học sinh).

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)



Trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng và thi học sinh giỏi các cấp thường gặp bài toán chứng minh bất đẳng thức nhiều biến. Bài toán này thường gây khó khăn cho đa số học sinh. Trong phạm vi bài viết chúng tôi giới thiệu phương pháp khảo sát hàm số để chứng minh bất đẳng thức dạng này.

KHẢO SÁT HÀM SỐ

ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC NHIỀU BIẾN

VÕ HỮU HÀ

(GV trường THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

1. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Nội dung phương pháp thể hiện ở kĩ năng xác định hàm số cần khảo sát để giải bài toán chứng minh bất đẳng thức (BĐT) dạng:

BÀI TOÁN

Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$ thỏa mãn $g(a_1) + g(a_2) + \dots + g(a_n) \geq (\leq) n.g(\alpha)$ với số thực $\alpha \in D$. Chứng minh rằng

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf(\alpha).$$

Để giải bài toán này ta cần biểu diễn $f(a_i)$ qua $g(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, nên xét hàm số $h(t) = f(t) - m.g(t)$, $\forall t \in D$. Số m được xác định sao cho hàm số $h(t)$ đạt cực tiểu tại

$$t_0 = \alpha, (h'(\alpha) = 0) \text{ hay } m = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

Lưu ý. • Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \alpha$.

• Bài toán dạng: Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$ thỏa mãn

$$g(a_1) + g(a_2) + \dots + g(a_n) \geq (\leq) n.g(\alpha),$$

với số thực $\alpha \in D$. Chứng minh rằng

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq nf(\alpha),$$

được giải tương tự bài toán trên.

Khi đó hàm số $h(t)$ đạt cực đại tại $t_0 = \alpha$ và

$$m = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

★ Bài toán 1. Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

Phân tích. Ở đây $g(t) = t$; $f(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}$;

$$n = 3. \text{ Ta có } 3g(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3};$$

$$m = \frac{f'(\frac{1}{3})}{g'(\frac{1}{3})} = -\frac{40\sqrt{82}}{41}; \quad h(t) = f(t) + \frac{40\sqrt{82}}{41}g(t)$$

Lời giải. Vì x, y, z là các số dương và

$x + y + z \leq 1$, nên $x, y, z \in (0; 1)$. Xét hàm số

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} + \frac{40\sqrt{82}}{41}t, \quad \forall t \in (0; 1). \text{ Ta có}$$

$$h'(t) = \frac{t^4 - 1}{t^2\sqrt{t^4 + 1}} + \frac{40\sqrt{82}}{41} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \in (0; 1).$$

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$h'(t)$		- 0 +	
$h(t)$		$\searrow \frac{27\sqrt{82}}{41} \nearrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra $h(t) \geq \frac{27\sqrt{82}}{41}, \forall t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} \geq -\frac{40\sqrt{82}}{41}t + \frac{27\sqrt{82}}{41}, \forall t \in (0;1).$$

Thay t lần lượt bởi x, y, z rồi cộng theo về các BĐT cùng chiều, suy ra

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \\ & \geq -\frac{40\sqrt{82}}{41}(x+y+z) + \frac{81\sqrt{82}}{41} \geq \sqrt{82}. \quad \square \end{aligned}$$

Nhận xét. Có thể khảo sát hàm số

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} - \frac{40\sqrt{82}}{9 \cdot 41}t, \forall t \in (0;1), \text{ suy ra}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \\ & \geq \frac{40\sqrt{82}}{9 \cdot 41} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{\sqrt{82}}{41} \\ & \geq \frac{40\sqrt{82}}{9 \cdot 41} \left(\frac{9}{x+y+z} \right) + \frac{\sqrt{82}}{41} \geq \sqrt{82}. \end{aligned}$$

Với cách giải này có thể thay đổi bài toán thành:

Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $xy + yz + zx \geq 9xyz$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

★ **Bài toán 2.** Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{3\sqrt{3}+9}{2}.$$

Phân tích. Trong bài này $g(t)=t^2, f(t)=\frac{1}{1-t}$,

$$n=3. \text{ Khi đó } 3g(\alpha)=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$m=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}=\frac{9+6\sqrt{3}}{4}.$$

Lời giải. Vì a, b, c dương và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, suy ra $a, b, c \in (0;1)$. Xét hàm số

$$h(t) = \frac{1}{1-t} - \frac{9+6\sqrt{3}}{4}t^2, \forall t \in (0;1). \text{ Khi đó}$$

$$h'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{9+6\sqrt{3}}{2}t; \forall t \in (0;1).$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{9+6\sqrt{3}}{2}t$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}t^3 - 6\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3}t - 4 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{6\sqrt{3}-3-\sqrt{36\sqrt{3}-27}}{6\sqrt{3}} \in (0;1);$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0;1);$$

$$\text{và } t_3 = \frac{6\sqrt{3}-3+\sqrt{36\sqrt{3}-27}}{6\sqrt{3}} > 1.$$

t	0	t_1	t_2	1
$h'(t)$		+	-	+
$h(t)$	1		$\frac{3}{4}$	

Từ bảng biến thiên, suy ra $h(t) \geq \frac{3}{4}, \forall t \in (0;1)$.

Tức là

$$\frac{1}{1-t} \geq \frac{9+6\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{3}{4}, \forall t \in (0;1).$$

Thay t lần lượt bởi a, b, c rồi cộng theo về các BĐT cùng chiều suy ra

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{9+6\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2) + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

Nhận xét. Với bài toán 2, cả phương pháp hàm lồi và phương pháp tiếp tuyến đều không giải được, đây là điểm mạnh của phương pháp này.

★ **Bài toán 3.** Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}} + \frac{b}{\sqrt{1+b}} + \frac{c}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Lời giải. Đặt $x = \ln a, y = \ln b, z = \ln c$. Khi đó $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$. BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{e^y}{\sqrt{1+e^y}} + \frac{e^z}{\sqrt{1+e^z}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Xét hàm số $h(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}} - \frac{3\sqrt{2}}{8}t$, với $t \in \mathbb{R}$

$$\text{thì } h'(t) = \frac{e^{2t} + 2e^t}{2\sqrt{(1+e^t)^3}} - \frac{3\sqrt{2}}{8} = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(t)$	-	0	+
$h(t)$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	

Từ bảng biến thiên suy ra $h(t) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{8}t + \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Thay t bởi x, y, z rồi cộng các bất đẳng thức cùng chiều, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{e^y}{\sqrt{1+e^y}} + \frac{e^z}{\sqrt{1+e^z}} \\ & \geq \frac{3\sqrt{2}}{8}(x+y+z) + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 1$. $\square$

★ Bài toán 4. (USAMO, 2003)

Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

Lời giải

$$\text{Đặt } x = \frac{3a}{a+b+c}; y = \frac{3b}{a+b+c}; z = \frac{3c}{a+b+c}.$$

Khi đó x, y, z dương và $x+y+z=3$ ($x, y, z \in (0;3)$).

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9} + \frac{y^2+6y+9}{3y^2-6y+9} + \frac{z^2+6z+9}{3z^2-6z+9} \leq 8.$$

$$\text{Xét hàm số } h(t) = \frac{t^2+6t+9}{3t^2-6t+9} - 11t, \text{ với } t \in (0;3).$$

$$\text{Khi đó } h'(t) = \frac{-19t^2+16t+3}{(t^2-2t+3)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \in (0;3) \\ t=-\frac{3}{19} \notin (0;3). \end{cases}$$

t	0	1	3
$h'(t)$		+	-
$h(t)$		$-\frac{25}{3}$	

Từ bảng biến thiên suy ra $\frac{t^2+6t+9}{3t^2-6t+9} \leq 11t - \frac{25}{3}$.

Thay t lần lượt bởi x, y, z rồi cộng theo vế các BĐT cùng chiều, suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9} + \frac{y^2+6y+9}{3y^2-6y+9} + \frac{z^2+6z+9}{3z^2-6z+9} \\ & \leq 11(x+y+z) - 25 = 8. \quad \square \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giả sử x, y là các số dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

2. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

3. Cho a, b, c là các số dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

4. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

5. Cho a, b, c là các số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}.$$

6. Cho a, b, c là các số dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} \geq 1.$$

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 9

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 điểm)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$y = x^3 - 3x + 2.$$

2) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số

$$y = |x|^3 - 3|x| + 2 \text{ kẻ từ điểm } A(0; 2).$$

Câu II. (2 điểm)

1) Tìm $x \in [2; +\infty)$ thỏa mãn phương trình

$$\sin \frac{2(2x+1)}{x-1} + \sqrt{2} \sin \left(\frac{2x+1}{x-1} - \frac{\pi}{4} \right) = 1.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (\sqrt{3x+4} - \sqrt{5-x}) \cdot 2^y = 2 \left(\frac{19}{x} - 3x + 8 \right) \\ y + \log_2 x = 1. \end{cases}$$

Câu III. (1 điểm)

Tính tích phân

$$I = \int_1^5 \left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \right) dx.$$

Câu IV. (1 điểm)

Cho hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa mặt bên và đỉnh đối diện bằng 6. Hãy tính thể tích hình chóp.

Câu V. (1 điểm)

Xét các số thực a, b, c thỏa mãn $2a - b + c + 1 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2a - 6b + 4c + 14} + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 18a - 8b - 18c + 178}.$$

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, biết phương trình đường thẳng

$$AB: x - 2y - 1 = 0; \text{ phương trình đường chéo}$$

$$BD: x - 7y + 14 = 0; \text{ đường chéo } AC \text{ đi qua điểm } M(2; 1). \text{ Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật.}$$

2) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0); B(0; 2; 0); C(0; 0; 3)$. Viết phương trình mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$.

Câu VIIa (1 điểm)

Cho số phức z thỏa mãn $z + \frac{1}{z} = 1$, hãy tính

$$S = z^{2011} + \frac{1}{z^{2011}}.$$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật có phương trình đường thẳng chứa hai đường chéo lần lượt là $d_1: 7x + y - 4 = 0; d_2: x - y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh của hình chữ nhật biết rằng đường thẳng đó đi qua điểm $M(-3; 5)$.

2) Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có độ dài cạnh bằng 1 và $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A_1(0; 0; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa CD_1 và tạo với mặt phẳng (BB_1D_1D) một góc có số đo nhỏ nhất.

Câu VIIb (1 điểm)

Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4 + m(x^2 - x - 2)$ tiếp xúc với trục hoành.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 8

Câu I. Hàm số cho ở đầu bài là

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}(m+3)x^2 + 2(m+1)x + 1.$$

1) Bạn đọc tự giải.

$$2) y' = x^2 - (m+3)x + 2(m+1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = m+1. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 2 \\ m+1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \neq 1.$$

Câu II. 1) ĐK $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0$. PT đã cho tương đương với

$$2010 \tan x + \frac{2}{\sin 2x} = 2010\sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thoả mãn).}$$

2) ĐK: $x \geq 1, y \geq 1$. Từ hệ đã cho suy ra

$$\frac{x-y}{\sqrt{x+10} + \sqrt{y+10}} = \frac{x-y}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{x+10} + \sqrt{y+10}} - \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

Ta được $\sqrt{x+10} + \sqrt{x-1} = 11$.

Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (26; 26)$.

Câu III. Đặt $u = \sqrt{1+x}\sqrt{x}$ thì $x^3 = u^4 - 2u^2 + 1$
 $\Rightarrow 3x^2 dx = (4u^3 - 4u) du$. Từ đó

$$I = \frac{4}{3} \int_1^3 (u^2 - 1) du = \frac{80}{9}.$$

Câu IV. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $JJ \perp AB, JJ \perp CD$. Gọi O là trung điểm của IJ thì $OA = OB = OC = OD$. Do đó O là tâm của mặt cầu (S) .

Bán kính của (S) là $R = OA = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}}{4}$.

Câu V. Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ x^2 + 1 \neq 1 \\ 4 - x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

Ta thấy $\log_{x^2+1}(4-x^2)$ và $\log_{4-x^2}(x^2+1)$ cùng dấu. Do đó

$$y = |\log_{x^2+1}(4-x^2)| + |\log_{4-x^2}(x^2+1)| \geq 2\sqrt{|\log_{x^2+1}(4-x^2)| |\log_{4-x^2}(x^2+1)|} \geq 2 \text{ (BĐT Cauchy).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$|\log_{x^2+1}(4-x^2)| = |\log_{4-x^2}(x^2+1)| \Leftrightarrow \log_{x^2+1}(4-x^2) = \pm 1.$$

$$\text{Vậy min } y = 2 \text{ tại } x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ hoặc } x = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}.$$

Câu VI.a

1) Đường thẳng Δ đi qua $A(2; 5)$ có PT dạng

$$a(x-2) + b(y-5) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 2a - 5b = 0.$$

$$\text{Ta có } d(B, \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|3a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3.$$

$$\text{Đáp số. } \Delta_1: x-2=0; \Delta_2: 7x+24y-134=0.$$

$$2. \bullet \Delta' \text{ có PT tham số dạng } \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -2 - 3t' \\ z = 5 + 4t' \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ PT } \begin{cases} 7 + 3t = 1 + 2t' \\ 2 + 2t = -2 - 3t' \\ 1 - 2t = 5 + 4t' \end{cases}$$

Tìm được $t = -2, t' = 0$. Từ đó $A(1; -2; 5)$.

$\bullet \Delta$ đi qua $M_0(7; 2; 1)$ và có VTCP $\vec{a} = (3; 2; -2)$;

Δ' đi qua $M(1; -2; 5)$ và có VTCP $\vec{a}' = (2; -3; 4)$.

Gọi $\vec{n}$ là VTPT của (α) thì $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{a}'] = (2; -16; -13)$.

PT mặt phẳng (α) có dạng $2x - 16y - 13z + 31 = 0$.

Câu VII.a. Gọi A biến cố "3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào" thì $\bar{A}$: "3 người được chọn có ít nhất một cặp vợ chồng". Ω là không gian mẫu. Ta có

$$n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140, n(\bar{A}) = 4.18 = 72.$$

Xác suất của biến cố A là

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{72}{1140} = \frac{89}{95} \approx 0,94.$$

Câu VI.b

1) Đường thẳng Δ đi qua $A(2; 5)$ có PT dạng $a(x-2) + b(y-5) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 2a - 5b = 0$.

Vì $(\Delta, d) = 45^\circ$ nên

$$\cos(\Delta, d) = \frac{|2a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Đáp số. $\Delta_1: 5x + y - 15 = 0$; $\Delta_2: x - 5y + 23 = 0$.

2) Δ đi qua $M_0(-12; 20; 0)$ và có VTCP $\vec{a} = (7; -8; 1)$.

Vì (S) tiếp xúc với Δ nên (S) có bán kính

$$R = d(A, \Delta) = \frac{|\vec{a}, \vec{M_0A}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{3404}}{\sqrt{114}} = \sqrt{\frac{1702}{57}}.$$

$$\text{Vậy PT}(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \frac{1702}{57}.$$

Toạ độ tiếp điểm H ứng với t là nghiệm của PT

$$(-12 + 7t - 1)^2 + (20 - 8t - 2)^2 + (t + 3)^2 = \frac{1702}{57}.$$

Tìm được $t = \frac{116}{57}$. Với $t = \frac{116}{57}$, ta có

$$H\left(\frac{128}{57}; \frac{212}{57}; \frac{116}{57}\right).$$

Câu VII.b Ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= ((1+2x) + 3x^2)^{10} \\ &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (1+2x)^{10-k} (3x^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{i=0}^{10-k} C_{10-k}^i (2x)^i 3^k x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^{10-k} C_{10}^k C_{10-k}^i 2^i 3^k x^{2k+i} \end{aligned}$$

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} 2k + i = 4 \\ i, k \in \mathbb{N}, k \leq 10, i \leq 10 - k. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} k=0 \\ i=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k=1 \\ i=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k=2 \\ i=0 \end{cases}.$$

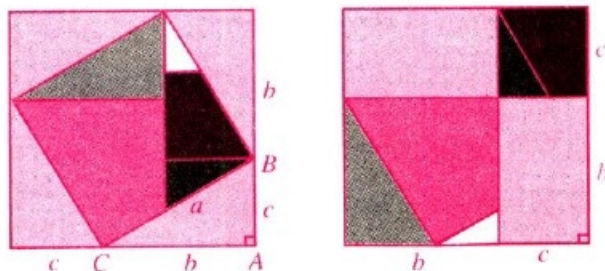
Vậy hệ số của x^4 trong khai triển đã cho là

$$C_{10}^0 C_{10}^4 3^0 2^4 + C_{10}^1 C_9^2 3^1 2^2 + C_{10}^2 C_8^0 3^2 2^0 = 8085.$$

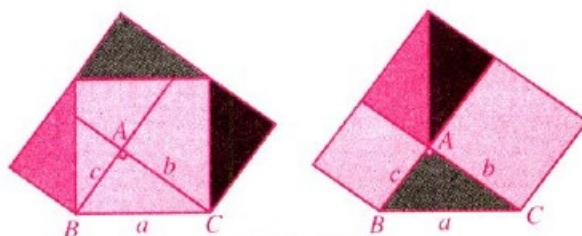
NGUYỄN ĐỨC TRUNG

(GV THPT Nam Giang, Quảng Nam)

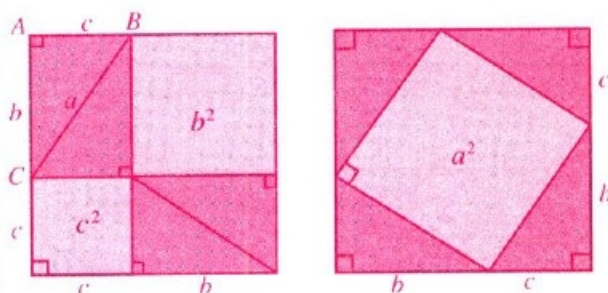
CHỨNG MINH ... (Tiếp trang 2)



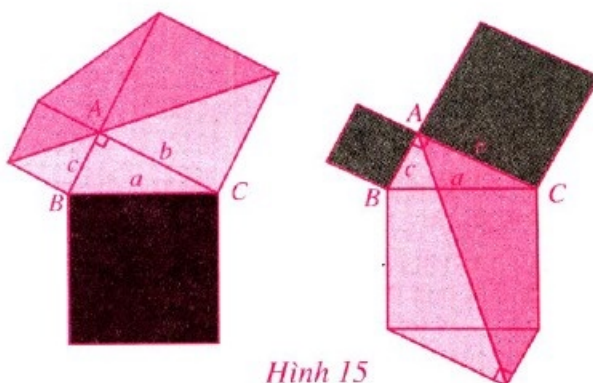
Hình 12



Hình 13



Hình 14



Hình 15

Việc sưu tập các cách chứng minh định lý Pythagore là hết sức thú vị, rất mong có nhiều bạn đồng hành để bộ sưu tập ngày càng phong phú và đa dạng.

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP MÔN VẬT LÝ

THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2011

Chủ đề : HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ - TỬ VI MÔ ĐÈN VĨ MÔ

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV trường ĐHSPT Hà Nội)

Trong số báo này, chúng tôi đề cập tới hai chủ đề: **Hạt nhân nguyên tử** và **Tử vi mô đến vĩ mô**. Theo cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2011, môn Vật lý, phần chung của hai chủ đề này gồm 5 câu. Để làm tốt các câu trắc nghiệm trong hai chủ đề này, thí sinh cần nắm vững những nội dung kiến thức sau đây: *Cấu tạo hạt nhân nguyên tử, khối lượng hạt nhân, độ hụt khối, lực hạt nhân; Năng lượng liên kết, năng lượng liên kết riêng; Hệ thức giữa khối lượng và năng lượng; Phóng xạ; Phản ứng hạt nhân, phản ứng phân hạch, phản ứng nhiệt hạch; Các hạt sơ cấp; Hệ Mặt Trời, các sao và thiên hà.*

Dưới đây, chúng tôi đưa ra một số câu trắc nghiệm về hai chủ đề này, đồng thời hướng dẫn cách lựa chọn phương án đúng.

CÂU 1. Phản ứng nhiệt hạch là sự

A. phân chia một hạt nhân nhẹ thành hai hạt nhân nhẹ hơn kèm theo sự tỏa nhiệt.

B. kết hợp hai hạt nhân có khối lượng trung bình thành một hạt nhân rất nặng ở nhiệt độ rất cao.

C. phân chia một hạt nhân rất nặng thành các hạt nhân nhẹ hơn.

D. kết hợp hai hạt nhân rất nhẹ thành một hạt nhân nặng hơn trong điều kiện nhiệt độ rất cao.

Hướng dẫn. A và C là phản ứng phân hạch (phân chia một hạt nhân thành các hạt nhân nhẹ hơn). Trường hợp B không xảy ra được, vì hạt nhân rất nặng có năng lượng liên kết riêng nhỏ hơn năng lượng liên kết riêng của các hạt nhân trung bình. Trường hợp D có thể xảy ra, vì hai hạt nhân rất nhẹ có năng lượng riêng rất nhỏ, ở nhiệt độ rất cao thì có thể kết hợp thành một hạt nhân nặng hơn.

Chọn D. ☐

CÂU 2. Hạt nhân A_ZX phóng xạ và biến thành một hạt nhân ${}^{A_2}_{Z_2}Y$ bền. Coi khối lượng của hạt nhân X, Y bằng số khối của chúng tính theo đơn vị u. Biết chất phóng xạ A_ZX có chu kỳ bán rã là T. Ban đầu có một khối lượng chất A_ZX , sau hai chu kỳ bán rã thì tỉ số giữa khối lượng của chất Y và khối lượng của chất X là

A. $\frac{A_2}{2A_1}$. **B.** $\frac{2A_2}{A_1}$. **C.** $\frac{3A_2}{A_1}$. **D.** $\frac{A_2}{3A_1}$.

Hướng dẫn. Số hạt nhân X chưa bị phân rã trong hai chu kỳ: $N = \frac{N_0}{2^2} = \frac{N_0}{4} = 0,25N_0$. Số

hạt nhân X đã bị phân rã bằng số hạt nhân Y được tạo thành: $\Delta N = N_0 - 0,25N_0 = 0,75N_0$. Vậy sau hai chu kỳ còn $0,25N_0$ hạt nhân X và $0,75N_0$ hạt nhân Y được tạo thành.

Về khối lượng $\frac{m_Y}{m_X} = \frac{0,75 \cdot N_0 \cdot A_2}{0,25 \cdot N_0 \cdot A_1} = \frac{3A_2}{A_1}$.

Chọn C. ☐

CÂU 3. Một hạt có khối lượng nghỉ m_0 . Theo thuyết tương đối, động năng của hạt này khi chuyển động với tốc độ $0,6c$ (c là tốc độ ánh sáng trong chân không) là

A. $0,375m_0c^2$. **B.** $0,45m_0c^2$.

C. $0,15m_0c^2$. **D.** $0,25m_0c^2$.

Hướng dẫn. Ta có $E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $E_0 = m_0c^2$,

$E = E_0 + T$, trong đó T là động năng của hạt. Do đó

$$T = E - E_0 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}}} - 1 \right) = 0,25 m_0 c^2.$$

Chọn D. $\square$

CÂU 4. Một hạt α có động năng 2,43 MeV đến đập vào hạt nhân ${}^{14}_7\text{N}$ đứng yên và gây ra phản ứng: $\alpha + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^1_1\text{p} + X$. Cho khối lượng của các hạt $m_\alpha = 4,0015u$; $m_p = 1,0073u$; $m_N = 13,9992u$; $m_X = 16,9947u$; $u = 931,5\text{MeV}/c^2$; $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J}$. Giả sử hai hạt sinh ra có cùng độ lớn vận tốc thì động năng của hạt X sau phản ứng là

- A. 2,38MeV. B. 1,14MeV.
C. 0,75MeV. D. 1,57MeV.

Hướng dẫn. $\frac{W_x}{W_p} = \frac{\frac{1}{2} m_x v^2}{\frac{1}{2} m_p v^2} = \frac{m_x}{m_p}.$

Suy ra $W_p = \frac{m_p}{m_x} W_x$. Theo định luật bảo toàn

năng lượng toàn phần, ta có

$$(m_\alpha + m_N) u \cdot c^2 + W_\alpha = (m_p + m_X) u \cdot c^2 + W_p + W_X$$

$$(m_\alpha + m_N - m_p - m_X) u \cdot c^2 + W_\alpha = W_p + W_X$$

$$= \left(\frac{m_p}{m_x} + 1 \right) W_X = \frac{15}{14} W_X \text{ Thay số ta được}$$

$$(4,0015 + 13,9992 - 1,0073 - 16,9947) 931,5 + 2,43 = \frac{15}{14} W_X.$$

Suy ra $W_X \approx 1,14\text{MeV}$. Chọn B. $\square$

CÂU 5. Phát biểu nào sau đây là sai?

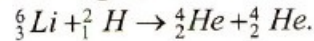
- A. Hệ Mặt Trời gồm Mặt Trời ở trung tâm và chín hành tinh lớn chuyển động xung quanh Mặt Trời.
B. Các hành tinh đều quay quanh Mặt Trời gần như trên cùng một mặt phẳng.
C. Các hành tinh đều chuyển động quanh Mặt Trời theo cùng một chiều (gọi là chiều thuận).
D. Mặt Trời và các hành tinh đều quay quanh trục đối xứng của mình theo chiều thuận (trừ Kim tinh).

Hướng dẫn. B, C, D đều đúng, A sai. Từ năm 2006, Hiệp hội Thiên văn Quốc tế (IAU) quyết định hệ Mặt Trời chỉ có 8 hành tinh lớn; Diêm Vương tinh không còn được coi là một hành tinh của hệ Mặt Trời nữa. Như vậy hệ Mặt Trời chỉ còn 8 hành tinh lớn với thứ tự xa dần Mặt Trời là Thủy tinh, Kim tinh, Trái Đất, Hỏa tinh, Mộc tinh, Thổ tinh, Thiên Vương tinh, Hải Vương tinh. Chọn A. $\square$



BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Cho phản ứng hạt nhân



Biết khối lượng các hạt nhân $m_{\text{Li}} = 6,01512u$; $m_{\text{H}} = 2,01400u$; $m_{\text{He}} = 4,00260u$; đơn vị khối lượng nguyên tử $u = 931,5\text{MeV}/c^2$. Năng lượng tỏa ra trong phản ứng là

- A. 20,5MeV. B. 19,2MeV.
C. 22,3MeV. D. 24,5MeV.

Câu 2. Phát biểu nào sau đây là sai?

- A. Mỗi hạt sơ cấp có một phản hạt, hạt và phản hạt có khối lượng bằng nhau.
B. Electron là hạt sơ cấp thuộc loại mêzon.
C. Photon là một hạt sơ cấp không mang điện.
D. Electron là hạt sơ cấp có điện tích âm.

Câu 3. Biết đồng vị phóng xạ ${}^{14}_6\text{C}$ có chu kỳ bán rã 5730 năm. Giả sử một mẫu gỗ cổ có độ phóng xạ 200 phân rã/phút và một mẫu gỗ khác cùng loại, cùng khối lượng với mẫu gỗ cổ đó, lấy từ cây mới chặt, có độ phóng xạ 1600 phân rã/phút. Tuổi của mẫu gỗ cổ đã cho là

- A. 17190 năm. B. 13572 năm.
C. 18392 năm. D. 20174 năm.

Câu 4. Dùng một prôtôn có động năng 5,45MeV bắn vào hạt nhân ${}^9_4\text{Be}$ đang đứng yên. Phản ứng tạo ra hạt nhân X và hạt α . Hạt α bay ra theo phương vuông góc với phương tới của prôtôn và có động năng 4MeV. Khi tính động năng của các hạt, lấy khối lượng các hạt tính theo đơn vị khối lượng nguyên tử bằng số khối của chúng. Năng lượng tỏa ra trong phản ứng này bằng

- A. 3,215MeV. B. 2,125MeV.
C. 4,324MeV. D. 1,925MeV.

Đáp án số báo kì trước:

Câu 1: B; Câu 2: D; Câu 3: C. Câu 4: B



Giải đáp bài: CHO ĐIỂM LỜI GIẢI bài toán tìm giới hạn

(Đề đăng trên THPT số 405, tháng 3 năm 2011)

Các bạn tham gia mục **Sai lầm ở đâu?** đều nhất trí cho bạn **Khanh** điểm zero. Lời giải bạn **Khanh** đã phạm sai lầm ở bước biến đổi:

$$\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) \\ = \lim \frac{1}{n^2} + \lim \frac{2}{n^2} + \dots + \lim \frac{n}{n^2} \quad (!)$$

Ta biết rằng định lý giới hạn của một tổng bằng tổng các giới hạn chỉ đúng cho **tổng của hữu hạn** các dãy số mà thôi.

Lời giải đúng. Ta có

$$\lim \frac{1+2+\dots+n}{n^2+1} = \lim \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Tòa soạn nhận được khá nhiều lời bình về lời giải của bạn **Khanh**. Tuy nhiên cũng có một số bạn tính lại giới hạn không chính xác. Kì này xin tuyên dương các bạn sau:

Thái Bình: Vũ Huy Hoàng, 11A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 11T7, THPT Đô Lương I; **Thanh Hóa:** Dương Khánh Ly, 11P, THPT chuyên Lam Sơn; **Quảng Ngãi:** Võ Văn Tiên, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Đồng Tháp:** Nguyễn Khánh Duy, 11A, THPT Lấp Vò II; **Hậu Giang:** Đường Ngọc Lan, 11H, THPT chuyên Vị Thanh, TP. Vị Thanh.

NGỌC HIỂN

Chấm điểm MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Trong giờ luyện tập, thầy giáo gọi **An** lên bảng giải một bài toán hình học:

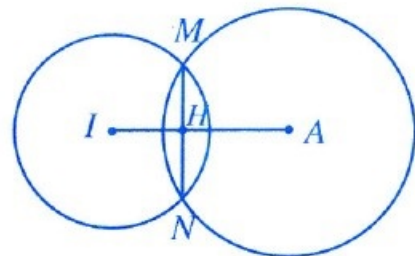
Trên mặt phẳng cho điểm $A(5;1)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.

Viết phương trình đường tròn (C') có tâm A , cắt đường tròn (C) tại hai điểm M, N sao cho $MN = \sqrt{3}$.

Bạn **An** đã trình bày lời giải đó như sau:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi H là giao điểm của MN với IA (hình vẽ). Khi đó $IH \perp MN$.



Tam giác IMN đều suy ra $IH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$.

Vì $IA = 5$ nên $HA = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

Tam giác MHA vuông tại H , nên bán kính đường tròn (C') là

$$R' = MA = \sqrt{MH^2 + HA^2} \\ = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{13}.$$

Vậy PT đường tròn (C') có dạng

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13.$$

Bạn thấy lời giải trên thế nào? Bạn cho bạn **An** bao nhiêu điểm?

NGUYỄN TIÊN TIẾN

(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH VÀO ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2011

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Kì thi chọn học sinh vào Đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 52 năm 2011 (IMO 2011) đã được tổ chức tại Hà Nội, trong hai ngày 09/4 và 10/4/2011.

Căn cứ Quy chế thi hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập 42 học sinh, gồm 2 học sinh đoạt giải Nhất và 40 học sinh đoạt giải Nhì trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm 2011 để tham dự kì thi tuyển chọn nói trên. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh được đề nghị giải 3 bài toán trong thời gian 240 phút. Điểm tối đa của mỗi ngày thi là 20 điểm.

1. ĐỀ THI

NGÀY THI THỨ NHẤT (09/4/2011)

Bài 1. (5 điểm). Tại điểm $(1; 1)$ của mặt phẳng tọa độ Oxy , có một con cào cào. Từ điểm đó, con cào cào chỉ nhảy đến các điểm nguyên dương khác theo quy tắc: Từ điểm nguyên dương A , con cào cào nhảy đến điểm nguyên dương B nếu tam giác AOB có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

1) Tìm tất cả các điểm nguyên dương $(m; n)$ mà con cào cào có thể nhảy đến sau một số hữu hạn bước nhảy, xuất phát từ điểm $(1; 1)$.

2) Giả sử $(m; n)$ là một điểm nguyên dương có tính chất đã nêu ở câu 1. Chứng minh rằng tồn tại một cách nhảy của con cào cào từ điểm $(1; 1)$ đến điểm $(m; n)$ mà số bước nhảy không vượt quá $|m - n|$.

(Điểm $(x; y)$ được gọi là điểm nguyên dương nếu x và y là các số nguyên dương).

Bài 2. (7 điểm). Trong mặt phẳng, cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn đó. Qua A , kẻ các tiếp tuyến tới (O) ; gọi B và C là các tiếp điểm. Xét một điểm P di động trên tia đối của tia BA và một điểm Q di động trên tia đối của tia CA sao cho đường thẳng PQ tiếp xúc với (O) . Đường thẳng BC cắt đường thẳng đi qua P , song song với AC tại E

và cắt đường thẳng đi qua Q , song song với AB tại F . Chứng minh rằng

1) Đường thẳng EQ luôn đi qua một điểm cố định, gọi là M ; đường thẳng FP luôn đi qua một điểm cố định, gọi là N .

2) Tích $PM \cdot QN$ không đổi.

Bài 3. (8 điểm). Cho số nguyên $n \geq 3$. Xét n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$;

ii) $\sum_{i=1}^n x_i = 0$;

iii) $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n(n-1)$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng $S = x_1 + x_2$.

NGÀY THI THỨ HAI (10/4/2011)

Bài 4. (6 điểm). Cho dãy số nguyên dương (a_n) xác định bởi $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ và

$$a_{n+2} = 1 + \left\lceil \frac{a_{n+1}^2}{a_n} \right\rceil \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $a_{n+2} \cdot a_n - a_{n+1}^2 = 2^n$ với mọi số tự nhiên n .

($[x]$ kí hiệu phần nguyên của số thực x).

Bài 5. (7 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{n+2} \cdot (2^n - 1) - 8 \cdot 3^n + 1$ là một số chính phương.

Bài 6. (7 điểm). Cho n là một số nguyên lớn hơn 1. Có n học sinh ngồi quanh một chiếc bàn tròn, mỗi em có một số chiếc kẹo (có thể có em không có chiếc kẹo nào) và tổng số kẹo của tất cả các em là một bội của n . Các em thực hiện việc chuyển kẹo cho nhau như sau:

Với số kẹo mỗi em có lúc đầu, nếu có ít nhất một em có nhiều kẹo hơn bạn ngồi ngay bên phải mình thì một em (tùy ý) trong số những em như thế chuyển 1 chiếc kẹo của mình cho bạn ngồi ngay bên phải. Với số kẹo mỗi em có sau lần chuyển thứ nhất, nếu có ít nhất một em có nhiều kẹo hơn bạn ngồi ngay bên phải mình thì một em (tùy ý) trong số những em như thế lại chuyển 1 chiếc kẹo của mình cho bạn ngồi ngay bên phải. Quá trình chuyển kẹo cứ như thế được tiếp tục.

Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần chuyển kẹo như vậy, tất cả các em đều có số kẹo như nhau.

2. CHẤM THI VÀ KẾT QUẢ

Việc chấm thi đã được tiến hành một cách khẩn trương, khách quan và nghiêm túc nhằm đảm bảo đánh giá một cách công bằng và chính xác bài làm của các thí sinh, trên cơ sở biểu điểm đã được lãnh đạo Ban chấm thi phê duyệt.

Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế thi hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định chọn 6 học sinh có điểm thi cao nhất vào Đội tuyển Quốc gia dự thi IMO 2011 (xem ảnh ở bìa 1)

1. *Lê Hữu Phước*, lớp 12 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, **TP. Đà Nẵng** (Hàng trước, thứ nhất từ phải sang);

2. *Nguyễn Văn Quý*, lớp 12 Trường THPT chuyên Bắc Ninh, Tỉnh **Bắc Ninh** (Hàng trước, thứ hai từ phải sang);

3. *Nguyễn Thành Khang*, lớp 12 Trường THPT chuyên Hùng Vương, Tỉnh **Phú Thọ** (hàng sau, thứ nhất, từ phải sang);

4. *Võ Văn Huy*, lớp 12 Trường THPT Lê Hồng Phong, Tỉnh **Phú Yên** (Hàng trước, thứ ba từ phải sang);

5. *Đỗ Kim Tuấn*, lớp 12 trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, **TP. Hà Nội** (Hàng sau, thứ ba, từ phải sang);

6. *Nguyễn Văn Thế*, lớp 12 Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tỉnh **Nam Định** (Hàng sau, thứ hai từ phải sang).

Điểm thi của sáu học sinh nêu trên như sau:

Họ và Tên	Điểm thi						
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Tổng
<i>Lê Hữu Phước</i>	5	7	7.5	6	7	0.5	33
<i>Nguyễn Văn Quý</i>	5	6.5	1	6	7	2	27.5
<i>Nguyễn Thành Khang</i>	5	7	1	6	7	0.5	26.5
<i>Võ Văn Huy</i>	5	7	1	6	7	0	26
<i>Đỗ Kim Tuấn</i>	5	7	1	6	3.5	2	24.5
<i>Nguyễn Văn Thế</i>	0	7	2.5	5	7	2	23.5

Ngày 04/5/2011, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập 6 học sinh của Đội tuyển về Hà Nội tham dự lớp tập huấn chuyên môn chuẩn bị cho kì thi IMO 2011. Viện Toán học – Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam được Bộ Giáo dục và Đào tạo ủy quyền chủ trì công tác tập huấn đội tuyển, dưới sự giám sát của Bộ.

Trung tuần tháng 7/2011, Đoàn cán bộ, học sinh Việt Nam sẽ lên đường tham dự IMO 2011, tổ chức tại Amsterdam – Vương quốc Hà Lan từ ngày 12/7 đến ngày 24/7/2011.



LTS. *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ nhiệt liệt chúc mừng sáu học sinh đã được tuyển chọn vào Đội tuyển Quốc gia môn Toán và chúc các em giữ gìn sức khỏe thật tốt, nỗ lực học tập và trau dồi kiến thức để chuẩn bị tốt nhất cho việc dự thi IMO 2011.*



CÁC LỚP THCS

Bài T1/408. (Lớp 6). Hỏi có bao nhiêu số nguyên n sao cho $-1964 \leq n \leq 2011$ và phân số $\frac{n^2+2}{n+9}$ chưa tối giản?

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/408. (Lớp 7). Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots$ thỏa mãn điều kiện $a_2=3; a_{50}=300; a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$ với mọi $n \geq 1$. Hãy tính tổng gồm 48 số hạng

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{48}.$$

TẠ MINH HIẾU
(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Bài T3/408. Cho số nguyên tố p . Giả sử x, y là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2+py^2}{xy}$ là số tự nhiên. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2+py^2}{xy} = p+1.$$

NGUYỄN SƠN HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài T4/408. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x-2\sqrt{y+1}=3 \\ x^3-4x^2\sqrt{y+1}-9x-8y=-52-4xy. \end{cases}$$

LẠI QUANG THỌ
(GV THCS Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài T5/408. Cho đoạn thẳng AB . M là điểm trong mặt phẳng sao cho tam giác MAB là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB , I là trung điểm cạnh AB và D là hình chiếu của H trên MI . Chứng minh rằng tích $MI \cdot DI$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

NGUYỄN BÁ ĐĂNG
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/408. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $\sin a + \sin b + \sin c \geq \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng

$$\sin\left(a-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(b-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(c-\frac{\pi}{6}\right) \geq 0.$$

VÕ QUỐC BÁ CẦN

(SV YY0647A1, khoá 32, ĐHY Dược Cần Thơ)

Bài T7/408. Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x . Giải phương trình

$$x^2 - (1 + [x])x + 2011 = 0.$$

ĐOÀN KIM SANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái)

Bài T8/408. Gọi E là tâm đường tròn chín điểm (đường tròn Euler) của một tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$; E_1, E_2, E_3 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của E trên các cạnh BC, CA, AB và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{S_{E_1E_2E_3}}{S_{ABC}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{16R^2} - \frac{5}{16}.$$

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/408. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{3}{\tan B + \tan C - \tan A} + \frac{4}{\tan A + \tan C - \tan B} + \frac{5}{\tan A + \tan B - \tan C}$$

trong đó A, B, C là ba góc của tam giác nhọn ABC và $C \geq A$.

NGUYỄN LÁI
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T10/408. 1) Chứng minh rằng, với mỗi số nguyên dương n , phương trình

$$x + x^2 + x^3 + \dots + 2011x^{2n+1} = 2009$$

có duy nhất một nghiệm thực.

2) Kí hiệu nghiệm thực trên là x_n , chứng minh rằng $0 < x_n < \frac{2010}{2011}$.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T11/408. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 2011$,

$$u_{n+1} = \frac{\pi}{8} \left(\cos u_n + \frac{\cos 2u_n}{2} + \frac{\cos 3u_n}{3} \right) \text{ với } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn.

HÀN NGỌC ĐỨC

(Trung tâm CNTT EVNIT, Hà Nội)

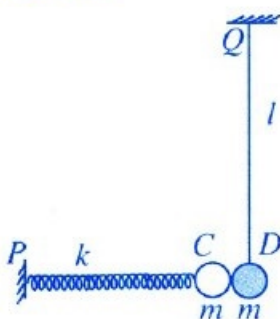
Bài T12/408. Trên mặt phẳng cho hai hình vuông ngược hướng $A_1B_1C_1D_1$ và $A_2B_2C_2D_2$ (nghĩa là, nếu thứ tự các đỉnh A_1, B_1, C_1, D_1 theo chiều kim đồng hồ thì thứ tự các đỉnh A_2, B_2, C_2, D_2 ngược chiều kim đồng hồ) có tâm theo thứ tự là O_1, O_2 . Giả sử D_2, D_1 theo thứ tự thuộc A_1B_1, A_2B_2 . Chứng minh rằng ba đường thẳng B_1B_2, C_1C_2, O_1O_2 đồng quy.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/408. Con lắc đơn gồm quả cầu D có khối lượng $m = 100g$ và dây treo dài $l = 1m$. Con lắc lò xo gồm một lò xo nằm ngang có khối lượng không đáng kể, độ cứng $k = 25N/m$ và quả cầu C giống hệt quả cầu D (khối lượng $m = 100g$) dao động không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang.



- 1) Tìm chu kỳ dao động riêng của mỗi con lắc.
- 2) Bố trí hai con lắc (hình vẽ) sao cho khi hệ cân bằng lò xo không biến dạng, dây treo con lắc đơn thẳng đứng và hai quả cầu D và C tiếp xúc nhau. Kéo lệch D khỏi vị trí cân bằng một góc $\alpha = 0,1$ rad rồi buông ra.

a) Tìm vận tốc của quả cầu D ngay trước khi va chạm vào quả cầu C .

b) Tìm vận tốc của quả cầu C ngay sau khi va chạm vào quả cầu D và độ nén cực đại của lò xo sau khi va chạm.

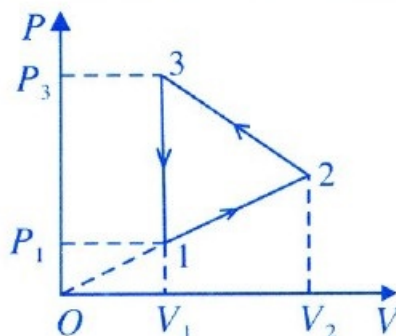
c) Tìm chu kỳ dao động của hệ. Coi va chạm là xuyên tâm đàn hồi, bỏ qua mọi ma sát, lấy $g = 10 m/s^2, \pi^2 = 10$.

NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

Bài L2/408. Một mol khí lí tưởng thực hiện quá trình biến đổi trạng thái theo chu trình 1 - 2 - 3 - 1 như hình vẽ trong hệ tọa độ $P - V$ (đoạn 1 - 2 là đoạn thẳng kéo dài qua gốc tọa độ, đoạn 3 - 1 là đoạn thẳng song song với trục OP , đoạn 2 - 3 là đoạn thẳng). Biết rằng $V_2 = 3V_1 = 3V_0$ và $P_3 = 6P_1 = 6P_0$. Hãy tính (theo P_0 và V_0):

- 1) Nhiệt độ thấp nhất và cao nhất của khí trong chu trình.
- 2) Công mà khí thực hiện trong chu trình.



NGUYỄN MINH TUẤN

(GV THPT Yên Thành 2, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/408.(For 6th grade). How many integers n are there such that $-1964 \leq n \leq 2011$ and the fraction $\frac{n^2+2}{n+9}$ is reducible?

T2/408. (For 7th grade). Let $a_1, a_2, a_3, \dots$ be a sequence satisfying the conditions $a_2 = 3; a_{50} = 300; a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ for all $n \geq 1$. Find the sum of the first 48 terms

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{48}.$$

T3/408. Let p be a prime number. Let x, y be nonzero natural numbers such that $\frac{x^2 + py^2}{xy}$ is also a natural number. Prove that

$$\frac{x^2 + py^2}{xy} = p+1.$$

T4/408. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x - 2\sqrt{y+1} = 3 \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} - 9x - 8y = -52 - 4xy. \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 30)



★ **Bài T1/404.** Cho bảy số nguyên tố khác nhau $a, b, c, a+b+c, a+b-c, a-b+c, -a+b+c$, trong đó hai trong ba số a, b, c có tổng bằng 800. Gọi d là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất trong bảy số nguyên tố đó. Hỏi giá trị lớn nhất của d có thể là bao nhiêu?

Lời giải. Do vai trò của a, b, c như nhau nên có thể giả sử rằng $a < b < c$, lúc đó số nguyên tố lớn nhất là $a+b+c$ và số nguyên tố nhỏ nhất là $a+b-c$, suy ra hiệu của chúng là $d = (a+b+c) - (a+b-c) = 2c$.

Do đó để số d là lớn nhất thì phải chọn số nguyên tố c lớn nhất (*)

Chú ý rằng ba số a, b, c đều lẻ vì nếu $a = 2$ thì b, c lẻ nên $c+b-a$ là số nguyên tố chẵn lớn hơn 2, vô lí. Từ đó suy ra cả bảy số trên đều là các số nguyên tố lẻ.

Xét ba trường hợp sau:

1) Với $a+b=800$ thì số nguyên tố $a+b-c \geq 3$ nên $c \leq 797$. Vì 797 là số nguyên tố nên ta chọn $c=797$ theo (*). Lúc đó $a+b+c=1597$ và $a+b-c=3$, chúng đều là các số nguyên tố. Bây giờ chỉ cần chọn các số nguyên tố a, b thỏa mãn $a+b=800$ sao cho $797+a-b$ và $797+b-a$ đều là các số nguyên tố (**)

Ta chọn $a=13$ thì $b=787$, $797+a-b=23$
 $797+b-a=1571$ đều là các số nguyên tố.
 Lúc đó $d=2c=1594$.

2) Với $b+c=800$ thì $c < 800$. Từ điều kiện (*) nếu chọn $c=797$ là số nguyên tố lớn nhất nhỏ hơn 800 thì $b=3$ mà $a < b$ nên $a < 3$, không thỏa mãn. Vậy $c < 797$ nên $d=2c < 1594$.

3) Với $a+c=800$ thì $c < 800$. Từ điều kiện (*) nếu chọn $c=797$ là số nguyên tố lớn nhất nhỏ hơn 800 thì $a=3$ và số nguyên tố $a+b-c \geq 5$ hay $b \geq 799$ nên $b > c$, không thỏa mãn. Vậy $c < 797$ nên $d=2c < 1594$.

Kết luận. Giá trị d lớn nhất bằng 1594 với bảy số nguyên tố được chọn như ở trường hợp $a+b=800$. □

➤ **Nhận xét.** 1) Với $a+b=800$, $c=797$ ta chỉ cần chọn các số nguyên tố a, b có tận cùng là 3 hoặc 7 và a, b đều phải có dạng $3m+1$ ($m \in \mathbb{Z}$). Thực vậy:

- Nếu a có tận cùng là 1 (hoặc 9) thì b có tận cùng là 9 (hoặc 1) suy ra $c+b-a=797+800-2a=1597-2a$ chia hết cho 5 (hoặc $c+a-b=1597-2b$ chia hết cho 5).

- Nếu a (hoặc b) có dạng $3m+2$ ($m \in \mathbb{Z}$) thì do $800=3k+2$ ($m \in \mathbb{Z}$) nên b (hoặc a) chia hết cho 3.

Từ nhận xét trên có thể tìm được nhiều cặp số nguyên tố a, b thỏa mãn điều kiện (**), chẳng hạn $(a; b)$ bằng $(43; 757)$ hoặc $(157; 643), \dots$

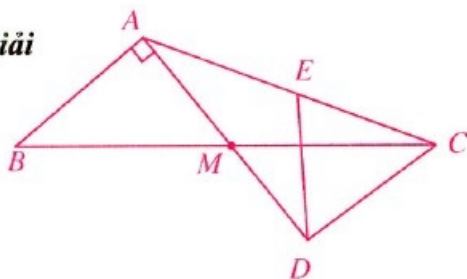
2) Nhiều bạn chỉ đưa ra kết luận mà không chỉ ra sự tồn tại bảy số số nguyên tố khác nhau theo điều kiện đề bài. Các bạn sau có lời giải đúng:

Bắc Ninh: Nguyễn Thị Thanh Hương, 6A, THCS Yên Phong; **Nam Định:** Phạm Quang Huy, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/404.** Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM , $AB=2$ cm, $AC=4$ cm, và $AM=\sqrt{3}$ cm. Hãy tính số đo góc BAC , độ dài cạnh BC và diện tích tam giác ABC .

ACER VIET NAM, BCD PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ
Phối hợp tổ chức và trao giải thưởng xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

Lời giải

Trên tia AM , lấy điểm D sao cho M là trung điểm của AD , ta có

$$AD = 2 \cdot AM = 2\sqrt{3}(\text{cm}).$$

Ta thấy $\triangle AMB = \triangle DMC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AB = DC = 2 \text{ cm và } \widehat{MDC} = \widehat{MAB}.$$

Xét tam giác ADC có

$$DC^2 + AD^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16 = AC^2$$

nên tam giác ADC vuông tại D

$$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{MAB} = 90^\circ \quad (1)$$

Gọi E là trung điểm của AC thì $DE = 2 = CE = DC$.

Suy ra tam giác DEC đều nên $\widehat{DCE} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{MAC} = 30^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC} = 120^\circ$.

Tam giác AMB vuông tại A nên

$$MB = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{7}(\text{cm})$$

$$\Rightarrow CB = 2 \cdot BM = 2\sqrt{7}(\text{cm}).$$

$$\text{Ta có } S_{AMB} = \frac{AB \cdot AM}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(\text{cm}^2).$$

Từ đó, suy ra diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}(\text{cm}^2)$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Có nhiều bạn tham gia giải và tất cả đều cho kết quả đúng. Một số bạn sử dụng khái niệm đường trung bình của tam giác chưa được giới thiệu ở chương trình lớp 7.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn:

Phú Thọ: Nguyễn Thanh Quang, Vương Quốc Huy, 7A4, THCS Giày Phong Châu, Phú Ninh, Phạm Ngọc Hải, 7A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Trâm Anh, Vũ Trung Hoa, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, 6D, Nguyễn Thị Ngọc Mai, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** Lê Hồ Minh Tuấn, 6A, Nguyễn Văn Lý, Nguyễn Văn Bảo Khanh, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Thắng, Tôn Thế Sơn, Trần Đoàn Trang, 7C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; Nguyễn Mai Lê, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 7A3, THPT Trần Đại Nghĩa, Q.1; **Quảng Ngãi:** Võ Trần

Thùy Hương, Nguyễn Thúy Phương, Huỳnh Tiến Vỹ, Tống Thành Nguyên, Nguyễn Thị Mỹ Chi, Cao Thị Thủy Diễm, 7A, THCS Hành Phước, Nguyễn Thị Kiều Duyên, 7A, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; Trần Thị Mỹ Ninh, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Hành; **Hậu Giang:** Trần Xuân Yên, 6A3, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vị Thanh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/404.** Tìm số tự nhiên k lớn nhất sao cho $n^5 - 2011n$ chia hết cho k , với mọi số tự nhiên n .

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Đặt $A_n = n^5 - 2011n$. Ta có

$$\begin{aligned} A_n &= (n^5 - n) - 2010n \\ &= (n-1)n(n+1)(n^2+1) - 2010n \\ &= (n-1)n(n+1)(n^2-4+5) - 2010n \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1) - 2010n. \end{aligned}$$

Dễ thấy $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) : 30$,
 $5(n-1)n(n+1) : 30$; $2010n : 30$ (với mọi $n \in \mathbb{N}$).

Do đó $A_n : 30$. Mặt khác

$$A_1 = 1^5 - 2011 \cdot 1 = -2010 = -2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67,$$

$$A_2 = 2^5 - 2011 \cdot 2 = -3990 = -2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19,$$

nên $\text{UCLN}(A_1, A_2) = 30$.

Vậy số tự nhiên k lớn nhất cần tìm là 30. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Tất cả các bạn đều tìm ra đúng kết quả ($k = 30$). Tuy nhiên một số bạn lập luận chưa chặt chẽ. Các bạn chỉ chứng minh $A_n : 30$ rồi kết luận luôn số cần tìm là 30, mà không chứng tỏ 30 là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn bài toán.

2) Các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ: Trần Thị Nhật Lệ, 9A, THCS Võ Miếu, Thanh Sơn; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Công, 9C, THCS Tiên Du; **Hà Nội:** Nguyễn Chí Tùng, 8A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình, Nguyễn Thị Bích Ngọc, Nguyễn Minh Hoàng, 7A4, THCS Đống Đa; **Nghệ An:** Cao Minh Trang, 8A, THCS Cao Xuân Huy; Lê Kim Nhã, 9B, THCS Diễn Lâm, Diễn Châu, Lý Hồng Đức, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Tuấn Hùng, 9₂, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/404.** Giải phương trình

$$(x^4 - 625)^2 - 100x^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Lời giải. Cách 1. Biến đổi về trái của PT (1) như sau

$$\begin{aligned} &(x^4 - 625)^2 - 100x^2 - 1 \\ &= x^8 - 1250x^4 + 625^2 - 100x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^8 + 1250x^4 + 625^2 - 2500x^4 - 100x^2 - 1 \\
&= (x^4 + 625)^2 - (50x^2 + 1)^2 \\
&= (x^4 - 50x^2 + 624)(x^4 + 50x^2 + 626) \\
&= ((x^2 - 25)^2 - 1)((x^2 + 25)^2 + 1) \\
&= (x^2 - 26)(x^2 - 24)((x^2 + 25)^2 + 1).
\end{aligned}$$

Nhận thấy $(x^2 + 25)^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên PT (1) tương đương với

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 26)(x^2 - 24) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 26 \\ x^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{26} \\ x = \pm 2\sqrt{6} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của PT (1) là

$$\{-\sqrt{26}; -2\sqrt{6}; 2\sqrt{6}; \sqrt{26}\}.$$

Cách 2. Đặt $x^2 = y$ ($y \geq 0$); $25 = a$ thì PT (1) có dạng

$$\begin{aligned}
&(y^2 - a^2)^2 - 4ay - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (y^2 + a^2)^2 - (2ay + 1)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (y^2 + a^2 - 2ay - 1)(y^2 + a^2 + 2ay + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (y - a - 1)(y - a + 1)((y + a)^2 + 1) = 0 \quad (2)
\end{aligned}$$

Do $(y + a)^2 + 1 > 0$ nên

$$\text{PT (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} y - a - 1 = 0 \\ y - a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a + 1 = 26 \\ y = a - 1 = 24. \end{cases}$$

Từ đó tìm được tập nghiệm của PT (1) như cách 1. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Tòa soạn nhận được nhiều bài giải của các bạn và đều giải theo một trong hai cách trên. Bạn **Đỗ Thế Dương**, 9A, THCS Giao Yến, **Nam Định** đã nêu và giải bài toán tổng quát:

Giải phương trình

$$a^{2n}(x^{4n} - b^{2n})^2 - 4a^n b^n c^n x^{2n} - c^{2n} = 0$$

(với a, b, c là các hằng số và $n \in \mathbb{N}^*$).

2) Ngoài bạn **Dương**, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

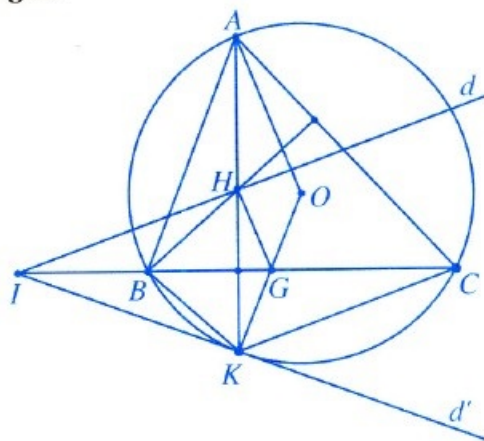
Vĩnh Phúc: Phan Thị Vân Anh, 8A1, Phạm Thị Khánh Linh, 9A1, THCS Yên Lạc, Nguyễn Sơn Hải, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Nghệ An:** Võ Quốc Anh, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Lê Văn Quỳnh, 7A, THCS Phú Yên, Thọ Xuân, Thái Văn Đạt, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bắc Ninh:** Lê Thị Hải Linh, Trần Anh Tài, 8A, THCS Yên Phong, Hà Văn Đức, 7D, THCS Đại Đồng, Thuận Thành; **Hà Nội:** Trịnh Thị Yên Ngọc, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền; **Hải Phòng:** Nguyễn Khánh Hưng, 7A1, THCS Hồng Bàng; **Quảng Bình:** Hồ Đức Khánh, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Đăng Hiếu, 9B,

THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Hậu Giang:** Trần Ngọc Khánh Quỳnh, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vị Thanh; **Đồng Tháp:** Trần Chí Thiện, 8A7, Bùi Trần Hải Đăng, 9A9, THCS Kim Hồng, TP. Cao Lãnh; **Phủ Thọ:** Cao Trung Đức, 8A3, THCS Lâm Thao, Vũ Tuấn Linh, 9F, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/404.** Cho tam giác ABC nhọn ($AB \neq AC$) nội tiếp đường tròn (O) , H là trực tâm của tam giác. Một đường thẳng d bất kì đi qua H . Vẽ đường thẳng d' đối xứng với d qua BC . Xác định vị trí của đường thẳng d sao cho d' là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải



Gọi K là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH với đường tròn (O) . Ta có $\widehat{CBK} = \widehat{CAK}$ mà $\widehat{CAK} = \widehat{CBH}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) nên $\widehat{CBK} = \widehat{CBH}$, lại có $AH \perp BC$ nên K đối xứng với H qua $BC \Rightarrow K \in d'$. Vậy d' là tiếp tuyến của (O) khi và chỉ khi $OK \perp d'$.

Gọi G là giao điểm của OK và BC . Dễ thấy $GK \perp d' \Leftrightarrow GH \perp d$ (*)

Nhận xét thêm rằng $HG \parallel AO$ (do hai tam giác GKH và OAK cân). Kết hợp với (*) suy ra d' là tiếp tuyến của (O) khi và chỉ khi d vuông góc với OA . $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Khẳng định (*) chính là kết quả của một tính chất quan trọng của phép đối xứng trục: tính chất bảo toàn góc.

Ta cũng có thể chứng minh (*) như sau: Nếu $d' \parallel BC$ thì $d \parallel BC$ khi đó $GK \perp d' \Leftrightarrow H, G, K$ thẳng hàng $\Leftrightarrow HG \perp d$. Nếu d' cắt BC tại I thì d cũng cắt BC tại I khi đó $\Delta HIG = \Delta KIG$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{GHI} = \widehat{GKI}$, do đó có (*).

2) Trong trường hợp $d' \parallel BC$ suy ra A, O, H, K thẳng hàng hay $AB = AC$ (trái giả thiết). Tuy nhiên giả thiết $AB \neq AC$ là không cần thiết.

3) Ta có thể tìm ra nhiều điều kiện của d để d' là tiếp tuyến, miễn là các điều kiện này đủ để xác định được d (tất nhiên các điều kiện đó là tương đương). Chẳng hạn có thể dừng lại ở điều kiện $d \perp HG$ tại H (do H, G là hai điểm xác định). Các bạn đã đưa ra nhiều điều kiện khác nhau cho d như:

- d là tiếp tuyến tại H của đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC .

- $d \parallel EF$, ở đây E, F là chân đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC hoặc có bạn dựng tiếp tuyến d' của (O) tại K rồi từ đó xác định d đối xứng với d' qua BC .

4) Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Nghệ An: Lê Kim Nhã, 9B, THCS Diên Lâm, Diên Châu; Lê Hồng Đức, Trương Công Phú, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Nguyễn Xuân Hùng, 9E, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương. **Quảng Ngãi:** Huỳnh Đặng Hiếu, 9B, THCS Nghĩa Mỹ, Tụ Nghĩa. **Thanh Hóa:** Lê Tuấn Linh, 9B, THCS Trần Mai Ninh. **Thái Bình:** Trần Hồng Quân, 9A₆, THCS Lương Thế Vinh, TP Thái Bình.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/404.** Tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq k(a^2 + b^2 + c^2)$$

trong đó a, b, c là các số thực dương và có tổng bằng 1.

Lời giải. Chọn $a = b = c = \frac{1}{3}$ ta có $k \leq 3$. Ta sẽ chứng minh BĐT đúng với $k = 3$. Thật vậy

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} &\geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b} - 2a + b \right) + \left(\frac{b^2}{c} - 2b + c \right) + \left(\frac{c^2}{a} - 2c + a \right) \\ &\geq 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

(Do $a + b + c = 1$ nên $(a + b + c)^2 = a + b + c$)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \\ \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Do $a + b + c = 1, a > 0, b > 0, c > 0$ nên $a < 1, b < 1, c < 1$.

$$\text{Suy ra } \frac{(a-b)^2}{b} \geq (a-b)^2; \quad \frac{(b-c)^2}{c} \geq (b-c)^2;$$

$$\frac{(c-a)^2}{a} \geq (c-a)^2. \text{ Do đó BĐT (2) đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Suy ra BĐT (1) đúng. Vậy $k = 3$ là giá trị cần tìm. □

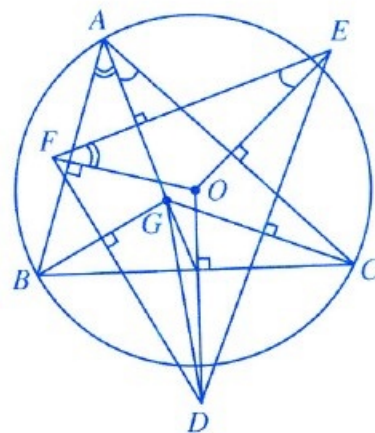
➤ **Nhận xét.** Có khá đông các bạn tham gia, hầu hết cho lời giải đúng. Xin tuyên dương các bạn nhỏ tuổi có lời giải tốt sau đây:

Hà Nội: Nguyễn Chí Tùng, 8A10, THCS Giảng Võ; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Sơn Hải, Trần Đình Hùng, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Thái Bình:** Trần Hồng Quân, 9A₆, THCS Lương Thế Vinh, TP. Thái Bình; **Nghệ An:** Nguyễn Xuân Hùng, 9E, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; **Bắc Ninh:** Ngô Văn Hương, 9A, THCS Yên Phong.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T7/404.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC ; D, E, F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB . Chứng minh rằng điểm O là trọng tâm của tam giác DEF .

Lời giải. Xét trường hợp tam giác ABC nhọn, trường hợp tam giác ABC có một góc tù hoặc một góc vuông, ta chứng minh tương tự.



Vì G là trọng tâm tam giác ABC , nên $S_{AGB} = S_{AGC}$.

Từ đó $AG \cdot AB \cdot \sin \widehat{GAB} = AG \cdot AC \cdot \sin \widehat{GAC}$,

$$\text{suy ra } \frac{\sin \widehat{GAB}}{\sin \widehat{GAC}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin \widehat{ACB}}{\sin \widehat{ABC}}.$$

Lại có $\sin \widehat{ABC} = \sin \widehat{DOF}$; $\sin \widehat{ACB} = \sin \widehat{DOE}$,

$$\text{nên} \quad \frac{\sin \widehat{GAB}}{\sin \widehat{GAC}} = \frac{\sin \widehat{DOF}}{\sin \widehat{DOE}} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác} \quad \frac{\sin \widehat{GAB}}{\sin \widehat{GAC}} = \frac{\sin \widehat{OFE}}{\sin \widehat{OEF}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\frac{\sin \widehat{DOF}}{\sin \widehat{DOE}} = \frac{\sin \widehat{OFE}}{\sin \widehat{OEF}} = \frac{OE}{OF}.$$

Dẫn đến $OE \cdot OD \cdot \sin \widehat{DOE} = OF \cdot OD \cdot \sin \widehat{DOF}$,
hay $S_{DOE} = S_{DOF}$. Tương tự ta cũng có $S_{DOE} = S_{DOF}$.
Từ đó suy ra O là trọng tâm tam giác DEF . $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn giải bài T7/404 bằng cách sử dụng định lý Ceva. Một số bạn đã chỉ ra được G là điểm Lemoine của tam giác DEF , sau đó chứng minh DO và DG là hai đường đẳng giác đối với góc $\widehat{EDF}$. Từ đó cũng suy ra kết luận ở đề bài. Lưu ý rằng chúng ta cũng có thể giải quyết bài toán trên bằng cách sử dụng kết quả bài T8/399, TH&TT số 399, tháng 9, năm 2010.

2) Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Phạm Huy Hoàng, 10A1, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, Lương Hữu Bằng, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Phú Thọ:** Nguyễn Ngọc Sơn, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Đình Anh Hoàng, 10A1, THPT Lâm Thao; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Bình, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nam:** Lại Thị Thu Hương, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Hải Dương:** Trần Quang Thanh, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** Mai Văn Tuấn, 10 Toán 2, Phạm Bá Kiên Bình, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Trần Trung Hiếu, 10 Toán 2, Trần Quang Đại, 11 Toán, THPT chuyên Thái Bình, Vũ Huy Hoàng, 11A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** Nghiêm Việt Cường, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Lê Kim Nhã, 9B, THPT Diễn Lâm, Diễn Châu, Hoàng Danh Thắng, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III, Nguyễn Văn Hoàng, 11T7, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** Lê Trần Nhạc Long, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Trần Minh Bảo, Lê Như Ngọc, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

HỒ QUANG VINH

★ Bài T8/404. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{\cos 5x + 2\cos x} - \sqrt[3]{2\cos 5x + \cos x} = 2\sqrt[3]{\cos x(\cos 4x - \cos 2x)}.$$

Lời giải. Ta dễ dàng chứng minh các công thức sau

$$\begin{aligned} \cos 5x &= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x; \\ \cos 4x &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1. \end{aligned}$$

Phương trình trong đầu bài có thể viết thành

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{\cos x(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 7)} \\ &- \sqrt[3]{\cos x(32\cos^4 x - 40\cos^2 x + 11)} \\ &= 2\sqrt[3]{\cos x(8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 2)} \end{aligned} \quad (1)$$

Nhận thấy phương trình (1) thỏa mãn với

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Với $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của PT(1) cho $\sqrt[3]{\cos x}$, ta được

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 7} - \sqrt[3]{32\cos^4 x - 40\cos^2 x + 11} \\ &= 16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 4 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } a &= \sqrt[3]{16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 7}; \\ b &= \sqrt[3]{32\cos^4 x - 40\cos^2 x + 11}, \end{aligned}$$

$$\text{suy ra } b^3 = 2a^3 - 3;$$

$$b^3 - a^3 = 16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 4 = \text{VP}(2).$$

$$\text{Ta được hệ } \begin{cases} b^3 = 2a^3 - 3 \\ a - b = b^3 - a^3 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Ta có, (4) $\Leftrightarrow a = b$ (vì nếu $a \neq b$ thì hai vế của (4) trái dấu nhau, không thỏa mãn).

Kết hợp với (3), suy ra $a^3 = b^3 = 3$.

$$\text{Do đó } 16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có tập hợp nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \text{ hoặc } x = \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** 1) Có thể giải bài toán bằng cách khác như sau: khi $\cos x \neq 0$, sau khi biến đổi, chia hai vế của phương trình thu được cho $\sqrt[3]{\cos x}$, ta được

$$\sqrt[3]{\frac{\cos 5x}{\cos x}} + 2 - \sqrt[3]{\frac{2 \cos 5x}{\cos x}} + 1 = \frac{\cos 5x}{\cos x} - 1.$$

Đặt $\frac{\cos 5x}{\cos x} - 1 = t$; tính được $t = 0$; nên $\cos 5x = \cos x$
từ đó suy ra nghiệm của phương trình.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hưng Yên: Dương Mạnh Cường, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bắc Giang:** Đinh Thành Tuấn, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Quảng Nam:** Nguyễn Đức Trí, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Bình Định:** Nguyễn Quang Hải, 11TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Võ Nhật Nam, 11A1, THPT Phù Cát I, Nguyễn Thị Tuyết Nhung, 11T2, THPT Tây Sơn; **Quảng Bình:** Nguyễn Hữu Lộc, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Hậu Giang:** Đường Ngọc Lan, 11H, THPT chuyên Vị Thanh, TP. Vị Thanh; **Bến Tre:** Ngô Như Ngọc, Trương Quang Bảo, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre, TP. Bến Tre.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T9/404.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$ và

$$\frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}} + \frac{y^2 - y + 2}{y + \sqrt{y-2}} + \frac{z^2 - z + 3}{z + \sqrt{z-3}} = 12.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y, z) = x + y + z$.

Lời giải. Đặt $a = \sqrt{x-1}, b = \sqrt{y-2}, c = \sqrt{z-3}$.

Ta có $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}} + \frac{y^2 - y + 2}{y + \sqrt{y-2}} + \frac{z^2 - z + 3}{z + \sqrt{z-3}} \\ &= (x - \sqrt{x-1}) + (y - \sqrt{y-2}) + (z - \sqrt{z-3}) \\ &= (a^2 + 1 - a) + (b^2 + 2 - b) + (c^2 + 3 - c) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) + 6 \\ & \text{và } f(x, y, z) = a^2 + b^2 + c^2 + 6. \end{aligned}$$

Theo giả thiết $(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) + 6 = 12$ nên $(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) = 6$.

Chú ý.

*) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
 $\geq a^2 + b^2 + c^2$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có hai số bằng 0.

**) $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Do đó, nếu kí hiệu $g = a^2 + b^2 + c^2$ thì

$$6 = (a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) \leq g - \sqrt{g},$$

kết hợp với $g - \sqrt{g} - 6 = (\sqrt{g} - 3)(\sqrt{g} + 2)$,

suy ra $\sqrt{g} \geq 3$.

Bởi vậy, $g \geq 9 \Rightarrow f(x, y, z) = g + 6 \geq 9 + 6 = 15$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có hai số bằng 0, số còn lại bằng 3. Tức là

$$(x; y; z) \in \{(10; 2; 3), (1; 11; 3), (1; 2; 12)\}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x, y, z)$ bằng 15.

Tương tự ta có

$$6 = (a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) \geq g - \sqrt{3g} \text{ nên}$$

$$0 \geq g - \sqrt{3g} \cdot \sqrt{g} - 6 = (\sqrt{g} - 2\sqrt{3})(\sqrt{g} + \sqrt{3}).$$

Suy ra $\sqrt{g} \leq 2\sqrt{3}$ hay $g \leq 12$. Khi đó

$$f(x, y, z) = g + 6 \leq 18.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$, tức là $x = 5, y = 6, z = 7$.

Như vậy giá trị lớn nhất của $f(x, y, z)$ bằng 18 và giá trị nhỏ nhất của $f(x, y, z)$ bằng 15. □

➤ **Nhận xét.** Do sơ suất nên đề toán đã bị nhầm lẫn. Tòa soạn thành thật xin lỗi bạn đọc. Không khó lắm ta có thể thấy rằng không tồn tại các số thực $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$ thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

$$1) \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} + \frac{2}{y + \sqrt{y-2}} + \frac{3}{z + \sqrt{z-3}} = 12$$

(vế trái $\leq 1 + 1 + 1 = 3 < 12$).

$$2) \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}} + \frac{2y^2 - 2y + 4}{y + \sqrt{y-2}} + \frac{3z^2 - 3z + 9}{z + \sqrt{z-3}} = 12$$

(vế trái $= (x - \sqrt{x-1}) + 2(y - \sqrt{y-2}) + 3(z - \sqrt{z-3})$)

$$= \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} + 2\left[\left(\sqrt{y-2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right]$$

$$+ \left[\left(\sqrt{z-3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right]$$

$$\geq \frac{3}{4} + \frac{14}{4} + \frac{33}{4} = \frac{50}{4} > 12).$$

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/404.** Cho dãy số (x_n) với $x_1 = \frac{5}{2}$ và

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Minh, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương).

• Ta chứng minh $x_n > 2$ bằng quy nạp. Thật vậy

$$x_1 = \frac{5}{2} > 2. \text{ Giả sử } x_n > 2. \text{ Khi đó } x_{n+1} > 2$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1}^2 > 4 \Leftrightarrow x_n^3 - 12x_n + 16 + \frac{1}{n+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x_n + 4)(x_n - 2)^2 + \frac{1}{n+1} > 0 \text{ (BĐT đúng).}$$

• Ta chứng minh (x_n) là dãy giảm. Giả sử

$$2 < x_n < \dots < x_1 = \frac{5}{2}. \text{ Ta sẽ chứng minh}$$

$$x_{n+1} < x_n \Leftrightarrow x_{n+1}^2 < x_n^2$$

$$\Leftrightarrow (x_n^3 - x_{n-1}^3) - 12(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x_n - x_{n-1})(x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 - 12) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } x_n < x_{n-1} \text{ nên } x_n - x_{n-1} < 0 \text{ và } x_n > 2, x_{n+1} > 2$$

$$\text{suy ra } x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 - 12 > 0 \text{ và } \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0.$$

$$\text{Do đó BĐT (1) đúng. Vậy } x_{n+1} < x_n.$$

Dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi 2 nên tồn tại $\lim x_n = a \left(2 \leq a < \frac{5}{2} \right)$. Qua giới hạn ở

đẳng thức truy hồi ta có PT

$$a = \sqrt{a^3 - 12a + 20} \Leftrightarrow (a-2)(a^2 + a - 10) = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = \frac{-1 + \sqrt{41}}{2} > \frac{5}{2} = x_1 \\ a_3 = \frac{-1 - \sqrt{41}}{2} < 2. \end{cases}$$

Suy ra $\lim x_n = a_1 = 2. \square$

➤ **Nhận xét.** Đây là một bài toán rất cơ bản của giới hạn được nhiều bạn ở các lớp không chuyên tham gia giải. Tất cả các lời giải đều đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghệ An: Hoàng Danh Thắng, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Hưng Yên:** Trần Ngọc Tiến, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Quảng Trị:** Hồ Phước Bảo, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** Võ Văn Quang, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Thái Bình:** Vũ Huy Hoàng, 11A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Bắc Ninh:** Trương Giang Khang, 10A1, THPT Thuận Thành số 1; **Phú Thọ:** Đào Văn Lập, 10A1, THPT Thanh Thủy.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T11/404.** Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow (0; 2011]$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) \leq 2011 \left(2 - \frac{2011}{f(y)} \right), \text{ với } x > y.$$

Lời giải. (Theo bạn Trần Thị Hồng Nhung, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định).

BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{f(x)}{2011} + \frac{2011}{f(y)} \leq 2 \text{ với mọi } x > y \quad (1)$$

Vì $f(x) > 0$ và $f(y) > 0$ nên theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$\frac{f(x)}{2011} + \frac{2011}{f(y)} \geq 2 \sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}} \text{ với mọi } x > y \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cho ta $f(x) \leq f(y)$ với mọi $x > y$, tức $f(t)$ là hàm đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$.

Vậy ứng với mỗi $x \in \mathbb{R}$ cho trước, ta đều có

$$f(x) \leq 2011 \left(2 - \frac{2011}{f(y)} \right) \leq 2011 \left(2 - \frac{2011}{f(x)} \right)$$

với mọi $x > y$, hay $(f(x) - 2011)^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2011.$$

Vậy $f(x) \equiv 2011$. Thử lại, ta thấy hàm $f(x) \equiv 2011$ thỏa mãn bài ra. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn đã giải bài bằng cách chứng minh $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2011$, từ đó suy ra $f(x) \equiv 2011$.

2) Ngoài bạn *Nhung*, các bạn sau đây cũng có lời giải đúng:

Bắc Giang: *La Văn Quân*, 10T, THPT, chuyên Bắc Giang; **Bắc Ninh:** *Bùi Nhật Dương*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Hà Phương*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Vũ Xuân Trường*, 10T1, *Bùi Ngọc Hiến*, 10T2, *Phùng Mai Linh*, 11T THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** *Nguyễn Quốc Hiệp*, *Trần Quang Thanh*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hòa Bình:** *Đặng Hữu Hiếu*, 10T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hưng Yên:** *Đào Việt Anh*, 10T1, *Lương Đức Hiếu*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Trần Quang Đại*, 11T, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Trịnh Văn Tam*, *Lê Văn Tuấn*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I; **Quảng Nam:** *Lê Vũ Văn Phi*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Phú Yên:** *Lê Nguyễn Thiên Thanh*, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/404.** Cho bốn điểm A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Lấy điểm M sao cho năm điểm A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) và M không cùng nằm trên một đường tròn. Gọi T_i là tam giác có ba đỉnh là các điểm A_j ($j = 1, 2, 3, 4; j \neq i$), C_i là đường tròn (hoặc đường thẳng) đi qua ba điểm là hình chiếu vuông góc của M xuống ba cạnh (hoặc cạnh kéo dài) của tam giác T_i . Chứng minh rằng các đường C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) cùng đi qua một điểm.

Lời giải. *Bổ đề.* Cho tam giác ABC và một điểm M . Gọi H, K, L lần lượt là các hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB . Lúc đó H, K, L thẳng hàng khi và chỉ khi M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Phép chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

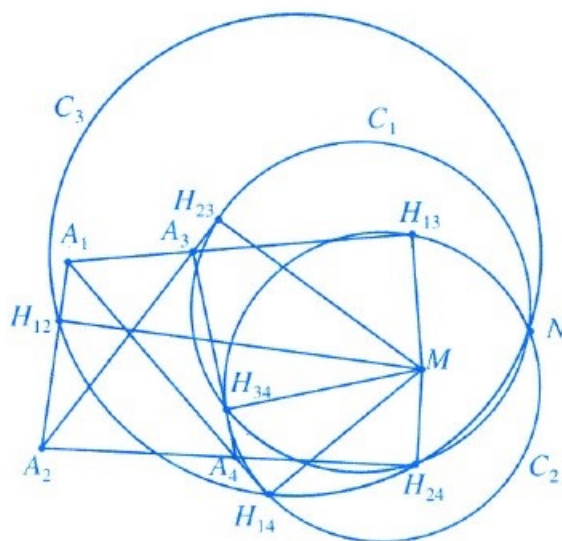
Gọi $H_{ij} = H_{ji}$ là hình chiếu của M trên đường thẳng $A_i A_j$, $\{i, j\} \in \{1; 2; 3; 4\}$. C_i là đường tròn hoặc đường thẳng đi qua ba điểm H_{jk}, H_{kl}, H_{lj} , $\{j, k, l\} = \{1; 2; 3; 4\} \setminus \{i\}$.

Đương nhiên C_i, C_j cùng đi qua H_{kl} , $\{k, l\} \subset \{1; 2; 3; 4\} \setminus \{i, j\}$.

Vì M và các điểm A_i không cùng thuộc một đường tròn nên có không quá một tam giác T_i sao cho M thuộc đường tròn ngoại tiếp của nó. Do đó theo bổ đề trên, có không quá một C_i là đường thẳng.

Không mất tính tổng quát, giả sử C_1, C_2 là các đường tròn.

Gọi N là giao điểm khác H_{34} của C_1, C_2 (1)



Dễ thấy các bộ năm điểm $(M, A_1, H_{12}, H_{13}, H_{14})$; $(M, A_2, H_{23}, H_{24}, H_{12})$; $(M, A_3, H_{34}, H_{13}, H_{23})$ cùng thuộc một đường tròn (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$(NH_{24}, NH_{14}) \equiv (NH_{24}, NH_{34}) + (NH_{34}, NH_{14}) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (H_{23}H_{24}, H_{23}H_{34}) + (H_{13}H_{34}, H_{13}H_{14}) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (H_{23}H_{24}, H_{23}M) + (H_{23}M, H_{23}H_{34}) + (H_{13}H_{34}, H_{13}M) + (H_{13}M, H_{13}H_{14}) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (H_{12}H_{24}, H_{12}M) + (H_{13}M, H_{13}H_{34}) + (H_{13}H_{34}, H_{13}M) + (H_{12}M, H_{12}H_{14}) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (H_{12}H_{24}, H_{12}H_{14}) \pmod{\pi}.$$

Do đó N thuộc C_3 . Tương tự N thuộc C_4 . □

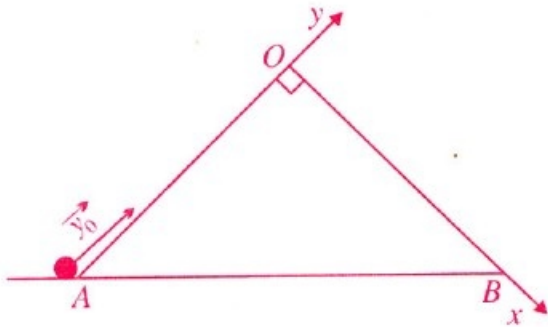
➤ **Nhận xét.** 1) Với bài toán này, để có lời giải không phụ thuộc hình vẽ cần phải biết sử dụng góc định hướng.

2) Chỉ có hai bạn có lời giải đúng và không phụ thuộc hình vẽ: **Thanh Hoá:** *Lê Văn Tuấn Anh*, 10A1, THPT Nông Công I; **Bình Định:** *Trần Minh Bảo*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/404.** Một quả cầu nhỏ, đàn hồi nằm ở chân của một cái nêm AOB vuông cân ($OA=OB=l$) cố định (hình vẽ). Cần truyền cho quả cầu vận tốc v_0 hướng dọc mặt nêm bằng bao nhiêu để quả cầu rơi đúng điểm B của nêm?

Lời giải. Xin bổ sung giả thiết của bài toán: Bỏ qua ma sát giữa quả cầu và nêm; coi va chạm của quả cầu với nêm là tuyệt đối đàn hồi.



Khi lên tới đỉnh O , quả cầu có vận tốc v , theo định luật bảo toàn cơ năng ta có

$$v = \sqrt{v_0^2 - \sqrt{2}gl} \quad (1)$$

Sau khi rời O , quả cầu chuyển động như vật bị ném xiên. Khi va chạm với mặt bên OB của nêm thì độ lớn vận tốc của quả cầu không thay đổi. Trong quá trình chuyển động giữa các va chạm, quả cầu chỉ chịu tác dụng của trọng lực. Ta phân tích gia tốc $\vec{g}$ thành hai thành

phần: theo phương Ox , $a_x = g \cdot \sin 45^\circ = \frac{g}{\sqrt{2}}$; theo

phương Oy , $a_y = -g \cdot \cos 45^\circ = -\frac{g}{\sqrt{2}}$. Như vậy,

theo phương Ox vật chuyển động nhanh dần đều, còn theo phương Oy vật chuyển động giống như được ném thẳng đứng trong trọng trường hiệu dụng với $g_{hd} = |a_y|$ và vận tốc ban đầu $v_{0y} = v$. Khoảng thời gian giữa hai va chạm liên tiếp là

$$T = \frac{2v_{0y}}{|a_y|} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{v_0^2 - \sqrt{2}gl}}{g} \quad (2)$$

Gọi n ($n \in \mathbb{N}^*$) là số va chạm giữa quả cầu và mặt OB của nêm. Để vật rơi trúng điểm B thì

$$l = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{2}} (nT)^2 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta sẽ tìm được

$$v_0 = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{gl(4n^2 + 1)}{2\sqrt{2}}}. \quad \square$$

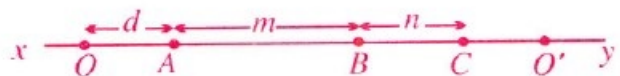
➤ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt:

Nam Định: Đinh Việt Thắng, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Giáp, A3 K38 THPT chuyên Phan Bội Châu; **Trần Văn Bắc,** 11A6, THPT chuyên ĐH Vinh; **Lê Văn Đức,** Bùi Hữu Vinh, 11T7, THPT Đô Lương I; **Quảng Ngãi:** Kiều Văn Bảo, 10 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Gia Lai:** Trần Đình Nam, 11A1, THPT Nguyễn Trãi, An Khê; **Đồng Nai:** Bùi Thị Huyền Trang, Lớp B1, THPT Ngô Quyền, TP. Biên Hòa; **Tp Hồ Chí Minh:** Phạm Quan Dũng, 11 Lí, PTNK ĐHQG; **Đồng Tháp:** Huỳnh Thanh Dư, 10 Lí, THPT Cao Lãnh, TP. Cao Lãnh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/404.** Cho ba điểm A, B, C nằm trên trục chính xy của một thấu kính L với $AB = m = 36 \text{ cm}$ và $BC = n = 9 \text{ cm}$. Nếu đặt vật sáng tại A thì thu được ảnh của nó tạo bởi thấu kính tại B . Nếu đặt vật sáng tại B thì thu được ảnh của nó tạo bởi thấu kính tại C . Hỏi L là thấu kính hội tụ hay phân kì? Hãy xác định tiêu cự f của thấu kính L .

Lời giải. Giả sử trục chính xy của thấu kính và các điểm A, B, C được cho như hình vẽ.



Ta xét hai trường hợp

1) L là thấu kính hội tụ

Nếu B là ảnh thật thì khi vật sáng đặt tại B thì theo tính thuận nghịch của sự truyền ánh sáng, ta lại thu được ảnh của vật tại A . Vậy B phải là ảnh ảo nên quang tâm O của L phải ở bên trái A . Tương tự C cũng là ảnh ảo.

a) Vật thật tại A , ảnh ảo tại B , với chú ý là $d = OA > 0$ và $m > n > 0$, ta có công thức

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d+m} \quad (1)$$

b) Vật thật tại B , ảnh ảo tại C , ta có công thức

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d+m} - \frac{1}{d+m+n} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(n-m)d = (n+m)m \quad (3)$$

Vế phải của (3) dương nên $n-m > 0 \Rightarrow n > m$.
Nhưng theo đề bài thì $n < m$ nên L không thể là thấu kính hội tụ.

2) L là thấu kính phân kì

Với thấu kính phân kì thì vật sáng tại A cho ảnh ảo tại B ở gần thấu kính hơn vật. Tương tự C cũng là ảnh ảo. Vậy quang tâm O' của thấu kính phân kì L ở bên phải C .

a) Vật thật tại A , ảnh ảo tại B , ta có công thức

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{O'A} - \frac{1}{O'B} = \frac{1}{m+n+O'C} - \frac{1}{n+O'C} \quad (4)$$

Vật thật tại B , ảnh ảo tại C , ta có công thức

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{n+O'C} - \frac{1}{O'C} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) rút ra

$$O'C = \frac{(m+n)n}{m-n} = \frac{(36+9).9}{36-9} = 15(\text{cm}).$$

Thay $O'C = 15\text{cm}$ vào (5) ta tìm được $f = -40\text{cm}$.

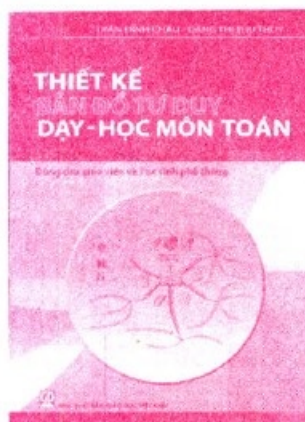
Vậy L là thấu kính phân kì có tiêu cự $f = -40\text{cm}$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nam: Đinh Ngọc Hải, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa; **Thanh Hóa:** Bùi Thị Thủy, 12A3, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân; **Quảng Ninh:** Đường Thị Trà My, 11A3, THPT Uông Bí; **Quảng Ngãi:** Phạm Quốc Việt, 11B1, THPT Bình Sơn, Phạm Quốc Đô, 12C1, THPT chuyên Lê Khiết; **Nam Định:** Bùi Xuân Hiền, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đồng Tháp:** Huỳnh Thanh Dư, 10L, THPT TP. Cao Lãnh; **Bình Định:** Trần Quang Khanh, 11TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Trần Minh Bảo, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Phúc:** Cao Thu Trang, 11M, THPT Trần Phú, Vĩnh Yên; **Bắc Ninh:** Lê Văn Mạnh, 12 Hóa, Nguyễn Thị Mai Loan, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nghệ An:** Trần Văn Bắc, 11A6, THPT chuyên ĐH Vinh, Nguyễn Văn Hoàng, 11T7, THPT Đô Lương I.

NGUYỄN VĂN THUẬN

GIỚI THIỆU SÁCH MỚI



Cuốn **THIẾT KẾ BẢN ĐỒ TƯ DUY DẠY - HỌC MÔN TOÁN** của TS. Trần Đình Châu và TS. Đặng Thị Thu Thủy là một hình thức ghi chép độc đáo, sáng tạo giúp học sinh tìm tòi, đào sâu, mở rộng một ý tưởng, hệ thống hóa một chủ đề hay một mạch kiến thức... bằng cách kết hợp, sử dụng đồng thời hình ảnh, đường nét, màu sắc chữ viết với sự tư duy tích cực để tạo nên các hình ảnh liên kết". Bản đồ tư duy được xem là một công cụ hỗ trợ việc dạy học và quản lý giáo dục hết sức hiệu quả mà nhiều nước tiên tiến trên thế giới đã áp dụng rất thành công. Sách dùng cho cán bộ chỉ đạo chuyên môn, các thầy cô giáo, sinh viên sư phạm và các em học sinh từ lớp 6 đến lớp 12.

Sách dày 128 trang, khổ $17 \times 24\text{cm}$, in 4 màu. Giá bìa 52.000 đồng.

Địa chỉ liên hệ:

Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Gia Định (NXBGD Việt Nam)
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh

Các bạn nhớ đặt mua TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ cho Quý III năm 2011 và CÁC SẢN PHẨM CỦA TÒA SOẠN tại các bưu điện trên cả nước



HÌNH SAO MORLEY

(Tiếp theo kì trước)

NGUYỄN VĂN LINH

(HS lớp 12A2 Toán, trường chuyên KHTN,
ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

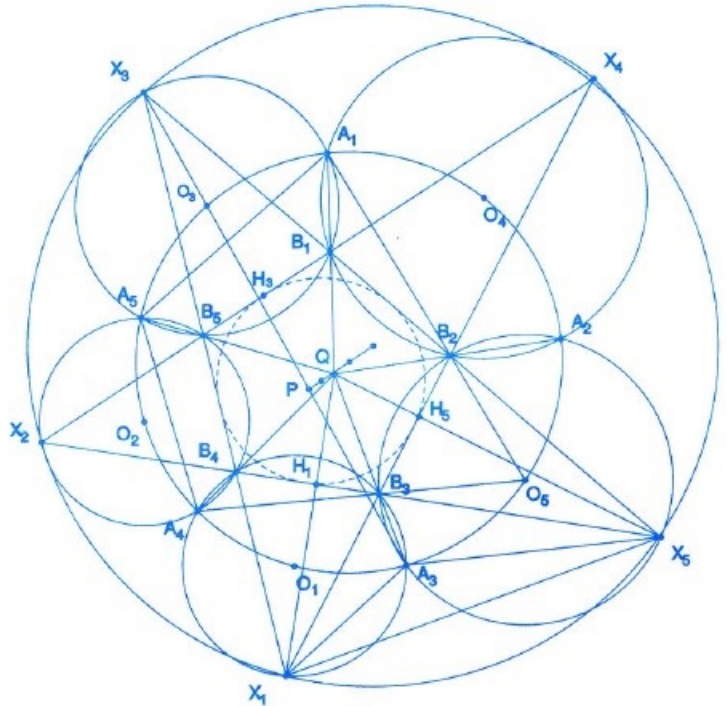
❖ **Tính chất 3.** $B_1B_2B_3B_4B_5$ là ngũ giác vừa nội tiếp, vừa ngoại tiếp đường tròn.

Chứng minh. (h. 4). Theo tính chất 2 thì B_3 là trực tâm tam giác QX_1X_5 , suy ra $QB_3 \perp X_1X_5$. Mà $A_3B_3 \perp X_1X_5$ nên Q, B_3, A_3 thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta thu được $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5$ đồng quy tại Q . Suy ra Q là tâm đẳng phương của năm đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4), (O_5)$.

Gọi k là phương tích của Q đối với năm đường tròn trên. Xét phép nghịch đảo tâm Q , phương tích k : $A_1 \mapsto B_1, A_2 \mapsto B_2, A_3 \mapsto B_3, A_4 \mapsto B_4, A_5 \mapsto B_5$. Mà $A_1A_2A_3A_4A_5$ nội tiếp nên $B_1B_2B_3B_4B_5$ nội tiếp.

Mặt khác, $\widehat{A_4A_5B_5} = \widehat{A_4B_4X_1} = \widehat{A_4B_3X_1}$
 $\widehat{B_2B_3O_5} = \widehat{B_3B_2O_5} = \widehat{A_1B_2X_4} = \widehat{A_1B_1X_4}$
 $= \widehat{B_5A_5A_1}$.

Suy ra đường phân giác các góc của ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ đồng quy tại Q , hay ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ ngoại tiếp. Mà $B_1B_2B_3B_4B_5$ là ảnh của $A_1A_2A_3A_4A_5$ qua phép nghịch đảo tâm Q , phương tích k nên $B_1B_2B_3B_4B_5$ ngoại tiếp. Ta có đpcm. $\square$



Hình 4

❖ **Tính chất 4.** Các cặp tam giác sau đồng dạng: PB_1B_5 và $X_3A_5A_1$; PB_1B_2 và $X_4A_2A_1$; PB_2B_3 và $X_5A_3A_2$; PB_3B_4 và $X_1A_4A_3$; PB_4B_5 và $X_2A_5A_4$.

Chứng minh. (h. 4) Ta chứng minh cặp tam giác PB_1B_5 và $X_3A_5A_1$ đồng dạng. Các cặp tam giác còn lại bạn đọc chứng minh tương tự. Do các cặp X_1P, X_1Q và X_4P, X_4Q lần lượt là hai đường đẳng giác trong $\widehat{B_5X_1X_4}$ và $\widehat{B_5X_4X_1}$ nên P, Q là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác $B_5X_1X_4$. Suy ra $\widehat{PB_5B_1} = \widehat{QB_5X_1} = \widehat{A_5B_5X_3} = \widehat{X_3A_1A_5}$. Tương tự $\widehat{X_3A_5A_1} = \widehat{PB_1B_5}$. Từ đó suy ra đpcm. $\square$

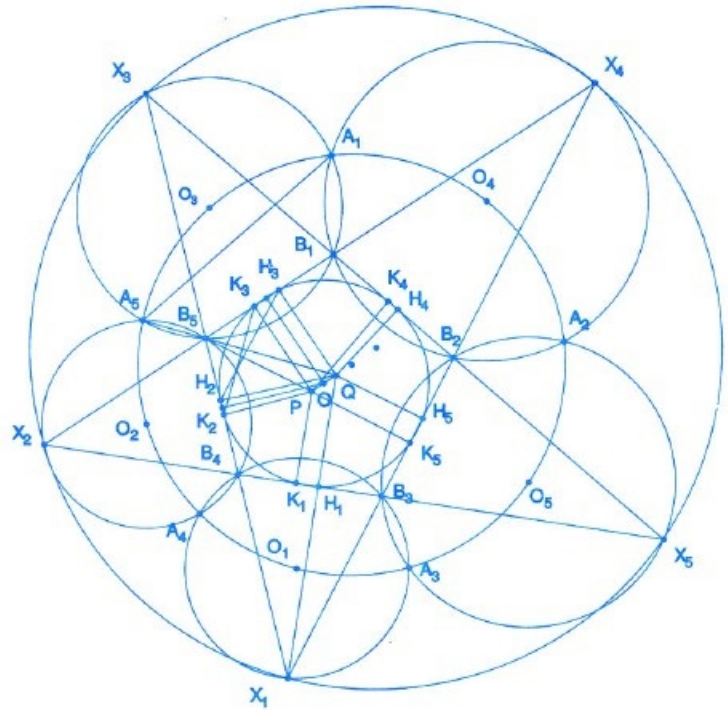
❖ **Tính chất 5.** Tập hợp 10 hình chiếu của P, Q trên năm cạnh $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, B_5B_1$ cùng thuộc một đường tròn tâm là trung điểm PQ .

Chứng minh. (h. 5)

Gọi K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 lần lượt là hình chiếu của điểm P trên các cạnh $B_3B_4, B_4B_5, B_5B_1, B_1B_2, B_2B_3$. Ta có $\widehat{H_2K_2K_3} = \widehat{B_5PK_3} = 90^\circ - \widehat{PB_5K_3} = 90^\circ - \widehat{QB_5H_2} = \widehat{B_5QH_2} = \widehat{K_3H_3H_2}$.

Suy ra H_2, K_3, H_3, K_2 cùng thuộc một đường tròn. Dễ thấy đường trung trực d_3 của K_3H_3 là đường trung bình của hình thang K_3PQH_3 , nên d_3 đi qua trung điểm O của PQ . Tương tự đường trung trực d_2 của K_2H_2 đi qua trung điểm O của PQ . Do đó O là tâm đường tròn (H_2, K_3, H_3, K_2) , tương tự O là tâm đường tròn (K_3, K_4, H_3, H_4) , (K_4, K_5, H_4, H_5) , (K_5, K_1, H_5, H_1) .

Vậy 10 điểm $K_1, K_2, \dots, K_5, H_1, H_2, \dots, H_5$ cùng nằm trên đường tròn tâm O . $\square$



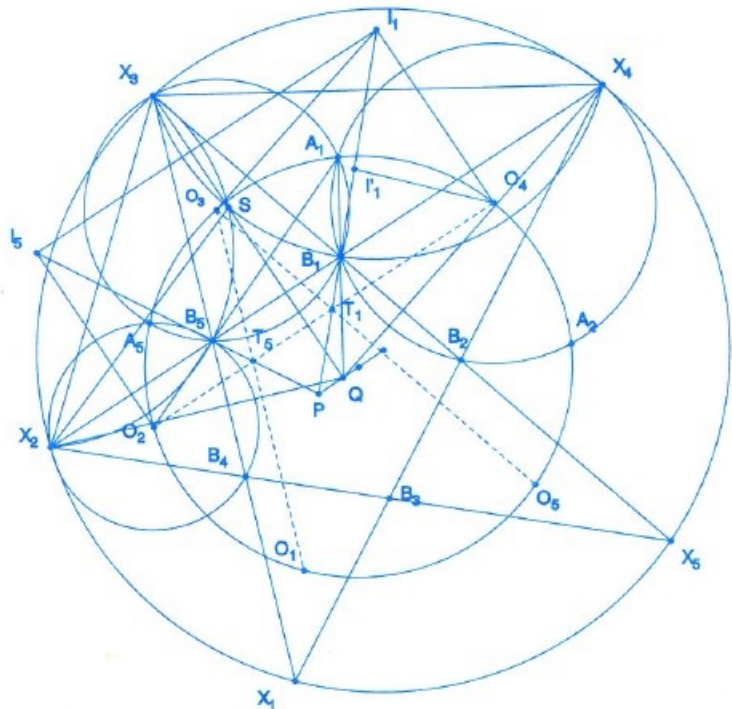
Hình 5

❖ **Tính chất 6.** Gọi I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $X_3B_1X_4, X_4B_2X_5, X_5B_3X_1, X_1B_4X_2, X_2B_5X_3$. Khi đó ngũ giác $I_1I_2I_3I_4I_5$ vừa nội tiếp vừa ngoại tiếp đường tròn.

Chứng minh. (h. 6)

Gọi T_1 là giao điểm của O_2O_4 và O_3O_5 ; S là giao của (I_5) với X_3Q ; I'_1 là tâm đường tròn $(O_3T_1O_4)$. Ta có B_5 là trực tâm của tam giác X_3QX_2 nên $\widehat{X_3QX_2} = 180^\circ - \widehat{X_3B_5X_2} = \widehat{X_2SQ}$. Suy ra S là điểm đối xứng với Q qua X_2X_4 . Tương tự ta chứng minh được S nằm trên (I_1) . Mà $X_3Q \perp X_2X_4$ suy ra $I_1I_5 \parallel B_1B_5$. Tương tự $I_1I_2 \parallel B_1B_2, \dots, I_4I_5 \parallel B_4B_5$ (1)

Mặt khác do P là tâm vị tự của hai ngũ giác $X_1X_2X_3X_4X_5$ và $O_1O_2O_3O_4O_5$ nên P, T_1, B_1 thẳng hàng. Lại có $I_1O_4 \perp X_2X_4$ và $X_2X_4 \parallel O_2O_4$, suy ra $\widehat{I_1O_4T_1} = 90^\circ$. Tương tự $\widehat{I_1O_3T_1} = 90^\circ$,



Hình 6

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T5/408. Let AB be a fixed line segment. Point M is such that MAB is an acute triangle. Let H be the orthocenter of MAB , I is the midpoint of AB , D is the projection of H onto MI . Prove that the product $MI \cdot DI$ does not depend on the position of M .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/408. Let a, b, c be real numbers such that $\sin a + \sin b + \sin c \geq \frac{3}{2}$. Prove the inequality

$$\sin\left(a - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(b - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(c - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0.$$

T7/408. Denote by $[x]$ the largest integer not exceeding x . Solve the equation

$$x^2 - (1 + [x])x + 2011 = 0.$$

T8/408. Let E be the center of the nine-point circle (the Euler's circle) of triangle ABC with edge-lengths $BC = a, AC = b, AB = c$; E_1, E_2, E_3 are respectively the projections of E onto BC, CA, AB and let R be the circumradius of triangle ABC .

Prove that

$$\frac{S_{E_1E_2E_3}}{S_{ABC}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{16R^2} - \frac{5}{16}.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/408. Find the minimum value of the expression

$$\frac{3}{\tan B + \tan C - \tan A} + \frac{4}{\tan A + \tan C - \tan B} + \frac{5}{\tan A + \tan B - \tan C}$$

where A, B, C are three angles of an acute triangle ABC and $C \geq A$.

T10/408. 1) Prove that for each positive integer n , the equation

$$x + x^2 + x^3 + \dots + 2011x^{2n+1} = 2009$$

has a unique real root.

2) Let x_n be denote the real solution in part 1). Prove that $0 < x_n < \frac{2010}{2011}$.

T11/408. Let (u_n) be a sequence given by $u_1 = 2011$,

$$u_{n+1} = \frac{\pi}{8} \left(\cos u_n + \frac{\cos 2u_n}{2} + \frac{\cos 3u_n}{3} \right) \text{ for } n \geq 1.$$

Prove that the sequence (u_n) has a finite limit.

T12/408. Let $A_1B_1C_1D_1$ and $A_2B_2C_2D_2$ be two squares in opposite direction (that is, if the vertices A_1, B_1, C_1, D_1 are in clockwise order, then A_2, B_2, C_2, D_2 are ordered counterclockwise) with centers O_1, O_2 respectively. Suppose that D_2, D_1 are respectively in A_1B_1, A_2B_2 . Prove that the lines B_1B_2, C_1C_2 , and O_1O_2 are concurrent.

Translated by LE MINH HA

ta thu được I'_1 là trung điểm I_1T_1 . Ta có
 $\widehat{I'_1T_1O_4} = 90^\circ - \widehat{T_1O_3O_4} = 90^\circ - \widehat{X_4X_3X_5}$
 $= 90^\circ - \widehat{B_5X_2B_4} = \widehat{O_2B_5B_4}$
 $= \widehat{X_3B_5A_1} = \widehat{X_3B_1A_1} = \widehat{QB_1B_2} = \widehat{PB_1B_5} = \widehat{B_1T_1O_4}$.
 Do đó T_1, B_1, I'_1 thẳng hàng. Ta thu được P, B_1, I_1 thẳng hàng. Tương tự các bộ ba $(P, B_5, I_5), (P, B_2, I_2), (P, B_3, I_3), (P, B_4, I_4)$ thẳng hàng (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $I_1I_2I_3I_4I_5$ là ảnh của $B_1B_2B_3B_4B_5$ qua phép vị tự tâm P tỉ số $\frac{PI_1}{PB_1}$,
 kết hợp tính chất 3 suy ra đpcm. $\square$

4. LỜI KẾT

Bài toán trên không dừng lại ở đây. Nếu bạn đọc tiếp tục suy nghĩ có thể phát hiện ra nhiều tính chất mới, chẳng hạn P, Q nằm trên đường nối tâm của hai đường tròn $(O_1O_2O_3O_4O_5)$ và $(X_1X_2X_3X_4X_5)$; các giao điểm thứ hai của $(I_1), (I_2), (I_3), (I_4), (I_5)$ cùng thuộc một đường tròn, ... Trong khuôn khổ có hạn, bài viết xin được dừng lại ở đây. Lời khuyên tác giả dành cho các bạn là khi đứng trước một bài toán mới, hãy đào sâu suy nghĩ và khai thác tính chất liên quan, đó mới thực sự là người học toán!



Cuộc thi VUI HÈ 2011

ĐỢT 2

Toán học và Tuổi trẻ số 407, tháng 5 năm 2011 đã giới thiệu ba bài đố vui Đợt 1. Lần này chúng tôi xin giới thiệu tiếp ba bài đố vui mới. Bạn hãy gửi lời giải ba bài này về Tòa soạn trước ngày 31.8.2011 (theo dấu Bưu điện). Mong các bạn trẻ yêu toán hưởng ứng.

Bài 4. XÂY CĂN NHÀ KHO

Tại vị trí của một khu đất có sẵn một bức tường cũ dài 12m, người ta dự định xây một căn nhà kho nền hình chữ nhật với diện tích 112m^2 . Biết rằng giá để sửa bức tường cũ dài 1m bằng 25% giá xây 1m dài mới; giá công đập dỡ bức tường cũ dài 1m và tận dụng vật liệu đã gỡ ra để xây 1m dài mới bằng 50% của giá công xây dựng 1m dài mới với vật liệu mới. Hỏi trong điều kiện như vậy, nên tận dụng bức tường cũ thế nào để kinh phí xây dựng nhà kho là ít nhất?

GIA LINH

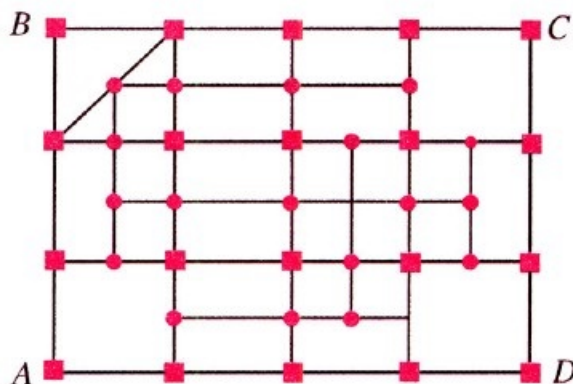
Bài 5. BẢNG SỐ HÌNH CHỮ NHẬT

Hãy điền 15 số từ 1 đến 15 vào đủ các ô vuông của hình chữ nhật kích thước 3×5 ô vuông sao cho tổng năm số theo mỗi hàng đều bằng nhau và tổng ba số theo mỗi cột đều bằng nhau. Bạn có mấy cách điền số nếu không kể việc đổi chỗ các hàng với nhau hoặc các cột với nhau.

VÂN KHANH

Bài 6. CHIM ĂN QUẢ

Một khu vườn hình chữ nhật $ABCD$ kích thước 3×4 ô vuông được đóng 20 cột (dấu ■ ở hình vẽ) tại đỉnh các ô vuông và các cột được nối với nhau bởi các dây thép nhỏ để cây có thể leo lên đỉnh cột và ra 19 quả (dấu • ở hình vẽ). Mùa hè đến, quả chín. Một con chim đậu ở đỉnh A và mỗi lần bay từ đỉnh cột này sang đỉnh cột khác thì ăn được một quả chín nằm ở điểm chính giữa của đường bay đó. Chim không đậu hai lần ở một đỉnh cột nào. Bạn hãy vẽ đường bay của chim để sau khi bay chim ăn hết các quả trên cây và dừng lại ở đỉnh C .



PHI PHI



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 408 (6.2011)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School

Nguyễn Phước – Chứng minh định lý Pythagore bằng cách ghép hình.

3 Lời giải Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước, năm học 2010 – 2011.

4 Đề thi vào lớp 10 trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011.

5 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation

Võ Hữu Hà – Khảo sát hàm số để chứng minh bất đẳng thức nhiều biến.

8 Thử sức trước kì thi – Đề số 9.

9 Hướng dẫn giải Đề số 8.

11 Hướng dẫn ôn tập môn Vật lý thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2011.

13 Sai lầm ở đâu – Where's Mistake?

14 Kì thi chọn học sinh vào Đội tuyển Quốc gia dự thi IMO 2011.

16 Đề ra kì này – Problems in This Issue T1/408 ..., T12/408, L1/408, L2/408.

18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems Giải các bài của số 403.

28 Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics Nguyễn Văn Linh – Hình sao Morley. (Tiếp theo kì trước).

31 Cuộc thi Vui hè 2011 - Đợt 2.

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH

Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THU

Mỹ thuật : MINH THƠ

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



TRƯỜNG CAO ĐẲNG SƯ PHẠM THỪA THIÊN HUẾ

cái nôi đào tạo nguồn nhân lực ở miền Trung



NGUYỄN HOÀNG NGỌC QUÝ
Hiệu trưởng nhà trường



Ban lãnh đạo nhà trường

Ra đời ngay sau ngày miền Nam hoàn toàn giải phóng, Trường Cao đẳng Sư phạm Thừa Thiên Huế từ một trường sư phạm với nhiệm vụ đào tạo lại giáo viên cấp 2 (THCS) cho các vùng mới giải phóng thuộc Quảng Trị và Thừa Thiên (giai đoạn 1976-1979), trở thành một trường Cao đẳng Sư phạm đào tạo giáo viên cho cả ba tỉnh Quảng Bình, Quảng Trị, Thừa Thiên (giai đoạn 1979- 1989), hiện nay là trường đào tạo đa ngành với nhiệm vụ trọng tâm là đào tạo và bồi dưỡng đội ngũ giáo viên, cán bộ quản lý cho các cấp học từ Mầm non, Tiểu học, Trung học cơ sở và đào tạo nguồn nhân lực cho tỉnh Thừa Thiên Huế, các tỉnh bạn trong khu vực miền Trung - Tây Nguyên và các tỉnh Nam Lào.

35 năm xây dựng và phát triển (từ 02/7/1976 đến 02/7/2011), nhà trường đã đào tạo hàng chục ngàn giáo viên, cán bộ quản lý giáo dục và nguồn nhân lực phục vụ sự nghiệp xây dựng - phát triển kinh tế - xã hội của tỉnh Thừa Thiên Huế và khu vực miền Trung - Tây nguyên. Nhiều thế hệ học sinh của trường đã trưởng thành và có những đóng góp lớn cho sự nghiệp phát triển giáo dục nói riêng và sự nghiệp phát triển kinh tế - xã hội nói chung của địa phương và đất nước. Chỉ tính riêng về đội ngũ cựu sinh viên của trường trong ngành toán đã có nhiều Nhà giáo Ưu tú như: NGUYỄN Nguyễn Hữu Bì, NGUYỄN Nguyễn Phước, NGUYỄN Nguyễn Khoa Từ, v.v... đều là những nhà quản lý, giáo viên giỏi, đào tạo nhiều thế hệ học sinh chuyên toán ở tỉnh Thừa Thiên Huế; nhiều cựu sinh viên đã tiếp tục học tập phần đầu để trở thành những cán bộ lãnh đạo như: Trần Thanh Bình, hiện là Phó Bí thư Thường trực Tỉnh ủy Thừa Thiên Huế; Lê Bá Trình, hiện là Phó Chủ tịch Ủy ban Trung ương Mặt trận Tổ quốc Việt Nam, v.v...

Nhà trường có bề dày về truyền thống dạy và học, chất lượng đào tạo sinh viên ra trường được sự tín nhiệm cao của xã hội. Hiện nay Cao đẳng Sư phạm Thừa Thiên Huế là trường đào tạo đa ngành gồm: 34 ngành đào tạo Cử nhân Cao đẳng, 10 ngành đào tạo TCCN thuộc các lĩnh

vực sư phạm, kinh tế, nghệ thuật, công nghệ, ngoại ngữ, khoa học xã hội, quản trị nghiệp vụ... Đội ngũ giảng viên của Trường có chuyên môn, có kinh nghiệm giảng dạy và không ngừng được bổ sung đào tạo trẻ hóa, có trình độ quản lý tốt...

Trường đã đón nhận nhiều Huân chương, Huy chương, Bằng khen, Giấy khen, Danh hiệu, Thương hiệu cao quý.

- Huân chương Lao động Hạng Ba năm 1996,
- Huân chương Lao động Hạng Nhì năm 2001
- Huân chương Lao động Hạng Nhất năm 2011
- 2 Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ năm 2005 và 2009.
- Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo - Giải Nhất về "Đổi mới mục tiêu, phương thức, đa dạng hoá các loại hình đào tạo" và nhiều bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bộ trưởng - Chủ nhiệm UBTDĐT Trung ương, Chủ tịch Tổng Liên đoàn Lao động Việt Nam, Bí thư thứ nhất Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh... về các thành tích trong đổi mới phương thức đào tạo, hợp tác Quốc tế, hoạt động văn hóa văn nghệ, thể dục thể thao, hoạt động công đoàn, phong trào thanh niên và công tác Đoàn...
- Nhiều Cờ thi đua xuất sắc, Bằng khen của Chủ tịch Ủy ban Nhân dân tỉnh về thành tích hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ công tác hằng năm, thành tích trong đào tạo, hợp tác Quốc tế, thể dục thể thao, v.v...
- Giấy chứng nhận Thương hiệu Việt ưu tú, Cúp vàng thương hiệu Việt hội nhập WTO - 2007. Giấy chứng nhận Top 500 Thương hiệu hàng đầu Việt Nam - 2008. Cúp vàng "Vì sự phát triển cộng đồng" - 2009. Chứng chỉ áp dụng hệ thống quản lý chất lượng ISO 9001:2008 năm 2009. Cúp Vàng ISO - 2010. Cúp Vàng "Văn hóa Đồng sơn" - 2010.

Với những thành tích giáo dục của nhà trường trong những năm qua, trường Cao đẳng Sư phạm Thừa Thiên Huế xứng đáng là cái nôi đào tạo nguồn nhân lực ở miền Trung.