https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Nghia

# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

4 2011 Số 406

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 48
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
*Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn* *Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre*

https://tieulun.hopto.org

# LỰA CHỌN CÁCH GIẢI HỢP LÍ CHO PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

VŨ HỮU BÌNH
*(Hà Nội)*

*Nghiệm nguyên là một đề tài lí thú của Số học. Nếu chú ý đến đặc điểm của mỗi phương trình nghiệm nguyên khi giải nó thì ta sẽ lựa chọn được những cách giải hết sức đơn giản. Trong khuôn khổ bài viết này, xin nêu một số thí dụ minh họa.*

## ❶ Xét đặc điểm của các ẩn và biểu thức chứa ẩn

★ **Thí dụ 1.** *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $x^2 + 12x = y^2$.

***Một cách giải.*** PT đã cho tương đương với

$$(x+6)^2 - y^2 = 36$$
$$\Leftrightarrow (x+6+y)(x+6-y) = 36.$$

Suy ra $(x + 6 + y)$ và $(x + 6 - y)$ là ước của 36. Mà số 36 có tất cả 18 ước nên ta phải xét 18 trường hợp ứng với $x+6+y \in \{\pm1 ; \pm2 ; \pm3 ; \pm4 ; \pm6 ; \pm9 ; \pm12 ; \pm18 ; \pm36\}$. Từ đó, thu được sáu nghiệm $(x;y)$ là (0 ; 0), (–12 ; 0), (–16 ; 8), (–16 ; – 8), (4 ; 8), (4 ; –8). ❐

*Nhận xét* 1. Vì $y$ chỉ có số mũ chẵn trong phương trình đã cho nên có thể giả sử $y \geq 0$. Khi đó $x+6+y \geq x+6-y$, do vậy ta loại được tám trường hợp. Sau khi thu được bốn nghiệm $(x;y)$ là (–16 ; 8), (0 ; 0), (–12 ; 0), (4 ; 8), ta bổ sung thêm hai nghiệm ( –16 ; –8), (4 ; –8).

*Nhận xét* 2. Vì $(x+6+y)-(x+6-y) = 2y$ nên $(x + 6 + y)$ và $(x + 6 - y)$ cùng tính chẵn lẻ. Do vậy, ta chỉ cần xét bốn trường hợp

| $x+6+y$ | $-2$ | $6$ | $-6$ | $18$ |
|---|---|---|---|---|
| $x+6-y$ | $-18$ | $6$ | $-6$ | $2$ |

*Nhận xét* 3. PT đã cho có dạng $x(x + 12) = y^2$ nên xét hai khả năng sau

Nếu $y = 0$ thì ta được $x = 0$ hoặc $x = -12$.

Nếu $y > 0$ thì $x+6+y > x+6-y$, nên chỉ xảy ra

$$\begin{cases} x+6+y=-2 \\ x+6-y=-18 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+6+y=18 \\ x+6-y=2. \end{cases}$$

★ **Thí dụ 2.** *Tìm số nguyên $x$ để $x^2 - 4x + 7$ là một số chính phương.*

***Một cách giải.*** Đặt $x^2 - 4x + 7 = y^2$, $(y \in \mathbb{N})$.

Viết PT trên dưới dạng sau

$$(x-2)^2 + 3 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - (x-2)^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow (y+x-2)(y-x+2) = 3.$$

Suy ra $(y + x - 2)$ và $(y - x + 2)$ là ước của 3 nên có bốn khả năng

| $y+x-2$ | $1$ | $-1$ | $3$ | $-3$ |
|---|---|---|---|---|
| $y-x+2$ | $3$ | $-3$ | $1$ | $-1$ |

Từ đó tìm được $x = 1$ và $x = 3$. ❐

*Nhận xét.* Trong cách giải trên ta phải xét bốn trường hợp vì đã không so sánh $(y + x - 2)$ với $(y - x + 2)$.

Nếu tận dụng giả thiết $y \in \mathbb{N}$ và thay cách viết $y^2 - (x - 2)^2 = 3$ bởi $(x - 2)^2 - y^2 = -3$ thì ta có $(x - 2 + y)(x - 2 - y) = -3$.

Mặt khác lại có $x - 2 + y \geq x - 2 - y$ nên chỉ cần xét hai khả năng

$$\begin{cases} x-2+y=3 \\ x-2-y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-2+y=-1 \\ x-2-y=-3. \end{cases}$$

NGODUCTHODUONGMINHCHAU
DD:0986885389



https://tieulun.hopto.org

## ❷ Lựa chọn $x$ hay $y$ làm ẩn ?

★**Thí dụ 3.** *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $x^2y^2 - xy = x^2 + 2y^2$.

***Phân tích.*** Viết PT đã cho dưới dạng

$$(y^2-1)x^2 - yx - 2y^2 = 0 \qquad (1)$$

• Với $y = 1$ thì $x = -2$.

• Với $y = -1$ thì $x = 2$.

• Xét $y \neq \pm 1$, khi đó PT (1) là phương trình bậc hai ẩn $x$, có $\Delta = y^2(8y^2-7)$. ĐK cần để PT (1) có nghiệm nguyên là $\Delta$ phải là số chính phương.

Với $y = 0$ thì $x = 0$.

Với $y \neq 0$ thì $8y^2 - 7$ phải là số chính phương. Sử dụng điều kiện này ta không chặn được $y$. Vì vậy nên theo hướng khác.

***Lời giải.*** Viết PT đã cho dưới dạng

$$(x^2-2)y^2 - xy - x^2 = 0 \qquad (2)$$

Vì $x$ nguyên nên $x^2 - 2 \neq 0$, do đó PT (2) là PT bậc hai với ẩn $y$, có $\Delta = x^2(4x^2-7)$.

Điều kiện cần để PT (2) có nghiệm nguyên là $\Delta$ phải là số chính phương.

• Với $x = 0$ thì $y = 0$.

• Với $x \neq 0$ thì $4x^2 - 7$ phải là số chính phương. Đặt $4x^2 - 7 = m^2, (m \in \mathbb{N})$, ta có

$$4x^2 - 7 = m^2 \Leftrightarrow (2x-m)(2x+m) = 7.$$

Từ đó tìm được $x = -2$ hoặc $x = 2$. Thay vào PT (2) để tìm $y$. Thu được nghiệm nguyên $(x\,;y)$ của PT đã cho là $(0\,;0)$, $(2\,;-1)$, $(2\,;2)$, $(-2\,;1)$, $(-2\,;-2)$. ❐

## ❸ Sử dụng ẩn phụ như thế nào?

★**Thí dụ 4.** *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$\sqrt{9x^2+16x+96} = 3x - 16y - 24 \qquad (1)$$

***Một cách giải.*** Đặt $3x - 16y - 24 = m$ với $m \in \mathbb{N}$. Khi đó PT (1) trở thành

$$\begin{aligned} &9x^2+16x+96 = m^2 \\ \Leftrightarrow\ &81x^2+9.16x+864 = 9m^2 \\ \Leftrightarrow\ &(9x+8)^2 - (3m)^2 = -800 \\ \Leftrightarrow\ &(9x+8-3m)(9x+8+3m) = -800 \qquad (2) \end{aligned}$$

Do $(9x+8+3m)-(9x+8-3m) = 6m$ (chia hết cho 2) và $9x + 8 + 3m \geq 9x + 8 - 3m$; nên xảy ra 12 trường hợp của cặp số $(9x + 8 + 3m\,;\ 9x + 8 - 3m)$ là $(400\,;-2)$, $(2\,;-400)$, $(200\,;-4)$, $(4\,;-200)$, $(100\,;-8)$, $(8\,;-100)$, $(80\,;-10)$, $(10\,;-80)$, $(50\,;-16)$, $(16\,;-50)$, $(40\,;-20)$, $(20\,;-40)$. Từ đó tìm được sáu cặp số nguyên $(x\,;\ m)$, tương ứng ta tìm được hai nghiệm nguyên $(x\,;\ y)$ của PT (1) là $(-23;\ -10)$ và $(1\,;-2)$. ❐

***Nhận xét.*** Sau khi được PT (2), ta không tìm $x$ và $m$ mà thay trở lại $m$ bởi $3x - 16y - 24$, thu được

$$(9x-24y-32)(3y+5) = -25.$$

Suy ra $(3y + 5)$ là ước của 25, mà $(3y + 5)$ chia cho 3 dư 2 nên chỉ có thể xảy ra ba khả năng

| $3y + 5$ | $-1$ | $5$ | $-25$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-2$ | $0$ | $-10$ |
| $x$ | $1$ | $3$ | $-23$ |

Loại $x = 3$, $y = 0$, vì khi đó $m < 0$.

**Kết luận.** Các thí dụ và cách giải nêu trên cho thấy mỗi phương trình nghiệm nguyên với điều kiện riêng của nó đòi hỏi một cách giải phù hợp. Điều đó có tác dụng rèn luyện tư duy toán học mềm dẻo, linh hoạt, sáng tạo và do vậy mà các bài toán về phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các kì thi chọn học sinh giỏi Toán cấp Trung học.

Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm kinh nghiệm giải phương trình nghiệm nguyên trong cuốn "***Phương trình nghiệm nguyên và kinh nghiệm giải***" của tác giả do Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ bắt đầu phát hành.

*Cuối cùng mời bạn đọc tự luyện tập thông qua các bài tập sau đây.*

**1.** Tìm các số nguyên $x$ để $x^2 - 2x - 11$ là một số chính phương.

**2.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x + y + 3xy = (x + y)^2.$$

**3.** Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 2^y.$$

**4.** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$2+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}} = y.$$



https://tieulun.hopto.org

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10
# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI
## NĂM HỌC 2010 - 2011

*(Đề thi đã đăng trên THTT số 405, tháng 3 năm 2011)*

**Câu 1.** a) *Đáp số.* $M = -12$.

b) ĐK $-4 < x < 4$. PT đã cho trở thành

$$x^3 = \left(\sqrt{16-x^2}\right)^3 \Leftrightarrow x = \sqrt{16-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 16 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \text{ (thoả mãn ĐK).}$$

c) ĐK $x \ne 1$ ; $y \ne -1$.

Đặt $a = \dfrac{1}{x-1}$; $b = \dfrac{1}{y+1}$; $a, b \ne 0$.

HPT đã cho trở thành

$$\begin{cases} 2a + b = 7 \\ 5a - 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $(x\,;y)$ là $\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{2}{3}\right)$.

**Câu 2.** a) Đặt

$$A = n^3 - n^2 - 7n + 10 = (n-2)\left(n^2 + n - 5\right).$$

Vậy để $A$ là số nguyên tố thì $n-2$ hoặc $n^2+n-5$ phải là ước của 1. Từ đó, tìm được $n = 1$ và $n = 3$.

b) Ta có

$$2010^x = 2009^y + 2008^z > 1, \forall x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Suy ra $x \ge 1$. Khi đó $2010^x$ là số chẵn. Mà $2009^y$ $(\forall y \in \mathbb{N})$ là số lẻ nên $2008^z$ phải là số lẻ, suy ra $z = 0$. Do đó

$$2010^x = 2009^y + 1 \qquad (*)$$

Vì 2009 chia cho 4 dư 1 nên $2010^x = 2009^y + 1$ chia cho 4 dư 2. Lại có $2010 = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2010^x = 4m + 2^x$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Với $x \ge 2$ thì $2010^x = 4m + 2^x \vdots 4$. Do vậy $x = 1$, thay vào PT(*), ta có $2009^y = 2009 \Leftrightarrow y = 1$.

*Đáp số.* $(x\,;y\,;z) = (1\,;1\,;0)$.

**Câu 3.** a) $\Delta = (m-2)^2 \ge 0$. Chứng tỏ PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của $m$.

b) Ta có $A = \dfrac{4x_1x_2 + 6}{(x_1 + x_2)^2 + 2}$. Theo hệ thức Viète, có $x_1 + x_2 = m$ ; $x_1x_2 = m - 1$. Do đó

$$A = \frac{4m+2}{m^2+2} = \frac{(m+2)^2}{m^2+2} - 1 \ge -1.$$

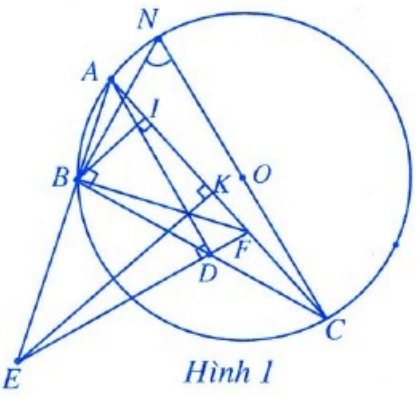
Vậy giá trị nhỏ nhất của $A$ là $-1$ đạt được khi $m = -2$.

c) Để $A$ là số nguyên điều kiện cần là $m^2 + 2 \le 4m + 2 \Leftrightarrow m^2 - 4m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 4$.

Do $m$ là số nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Từ đó tìm được $m = 1$; $m = 4$.

**Câu 4.** (h. 1) a) Hạ $BI \perp AC, I \in AC$. Tam giác vuông $AIB$ có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $AI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$, $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CI = \dfrac{5a}{2}$. Từ đó $BC = \sqrt{BI^2 + IC^2}$ $= a\sqrt{7}$. Vẽ đường kính $CN$ của đường tròn $(O)$ ngoại tiếp tam giác $ABC$. Khi đó tam giác $BCN$ vuông tại $B$ có $\widehat{BNC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ và $BC$ $= a\sqrt{7}$. Suy ra $CN = \dfrac{2a\sqrt{21}}{3}$. Vậy độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$.




*Hình 1*

b) Ta có $\widehat{BDF} = \widehat{ADB} + \widehat{ADF} = 120^\circ$. Do đó $\widehat{BDF} + \widehat{BAF} = 180^\circ$ nên tứ giác $ABDF$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{ADF} = \widehat{ABF} = 90^\circ$, hay $FB$ là đường cao của tam giác $AEF$. Vậy $AD$, $EK$, $FB$ là ba đường cao của tam giác $AEF$ nên chúng đồng quy.



https://tieulun.hopto.org

# Đề thi vào lớp 10

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH

## NĂM HỌC 2010 - 2011

*(Thời gian làm bài: 150 phút)*

**Câu 1.** (2 *điểm*) Giải phương trình

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\frac{x+8}{5}.$$

**Câu 2.** (2 *điểm*) Tìm tất cả các giá trị thực của $a$ để phương trình

$$2x^2-\left(4a+\frac{11}{2}\right)x+4a^2+7=0$$

có nghiệm nguyên.

**Câu 3.** (2 *điểm*) Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3

$$a;\ a+k;\ a+2k.$$

Chứng minh rằng $k$ chia hết cho 6.

**Câu 4.** (2,5 *điểm*) Từ điểm $P$ nằm ngoài đường tròn tâm $O$ bán kính $R$, kẻ hai tiếp tuyến $PA$, $PB$ tới đường tròn. Gọi $H$ là chân đường vuông góc kẻ từ $A$ tới đường kính $BC$.

a) Chứng minh rằng $PC$ cắt $AH$ tại trung điểm $E$ của $AH$.

b) Giả sử $PO = d$. Tính $AH$ theo $R$ và $d$.

**Câu 5.** (1,5 *điểm*)

Cho $a$, $b$, $c$ là các số dương và $a+b+c\le 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9.$$

BÙI VĂN CHI

*(GV THCS Lê Lợi, Quy Nhơn, Bình Định)*

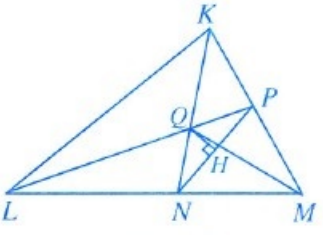
sưu tầm và giới thiệu

---

**Câu 5.** a) (h. 2.)

Tứ giác $MNQP$ nội tiếp nên

$\widehat{NQP}=180^\circ-\widehat{PMN}$ (1)




*Hình 2*

Lại có $\widehat{NQP}=\widehat{KQL}$

$$=180^\circ-\frac{\widehat{LKM}+\widehat{KLM}}{2}$$

$$=180^\circ-\frac{180^\circ-\widehat{PMN}}{2}=\frac{180^\circ+\widehat{PMN}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

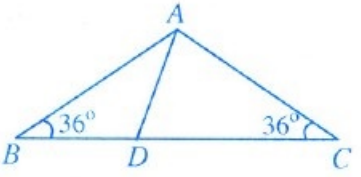
$$180^\circ-\widehat{PMN}=\frac{180^\circ+\widehat{PMN}}{2}.$$

Vậy $\widehat{PMN}=60^\circ \Rightarrow \widehat{PQN}=120^\circ$.

Từ giả thiết suy ra $MQ$ là phân giác trong tam giác $KLM$, do đó $QP=QN$, hay tam giác $PQN$ cân tại $Q$, suy ra $\widehat{QPN}=\widehat{QNP}=30^\circ$. Kẻ $QH\perp PN$ ta có $HP=HN=\frac{PN}{2}=1$. Trong tam giác vuông $PQH$ có

$$PQ=NQ=\frac{PH}{\cos 30^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

b) (h. 3) Tam giác $ABC$ có góc $A$ lớn nhất nên $BC > AB$. Trên cạnh $BC$ lấy điểm $D$ sao cho $CD = AC = AB$. Suy ra tam giác $ACD$ cân tại $C$ nên




*Hình 3*

$\widehat{CAD}=\widehat{CDA}=72^\circ \Rightarrow \widehat{BAD}=36^\circ$. Do vậy $\Delta ABC \backsim \Delta DBA$ (g.g) nên

$$\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BA}=\frac{BD+DC}{BA}=\frac{BD}{BA}+1.$$

Đặt $\frac{AB}{BD}=x\ (x>0)$, ta được phương trình

$$x=\frac{1}{x}+1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra $\frac{BC}{AC}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

TRẦN VĂN HẠNH

*(GV ĐH Phạm Văn Đồng)* sưu tầm và giới thiệu



https://tieulun.hopto.org

# Cách giải
# MỘT SỐ DẠNG TOÁN CƠ BẢN VỀ XÁC SUẤT

LÊ HỒ QUÝ
*(GV trường THPT Duy Tân, Kon Tum)*

Nhằm giúp cho các bạn học sinh chuẩn bị tốt nhất cả về kiến thức, kĩ năng, đồng thời làm quen với cấu trúc đề thi và tâm thế tham dự kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng. Bài viết này xin giới thiệu cách giải một số dạng toán cơ bản về xác suất.

## ✪DẠNG 1. Tính xác suất của một biến cố theo định nghĩa cổ điển

***Cách giải.*** Để tính xác suất $P(A)$ của một biến cố $A$ ta thực hiện các bước

• Xác định không gian mẫu $\Omega$, rồi tính số phần tử $n(\Omega)$ của $\Omega$.

• Xác định tập con mô tả biến cố $A$, rồi tính số phần tử $n(A)$ của tập hợp $A$.

• Tính $P(A)$ theo công thức $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

★**Thí dụ 1.** *Một tổ học sinh gồm 9 em, trong đó có 3 nữ được chia thành 3 nhóm đều nhau. Tính xác suất để mỗi nhóm có 1 nữ.*

***Lời giải.*** Gọi $A$ là biến cố: "Ở 3 nhóm học sinh mỗi nhóm có 1 nữ ".

• Để tìm $n(\Omega)$ ta thực hiện

Chọn ngẫu nhiên 3 trong 9 em đưa vào nhóm thứ nhất, số khả năng là $C_9^3$.

Chọn 3 trong 6 em còn lại đưa vào nhóm thứ hai, số khả năng là $C_6^3$.

Còn 3 em đưa vào nhóm thứ ba, số khả năng là $C_3^3=1$.

Vậy $n(\Omega)=C_9^3.C_6^3.1=1680$.

Vì phân ngẫu nhiên nên các biến cố sơ cấp trong không gian biến cố sơ cấp này có cùng khả năng xuất hiện.

• Để tìm $n(A)$ ta thực hiện

Phân 3 nữ vào 3 nhóm nên có 3! cách khác nhau.

Phân 6 nam vào 3 nhóm theo cách như trên, ta có $C_6^2.C_4^2.1$ cách khác nhau.

Suy ra $n(A)=3!C_6^2.C_4^2=540$.

• Do đó $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{540}{1680}=\dfrac{27}{84}$. ❐

★**Thí dụ 2.** *Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để các chữ số 1 và 2 có mặt trong số viết được.*

***Lời giải.*** Gọi $A$ là biến cố "Số viết được có mặt các chữ số 1 và 2".

• Giả sử số viết được có dạng $\overline{abcde}$ với các chữ số đôi một khác nhau thuộc tập $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có 6 cách chọn $a$ và tiếp theo có $A_6^4$ cách chọn $(b, c, d, e)$. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=6.A_6^4=2160$.

• Để tìm $n(A)$, ta xét hai trường hợp sau

*Trường hợp 1.* $\overline{abcde}$ không có mặt chữ số 0 (có mặt các chữ số 1 và 2): Có $A_5^2$ cách sắp thứ tự hai chữ số 1 và 2 vào 2 vị trí trong 5 vị trí; sau đó có $A_4^3$ cách xếp thứ tự ba trong bốn chữ số 3, 4, 5, 6 vào 3 vị trí còn lại. Vậy trường hợp này có $A_5^2.A_4^3=480$ khả năng.

*Trường hợp 2.* $\overline{abcde}$ có mặt các chữ số 0, 1, 2: Có 4 cách chọn vị trí để đặt chữ số 0; tiếp theo có $A_4^2$ cách chọn vị trí để đặt hai chữ số 1 và 2; cuối cùng có $A_4^2$ cách chọn hai trong bốn chữ số 3, 4, 5, 6 để đặt có thứ tự vào 2 vị trí còn lại. Vậy trường hợp này có $4.A_4^2.A_4^2=576$ khả năng.

Suy ra $n(A)=480+576=1056$.

• Do đó $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1056}{2160}=\dfrac{22}{45}$. ❐



https://tieulun.hopto.org

### ✪DẠNG 2. Tính xác suất bằng quy tắc cộng

***Cách giải.*** Sử dụng kĩ thuật đếm và các công thức sau để tính xác suất của biến cố đối, biến cố hợp

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, nếu $A \cap B = \varnothing$.

**★Thí dụ 3.** *Một hộp đựng 8 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để*

*a) Lấy được 3 viên bi cùng màu.*

*b) Lấy được 3 viên bi khác màu.*

*c) Lấy được ít nhất 2 viên bi xanh.*

***Lời giải.*** a) Gọi $A$ là biến cố "Lấy được 3 viên bi xanh", $B$ là biến cố "Lấy được 3 viên bi đỏ" và $H$ là biến cố "Lấy được 3 viên bi cùng màu". Ta có $H = A \cup B$, vì $A$ và $B$ xung khắc nên $P(H) = P(A) + P(B)$.

Ta có $P(A) = \dfrac{C_8^3}{C_{12}^3} = \dfrac{14}{55}$, $P(B) = \dfrac{C_4^3}{C_{12}^3} = \dfrac{1}{55}$.

Từ đó $P(H) = \dfrac{14}{55} + \dfrac{1}{55} = \dfrac{3}{11}$.

b) Biến cố "Lấy được 3 viên bi khác màu" là biến cố $\overline{H}$. Vậy

$$P(\overline{H}) = 1 - P(H) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}.$$

c) Gọi $C$ là biến cố "Lấy được 2 viên bi xanh và một viên bi đỏ", $K$ là biến cố "Lấy được ít nhất 2 viên bi xanh". Ta có $K = A \cup C$, vì $A$ và $C$ xung khắc, nên $P(K) = P(A) + P(C)$.

Ta có $P(C) = \dfrac{C_8^2.C_4^1}{C_{12}^3} = \dfrac{28}{55}$.

Suy ra $P(K) = \dfrac{14}{55} + \dfrac{28}{55} = \dfrac{42}{55}$. ❐

### ✪DẠNG 3. Tính xác suất bằng quy tắc nhân

***Cách giải.*** Để tính xác suất của biến cố giao của hai biến cố độc lập $A$ và $B$ ta dùng công thức $P(AB) = P(A).P(B)$.

**★Thí dụ 4.** *Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 quả cầu trắng, 7 quả cầu đỏ và 15 quả cầu xanh. Hộp thứ hai chứa 10 quả cầu trắng, 6 quả cầu đỏ và 9 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để hai quả cầu lấy ra có màu giống nhau.*

***Lời giải.*** Gọi $A$ là biến cố "Quả cầu được lấy từ hộp thứ nhất là màu trắng", $B$ là biến cố "Quả cầu được lấy từ hộp thứ hai là màu trắng".

Ta có $P(A) = \dfrac{3}{25}$. $P(B) = \dfrac{10}{25}$. Vậy xác suất để hai quả cầu được lấy ra đều màu trắng là

$P(AB) = P(A)P(B) = \dfrac{30}{625}$ (do $A$ và $B$ độc lập).

Tương tự, xác suất để hai quả cầu được lấy ra đều màu xanh là $\dfrac{15}{25}.\dfrac{9}{25} = \dfrac{135}{625}$, và xác suất để lấy ra hai quả cầu đều màu đỏ là $\dfrac{6}{25}.\dfrac{7}{25} = \dfrac{42}{625}$.

Theo quy tắc cộng, xác suất để lấy ra hai quả cầu cùng màu là

$$\frac{30}{625} + \frac{135}{625} + \frac{42}{625} = \frac{207}{625}.$$ ❐

### ✪DẠNG 4. Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

***Cách giải.*** Để lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc $X$ ta thực hiện các bước:

- Xác định tập hợp các giá trị có thể $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ của $X$.
- Tính các xác suất $p_i = P(X = x_i)$, trong đó $\{X = x_i\}$ là biến cố "$X$ nhận giá trị $x_i$".
- Trình bày bảng phân bố xác suất theo dạng sau

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

**★Thí dụ 5.** *Một lô hàng gồm 10 sản phẩm trong đó có 3 sản phẩm xấu. Chọn ngẫu nhiên cùng lúc 4 sản phẩm để kiểm tra. Gọi X là số sản phẩm xấu gặp phải khi kiểm tra. Lập bảng phân bố xác suất của X.*

***Lời giải.*** Dễ thấy $X$ nhận các giá trị thuộc tập $\{0, 1, 2, 3\}$. Ta có

$P(X = 0) = \dfrac{C_7^4}{C_{10}^4} = \dfrac{35}{210}$; $P(X = 1) = \dfrac{C_3^1.C_7^3}{C_{10}^4} = \dfrac{105}{210}$;

$P(X = 2) = \dfrac{C_3^2.C_7^2}{C_{10}^4} = \dfrac{63}{210}$; $P(X = 3) = \dfrac{C_3^3.C_7^1}{C_{10}^4} = \dfrac{7}{210}$.



https://tieulun.hopto.org

Vậy bảng phân bố xác suất của $X$ là

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{35}{210}$ | $\frac{105}{210}$ | $\frac{63}{210}$ | $\frac{7}{210}$ |

### ✪DẠNG 5. Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc

***Cách giải.*** Để tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc $X$ ta dùng các công thức

$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$; $V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2p_i$ hoặc

$V(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\mu^2$; $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$, trong đó $p_i=P(X=x_i)$, $\forall i=\overline{1,n}$; $\mu=E(X)$.

★**Thí dụ 6.** *Một chiếc hộp đựng 10 tấm thẻ, trong đó có bốn thẻ ghi số 1, ba thẻ ghi số 2, hai thẻ ghi số 3 và một thẻ ghi số 4. Chọn ngẫu nhiên hai tấm thẻ rồi cộng hai số trên hai tấm thẻ với nhau. Gọi X là số thu được.*

*a) Lập bảng phân bố xác suất của X.*

*b) Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.*

***Lời giải.*** a) Gọi $A_{ij}$ là biến cố "Chọn được tấm thẻ ghi số $i$ và tấm thẻ ghi số $j$ ".

Dễ thấy $X$ nhận các giá trị thuộc tập {2, 3, 4, 5, 6, 7}. Ta có

$P(X=2)=P(A_{11})=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}$;

$P(X=3)=P(A_{12})=\frac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{12}{45}$;

$P(X=4)=P(A_{13})+P(A_{22})=\frac{C_4^1C_2^1}{C_{10}^2}+\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{11}{45}$;

$P(X=5)=P(A_{14})+P(A_{23})=\frac{C_4^1C_1^1}{C_{10}^2}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{10}{45}$;

$P(X=6)=P(A_{33})+P(A_{24})=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}+\frac{C_3^1C_1^1}{C_{10}^2}=\frac{4}{45}$;

$P(X=7)=P(A_{34})=\frac{C_2^1C_1^1}{C_{10}^2}=\frac{2}{45}$.

Vậy bảng phân bố xác suất của $X$ là

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{6}{45}$ | $\frac{12}{45}$ | $\frac{11}{45}$ | $\frac{10}{45}$ | $\frac{4}{45}$ | $\frac{2}{45}$ |

b) Ta có

$E(X)=2.\frac{6}{45}+3.\frac{12}{45}+4.\frac{11}{45}+5.\frac{10}{45}+6.\frac{4}{45}+7.\frac{2}{45}=4.$

$V(X)=2^2.\frac{6}{45}+3^2.\frac{12}{45}+4^2.\frac{11}{45}+5^2.\frac{10}{45}+6^2.\frac{4}{45}+7^2.\frac{2}{45}-4^2\approx 1{,}78.$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1{,}78}\approx 1{,}33.$ ❐

## BÀI TẬP

**1.** Một hộp đựng 12 quả cầu cùng kích thước, trong đó có 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đen và 5 quả cầu trắng. Chọn ngẫu nhiên cùng lúc 4 quả cầu. Tính xác suất để trong 4 quả cầu chọn được có

a) 4 quả cầu cùng màu.

b) 2 quả cầu trắng.

c) 1 quả cầu trắng, 1 quả cầu đen.

**2.** Gieo đồng thời 5 đồng xu. Tính xác suất để

a) Được 3 mặt ngửa.

b) Có ít nhất 3 mặt ngửa.

c) Có ít nhất 1 mặt ngửa.

**3.** Hai bạn *Đào* và *Mai* học xa nhà. Xác suất để *Đào* và *Mai* về thăm nhà vào ngày chủ nhật tương ứng là 0,2 và 0,25. Tính xác suất để vào ngày chủ nhật

a) Cả hai về thăm nhà.

b) Cả hai không về thăm nhà.

c) Có đúng một người về thăm nhà.

d) Có ít nhất một người về thăm nhà.

**4.** Một hộp đề thi vấn đáp có 30 câu hỏi, trong đó có 10 câu hỏi khó. Một học sinh cần rút ngẫu nhiên 3 câu hỏi để trả lời. Gọi $X$ là số câu khó trong số 3 câu hỏi đã rút ra.

a) Lập bảng phân bố xác suất của $X$.

b) Tính xác suất để học sinh này chỉ nhận được toàn câu khó.

c) Tính xác suất để học sinh này nhận được ít nhất 2 câu khó.

d) Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của $X$.



https://tieulun.hopto.org

# Thử sức TRƯỚC KÌ THI

## ĐỀ SỐ 7

*(Thời gian làm bài : 180 phút)*

### PHẦN CHUNG

**Câu I.** (2 *điểm*)

Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(C)$ của hàm số.

2) Tìm tất cả các điểm trên trục tung để từ điểm đó kẻ được hai tiếp tuyến đến $(C)$ sao cho hai tiếp điểm tương ứng có hoành độ dương.

**Câu II.** (2 *điểm*)

1) Giải phương trình

$$2(1+\cos x)\left(\cot^2 x+1\right) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + \sin x}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3.\sqrt{5-\log_3 y} = 5-\log_5 x \\ 3.\sqrt{\log_5 x - 1} = \log_3 y - 1. \end{cases}$$

**Câu III.** (1 *điểm*)

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+e^x}$.

**Câu IV.** (1 *điểm*)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $B$. Hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SAD)$ cùng vuông góc với mặt đáy. Biết $AB = 2a$, $SA = BC = a$, $CD = 2a\sqrt{5}$.

Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SACD$.

**Câu V.** (1 *điểm*)

Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình sau có nghiệm thực

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}+\sqrt{x^2+3x+\frac{9}{4}} = m.$$

### PHẦN RIÊNG

***(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)***

#### A. Theo chương trình Chuẩn

**Câu VIa.** (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng $Oxy$, viết phương trình các đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác $ABC$ biết $C(4\ ;\ 3)$, đường phân giác trong và trung tuyến kẻ từ một đỉnh của tam giác có phương trình lần lượt là

$$x + 2y - 5 = 0 \text{ và } 4x + 13y - 10 = 0.$$

2) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(C)$ có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0.$$

Tìm điểm $A$ thuộc mặt cầu sao cho khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(P)$: $2x - 2y + z + 6 = 0$ lớn nhất.

**Câu VIIa.** (1 *điểm*)

Với các số 0, 1, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số và chia hết cho 4?

#### B. Theo chương trình Nâng cao

**Câu VIb.** (2 *điểm*)

1) Trên mặt phẳng $Oxy$ cho hai đường tròn có phương trình $(C_1): x^2 + y^2 = 1$ và

$$(C_2): x^2 + y^2 - 6x + 6y + 17 = 0.$$

Xác định phương trình các đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn trên.

2) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0\ ;\ 1\ ;\ 1), B(2\ ;\ -1\ ;\ 1), C(4\ ;\ 1\ ;\ 1)$ và mặt phẳng $(P)$ có phương trình $x + y + z - 6 = 0$.

Tìm điểm $M$ trên $(P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu VIIb** (1 *điểm*)

Trong khai triển nhị thức $(a + b)^{50}$, tìm số hạng có giá trị tuyệt đối lớn nhất, cho biết $|a| = |b|\sqrt{3}$.

NGUYỄN LƯU

*(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)*



https://tieulun.hopto.org

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 6

**Câu I.** 1) Bạn đọc tự giải.

2) Hoành độ tiếp điểm của $d: y = ax + b$ với $(C)$ là nghiệm PT $3x^2 + 6x + 9 - a = 0$. Để có hai tiếp tuyến với $(C)$ phân biệt nhau và có cùng hệ số góc $k$ thì PT $3x^2 + 6x + 9 - k = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k > 6$. Toạ độ các tiếp điểm là nghiệm của HPT

$$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 9x + 3 \\ 3x^2 + 6x + 9 - k = 0. \end{cases}$$

Từ đó lấy $y$ chia cho $3x^2 + 6x + 9 - k$ suy ra PT đường thẳng qua các tiếp điểm là $y = \dfrac{k+12}{3}x + \dfrac{k}{3}$.

*Đáp số.* $k = 6021$. ❐

**Câu II.** 1) Biến đổi PT đầu thành

$$(x^2 - 2y)(x - y) = 0,$$

kết hợp ĐK $x^2 - 2y - 1 \ge 0$, suy ra $x = y$, thay vào PT thứ hai được

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt[3]{x^3 - 14} = x - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \ge 0 \\ \sqrt[3]{x^3 - 14} \le x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \ge 0 \\ x^2 - 2x - 1 \le 0. \end{cases}$$

Do đó $x^2 - 2x - 1 = 0$. HPT có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ và $(1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$.

2) ĐK $x \ne 0$. Nếu $x < 0$ thì VT $< 2$ nên PT vô nghiệm. Nếu $x > 0$ thì xét hàm số $f(x) = 2^{3x} + 3^{\frac{2}{x}} - 17$, ta có

$$f'(x) = 3.2^{3x}\ln 2 - \frac{2}{x^2}.3^{\frac{2}{x}}.\ln 3;$$

$$f''(x) = 9.2^{3x}.\ln^2 2 + \frac{4.3^{\frac{2}{x}}\ln 3}{x^4}(x + \ln 3) > 0, \forall x > 0.$$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên miền $x > 0$, kết hợp với $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, suy ra $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0; +\infty)$. Lập bảng biến thiên của hàm $f(x)$ suy ra PT $f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm trên $(0; +\infty)$, mà $f(1) = f\left(\dfrac{2}{3}\log_2 3\right) = 0$. Vậy PT đã cho có hai nghiệm là $x = 1; x = \dfrac{2}{3}\log_2 3$. ❐

**Câu III.** Đặt $x = 2 - t$, ta có

$$I = -\int_3^{-1} \left((2-t)^3 - 3(2-t)^2 + 2\right)^{2011} dt$$

$$= -\int_{-1}^{3} \left(t^3 - 3t^2 + 2\right)^{2011} dt = -I. \text{ Vậy } I = 0. \ ❐$$

**Câu IV.** Kẻ $SH \perp BC$, gọi $M, N$ lần lượt là hình chiếu của $H$ trên $AC, AB$ thì $\widehat{SMH} = \widehat{SNH} = 60^\circ$ và $HM = HN$. Từ đó $HM = \dfrac{(3 - \sqrt{3})a}{4}$;

$SH = \dfrac{(\sqrt{3} - 1)a}{4}$; $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{8}$. Vậy

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{(3 - \sqrt{3})a^3}{32}$. ❐

**Câu V.** Thay $x + y + 1 = z$ vào $P$, biến đổi được $P = \dfrac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3}$. Vì

$(x + y)^2 \ge 4xy$ nên $P \le \dfrac{1}{4}\dfrac{x^2y^2}{(x+1)^3(y+1)^3}$.

Lại có $x + 1 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} + 1 \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{4}} \Rightarrow (x+1)^3 \ge \dfrac{27}{4}x^2$,

tương tự $(y+1)^3 \ge \dfrac{27}{4}y^2$. Từ đó $P \le \left(\dfrac{2}{27}\right)^2$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 2; z = 5$.

Vậy $\max P = \left(\dfrac{2}{27}\right)^2$. ❐

**Câu VIa.** 1) Đường cao $AA'$ của tam giác $ABC$ là đường phân giác trong (hoặc ngoài) góc $\widehat{B'A'C'}$ của tam giác $A'B'C'$, nên đường thẳng chứa cạnh $BC$ là phân giác ngoài (hoặc trong) của góc $\widehat{B'A'C'}$.

PT $A'B'$: $2x + 3y - 5 = 0$;

$A'C'$: $3x - y - 2 = 0$.

PT $BC$: $\left(2\sqrt{10} - 3\sqrt{13}\right)x + \left(3\sqrt{10} + \sqrt{13}\right)y +$

$+\left(2\sqrt{13} - 5\sqrt{10}\right) = 0.$

hoặc $BC$: $\left(2\sqrt{10} + 3\sqrt{13}\right)x + \left(3\sqrt{10} - \sqrt{13}\right)y -$

$-\left(2\sqrt{13} + 5\sqrt{10}\right) = 0.$

2) PT mp$(ABC)$: $x + 29y + 9z + 4 = 0$ và mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1; 2; 0)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$. Ta thấy mp$(ABC)$ cắt mặt cầu $(S)$. Không tìm được giá trị nhỏ nhất của $V_{MABC}$. $V_{MABC}$ lớn nhất khi $M$ là giao điểm của mặt cầu $(S)$ với đường thẳng qua $I$ và vuông góc với mp$(ABC)$.

*(Xem tiếp trang 28)*



https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

# HƯỚNG DẪN ÔN TẬP MÔN VẬT LÍ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2011

## Chủ đề : DAO ĐỘNG VÀ SÓNG ĐIỆN TỪ - SÓNG ÁNH SÁNG

NGUYỄN VĂN THUẬN
*(GV trường ĐHSP Hà Nội)*

Trong số báo này, chúng tôi đề cập tới hai chủ đề: ***Dao động và sóng điện từ***, và ***Sóng ánh sáng***. Theo cấu trúc đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng năm 2011, môn Vật lí, phần chung của hai chủ đề này gồm 9 câu; trong đó chủ đề Dao động và sóng điện từ có 4 câu, còn chủ đề Sóng ánh sáng có 5 câu. Để làm tốt các câu trắc nghiệm trong hai chủ đề này, thí sinh cần nắm vững những nội dung kiến thức sau đây: *Dao động điện từ, mạch dao động LC; Điện từ trường, sóng điện từ; Truyền thông (thông tin liên lạc) bằng sóng điện từ; Tán sắc ánh sáng; nhiễu xạ, giao thoa ánh sáng; Bước sóng và màu sắc ánh sáng; Các loại quang phổ; Tia hồng ngoại, tia tử ngoại, tia X; Thang sóng điện từ.*

Dưới đây, chúng tôi đưa ra một số câu trắc nghiệm về chủ đề này, đồng thời hướng dẫn cách lựa chọn phương án đúng.

**CÂU 1.** *Phát biểu nào sau đây là **sai** khi nói về năng lượng dao động điện từ riêng trong mạch dao động điện từ LC không có điện trở thuần?*

**A.** *Năng lượng từ trường cực đại bằng năng lượng điện từ của mạch dao động.*

**B.** *Khi năng lượng từ trường giảm thì năng lượng điện trường tăng.*

**C.** *Năng lượng điện từ của mạch dao động bằng tổng năng lượng điện trường tập trung ở tụ điện và năng lượng từ trường tập trung ở cuộn cảm.*

**D.** *Năng lượng điện trường và năng lượng từ trường biến thiên điều hòa với tần số bằng một nửa tần số của cường độ dòng điện trong mạch.*

***Hướng dẫn.*** Năng lượng điện từ $W = W_d + W_t$, $W_d = \dfrac{q^2}{2C}$, $W_t = \dfrac{Li^2}{2}$. Ta có $q = Q_0\sin(\omega t + \varphi)$, $i = \dfrac{dq}{dt} = I_0\cos(\omega t + \varphi)$. Do đó $W = \dfrac{Q_0^2}{2C} = \dfrac{LI_0^2}{2}$.

Từ đây dễ dàng thấy rằng các phương án **A**, **B**, **C** đúng, còn phương án **D** sai.

Chọn **D**. ❐

**CÂU 2.** *Một dải sóng điện từ trong chân không có tần số từ $4{,}0.10^{14}$Hz đến $7{,}5.10^{14}$Hz. Biết vận tốc ánh sáng trong chân không $c = 3.10^8$m/s. Dải sóng trên thuộc vùng nào trong thang sóng điện từ ?*

**A.** *Vùng tia tử ngoại.*

**B.** *Vùng ánh sáng nhìn thấy.*

**C.** *Vùng tia Rơn-ghen.*

**D.** *Vùng tia hồng ngoại.*

***Hướng dẫn.*** Ta có $f_1 = 4.10^{14}$Hz ứng với

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3.10^8}{4.10^{14}} = 0{,}75.10^{-6}\text{m};$$ ánh sáng đỏ.

Tương tự $f_2 = 7{,}5.10^{14}$Hz ứng với

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{3.10^8}{7{,}5.10^{14}} = 0{,}4.10^{-6}\text{m};$$ ánh sáng tím.

Vậy $0{,}4.10^{-6}\text{m} \le \lambda \le 0{,}75.10^{-6}\text{m}$; vùng ánh sáng nhìn thấy.

Chọn **B**. ❐

**CÂU 3.** *Phát biểu nào sau đây là **đúng** khi nói về quang phổ ?*

**A.** *Quang phổ hấp thụ là quang phổ của ánh sáng do một vật rắn phát ra khi vật đó được nung nóng.*

**B.** *Để thu được quang phổ hấp thụ thì nhiệt độ của đám khí hay hơi hấp thụ phải cao hơn nhiệt độ của nguồn sáng phát ra quang phổ liên tục.*

**C.** *Quang phổ liên tục của nguồn sáng nào thì phụ thuộc thành phần cấu tạo của nguồn sáng ấy.*

**D.** *Mỗi nguyên tố hóa học ở trạng thái khí hay hơi nóng sáng dưới áp suất thấp cho một quang phổ vạch riêng, đặc trưng cho nguyên tố đó.*

***Hướng dẫn.*** Khi vật được nung nóng sẽ phát ra quang phổ vạch phát xạ; **A** sai. Để thu được quang phổ hấp thụ thì nhiệt độ của đám khí hay hơi hấp thụ phải thấp hơn nhiệt độ của nguồn sáng phát ra quang phổ liên tục; **B** sai. Quang phổ liên tục không phụ thuộc thành phần cấu tạo của nguồn sáng phát ra nó; **C** sai. **D** đúng.

Chọn **D**. ❐

**CÂU 4.** *Trong một thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng với ánh sáng đơn sắc có bước*



https://tieulun.hopto.org

*sóng $\lambda_1 = 420$nm thì thu được hệ vân giao thoa trên màn quan sát có khoảng vân $i_1 = 0{,}24$mm. Khi thay ánh sáng trên bằng ánh sáng đơn sắc có bước sóng $\lambda_2 = 630$nm thì thu được hệ vân giao thoa trên màn quan sát có khoảng vân*

**A.** 0,36mm. **B.** 0,30mm.

**C.** 0,45mm. **D.** 0,18mm.

***Hướng dẫn.*** Từ công thức $i = \dfrac{\lambda D}{a}$, suy ra

$\dfrac{D}{a} = \dfrac{i_1}{\lambda_1} = \dfrac{i_2}{\lambda_2}$, hay $i_2 = i_1\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0{,}24.\dfrac{630}{420} = 0{,}36$(mm).

Chọn **A.** ❐

**CÂU 5.** *Ánh sáng đơn sắc có tần số $5.10^{14}$Hz truyền trong chân không với bước sóng 600nm. Chiết suất tuyệt đối của một môi trường trong suốt ứng với ánh sáng này là 1,52. Tần số của ánh sáng trên khi truyền trong môi trường trong suốt này*

**A.** *Lớn hơn $5.10^{14}$Hz, còn bước sóng nhỏ hơn 600nm.*

**B.** *Vẫn bằng $5.10^{14}$Hz, còn bước sóng lớn hơn 600nm.*

**C.** *Vẫn bằng $5.10^{14}$Hz, còn bước sóng nhỏ hơn 600nm.*

**D.** *Nhỏ hơn $5.10^{14}$Hz, còn bước sóng bằng 600nm.*

***Hướng dẫn.*** Khi truyền đi, tần số $f$ của ánh sáng nói riêng và của các sóng điện từ đều không đổi; vậy **A**, **D** sai. Đặt $\lambda_0 = 600$nm và bước sóng trong môi trường là $\lambda$. Ta có $f = \dfrac{c}{\lambda_0} = \dfrac{v}{\lambda}$.

Vậy $\lambda = \lambda_0\dfrac{v}{c} = \dfrac{\lambda_0}{\left(\frac{c}{v}\right)} = \dfrac{\lambda_0}{n} = \dfrac{600}{1{,}52} \approx 395(\text{nm}) < \lambda_0$;

**B** sai, **C** đúng.

Chọn **C.**

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Câu 1.** Một mạch dao động $LC$ có điện trở thuần không đáng kể, gồm một cuộn dây có độ tự cảm $L$ và một tụ điện có điện dung $C$. Trong mạch có dao động điện từ tự do với giá trị cực đại của hiệu điện thế ở hai bản tụ điện bằng $U_{max}$. Giá trị cực đại $I_{max}$ của cường độ dòng điện trong mạch được tính bằng biểu thức

**A.** $I_{\max} = \sqrt{\dfrac{U_{\max}}{\sqrt{LC}}}$. **B.** $I_{\max} = U_{\max}\sqrt{LC}$.

**C.** $I_{\max} = U_{\max}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. **D.** $I_{\max} = U_{\max}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

**Câu 2.** Một mạch dao động lí tưởng gồm cuộn cảm thuần có độ tự cảm $L$ không đổi và tụ điện có điện dung $C$ thay đổi được. Điều chỉnh điện dung của tụ điện đến giá trị $C_1$ thì tần số dao động riêng của mạch là $f_1$. Để tần số dao động riêng của mạch là $\sqrt{5}.f_1$ thì phải điều chỉnh điện dung của tụ điện đến giá trị

**A.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}C_1$. **B.** $\sqrt{5}C_1$. **C.** $\dfrac{C_1}{5}$. **D.** $\dfrac{2C_1}{\sqrt{5}}$.

**Câu 3.** Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng, khoảng cách giữa hai khe là 1mm, khoảng cách từ hai khe đến màn là 2m. Chiếu đồng thời hai bức xạ đơn sắc có $\lambda_1 = 0{,}4\mu$m và $\lambda_2 = 0{,}5\mu$m cho bề rộng vùng giao thoa trên màn là 9mm. Số vị trí vân sáng trùng nhau trên màn của hai bức xạ là

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 6.

**Câu 4.** Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng, nguồn sáng phát đồng thời hai bức xạ đơn sắc, trong đó bức xạ màu đỏ có bước sóng 720nm và bức xạ màu lục có bước sóng $\lambda$ (có giá trị trong khoảng từ 500nm đến 575nm). Trên màn quan sát, giữa hai vân sáng gần nhau nhất và cùng màu với vân sáng trung tâm có 8 vân sáng màu lục. Giá trị của $\lambda$ là

**A.** 530nm. **B.** 560nm. **C.** 545nm. **D.** 515nm.

**Câu 5.** Xét hai mạch dao động điện từ lí tưởng. Chu kì dao động riêng của mạch thứ nhất là $T_1$, của mạch thứ hai là $T_2 = 2T_1$. Ban đầu điện tích trên mỗi bản tụ điện có độ lớn cực đại $Q_0$. Sau đó mỗi tụ điện phóng điện qua cuộn cảm của mạch. Khi điện tích trên mỗi bản tụ của hai mạch đều có độ lớn bằng $q$ $(0 < q < Q_0)$ thì tỉ số độ lớn cường độ dòng điện trong mạch thứ nhất và độ lớn cường độ dòng điện trong mạch thứ hai là

**A.** 0,2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2 **D.** $\sqrt{2}$.

***Đáp án số báo kì trước:***

**Câu 1: C; Câu 2: B; Câu 3: D. Câu 4: A**



https://tieulun.hopto.org

Các **Mệnh đề 1** và **Mệnh đề 2** xét trường hợp tam giác bất kì. Các Mệnh đề dưới đây còn chứng tỏ ý tưởng *biến đổi tuyến tính góc* có thể áp dụng được cho các tam giác đặc biệt.

**Mệnh đề 3.** *Nếu tam giác $ABC$ có ba góc nhọn thì $A_1=\pi-2A$, $B_1=\pi-2B$, $C_1=\pi-2C$ cũng là ba góc của tam giác $A_1B_1C_1$ bất kì.*

# Sáng tạo và chứng minh CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC NHỜ PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH GÓC

***(Tiếp theo kì trước)***

LÊ THỊ THU HUYỀN *(GV THPT Lê Viết Tạo, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)*
PHÙNG THỊ OANH *(GV Trường Phổ thông Vùng cao Việt Bắc, Thái Nguyên)*
TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học Việt Nam)*

**Nhận xét 3.1.** Vì $\sin A_1=\sin 2A$ nên áp dụng hệ thức chứa $\sin A_1, \sin B_1, \sin C_1$ đúng cho tam giác bất kì $A_1B_1C_1$, ta suy ra hệ thức lượng giác chứa $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ đúng cho tam giác nhọn $ABC$.

**Bài 10.1.** *Trong mọi tam giác $ABC$ ta có*
$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\le \sin A+\sin B+\sin C \quad (10)$$

***Chứng minh.*** Biến đổi lượng giác ta được
$$\begin{aligned}&\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\\&=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C\\&=2\sin C(\cos(A-B)-\cos(A+B))\\&=4\sin A\sin B\sin C\\&=32\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$
và
$$\begin{aligned}&\sin A+\sin B+\sin C\\&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C\\&=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\&=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\\&=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.\end{aligned}$$
Vậy BĐT (10) đúng, vì nó tương đương với
$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}.$$ (xem **Bài 5.2**). ❐

**Bài 10.2.** *Với mọi tam giác nhọn $ABC$ ta có*
$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C+\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C\ge 0.$$

***Chứng minh.*** Áp dụng BĐT (10) cho tam giác $A_1B_1C_1$ với $A_1=\pi-2A$, $B_1=\pi-2B$, $C_1=\pi-2C$, ta được
$$\begin{aligned}&\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C+\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C\\&=\sin(\pi-A_1)+\sin(\pi-B_1)+\sin(\pi-C_1)\\&+\sin(2\pi-2A_1)+\sin(2\pi-2B_1)+\sin(2\pi-2C_1)\\&=\sin A_1+\sin B_1+\sin C_1-\sin 2A_1\\&-\sin 2B_1-\sin 2C_1\ge 0.\end{aligned}$$ ❐

**Bài 11.** *Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn. Chứng minh rằng*
$$0<\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

***Chứng minh.*** Vì tam giác $ABC$ có ba góc nhọn nên $A_1=\pi-2A$, $B_1=\pi-2B$, $C_1=\pi-2C$ cũng là ba góc của tam giác $A_1B_1C_1$. Áp dụng **Bài 4.1** ta có
$$\begin{aligned}&0<\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\\&=\sin(\pi-2A)+\sin(\pi-2B)+\sin(\pi-2C)\\&=\sin A_1+\sin B_1+\sin C_1\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$ ❐



https://tieulun.hopto.org

**Mệnh đề 4.** *Cho tam giác ABC bất kì. Các góc* $A_2=\frac{A}{2}$, $B_2=\frac{B}{2}$, $C_2=\frac{\pi+C}{2}$ *cũng là ba góc của tam giác tù* $A_2B_2C_2$ $\left(\text{góc } C_2>\frac{\pi}{2}\right)$.

**Nhận xét 4.1.** Vì $C_2=\frac{\pi+C}{2}$ nên

$$\sin C_2=\sin\frac{\pi+C}{2}=\cos\frac{C}{2}.$$

Áp dụng hệ thức lượng giác chứa $\sin A_2, \sin B_2, \sin C_2$ cho tam giác tù $A_2B_2C_2$ ta suy ra hệ thức chứa $\sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \cos\frac{C}{2}$ đúng cho tam giác $ABC$ bất kì.

Tương tự $\sin 2C_2=\sin(\pi+C)=-\sin C$, nên áp dụng hệ thức chứa $\sin 2A_2, \sin 2B_2, \sin 2C_2$ đúng cho tam giác tù $A_2B_2C_2$ ta suy ra hệ thức lượng chứa $\sin A, \sin B, -\sin C$ đúng cho tam giác $ABC$ bất kì.

**Bài 12.** *Với mọi tam giác ABC ta có*

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\ge\sin A+\sin B-\sin C.$$

***Chứng minh.*** Đặt $A_2=\frac{A}{2}$, $B_2=\frac{B}{2}$, $C_2=\frac{\pi+C}{2}$.

Áp dụng BĐT (10) cho tam giác $A_2B_2C_2$ ta có

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}-(\sin A+\sin B-\sin C)$$
$$=\sin A_2+\sin B_2+\cos\left(C_2-\frac{\pi}{2}\right)-$$
$$-(\sin 2A_2+\sin 2B_2-\sin(2C_2-\pi))$$
$$=\sin A_2+\sin B_2+\sin C_2-$$
$$-(\sin 2A_2+\sin 2B_2+\sin 2C_2)\ge 0.\ \square$$

**Mệnh đề 5.** *Nếu ABC là tam giác tù* $\left(C>\frac{\pi}{2}\right)$ *thì* $A_3=2A$, $B_3=2B$, $C_3=2C-\pi$ *cũng là ba góc của tam giác* $A_3B_3C_3$ *bất kì.*

**Nhận xét 5.1.** Vì $C_3=2C-\pi$ nên

$\cos\frac{C_3}{2}=\cos\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=\sin C$. Từ hệ thức chứa $\cos\frac{A_3}{2}, \cos\frac{B_3}{2}, \cos\frac{C_3}{2}$ đúng cho tam giác bất kì $A_3B_3C_3$, ta suy ra một hệ thức chứa $\cos A, \cos B, \sin C$ đúng cho tam giác tù $ABC$.

Cho tam giác $ABC$ tù $\left(C>\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh các kết quả sau đây:

**Bài 13.** $\cos A+\cos B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (13)

***Chứng minh***

Đặt $A_3=2A$, $B_3=2B$, $C_3=2C-\pi$. Vì

$$\cos A+\cos B+\sin C=\cos\frac{A_3}{2}+\cos\frac{B_3}{2}+\sin\frac{C_3+\pi}{2}$$
$$=\cos\frac{A_3}{2}+\cos\frac{B_3}{2}+\cos\frac{C_3}{2}$$

nên theo **Bài 4.2** ta suy ra BĐT (13). $\square$

**Bài 14.** $1<\sin A+\sin B-\cos C\le\frac{3}{2}$ (14)

***Chứng minh.*** Do

$$\sin A+\sin B-\cos C=\sin\frac{A_3}{2}+\sin\frac{B_3}{2}-\cos\frac{C_3+\pi}{2}$$
$$=\sin\frac{A_3}{2}+\sin\frac{B_3}{2}+\sin\frac{C_3}{2}$$

nên theo **Bài 7.2** ta có BĐT (14). $\square$

**Bài 15.** $\frac{3}{4}\le\sin^2 A+\sin^2 B+\cos^2 C<1$ (15)

***Chứng minh.*** Vì $\sin^2 A+\sin^2 B+\cos^2 C$

$$=\sin^2\frac{A_3}{2}+\sin^2\frac{B_3}{2}+\cos^2\frac{C_3+\pi}{2}$$
$$=\frac{1-\cos A_3}{2}+\frac{1-\cos B_3}{2}+\frac{1+\cos(C_3+\pi)}{2}$$
$$=\frac{3-(\cos A_3+\cos B_3+\cos C_3)}{2}$$

nên áp dụng **Bài 7.1** ta được BĐT (15). $\square$

**Bài 16.** *Chứng minh* $-\frac{1}{8}\le\cos 2A\cos 2B\cos 2C<1$.

***Chứng minh.*** Theo **Bài 5.1** ta có

$$\cos 2A\cos 2B\cos 2C=\cos A_3\cos B_3\cos(C_3+\pi)$$
$$=-\cos A_3\cos B_3\cos C_3\ge-\frac{1}{8}.\ \square$$

**Mệnh đề 6a.** *Nếu tam giác ABC có ba góc nhọn (hoặc vuông tại C) thì* $A_4=\frac{\pi}{2}-A$, $B_4=\frac{\pi}{2}-B$,



https://tieulun.hopto.org

*$C_4 = \pi - C$ cũng là ba góc của tam giác tù $A_4B_4C_4$ (hoặc vuông tại $C_4$).*

**Mệnh đề 6b.** *Nếu tam giác $ABC$ có góc $C$ tù (hoặc vuông) thì $A_4 = \frac{\pi}{2} - A$, $B_4 = \frac{\pi}{2} - B$, $C_4 = \pi - C$ là ba góc của tam giác nhọn $A_4B_4C_4$ (hoặc vuông tại $C$).*

**Nhận xét 6.1.** Vì $\sin A_4 = \cos A$, $\sin B_4 = \cos B$, $\sin C_4 = \sin C$, nên từ một hệ thức chứa $\sin A_4$, $\sin B_4$, $\sin C_4$ đúng cho tam giác nhọn $A_4B_4C_4$ ta suy một hệ thức chứa $\cos A$, $\cos B$, $\sin C$ đúng cho tam giác tù $ABC$.

**Bài 17.** *Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn. Chứng minh rằng* $0 < \cos A \cos B \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

***Chứng minh.*** Vì tam giác $ABC$ có ba góc nhọn nên $A_4 = \frac{\pi}{2} - A$, $B_4 = \frac{\pi}{2} - B$, $C_4 = \pi - C$ cũng là ba góc của tam giác $A_4B_4C_4$ và

$$\sin A_4 \sin B_4 \sin C_4 \le \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \text{(xem \textbf{Bài 6.1})}.$$

Vậy $\cos A \cos B \sin C$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A_4\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - B_4\right)\sin(\pi - C_4)$$

$$= \sin A_4 \sin B_4 \sin C_4 \le \frac{3\sqrt{3}}{8}. \ \square$$

**Bài 18.** *Cho tam giác $ABC$ có $A < \frac{\pi}{2}$, $B < \frac{\pi}{2}$.* Chứng minh rằng $\cos A + \cos B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

***Chứng minh.*** Vì

$$\cos A + \cos B + \sin C$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A_4\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - B_4\right) + \sin(\pi - C_4)$$

$$= \sin A_4 + \sin B_4 + \sin C_4$$

nên theo **Bài 4.1** ta có $\cos A + \cos B + \sin C$

$$= \sin A_4 + \sin B_4 + \sin C_4 \le \frac{3\sqrt{3}}{2}. \ \square$$

**Bài 19.** *Cho tam giác $ABC$ có $A < \frac{\pi}{2}$, $B < \frac{\pi}{2}$.*

*Chứng minh* $2 < \cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$.

***Chứng minh.*** Vì $\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 C$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - A_4\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - B_4\right) + \sin^2(\pi - C_4)$$

$$= \sin^2 A_4 + \sin^2 B_4 + \sin^2 C_4,$$ nên theo **Bài 8.1** có

$$2 < \cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 C$$

$$= \sin^2 A_4 + \sin^2 B_4 + \sin^2 C_4 \le \frac{9}{4}. \ \square$$

**Bài 20.** *Cho $ABC$ là tam giác có góc $C > \frac{\pi}{2}$.*

*Chứng minh rằng* $-\frac{1}{8} \le \sin A \sin B \cos C < 0$.

***Chứng minh.*** Do góc $C$ tù nên bất đẳng thức $\sin A \sin B \cos C < 0$ đúng. Theo **Bài 5.1** ta có $\sin A \sin B \cos C$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - A_4\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - B_4\right)\cos(\pi - C_4)$$

$$= -\cos A_4 \cos B_4 \cos C_4 \ge -\frac{1}{8}. \ \square$$

**Bài 21.** *Cho $ABC$ là tam giác có góc $C > \frac{\pi}{2}$.*

*Chứng minh rằng* $\cot A + \cot B - \tan C \ge 3\sqrt{3}$.

***Chứng minh.*** Theo **Bài 3.1** ta có

$\cot A + \cot B - \tan C$

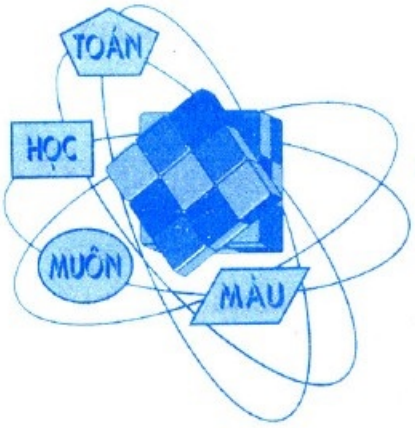
$$= \cot\left(\frac{\pi}{2} - A_4\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - B_4\right) - \tan(\pi - C_4)$$

$$= \tan A_4 + \tan B_4 + \tan C_4 \ge 3\sqrt{3}. \ \square$$

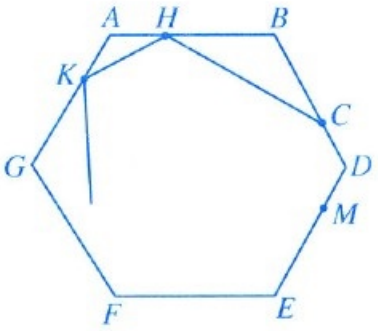
**Kết luận.** Qua một số ví dụ cụ thể, bài viết minh họa khả năng sử dụng *phép biến đổi tuyến tính góc* trong chứng minh các hệ thức lượng giác và sáng tạo ra các hệ thức lượng giác mới trong tam giác. Còn có thể áp dụng tư tưởng của phương pháp này để chứng minh và tạo ra hàng trăm hệ thức lượng giác trong tam giác khác dựa trên các hệ thức đã biết. Cách chứng minh các hệ thức này rất nhất quán và đơn giản (sử dụng phép biến đổi tuyến tính góc mà không cần biến đổi lượng giác). Nhờ biến đổi tuyến tính góc, ta có thể phân loại bức tranh hệ thức lượng trong tam giác. Ý tưởng biến đổi tuyến tính góc còn gợi ý để các giáo viên sáng tạo ra các bài toán và đề thi mới từ các bài toán cũ. Hi vọng nó sẽ được áp dụng trong giảng dạy, trong ôn thi vào đại học và bồi dưỡng học sinh giỏi.



https://tieulun.hopto.org




# MÈO ĐUỔI CHUỘT




Trên một sân phẳng hình lục giác đều $ABDEFG$ có tường bao quanh, một con *Chuột* đứng ở điểm $C$ và một chú *Mèo* đứng ở điểm $M$ với $CB = 2CD = 2MD$. *Chuột* chạy trên sân theo đường thẳng $CH$, tạo thành với tường $BC$ một góc $30^\circ$, khi gặp tường $AB$ tại điểm $H$ thì chạy theo đường thẳng $HK$ tạo thành với tường $AH$ một góc $30^\circ$ và cứ chạy như thế. Khi *Chuột* bắt đầu chạy thì *Mèo* cũng bắt đầu chạy đuổi *Chuột* và *Mèo* vừa chạy vừa theo dõi *Chuột* nên tốc độ của *Mèo* chỉ bằng tốc độ của *Chuột*. Hỏi *Mèo* phải chạy theo đường nào để bắt gặp *Chuột* với thời gian ít nhất?

PHI PHI

## Giải đáp: Bài toán CON RÙA chạy trên đường băng bằng cao su

(Đề đăng trên THTT số 398 tháng 8.2010)

Gọi $S_n$ là quãng đường *Rùa* đi được cuối buổi chiều ngày thứ $n$ ($n$ = 1, 2, 3, ...) với $S_1 = 10$. Sau đêm thứ $n$, quãng đường đi được của *Rùa* dãn theo đường băng với cùng tỉ lệ là

$$\frac{S_{n+1}-10}{S_n}=\frac{100(n+1)}{100n} \text{ hay } \frac{S_{n+1}}{n+1}=\frac{S_n}{n}+\frac{10}{n+1} \quad (*)$$

Cho $n$ chạy từ 1 đến $k-1$ trong (*) rồi cộng theo từng vế được

$$\frac{S_k}{k}=\frac{S_1}{1}+10\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{k}\right) \text{ hay}$$

$$S_k=10k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right) \text{ hay}$$

$$S_k=10k.A_k \text{ với } A_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}.$$

Sau $k$ ngày thì đường băng dài $100k$ nên nếu tồn tại số $k$ để $S_k > 100k$ hay $A_k > 10$ thì *Rùa* sẽ đi đến đích. Dễ thấy

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{2^2}{2^3}=\frac{1}{2},$$

tổng quát có

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+...+\frac{1}{2^{n+1}}>\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Từ đó khi chọn $k=2^{18}$ thì $A_k > 10$ hay $S_k > 100k$, nghĩa là *Rùa* sẽ đi đến đích.

Các bạn sau có lời giải đúng và gọn, được nhận tặng phẩm:

*Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I, **Nghệ An;** *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý, **Hà Nam.**

AN MINH



https://tieulun.hopto.org

## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/406.(Lớp 6).** Cho $m$ là một số nguyên dương. Hãy tìm các chữ số $x$ và $y$ $(x \neq 0)$ sao cho số

$A = \overline{xy5} + 100m(m+5)$ là số chính phương.

NGUYỄN HỮU BẰNG
*(GV THCS Hưng Hoà, TP Vinh, Nghệ An)*

**Bài T2/406. (Lớp 7).** So sánh hai số $A$ và $B$. Biết rằng $A = 4023^2$;

$$\frac{B}{12} = \frac{(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)...(2011^4+2011^2+1)}{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)...(2010^4+2010^2+1)}.$$

CAO NGỌC TOẢN
*(GV THPT Tam Giang, Thừa Thiên - Huế)*

**Bài T3/406**. Cho tam giác nhọn $ABC$. Tìm phần nguyên của

$$M = \frac{\sin A}{\sin B+\sin C} + \frac{\sin B}{\sin C+\sin A} + \frac{\sin C}{\sin A+\sin B}.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
*(TP Hồ Chí Minh)*

**Bài T4/406.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2+3xy = 3y-13 \\ 3y^2+2xy = 2x+11. \end{cases}$$

DƯƠNG CHÂU DINH
*(GV THPT Lê Quý Đôn, Quảng Trị)*

**Bài T5/406.** Đường tròn nội tiếp trong tam giác $ABC$ $(AB \neq AC)$ tiếp xúc với các cạnh $AB$, $BC$, $CA$ lần lượt tại $E$, $D$, $F$. Hạ $DP$ vuông góc với $EF$. Đường trung trực của $BC$ cắt đường thẳng $EF$ tại $Q$. Chứng minh rằng tứ giác $BPQC$ nội tiếp.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
*(THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/406.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2x^2+2y^2-2x+2y+1} + \sqrt{2x^2+2y^2+2x-2y+1} + \sqrt{2x^2+2y^2+4x+4y+4}.$$

DƯƠNG VĂN SƠN
*(GV THPT Hà Huy Tập, Nghệ An)*

**Bài T7/406.** Giải phương trình

$f(g(x)) + g(2+f(x)) = 23$, trong đó

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 9;\ g(x) = \begin{cases} 14 \text{ khi } x \geq 3 \\ 2^x + \dfrac{12}{5-x} \text{ khi } x < 3. \end{cases}$$

PHAN MẠNH HÀ
*(GV THPT Nam Yên Thành, Nghệ An)*

**Bài T8/406.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $h_a, h_b, h_c$ lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ đỉnh $A$, $B$, $C$; $R$, $r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác $ABC$. Chứng minh rằng

$$h_a + h_b + h_c - 9r \leq 2(R-2r).$$

NGUYỄN TUẤN NGỌC
*(GV THPT chuyên Tiền Giang)*

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T9/406.** Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi $O$ là giao điểm hai đường chéo $AC$ và $BD$. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ABC$, $ACD$ theo thứ tự cắt lại các tia $OD$, $OB$ tại $E$, $F$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi tứ giác $AECF$ ngoại tiếp.

NGUYỄN MINH HÀ
*(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)*

**Bài T10/406.** Cho dãy số $(u_n)$ được xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = \dfrac{k+u_n}{1-u_n}$, $(k > 0)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng $u_{13} = u_1$. Hãy tìm tất cả các giá trị của $k$.

NGUYỄN THÀNH ĐẠT
*(Hà Tĩnh)*



https://tieulun.hopto.org

**Bài T11/406.** Cho dãy số $(x_n)$ được xác định như sau: $x_1 = 0$, $x_{n+1}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x_n}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số $(x_n)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó

NGUYỄN TÀI CHUNG
*(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)*

**Bài T12/406.** Cho tập hợp $X=\{0, 1, 2, 3, ..., n\}$ với $n$ là số nguyên dương. Với $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ thuộc $X^3$, ta nói $xRy$ nếu $x_k \le y_k$ với $k = 1, 2, 3$. Hãy xác định số nguyên dương nhỏ nhất $p$ sao cho với bất kì tập con $A$ có $p$ phần tử nào của $X^3$ đều có tính chất: Nếu $x$, $y$ thuộc $A$ thì $xRy$ hoặc $yRx$.

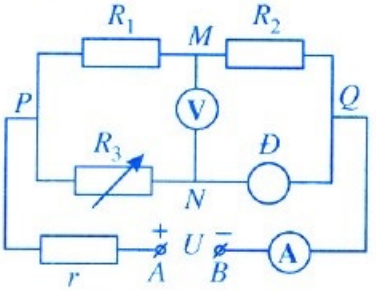
NGUYỄN DƯ THÁI
*(SV Toán K25, ĐHKH Huế)*

## CÁC ĐỀ VẬT LÍ

**Bài L1/406.** Bạn An nhìn thấy quả táo chín trên một cành cây. Với thẳng cánh tay lên cao, An vẫn không thể bứt được quả táo vì còn thiếu 40cm nữa. An liền hạ thấp người xuống 30cm so với khi đứng thẳng và bật nhảy lên bứt được táo. Trong quá trình bật nhảy, An đã tác dụng xuống mặt đất một lực. Hãy tính giá trị tối thiểu của lực này và tính công suất tương ứng mà bạn An đã sản sinh ra. Biết rằng bạn An nặng 50kg và gia tốc rơi tự do nơi bạn An bứt táo là 9,8m/s$^2$.

NGUYỄN CAO CƯỜNG
*(GV THPT Đội Cấn, Vĩnh Phúc)*

**Bài L2/406.** Cho mạch điện như hình vẽ. Hiệu điện thế $U_{AB}$= 16V, đèn $Đ$ loại 3V- 3W, các điện trở $r = 2\Omega$ và $R_2 = 4\Omega$, $R_3$ là biến trở. Ampe kế **A** có điện trở không đáng kể, còn vôn kế **V** có điện trở rất lớn.




a) Đèn $Đ$ sáng bình thường, vôn kế **V** có cực dương mắc vào $M$ và chỉ 5V. Hãy tìm điện trở $R_1$, giá trị của biến trở $R_3$ và số chỉ của ampe kế khi đó.

b) Thay đèn $Đ$ bằng một điện trở có cùng giá trị của đèn. Tìm giá trị của biến trở $R_3$ để công suất tiêu thụ trên nó là lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó và số chỉ của vôn kế khi đó. Bỏ qua điện trở của các dây nối, coi các điện trở không thay đổi theo nhiệt độ.

NGUYỄN QUANG HẬU
*(Hà Nội)*

# PROBLEMS IN THIS ISUE

## FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/406.( For 6$^{th}$ grade).** Let $m$ be a posivite interger number. Determine the decimal digits $x$ and $y$ $(x\neq 0)$ such that the number $A=\overline{xy5}+100m(m+5)$ is a perfect square.

**T2/406. (For 7$^{th}$ grade).** Which number is greater? $A = 4023^2$ or $B$ where

$$\frac{B}{12}=\frac{(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)...(2011^4+2011^2+1)}{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)...(2010^4+2010^2+1)}.$$

**T3/406.** Let $ABC$ be an acute triangle. Find the integer part of

$$M=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}+\frac{\sin B}{\sin C+\sin A}+\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}.$$

**T4/406.** Solve the system of equations

$$\begin{cases}2x^2+3xy=3y-13\\ 3y^2+2xy=2x+11.\end{cases}$$

**T5/406.** The inscribed circle of a triangle $ABC$ $(AB\neq AC)$ meets edges $AB$, $BC$, $CA$ at $E$, $D$, and $F$ respectively. $DP$ is the altitude from $D$ onto $EF$. The perpendicular bisector of $BC$ cuts line $EF$ at $Q$. Prove that the quadrilateral $BPQC$ is cyclic.

## FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/406.** Find the minimum value of the expression

$$P=\sqrt{2x^2+2y^2-2x+2y+1}+\sqrt{2x^2+2y^2+2x-2y+1}+\sqrt{2x^2+2y^2+4x+4y+4}.$$

*(Xem tiếp trang 28)*



https://tieulun.hopto.org

★ **Bài T1/402.** *So sánh tổng gồm 1000 số hạng*

$$\frac{1}{1.2.4}+\frac{1}{2.5.7}+\frac{1}{3.8.10}+...+\frac{1}{1000.2999.3001}$$

*với* $\frac{5}{24}$.

***Lời giải***

$$A=\frac{1}{1.2.4}+\frac{1}{2.5.7}+\frac{1}{3.8.10}+...+\frac{1}{1000.2999.3001}$$

Đặt $A=\frac{1}{8}+\frac{1}{70}+B$ (1)

trong đó

$$B=\frac{1}{3.8.10}+\frac{1}{4.11.13}+...+\frac{1}{1000.2999.3001} \quad (2)$$

Xét mỗi số hạng của $B$ (với $n\ge 3$)

$$\frac{1}{n(3n-1)(3n+1)}=\frac{1}{n(9n^2-1)}$$

$$<\frac{1}{n(9n^2-9)}=\frac{2}{18n(n-1)(n+1)}$$

$$=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

Từ đó và (2) có

$$18B<\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+...$$

$$+\left(\frac{1}{999.1000}-\frac{1}{1000.1001}\right),$$

hay $18B<\frac{1}{6}-\frac{1}{1000.1001}$.

Suy ra $B<\frac{1}{18.6}=\frac{1}{108}$ (3)

Từ (1) và (3) có

$$A=\frac{1}{8}+\frac{1}{70}+B<\frac{1}{8}+\frac{1}{70}+\frac{1}{108}<\frac{1}{8}+\frac{1}{70}+\frac{1}{105}$$

hay $A<\frac{1}{8}+\frac{5}{210}=\frac{1}{8}+\frac{1}{42}<\frac{1}{8}+\frac{1}{40}=\frac{3}{20}$.

Lại có $\frac{3}{20}<\frac{5}{24}$. Vậy $A<\frac{5}{24}$. ❐

➢ **Nhận xét.** 1) Ta thấy các số hạng của tổng $A$ lập thành một dãy giảm và giảm khá nhanh. Do đó nếu giữ lại một vài số hạng đầu tiên và chỉ làm trội các số hạng sau đó rồi lấy tổng thì sẽ nhận được giá trị chỉ lớn hơn $A$ không nhiều.

2) Có thể làm trội số hạng của $B$ (với $n\ge 3$) theo cách khác:

$$\frac{1}{n(3n-1)(3n+1)}=\frac{3}{(3n-1)3n(3n+1)}$$

$$<\frac{3}{(3n-1)3n(3n+1)}+\frac{3}{3n(3n+1)(3n+2)}$$

$$+\frac{3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}.$$

Sử dụng đẳng thức

$$\frac{2}{(m-1)m(m+1)}=\frac{1}{(m-1)m}-\frac{1}{m(m+1)}$$

dẫn đến $B<\frac{1}{48}$ và

$$A<\frac{1}{8}+\frac{1}{70}+\frac{1}{48}<\frac{1}{8}+\frac{2}{48}=\frac{1}{6}<\frac{5}{24}.$$

3) Các bạn sau có lời giải đúng:

**Phú Thọ:** *Đinh Minh Hà*, 6A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Lê Huyền Trâm, Nguyễn Phương Chi, Ngô Thị Phương Anh, Nguyễn Hà Gia Linh, Trần Việt Hưng*, 6A1, THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Nghệ An:** *Trần Thị Hương*, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Trần Thị Như Ý*, 6A, THCS Trung Đồng, Can Lộc; **Bình Định:** *Nguyễn Trọng Khiêm*,

**ACER VIET NAM, BCĐ PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ**
**Phối hợp tổ chức và trao giải thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí**



https://tieulun.hopto.org

6A1, THCS Võ Hán, Tây Sơn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phan Việt Khoa*, 6A6, THPT Trần Đại Nghĩa, Q.1.

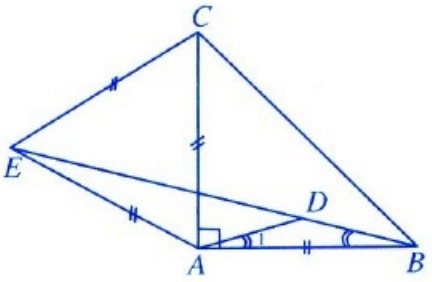
VIỆT HẢI

**★Bài T2/402.** *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Giả sử D là điểm nằm bên trong tam giác sao cho tam giác ABD cân và* $\widehat{ADB}=150^\circ$. *Trên nửa mặt phẳng không chứa D có bờ là đường thẳng AC lấy điểm E sao cho tam giác ACE đều. Chứng minh rằng ba điểm B, D, E thẳng hàng.*

***Lời giải.*** Do tam giác $ADB$ cân tại $D$ và $\widehat{ADB}=150^\circ$ nên $\widehat{A_1}=\widehat{ABD}=\dfrac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ$.

Mặt khác, tam giác $ACE$ đều nên $AE=AC=AB$ và $\widehat{EAC}=60^\circ$, suy ra $\widehat{ABE}=15^\circ$. Từ đó thu được $\widehat{ABD}=\widehat{ABE}=15^\circ$. (1)

Vì $CA\perp AB$, $\widehat{CAE}=60^\circ<90^\circ$ nên $E$ và $C$ nằm cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $AB$, suy ra $E$ và $D$ cũng nằm cùng nửa mặt phẳng đó. (2)




Từ (1) và (2), suy ra hai tia $BD$ và $BE$ trùng nhau, tức là ba điểm $B, D, E$ thẳng hàng. ❐

➢ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn chứng minh được $\widehat{ABE}=\widehat{ABD}=15^\circ$ nhưng thiếu lập luận $D$ và $E$ nằm cùng nửa mặt phẳng bờ $AB$.

Ngoài cách giải trên đây, một số bạn còn chứng minh $\widehat{ADB}+\widehat{ADE}=180^\circ$.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn, lập luận chặt chẽ:

**Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Thanh Hà, Vũ Trung Hoa, Nguyễn Hiền Linh*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, *Nguyễn Thị Nga, Nguyễn Tuấn Huy, Đào Thị Hồng*,7A, THCS Yên Lạc; **Hà Nam:** *Bạch Văn Thọ*, 7B, THCS An Đổ, Bình Lục; **Nam Định:** *Đỗ Quang Huy*, 7A5, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Nghệ An:** *Hoàng Thảo Hiền, Nguyễn Vũ Duy Linh, Trần Thị Thu Hằng*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Đậu Hương Giang*, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Khánh Linh, Nguyễn Thúy Hiền, Trần Viết Cường, Trần Sỹ Luân*, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Phú Yên:** *Nguyễn Trần Hậu*, 7C, THCS Trần Quốc Toản,TP. Tuy Hòa; **Đồng Nai:** *Lệnh Hồ Xung*, 6A1, THCS Lý Tự Trọng, Trảng Bom.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

**★Bài T3/402.** *Tìm các giá trị nguyên dương m để phương trình*

$$x^2-mxy+y^2+1=0 \quad (1)$$

*có nghiệm nguyên dương.*

***Lời giải.*** (Theo bạn *Trần Bảo Trung*, 9C, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, **Nghệ An**).

Trong tất cả các nghiệm nguyên dương $(x\,;\,y)$ thỏa mãn PT(1), giả sử $(x_0\,;\,y_0)$ là nghiệm có $x_0+y_0$ nhỏ nhất. Do $x$ và $y$ trong PT (1) có vai trò bình đẳng nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $x_0\le y_0$.

Xét PT bậc hai ẩn $y$

$$y^2-mx_0y+x_0^2+1=0 \quad (2)$$

Ta có $y_0$ là một nghiệm của PT (2). Gọi $y_1$ là nghiệm còn lại của PT đó.

Theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} y_0+y_1=mx_0 & (3)\\ y_0y_1=x_0^2+1 & (4)\end{cases}$$

Từ (3) và (4) dễ thấy $y_1$ nguyên dương, từ cách chọn $(x_0\,;y_0)$ suy ra $y_0\le y_1$.

• Nếu $y_0=x_0$ thì từ (1) có $m=2+\dfrac{1}{x_0^2}$, do $m$ và $x_0$ nguyên dương nên $x_0=1\Rightarrow m=3$.

Với $m=3$ ta thấy $(x;y)=(1;1)$ là một nghiệm nguyên dương của PT(1).

• Nếu $y_0=y_1$ thì từ (4) suy ra $(y_0-x_0)(y_0+x_0)=1$. Do $y_0\ge x_0>0$ nên $y_0-x_0=y_0+x_0=1\Rightarrow y_0=1, x_0=0$, loại vì $x_0$ là số nguyên dương.

• Nếu $x_0<y_0<y_1$ thì $y_0\ge x_0+1, y_1\ge x_0+2$. Từ (4) suy ra $x_0^2+1\ge x_0^2+3x_0+2\Rightarrow 3x_0+1\le 0$, vô lí vì $x_0>0$.

Vậy để PT (1) có nghiệm nguyên dương thì $m=3$, khi đó nghiệm nguyên dương là (1 ; 1). ❐



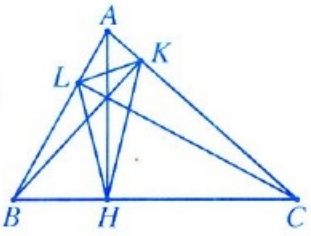
https://tieulun.hopto.org

➢**Nhận xét.** Ngoài bạn *Trung*, các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Thơm*, 9A1, *Nguyễn Văn Tuấn, Đại Thị Hồng Yến*, 8A1, *Nguyễn Thị Nga*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Thái Bình:** *Trần Hồng Quan*, 9A6, THCS Lương Thế Vinh, TP. Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Trương Minh Thắng*, 9C, THCS Điện Biên, TP. Thanh Hóa.

TRẦN HỮU NAM

**★Bài T4/402.** *Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AH, BK, CL. Chứng minh rằng* $AK.BL.CH = AL.BH.CK = HK.KL.LH$.

***Lời giải.*** Ta có $\Delta AKL \backsim \Delta ABC$ (tứ giác $BLKC$ nội tiếp) suy ra




$$\frac{AK}{AB}=\frac{AL}{AC}=\frac{KL}{BC} \quad (1)$$

Hoàn toàn tương tự, ta có

$$\frac{BL}{BC}=\frac{BH}{BA}=\frac{LH}{CA} \quad (2)$$

$$\frac{CH}{CA}=\frac{CK}{CB}=\frac{HK}{AB} \quad (3)$$

Nhân theo vế các đẳng thức (1), (2), (3), thu được

$$\frac{AK.BL.CH}{AB.BC.CA}=\frac{AL.BH.CK}{AC.BA.CB}=\frac{KL.LH.HK}{BC.CA.AB}$$

Từ đó suy ra

$AK.BL.CH = AL.BH.CK = HK.KL.LH$ . ❐

➢**Nhận xét.** 1) Bài toán này được rất nhiều bạn gửi lời giải và đa số đều giải đúng. Tuy vậy có bạn còn mắc lỗi cơ bản khi viết kí hiệu hai tam giác đồng dạng mà các đỉnh không tương ứng với nhau, hoặc từ kết quả tam giác đồng dạng không suy ra đúng đẳng thức về các cạnh tỉ lệ. Có bạn đã sai lầm khi cho rằng đẳng thức

$$AK.BL.CH = HK.KL.LH$$

cũng được chứng minh hoàn toàn tương tự đẳng thức

$$AK.BL.CH = AL.BH.CK \ !$$

2) Số lượng các bạn cho lời giải tốt rất nhiều. Các bạn học sinh lớp 7 sau có lời giải hay:

**Nghệ An**: *Nguyễn Hoàng Thảo Hiền*, 7A, *Trần Tuấn Anh*, 7C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu. **Quảng Ngãi**: *Huỳnh Tiến Vỹ*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành. **Vĩnh Phúc**: *Trương Thị Hoài Thu*, 7A, THCS Yên Lạc.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

**★Bài T5/402.** *Giải phương trình*

$$\frac{8x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}-\frac{2\sqrt{2}x(x+3)}{1+x^2}=5-\sqrt{2}.$$

***Lời giải.*** PT được viết dưới dạng

$$4.\frac{2x}{1+x^2}.\frac{1-x^2}{1+x^2}-3\sqrt{2}.\frac{2x}{1+x^2}+\frac{\sqrt{2}(1-x^2)}{1+x^2}=5.$$

Đặt $\frac{2x}{1+x^2}=u$; $\frac{1-x^2}{1+x^2}=v$ với $-1\le u\le 1$; $-1\le v\le 1$.

Ta được
$$\begin{cases} u^2+v^2=1 & (1)\\ 4uv-3\sqrt{2}u+\sqrt{2}v=5 & (2)\end{cases}$$

Từ (1) suy ra

$$(u-v)^2+2uv=1 \Leftrightarrow 4uv=2-2(u-v)^2 \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta được

$$2-2(u-v)^2-\sqrt{2}(3u-v)=5$$

$$\Leftrightarrow \left(2(u-v)^2+2\sqrt{2}(u-v)+1\right)+\sqrt{2}\left(u+v+\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}(u-v)+1\right)^2+\sqrt{2}\left(u+v+\sqrt{2}\right)=0 \quad (4)$$

Áp dụng BĐT $2(u^2+v^2)\ge(u+v)^2$, đẳng thức xảy ra khi $u=v$. Mà $u^2+v^2=1$ suy ra

$$|u+v|\le\sqrt{2} \Rightarrow u+v\ge-\sqrt{2} \Rightarrow u+v+\sqrt{2}\ge 0.$$

Mặt khác $\left(\sqrt{2}(u-v)+1\right)^2\ge 0$.

Vì vậy PT (4) $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\sqrt{2}(u-v)+1=0\\ u+v+\sqrt{2}=0\\ u=v\\ u^2+v^2=1.\end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm. Do đó phương trình đã cho vô nghiệm. ❐

➢**Nhận xét.** Các bạn gửi bài giải không nhiều và một số bạn biến đổi, tính toán còn nhầm lẫn. Tuyên dương hai bạn sau có lời giải tốt:

**Nam Định:** *Trần Đại Tân*, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh; **Thái Bình:** *Trần Hồng Quân*, 9A6, THCS Lương Thế Vinh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

**★Bài T6/402.** *Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn* $abc = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{a^5-a^2+3ab+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^5-b^2+3bc+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^5-c^2+3ca+6}}\le 1.$$

***Lời giải.*** Kí hiệu $A$ là vế phải của BĐT cần chứng minh. Ta có

$$a^5-a^2+6-(3a+3)=(a-1)^2(a^3+2a^2+3a+3)\ge 0,$$

nên $a^5-a^2+6\ge 3a+3$, đẳng thức xảy ra khi $a=1$.



https://tieulun.hopto.org

Do đó $a^5-a^2+3ab+6\ge 3(ab+a+1)$.

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{a^5-a^2+3ab+6}}\le\dfrac{1}{\sqrt{3(ab+a+1)}}$ (1)

Tương tự, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b^5-b^2+3bc+6}}\le\frac{1}{\sqrt{3(bc+b+1)}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{c^5-c^2+3ca+6}}\le\frac{1}{\sqrt{3(ca+c+1)}} \quad (3)$$

Cộng theo vế các BĐT (1), (2), (3) ta được

$$A\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{ab+a+1}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+1}}+\frac{1}{\sqrt{ca+c+1}}\right).$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky và sử dụng giả thiết $abc=1$, ta có

$$A\le\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{ab}{a^2bc+abc+ab}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{1+ab+a}+\frac{ab}{a+1+ab}}=1.$$

Do đó $A\le 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❐

➢ **Nhận xét.** Có khá đông các bạn tham gia giải bài toán trên và hầu hết đều cho lời giải đúng. Các bạn dưới đây có lời giải tốt:

**Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Huệ*, 9A1, THCS Yên Lạc; *Đỗ Xuân Việt*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Phan Quốc Hưng*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Nội:** *Trần Đăng Phúc*, 10A1 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN Hà Nội; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Khánh*, *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Trần Bảo Trung*, 9C, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; *Đậu Xuân Quang*, 9B, THCS Diễn Châu; *Nguyễn Sỹ Tuân*, 10A7, THPT Đô Lương I; *Lê Hoàng Hiệp*, 10A1, THPT Thái Hoà.

NGUYỄN THANH HỒNG

**★ Bài T7/402.** *Giải phương trình*

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2^2\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\ldots+2^{2010}\sin\left(x+\frac{2010\pi}{3}\right)=0.$$

***Lời giải.*** Để ý rằng với $n\in\{0;1;2\}$, ta có

$$\sin\left(x+\frac{(3k+n)\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{3}\right)$$ nếu $k$ là số nguyên chẵn;

$$\sin\left(x+\frac{(3k+n)\pi}{3}\right)=-\sin\left(x+\frac{n\pi}{3}\right)$$ nếu $k$ là số nguyên lẻ.

Do đó PT trong đầu bài có thể viết thành

$$\left(2-2^4+2^7-\ldots-2^{2008}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$+\left(2^2-2^5+2^8-\ldots-2^{2009}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$+\left(-2^3+2^6-2^9-\ldots+2^{2010}\right)\sin x=0 \text{ hay}$$
$$2\left(1-2^3+2^6-\ldots-2^{2007}\right)\times$$
$$\times\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-4\sin x\right)=0.$$

Vì $1-2^3+2^6-\ldots-2^{2007}\ne 0$ (là một số nguyên âm) nên PT đã cho tương đương với

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-4\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{\pi}{3}+\cos x.\sin\frac{\pi}{3}$$
$$+2\left(\sin x.\cos\frac{2\pi}{3}+\cos x.\sin\frac{2\pi}{3}\right)-4\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}.\sin x=\cos x\Leftrightarrow\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy PT có nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$. ❐

➢ **Nhận xét.** 1) Có thể giải bài toán bằng cách nhận xét:

Với $\alpha=x+\dfrac{k\pi}{3}$ $(k=1,2,\ldots,2010)$, ta có

$$\sqrt{3}\sin\alpha=\cos\alpha-2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right).$$

Biến đổi PT về dạng

$$2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2^{2011}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0.$$



https://tieulun.hopto.org

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt

**Yên Bái**: *Nguyễn Hải Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bắc Giang**: *Nguyễn Thế Hiệp*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hưng Yên**: *Dương Mạnh Cường, Hoàng Văn Duy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, *Trần Ngọc Tiến*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nam Định**: *Trần Thị Thu Thảo*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hoá**: *Lê Văn Tuấn Anh*, 10A1, THPT Nông Cống I; **Nghệ An**: *Phạm Viết Quyền*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh.

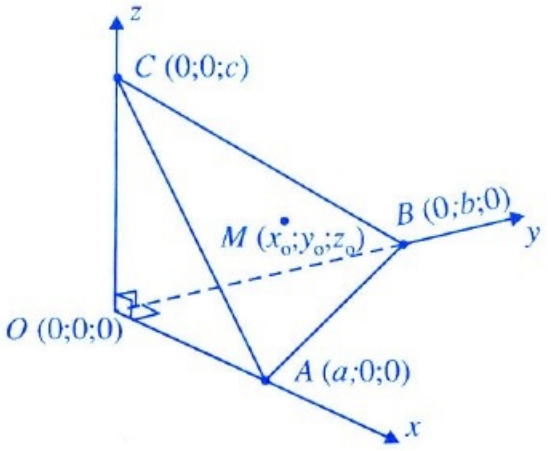
NGUYỄN ANH DŨNG

★**Bài T8/402.** *Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. M là một điểm thuộc mặt phẳng chứa tam giác ABC. Gọi $G_1, G_2, G_3$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác OAB, OBC, OCA. Đặt OA = a, OB = b, OC = c. Chứng minh bất đẳng thức*

$$MG_1^2 + MG_2^2 + MG_3^2 \ge \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

*Đẳng thức xảy ra khi nào?*

***Lời giải***




Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho trục $Ox$ chứa $OA$, trục $Oy$ chứa $OB$ và trục $Oz$ chứa $OC$. Khi đó ta có $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$;

$$G_1\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};0\right);\ G_2\left(0;\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right);\ G_3\left(\frac{a}{3};0;\frac{c}{3}\right).$$

Giả sử $M(x_0;y_0;z_0)$. Phương trình mặt phẳng $(ABC)$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì $M$ thuộc mặt phẳng $(ABC)$ nên

$$\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}=1.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta thấy

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}\right)^2 \le \left(x_0^2+y_0^2+z_0^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Từ đó $x_0^2+y_0^2+z_0^2 \ge \dfrac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ (1)

Mặt khác

$$MG_1^2 = \left(x_0-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y_0-\frac{b}{3}\right)^2+z_0^2;$$

$$MG_2^2 = x_0^2+\left(y_0-\frac{b}{3}\right)^2+\left(z_0-\frac{c}{3}\right)^2;$$

$$MG_3^2 = \left(x_0-\frac{a}{3}\right)^2+y_0^2+\left(z_0-\frac{c}{3}\right)^2.$$

Suy ra

$$MG_1^2+MG_2^2+MG_3^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2$$
$$+2\left(\left(x_0-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y_0-\frac{b}{3}\right)^2+\left(z_0-\frac{c}{3}\right)^2\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$MG_1^2+MG_2^2+MG_3^2 \ge \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ax_0 = by_0 = cz_0 \\ x_0=\dfrac{a}{3}; y_0=\dfrac{b}{3}; z_0=\dfrac{c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ x_0=y_0=z_0=\dfrac{a}{3}. \end{cases}$$

Hay $OABC$ là tứ diện vuông cân tại $O$, và $M$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. ❐

➢**Nhận xét.** Nhiều bạn giải bài T8/402 theo hướng sử dụng *Công thức Leibnitz* (*Công thức tính khoảng cách từ một điểm M bất kì đến trọng tâm tam giác ABC*). Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Những bạn sau có lời giải tốt:

**Hà Nội:** *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Yên Bái:** *Nguyễn Hải Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Phú Thọ:** *Đào Văn Lập*, 10A1, THPT Thanh Thủy, *Nguyễn Trọng Nghĩa*, 12K1, THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Nam:** *Nguyễn Thị Hạnh*, 12 Tin, THPT chuyên Hà Nam; **Nam Định:** *Phùng Mạnh Linh, Trần Thị Hồng Nhung*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Nguyễn Anh Tuyến*, 12 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 12A3, THPT Hậu Lộc I; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Hoàng, Lê Đình Tuấn*, 11T7, THPT Đô Lương I, *Lê Thị Thảo*, 12A1, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu; **Long An:** *Nguyễn Văn Bình An*, 11 Toán, THPT chuyên Long An; **Bến Tre:** *Đào Bá Khả*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

HỒ QUANG VINH



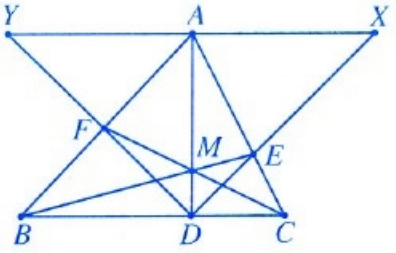
https://tieulun.hopto.org

**★Bài T9/402.** *Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD. Điểm M thuộc đoạn AD. Các đường thẳng BM, CM theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F. DE, DF theo thứ tự cắt lại các đường tròn đường kính AB, AC tại K, L. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm của các đoạn thẳng EF, KL đi qua điểm A.*

***Lời giải***

• *Bổ đề 1.* Cho tam giác $ABC$ nhọn, đường cao $AD$. $M$ thuộc đoạn $AD$. $BM$, $CM$ theo thứ tự cắt $AC$, $AB$ tại $E$, $F$. Đường thẳng qua $A$ và song song với $BC$ theo thứ tự cắt $DE$, $DF$ tại $X$, $Y$. Khi đó $AX = AY$ và $DX = DY$.

*Chứng minh.* (h.1).

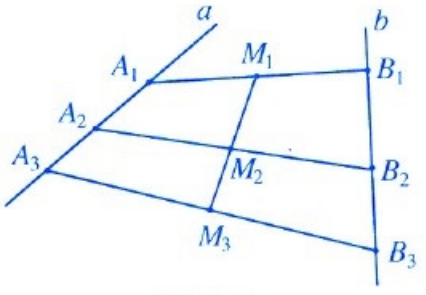



*Hình 1*

Vì $(DE, DF, DA, DB)$ là chùm điều hòa (kết quả quen thuộc) và $XY \,//\, DB$, nên $AX = AY$, từ đó cũng có $DX = DY$.

• *Bổ đề 2.* Các bộ ba điểm $(A_1 ; A_2 ; A_3)$; $(B_1 ; B_2 ; B_3)$ theo thứ tự thuộc các đường thẳng $a, b$. Các điểm $M_1, M_2, M_3$ theo thứ tự là trung điểm của các đoạn $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$. Nếu $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \dfrac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}} = k$ thì ba điểm $M_1$, $M_2$, $M_3$ thẳng hàng và $\dfrac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1M_3}} = k$.

*Chứng minh.* (h.2).




*Hình 2*

Vì $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \dfrac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}} = k$ nên $\overrightarrow{A_1A_2} = k\overrightarrow{A_1A_3}$;

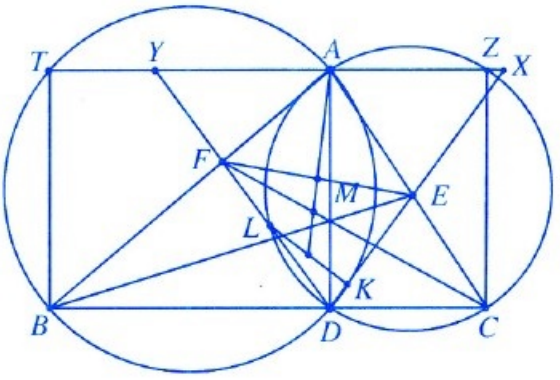
$\overrightarrow{B_1B_2} = k\overrightarrow{B_1B_3}$.

Từ đó

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}\right) = \frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{A_1A_3} + k\overrightarrow{B_1B_3}\right)$$

$$= k.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{B_1B_3}\right) = k\overrightarrow{M_1M_3} \text{ (đpcm).}$$

Trở lại bài **T9/ 402** (h.3).




*Hình 3*

Qua $A$ kẻ đường thẳng song song với $BC$. Đường thẳng này theo thứ tự cắt $DE$, $DF$ tại $X$, $Y$ và theo thứ tự cắt các đường tròn đường kính $AC$, $AB$ tại $Z$, $T$ (khác $A$).

Vì các bộ bốn điểm $(K, D, A, T)$; $(L, D, A, Z)$ cùng thuộc một đường tròn nên

$$\overline{XK}.\overline{XD} = \overline{XA}.\overline{XT}; \ \overline{YL}.\overline{YD} = \overline{YA}.\overline{YZ}.$$

Từ đó, chú ý rằng $\overline{XA} = -\overline{YA}$ (theo bổ đề 1), suy ra

$$\frac{\overline{XK}}{\overline{YL}}.\frac{\overline{XD}}{\overline{YD}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{YA}}.\frac{\overline{XT}}{\overline{YZ}} = -\frac{\overline{XT}}{\overline{YZ}} \qquad (1)$$

Mặt khác, vì $XA \,//\, DC$; $YA \,//\, DB$ và $\overline{XA} = \overline{AY}$; $\overline{CD} = \overline{ZA}$ (vì $AZCD$ là hình chữ nhật); $\overline{YA} = \overline{AX}$; $\overline{BD} = \overline{TA}$ (vì $ATBD$ là hình chữ nhật) nên, theo định lí Thales, ta có

$$\frac{\overline{XE}}{\overline{XD}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{XA} + \overline{CD}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{AY} + \overline{ZA}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{ZY}};$$

$$\frac{\overline{YF}}{\overline{YD}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{YA} + \overline{BD}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{AX} + \overline{TA}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{TX}}.$$



https://tieulun.hopto.org

Để chứng minh BĐT (3), ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $a > 2$ và $x > y > 0$ (khi $a = 2$ hoặc $x = y$ thì (3) chính là hằng đẳng thức). Cố định $y > 0$, xét hàm số

$f(x) = 2^{a-1}(x^a + y^a) - \left((x+y)^a + (x-y)^a\right)$,

với $x > y > 0$.

Ta có $f'(x) = ax^{a-1}\left(2^{a-1} - g\left(\frac{y}{x}\right)\right)$, trong đó $g(t) = (1+t)^{a-1} + (1-t)^{a-1}$ là hàm đồng biến trong $[0;1]$ nên $g(t) \le g(1) = 2^{a-1}$ với mọi $t \in [0;1]$. Do đó $f'(x) \ge 0$ với mọi $x > y$ và $f(x) \ge f(y) \ge 0$ (đpcm).

*Kết luận.* $a \ge 2$. ❐

➢**Nhận xét.** Bài này cũng chính là nội dung đã đăng trong số T10/328. Các bạn sau có lời giải đúng:

**Yên Bái:** *Hà Tuấn Dũng*, 11K, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Nam Định:** *Vũ Ngọc Linh*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Anh Thắng*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn, *Lê Văn Tuấn Anh*, 10A1, THPT Nông Cống I; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Hoàng*, *Lê Đình Tuấn*, 11T7, THPT Đô Lương I, Đô Lương; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lương Xuân Vinh*, 12CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài L1/402.** *Một con lắc lò xo gồm một vật nhỏ khối lượng 0,02kg và lò xo có độ cứng k = 1N/m. Vật nhỏ được đặt trên giá đỡ cố định nằm ngang dọc theo trục lò xo. Hệ số ma sát trượt giữa giá đỡ và vật nhỏ là 0,1. Ban đầu giữ vật ở vị trí lò xo bị nén 10cm rồi buông nhẹ để con lắc dao động tắt dần. Lấy g = 10m/s². Tốc độ lớn nhất của vật nhỏ đạt được trong quá trình dao động là bao nhiêu?*

***Lời giải.*** Do có ma sát nên cơ năng của con lắc lò xo bị giảm dần. Vận tốc của vật sẽ đạt cực đại tại vị trí cân bằng trong nửa chu kì đầu tiên. Tại vị trí này độ nén của lò xo bằng $\Delta l$, ta có $k\Delta l = \mu mg$ suy ra

$$\Delta l = \frac{\mu mg}{k} = \frac{0,1.0,02.10}{1} = 0,02(\text{m}).$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$\frac{1}{2}k(\Delta l_0)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + \frac{mv_{\max}^2}{2} + \mu mg(\Delta l_0 - \Delta l),$$

trong đó $\Delta l_0$ là độ nén ban đầu của lò xo.

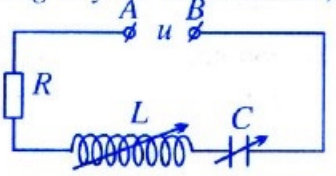
Thay số vào ta tính được $v_{max} = 0,4\sqrt{2}$ m/s. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải và hầu hết cho kết quả đúng. Một số bạn dùng cách lập phương trình dao động nên lời giải khá dài dòng.

2) Các bạn có lời giải đúng và ngắn gọn: **Thái Nguyên:** *Ngô Thượng Thủy*, 12A1, THPT Phổ Yên; **Nam Định:** *Vũ Bảo Chung*, 12C10, THPT Hải Hậu; **Thanh Hóa:** *Mai Văn Tùng*, 12A1, THPT Hậu Lộc 4; *Bùi Thị Thúy*, 12A3, THPT Lê Hoàn I, Thọ Xuân; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I; **Quảng Ngãi:** *Phạm Quốc Việt*, 11B1, THPT Bình Sơn; **Cần Thơ:** *Nguyễn Long Phước Đường*, 12A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★**Bài L2/402.** *Đặt vào hai đầu mạch điện A và B một hiệu điện thế xoay chiều u có tần số góc ω biến thiên. Điện dung C của tụ điện và hệ số tự cảm L của ống dây có thể biến đổi, điện trở R = 20Ω.*




*1) Khảo sát sự biến thiên của cường độ dòng điện hiệu dụng I theo ω (khi L và C có giá trị xác định).*

*2) Điều chỉnh L và C ta thấy khi* $L = \frac{1}{\pi}$H *và* $C = \frac{1}{\pi}.10^{-3}$F *thì I trong mạch cực đại. Xác định ω và* $I_{\max}$. *Biết hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu mạch điện là U = 120V.*

*3) Cho f biến thiên từ 20Hz đến 80Hz. Hãy xác định I theo cận dưới và cận trên của f, với L và C đã cho như câu 2).*

***Lời giải.*** 1) *Khảo sát sự biến thiên của I theo ω :*

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$= U.\left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Lấy đạo hàm của $I$ theo $\omega$, ta được



https://tieulun.hopto.org

$$\frac{dI}{d\omega} = U\left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \times \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)\left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right).$$

Khi $\frac{1}{C\omega} > L\omega \Rightarrow \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ thì $I$ đồng biến khi $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ thì $I_{\max}$.

Khi $\frac{1}{C\omega} < L\omega \Rightarrow \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ thì $I$ nghịch biến.

2) Khi $L = \frac{1}{\pi}$H; $C = \frac{1}{\pi}.10^{-3}$F thì $I_{\max}$.

Khi đó $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}.\frac{1}{\pi}.10^{-3}}}$.

Suy ra $\omega = \pi.10\sqrt{10}\text{rad/s}$.

Dòng cực đại $I_{max} = \frac{U}{R} = \frac{120}{20} = 6(\text{A})$.

3) Khi $f = 20$Hz thì $\omega = 2\pi f = 40\pi$. Ta có

$$Z_{L_1} = \frac{1}{\pi}.40\pi = 40(\Omega);\ Z_{C_1} = \frac{1}{\frac{1}{\pi}.10^{-3}.40\pi} = 25(\Omega).$$

Vậy $I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{120}{\sqrt{20^2 + (40-25)^2}} = 4{,}8(\text{A})$.

Khi $f = 80$(Hz) thì $\omega = 2\pi f = 160\pi$. Ta có

$$Z_{L_2} = \frac{1}{\pi}.160\pi = 160(\Omega);$$

$$Z_{C_2} = \frac{1}{\frac{1}{\pi}.10^{-3}.160\pi} = 6{,}25(\Omega).$$

Vậy $I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{120}{\sqrt{20^2 + (160-6{,}25)^2}} \approx 0{,}77(\text{A})$. ❐

➢ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Nam Định**: *Bùi Xuân Hiển*, 11 Lí, *Lê Quang Trung*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** *Vũ Toàn Thắng*, 12A1, THPT Phả Lại, Chí Linh; **Thái Bình:** *Nguyễn Thị Minh Hương*, 12A, THPT Lí Bôn; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 12A3, THPT Hậu Lộc I, *Mai Văn Tùng*, 12A1, THPT Hậu Lộc 4; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I; **Kon Tum**: *Nguyễn Bùi Việt Cường*, 12A1, THPT Đăk Hà; **Bình Định:** *Phạm Minh Thái*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phạm Quang Dũng*, 11 Lí, Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP Hồ Chí Minh.

NGUYỄN VĂN THUẬN

---

***ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG***

Trong lời giải bài T4/401, từ ĐK $xyz \ge 0$, $xy \ge 0$, $yz \ge 0$, $xz \ge 0$ chưa thể suy ra được $x \ge 0$, $y \ge 0$. $z \ge 0$.

Xin sửa lại lời giải như sau:

a) Nếu trong ba số $x$, $y$, $z$ có ít nhất một số bằng 0, chẳng hạn $x = 0$ thì PT có dạng $y + z = 2(\sqrt{yz} - 2)$ (*)

ĐK $yz \ge 0$, xảy ra hai khả năng

+ Nếu $y \ge 0, z \ge 0$ thì (*) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 = -4$ (vô lí).

+ Nếu $y \le 0, z \le 0$ thì (*) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{-y} + \sqrt{-z}\right)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-y} + \sqrt{-z} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{z} \ge 0 \\ y = -\left(2 - \sqrt{z}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = a \\ y = -\left(2 - \sqrt{-a}\right)^2 \end{cases} \text{ với } -4 \le a \le 0.$$

Vậy $(x;y;z) = \left(0; -\left(2 - \sqrt{a}\right)^2; a\right)$ với $-4 \le a \le 0$ và các hoán vị của nó (1)

b) Nếu cả ba số $x$, $y$, $z$ đều khác 0 thì từ ĐK $xyz < 0$, $xy > 0$, $yz > 0$, $xz > 0$ suy ra $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Suy luận như lời giải cũ tìm được $(x;y;z) = (4;4;4)$ (2)

Vậy PT đã cho có nghiệm $(x;y;z)$ ở (1) và (2).

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

**Các bạn nhớ đặt mua TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ cho Quý II năm 2011 và CÁC ẤN PHẨM CỦA TÒA SOẠN tại các bưu điện trên cả nước**



https://tieulun.hopto.org

## PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

**T7/406.** Solve the equation
$f(g(x)) + g(2+f(x)) = 23$, where

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-4x+9;\ g(x)=\begin{cases}14 \text{ iff } x\ge 3\\ 2^x+\dfrac{12}{5-x} \text{ iff } x<3.\end{cases}$$

**T8/406.** Let $ABC$ be a triangle; $h_a, h_b, h_c$ are the lengths of the three altitudes; $R$ and $r$ are its circumradius and inradius, respectively. Prove the inequality

$$h_a+h_b+h_c-9r\le 2(R-2r).$$

### TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

**T9/406.** In convex quadrilateral $ABCD$, the diagonals $AC$ and $BD$ meet at $O$. The circumcircles of triangles $ABC$, $ACD$ cut the rays $OD$, $OB$ at $E$, $F$ respectively. Prove that quadrangle $ABCD$ is circumscribed if and only if the quadrangle $AECF$ is circumscribed.

**T10/406.** A sequence $(u_n)$ is given by $u_1 = a$ and $u_{n+1}=\dfrac{k+u_n}{1-u_n}$, (where $k>0$) for all $n\in\mathbb{N}^*$. If $u_{13}=u_1$, find all possible values of $k$.

**T11/406.** Let $(x_n)$ be a sequence given by: $x_1=0$, $x_{n+1}=\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x_n}$ for all $n\in\mathbb{N}^*$. Prove that the sequence converges and find its limit.

**T12/406.** Let $X=\{0, 1, 2, 3, ..., n\}$ where $n$ is a positive number. If $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$ in $X^3$, denote $xRy$ if $x_k\le y_k$ for $k=1, 2, 3$. Find the smallest positive integer $p$ such that any subset $A$ of $X^3$ containing $p$ elements has the following property: If $x, y$ are any two elements in $A$, then either $xRy$ or $yRx$.

Translated by LE MINH HA

---

## HƯỚNG DẪN GIẢI... *(Tiếp trang 9)*

*Đáp số.* $M\left(1+2\sqrt{\dfrac{3}{923}};2+58\sqrt{\dfrac{3}{923}};18\sqrt{\dfrac{3}{923}}\right)$.

**Câu VIIa.** Giả sử $z=a+bi$ có điểm biểu diễn là $M(a;b)$ và $z'=2z+3-i$ có điểm biểu diễn là $N(x;y)$.

Ta suy ra $a=\dfrac{1}{2}(x-3);\ b=\dfrac{1}{2}(y+1)$ (1)

Và $|3z+i|^2\le z\bar{z}+9$

$\Leftrightarrow (3a)^2+(3b+1)^2\le a^2+b^2+9$ (2)

Thay các giá trị của $a; b$ từ (1) vào (2) suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z'=2z+3-i$ là hình tròn tâm $I\left(3;-\dfrac{7}{4}\right)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{73}}{4}$. ❐

**Câu VIb.** 1) Đường tròn $(C_1)$ có tâm $O(0;0)$, bán kính $R_1=3$. Giả sử $(C_1)$ cắt $(C_2)$ ở $A$ và $B$. Gọi $H$ là trung điểm $AB$. Khi đó $AB=2AH=2\sqrt{OA^2-OH^2}=2\sqrt{9-OH^2}$, mà $OH\le OM=\sqrt{5}$ nên $AB\ge 4$, suy ra $\min AB=4$ $\Leftrightarrow M\equiv H$. Từ đó viết được hai PT $(C_2)$ thoả mãn đề bài là

$$\left(x-2-4\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2+\left(y+1+2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2=16 \text{ và}$$

$$\left(x-2+4\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2+\left(y+1-2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2=16.$$

2) Ta có $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC.BD.\sin(\widehat{AC,BD})$

$=\dfrac{1}{2}.3.4.\sqrt{\dfrac{125}{126}}=\dfrac{5\sqrt{70}}{7}$. Do $S_{ABCD}=2011.S_{IAD}$ nên $S_{IAD}=\dfrac{5\sqrt{70}}{14077}$. Ta tìm được $I\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right)$, $IA=\dfrac{3}{5}$. Lại có $S_{IAD}=\dfrac{1}{2}IA.d(D;AC)$ nên $d(D;AC)=\dfrac{50\sqrt{70}}{42231}$. ❐

**Câu VIIb.** Giả sử $z=x+yi$ có điểm biểu diễn là $M(x;y)$. Gọi $F_1(-2;0)$; $F_2(2;0)$. Khi đó $|z+2|+|\bar{z}-2|=6\Leftrightarrow MF_1+MF_2=6$. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z$ là elip có PT $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$. ❐

ĐỖ BÁ CHỦ
*(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)*



https://tieulun.hopto.org

# KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT
# NĂM 2011 - MÔN TOÁN

NGUYỄN KHẮC MINH
*(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ Giáo dục và Đào tạo)*

***Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT năm 2011 đã được tổ chức trong các ngày 11 và 12/ 01/ 2011, cho 12 môn học. Tham dự kì thi, ở môn Toán có 412 học sinh (nhiều hơn 9 học sinh so với năm 2010) thuộc 68 đơn vị dự thi (mỗi đơn vị dự thi là một tỉnh, thành phố trực thuộc Trung ương hoặc Trường Đại học có khối, trường THPT chuyên).***

## 1. PHƯƠNG THỨC TỔ CHỨC KÌ THI

Khác với các năm từ 2007 đến 2010, rút kinh nghiệm công tác tổ chức thi trong các năm vừa qua, căn cứ đề nghị của các đơn vị và giới chuyên môn các môn học, Lãnh đạo Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định tổ chức kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT năm 2011 và các năm tiếp theo theo phương thức đã được áp dụng trong những năm từ 2006 trở về trước. Cụ thể, đối với các môn Toán, Vật lí, Hóa học, Sinh học và Tin học: tổ chức thi trong hai ngày, mỗi ngày một buổi thi; đối với các môn còn lại: tổ chức thi trong một ngày với một buổi thi. Thời gian làm bài của mỗi buổi thi là 180 phút. Điểm tối đa cho mỗi ngày thi là 20 điểm.

## 2. CẤU TRÚC ĐỀ THI

Do phương thức tổ chức thi thay đổi nên Cấu trúc đề thi phải thay đổi là điều tất yếu. Cấu trúc đề thi áp dụng cho năm 2011 và các năm tiếp theo được xây dựng dựa trên các nguyên tắc sau:

– Đảm bảo chọn đúng học sinh giỏi Toán;

– Nội dung đề thi phải bao trùm đầy đủ các phân môn: Đại số, Giải tích, Hình học, Số học và Tổ hợp;

– Góp phần tích cực vào việc động viên, duy trì và phát triển phong trào học Toán của học sinh phổ thông;

– Cập nhật xu thế chung của Quốc tế, tạo tiền đề tốt cho việc tuyển chọn học sinh dự thi Olympic Toán học Quốc tế;

– Có tính kế thừa cấu trúc đề thi của những năm gần đây, nhằm tạo điều kiện thuận lợi cho giáo viên và học sinh trong việc chuẩn bị cho kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT môn Toán.

***Cấu trúc đề thi*** cụ thể như sau:

• ***Đề thi cho ngày thi thứ nhất***: gồm bốn bài toán; cụ thể như sau:

- Một bài về phân môn Đại số;
- Một bài về phân môn Giải tích;
- Một bài về phân môn Hình học;
- Một bài về phân môn Tổ hợp.

*Phân bố điểm cho các bài: Mỗi bài 5.0 điểm.*

• ***Đề thi cho ngày thi thứ hai***: gồm ba bài toán; cụ thể như sau:

- Một bài về phân môn Đại số;
- Một bài về phân môn Số học;
- Một bài về phân môn Tổ hợp hoặc Hình học.

*Phân bố điểm cho các bài: Một bài 6.0 điểm; hai bài còn lại, mỗi bài 7.0 điểm.*

*Chú ý: Các phân môn trong Cấu trúc trên được sắp xếp theo thứ tự từ điển. Các bài toán trong đề thi không nhất thiết phải sắp xếp theo thứ tự đã liệt kê ở trên.*

## 3. ĐỀ THI

### Ngày thi thứ nhất (11/01/2011)

**Bài 1.** (5,0 *điểm*). *Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \le \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

*Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?*

**Bài 2.** (5,0 *điểm*). *Cho dãy số thực* $(x_n)$ *xác định bởi* $x_1=1$ *và* $x_n=\frac{2n}{(n-1)^2}.\sum_{i=1}^{n-1}x_i$ *với mọi* $n \ge 2$.

*Với mỗi số nguyên dương n, đặt* $y_n = x_{n+1} - x_n$.



https://tieulun.hopto.org

*Chứng minh rằng dãy số $(y_n)$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.*

**Bài 3.** (5,0 điểm). *Trong mặt phẳng, cho đường tròn $(O)$ đường kính $AB$. Xét một điểm $P$ di động trên tiếp tuyến tại $B$ của $(O)$ sao cho $P$ không trùng với $B$. Đường thẳng $PA$ cắt $(O)$ tại điểm thứ hai $C$. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $C$ qua $O$. Đường thẳng $PD$ cắt $(O)$ tại điểm thứ hai $E$.*

1) *Chứng minh rằng các đường thẳng $AE$, $BC$ và $PO$ cùng đi qua một điểm. Gọi điểm đó là $M$.*

2) *Hãy xác định vị trí của điểm $P$ sao cho tam giác $AMB$ có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo bán kính của đường tròn $(O)$.*

(*$(O)$ kí hiệu đường tròn tâm $O$*).

**Bài 4.** (5,0 điểm). *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có độ dài mỗi cạnh và độ dài các đường chéo $AC$, $AD$ không vượt quá $\sqrt{3}$. Lấy 2011 điểm phân biệt tùy ý nằm trong ngũ giác đó. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn đơn vị có tâm nằm trên cạnh của ngũ giác đã cho chứa ít nhất 403 điểm trong số các điểm đã lấy.*

### Ngày thi thứ hai (12/01/2011)

**Bài 5.** (7,0 điểm). *Cho dãy số nguyên $(a_n)$ xác định bởi $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ và $a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011.*

**Bài 6** (7,0 điểm). *Cho tam giác $ABC$ không cân tại $A$ và có các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ là các góc nhọn. Xét một điểm $D$ di động trên cạnh $BC$ sao cho $D$ không trùng với $B$, $C$ và hình chiếu vuông góc của $A$ trên $BC$. Đường thẳng $d$ vuông góc với $BC$ tại $D$ cắt các đường thẳng $AB$ và $AC$ tương ứng tại $E$ và $F$. Gọi $M$, $N$ và $P$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $AEF$, $BDE$ và $CDF$. Chứng minh rằng bốn điểm $A$, $M$, $N$, $P$ cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi đường thẳng $d$ đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.*

**Bài 7.** (6,0 điểm). *Cho $n$ là số nguyên dương. Chứng minh rằng đa thức*

$$P(x,y) = x^n + xy + y^n$$

*không thể viết được dưới dạng*

$$P(x,y) = G(x,y).H(x,y),$$

*trong đó $G(x, y)$ và $H(x, y)$ là các đa thức với hệ số thực, khác đa thức hằng.*

## 4. CHẤM THI

Việc chấm thi được tiến hành từ ngày 18/02 đến ngày 28/02/2011, tại Hà Nội. Tổ chấm thi môn Toán đã làm việc với tinh thần trách nhiệm cao, đảm bảo đánh giá chính xác, khách quan, công bằng bài làm của các thí sinh, theo thang điểm đã được Lãnh đạo Ban chấm thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT năm 2011 phê chuẩn. Cũng như nhiều chục năm trước, tại kì thi năm nay bài làm của các thí sinh môn Toán ***không bị trừ điểm trình bày*** !

## 5. CHẤT LƯỢNG LÀM BÀI CỦA THÍ SINH

Các số liệu thống kê dưới đây sẽ giúp độc giả có thể hình dung khái quát về tình hình làm bài của các thí sinh.

| *Điểm thi* | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 | 4.5 | 5.0 | 5.5 | 6.0 | 6.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Ngày 1* | 31 | 11 | 10 | 6 | 8 | 17 | 22 | 13 | 13 | 16 | 21 | 12 | 16 | 10 |
| *Ngày 2* | 58 | 15 | 9 | 3 | 83 | 38 | 43 | 14 | 10 | 5 | 7 | 12 | 33 | 16 |
| *Hai ngày* | 11 | 2 | 2 | 1 | 19 | 9 | 11 | 8 | 7 | 11 | 13 | 13 | 10 | 14 |

| *Điểm thi* | 7.0 | 7.5 | 8.0 | 8.5 | 9.0 | 9.5 | 10 | 10.5 | 11 | 11.5 | 12 | 12.5 | 13 | 13.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Ngày 1* | 6 | 16 | 26 | 14 | 12 | 13 | 7 | 16 | 14 | 7 | 7 | 9 | 17 | 3 |
| *Ngày 2* | 25 | 9 | 4 | 2 | 2 | 1 | 6 | 1 | 4 | 7 | 2 | 2 | 1 | 0 |
| *Hai ngày* | 9 | 13 | 16 | 12 | 11 | 10 | 10 | 13 | 12 | 11 | 11 | 7 | 10 | 10 |

| *Điểm thi* | 14 | 14.5 | 15 | 15.5 | 16 | 16.5 | 17 | 17.5 | 18 | 18.5 | 19 | 19.5 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Ngày 1* | 7 | 3 | 10 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 4 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| *Ngày 2* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *Hai ngày* | 13 | 8 | 9 | 8 | 6 | 7 | 9 | 3 | 7 | 3 | 4 | 2 | 3 |



https://tieulun.hopto.org

(Trong bảng thống kê trên, số thí sinh có điểm lẻ 0.25 được tính gộp vào số thí sinh có điểm lẻ 0.5; số thí sinh có điểm lẻ 0.75 được tính gộp vào số thí sinh có điểm nguyên gần nhất).

Xét theo từng bài toán thi, nếu với mỗi $n=\overline{1,7}$ kí hiệu $s(n)$ và $l(n)$ tương ứng là số thí sinh đạt điểm tối đa hoặc gần tối đa và số thí sinh đạt điểm 0 hoặc 0.25 hoặc 0.5 ở Bài $n$ của đề thi, ta có: $s(1) = 212$, $s(2) = 55$, $s(3) = 68$, $s(4) = 31$, $s(5) = 30$, $s(6) = 20$ và $s(7) = 0$; $l(1) = 141$, $l(2) = 191$, $l(3) = 145$, $l(4) = 332$, $l(5) = 105$, $l(6) = 317$ và $l(7) = 399$.

Căn cứ các số liệu nêu trên và các thông tin chuyên môn thu được trong quá trình chấm thi, Tổ chấm thi đã nhất trí nhận định: *Chất lượng làm bài của các thí sinh năm nay có chiều hướng đi xuống* (so với các năm gần đây), *nhiều thí sinh chưa nắm vững một số vấn đề cơ bản* (trong phạm vi chương trình môn Toán THPT hiện hành).

## 6. KẾT QUẢ VÀ GIẢI THƯỞNG

Nhìn chung, kết quả của kì thi năm nay không được khả quan như mong đợi. Thiết nghĩ, việc có tới hơn 100 thí sinh không thể giải được trọn vẹn một bài toán trong ngày thi thứ nhất là điều mà ngay cả người ít lạc quan nhất cũng khó có thể nghĩ tới ! Tuy nhiên, trên nền chung không mấy sáng sủa của bức tranh toàn cảnh cũng có thể thấy những tín hiệu đáng phấn khởi. Chẳng hạn, việc có hơn 10 thí sinh đạt điểm tối đa hoặc gần tối đa ở ngày thi thứ nhất, hay việc có hơn 30 thí sinh đạt điểm tối đa ở bài Tổ hợp là những tín hiệu như vậy.

Căn cứ Quy chế hiện hành và kết quả chấm thi, nhằm mục đích vừa đảm bảo chất lượng chuyên môn cho danh hiệu "học sinh giỏi Toán cấp Quốc gia", vừa khích lệ, cổ vũ phong trào học sinh giỏi Toán trên phạm vi toàn quốc, Bộ GD&ĐT, theo đề nghị của Tổ chấm thi môn Toán và Ban chấm thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT năm 2011, đã quyết định trao giải cho 210 thí sinh (chiếm 50,97% tổng số thí sinh), với mức điểm cho mỗi loại giải như sau:

- Giải Nhất: từ 30 điểm đến 40 điểm;
- Giải Nhì: từ 20.25 điểm đến 29.75 điểm;
- Giải Ba: từ 15.00 điểm đến 20.00 điểm;
- Giải Khuyến khích: từ 10.00 điểm đến 14.75 điểm.

Theo đó, có hai thí sinh (*Nguyễn Văn Dương*, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Tỉnh Hải Dương, 31.50 điểm; *Vũ Đình Long*, Trường THPT chuyên Tự nhiên, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội, 30.75 điểm) được trao giải Nhất, 40 thí sinh được trao giải Nhì, 62 thí sinh được trao giải Ba và 106 thí sinh được trao giải Khuyến khích.

Danh sách các thí sinh đạt giải đã được công bố trên trang tin điện tử của Bộ Giáo dục và Đào tạo (http://www.moet.gov.vn).

Căn cứ Quy chế hiện hành và kết quả chấm thi, Bộ GD&ĐT đã quyết định triệu tập 42 thí sinh có tổng điểm thi hai ngày từ 20.25 điểm trở lên tham dự Kì thi chọn học sinh vào Đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 52 năm 2011. Kì thi này được tổ chức trong hai ngày, 09 và 10/4/2011, tại Hà Nội.

## TIN TỨC

● Vào ngày 2/4/2011 tại Đồ Sơn, Hải Phòng, *Vụ Giáo dục Trung học, Dự án Phát triển giáo viên THPT & TCCN, Bộ Giáo dục và Đào tạo* phối hợp đã tổ chức Hội thảo *xây dựng mạng lưới giáo viên cốt cán toàn quốc các môn chuyên trong hệ thống trường THPT chuyên*. Tham dự Hội thảo có hơn 300 đại biểu thuộc Sở GD-ĐT và giáo viên cốt cán các trường THPT chuyên trong cả nước. Hội thảo được nhiều sự hưởng ứng của các nhà Khoa học, các nhà Quản Lí, Giảng viên các trường Đại học. Ban tổ chức Hội thảo đã nhận được nhiều báo cáo tham luận của Cán bộ Quản lí và Giáo viên các trường THPT chuyên trong cả nước - Những người trực tiếp thực hiện quản lí các hoạt động của người giáo viên cốt cán và quyết định chất lượng, hiệu quả của công tác giáo dục học sinh chuyên. Có 25 báo cáo chính được trình bày ở Hội thảo lần này.

● Ngày 25/3/2011 vừa qua, các cán bộ Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ* cùng Tạp chí *Toán Tuổi thơ* đã thăm và làm việc với Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Giang. Sau khi nghe Phó Giám đốc *Hoàng Đình Dựng* giới thiệu về giáo dục của tỉnh nhà, đoàn đã đi thăm Trường THPT chuyên Hà Giang và Trường THCS Yên Biên - đây là các trường điển hình về phong trào dạy tốt, học tốt của tỉnh Hà Giang.

PV



https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath


# Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
## Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 406 (4.2011)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

*GS. TSKH.* NGUYỄN CẢNH TOÀN
*GS. TSKH.* TRẦN VĂN NHUNG
*TS.* NGUYỄN VĂN VỌNG
*GS.* ĐOÀN QUỲNH
*PGS. TS.* TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
*NGƯT.* NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
*TS.* NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập :* TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC** ***Thư kí Tòa soạn :* ThS. HỒ QUANG VINH**

*TS.* TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* TRẦN HỮU NAM, *PGS. TS.* NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.


## TRONG SỐ NÀY


1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
*Vũ Hữu Bình* – Lựa chọn cách giải hợp lí cho phương trình nghiệm nguyên.

3 Hướng dẫn giải Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, năm học 2010 – 2011.

4 Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, năm học 2010 – 2011.

5 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
*Lê Hồ Quý* – Cách giải một số dạng toán cơ bản về xác suất.

8 **Thử sức trước kì thi – *Đề số 7.***

9 ***Hướng dẫn giải Đề số 6.***

10 Hướng dẫn ôn tập môn Vật lí thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2011.

12 **Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contributions**
*Lê Thị Thu Huyền, Phùng Thị Oanh, Tạ Duy Phượng* – Sáng tạo và chứng minh các hệ thức lượng giác trong tam giác nhờ phép biến đổi tuyến tính góc. (Tiếp theo kì trước).

15 **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**

15 **Giải trí toán học – Math Recreation**

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/406 ..., T12/406, L1/406, L2/406.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 402.

29 *Nguyễn Khắc Minh* – Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT năm 2011 – môn Toán.


**Ảnh bìa 1:** Đoàn cán bộ Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ, Toán Tuổi thơ* thăm và làm việc tại trường THPT chuyên Hà Giang.

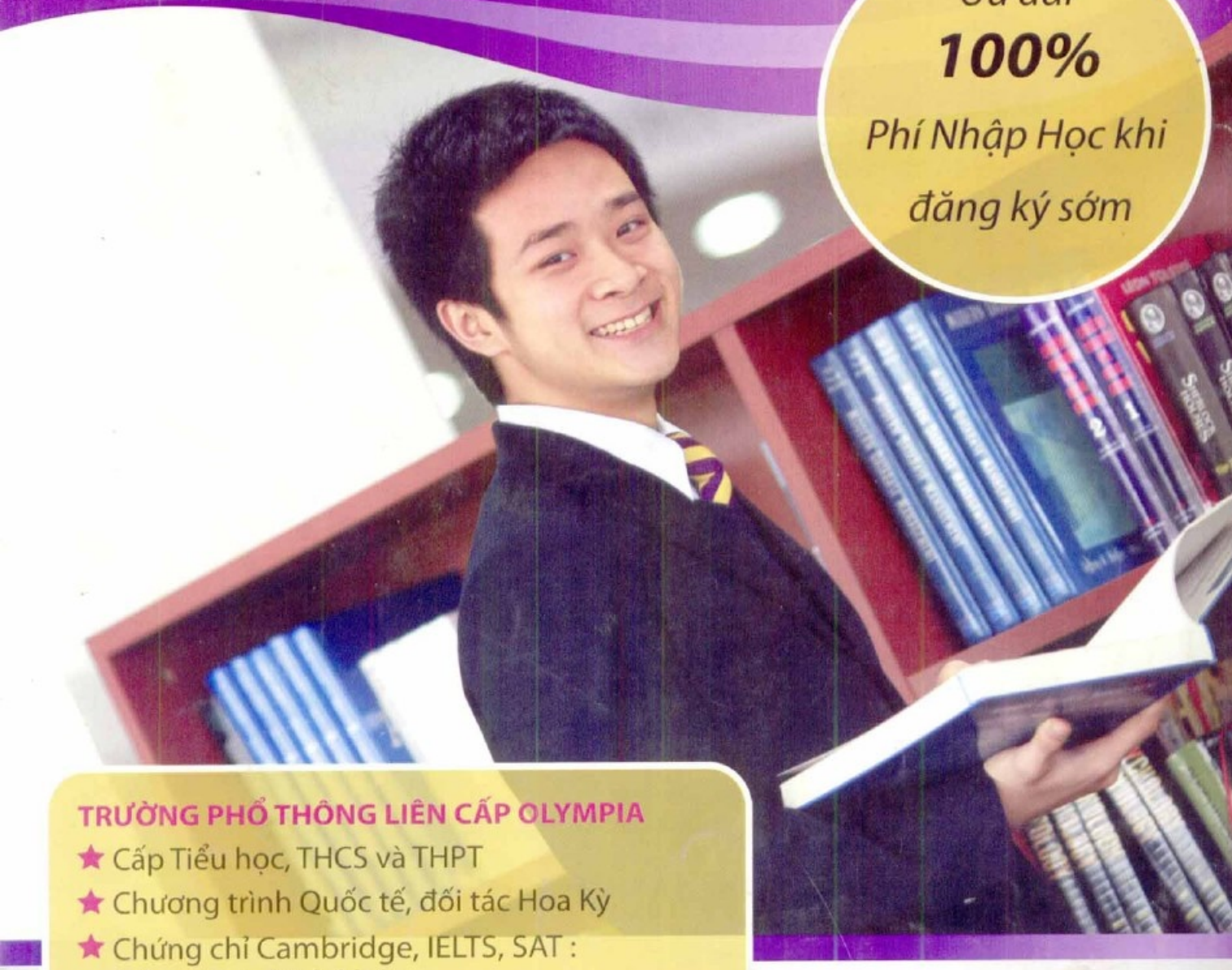

*Biên tập :* NGUYỄN THỊ THANH
*Trị sự, phát hành :* NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
*Mĩ thuật :* MINH THƠ
*Chế bản :* NGUYỄN THỊ OANH


https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath


# Không chỉ là KIẾN THỨC, OLYMPIA còn chuẩn bị HÀNH TRANG cho CUỘC SỐNG.

Ưu đãi
**100%**
Phí Nhập Học khi
đăng ký sớm



**TRƯỜNG PHỔ THÔNG LIÊN CẤP OLYMPIA**

- ★ Cấp Tiểu học, THCS và THPT
- ★ Chương trình Quốc tế, đối tác Hoa Kỳ
- ★ Chứng chỉ Cambridge, IELTS, SAT : Giảng dạy chính khóa
- ★ Chương trình Phát triển Toàn diện
- ★ Học bổng từ Chủ Tịch trường

**Lịch hội thảo:**

| Tháng 4/2011 | Tháng 5/2011 | Tháng 6/2011 | Tháng 7/2011 |
|---|---|---|---|
| Ngày 16 và 17 | Ngày 14 và 28 | Ngày 11 và 25 | Ngày 16 |

Đăng kí:
T: 04 6267 7999 | 04 6655 3843
www.theolympiaschools.edu.vn
Khu ĐTM Trung Văn, Đường Lê Văn Lương, HN


ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT04M1

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2011

Giá: Tám nghìn đồng

https://tieulun.hopto.org