



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BẢN TỪ 1964
2010
Số 401

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 47

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Tri sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



Chào mừng
NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM 20/11

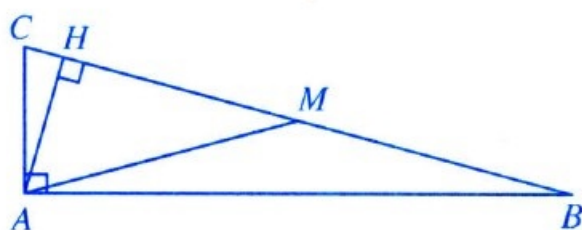
<https://tieulun.hopto.org>



VÀI ỨNG DỤNG của công thức tính $\tan 15^\circ$

HOÀNG ĐỨC NGUYỄN
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Trong bài báo “Về một tam giác vuông thú vị” đăng trên Tạp chí THPT số 387, tháng 9 năm 2009, ta đã xét tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ, \widehat{B} = 15^\circ$, đường trung tuyến AM và đường cao AH (h. 1). Ta đi tìm $\tan B$.



Hình 1

Vì tam giác MAB cân tại M , nên $\widehat{AMC} = 30^\circ$. Tam giác AHM vuông tại H có $\widehat{AMH} = 30^\circ$, suy ra $AH = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}BC$.

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC$
nên $AB \cdot AC = \frac{1}{4}BC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 4AB \cdot AC$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 4AB \cdot AC$$

$$\Leftrightarrow AC^2 - 4AC \cdot AB + AB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 - 4 \cdot \frac{AC}{AB} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 2 - \sqrt{3} \text{ (vì } AC < AB), \text{ hay}$$

$$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

Công thức này được ứng dụng khá nhiều trong giải toán, đặc biệt là các bài toán tính số đo của một góc. Sau đây là một số thí dụ áp dụng.

★ **Thí dụ 1.** Cho tam giác ABC cân tại B , $\widehat{B} = 30^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = \frac{AC \cdot \sqrt{2}}{2}$. Tính số đo góc CAD .

Lời giải. (h. 2)

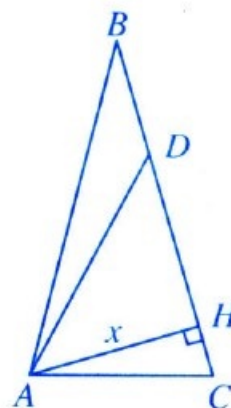
Kẻ $AH \perp BC$ và đặt $AH = x$. Tam giác ABH vuông tại H và $\widehat{B} = 30^\circ$ nên $AB = 2x$. Lại có

$$HC = AH \cdot \tan \widehat{HAC} = AH \cdot \tan 15^\circ = x(2 - \sqrt{3});$$

$$BH = AH \cdot \cot 30^\circ = x\sqrt{3};$$

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 4x^2(2 - \sqrt{3}).$$

Suy ra $AC = x(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \Rightarrow BD = x(\sqrt{3} - 1)$. Do đó $DH = x$, hay tam giác ADH vuông cân tại H nên $\widehat{DAH} = 45^\circ$, từ đó $\widehat{CAD} = 60^\circ$. $\square$



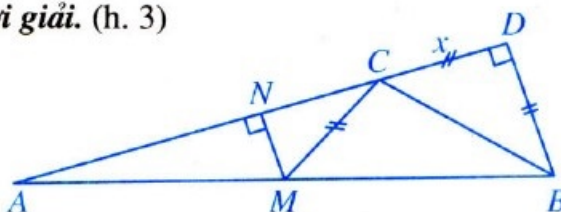
Hình 2

★ **Thí dụ 2.** Cho tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 15^\circ$; $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB .

a) Tính số đo góc ACM .

b) Chứng minh rằng $CM = \frac{AB \cdot BC}{2AC}$.

Lời giải. (h. 3)



Hình 3

a) Kẻ $MN \perp AC$, $BD \perp AC$, khi đó tam giác BCD vuông cân tại D .

Đặt $CD = BD = x$, ta có $CB = x\sqrt{2}$;

$$AD = \frac{DB}{\tan 15^\circ} = x(2 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow ND = \frac{x(2 + \sqrt{3})}{2} = x + \frac{\sqrt{3}x}{2};$$

$$NC = \frac{\sqrt{3}x}{2}; MN = \frac{x}{2}.$$

Lại có $MC^2 = MN^2 + NC^2 = x^2 \Rightarrow MC = x$.

Tam giác MNC vuông tại N và $MN = \frac{MC}{2}$

nên $\widehat{ACM} = 30^\circ$.

b) Ta có $AC = AD - CD = x(1 + \sqrt{3})$;

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 4x^2(2 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow AB = x(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Do đó

$$\frac{AB \cdot BC}{2AC} = \frac{x(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot x\sqrt{2}}{2x(1 + \sqrt{3})} = x = CM \text{ (đpcm)}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 3.** Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm P sao cho $PC = 2PB$. Tính số đo góc ACB nếu biết $\widehat{ABC} = 45^\circ$, $\widehat{APC} = 60^\circ$.

Lời giải. (h. 4)

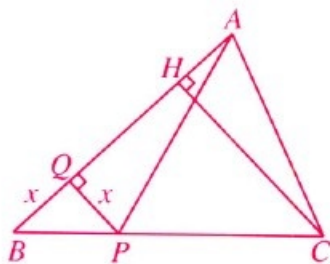
Kẻ $PQ \perp AB$;

$CH \perp AB$ thì

$\triangle HBC$ và $\triangle QBP$

vuông cân lần lượt tại H và Q .

Đặt $QB = QP = x$.



Hình 4

Suy ra

$$BP = x\sqrt{2}; QH = 2x; PC = 2\sqrt{2}x; HC = 3x.$$

Từ giả thiết tính được $\widehat{PAQ} = 15^\circ$, nên

$$AQ = \frac{PQ}{\tan 15^\circ} = x(2 + \sqrt{3}), \text{ do đó } AH = x\sqrt{3};$$

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 12x^2 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{3}x.$$

Tam giác AHC vuông tại H và

$$\frac{AH}{AC} = \frac{1}{2}, \text{ nên } \widehat{ACH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 75^\circ. \quad \square$$

★ **Thí dụ 4.** Cho tam giác ABC có E là trung điểm của BC sao cho $\widehat{EAB} = 15^\circ$; $\widehat{EAC} = 30^\circ$. Tính số đo góc ACB .

Lời giải. (h. 5)

Kẻ $EH \perp AB$;

$CD \perp AB$ thì tam giác ACD vuông cân tại D .

Đặt $DA = DC = x$,

suy ra $AC = x\sqrt{2}$;

$$EH = \frac{x}{2}; AH = \frac{EH}{\tan 15^\circ} = \frac{x(2 + \sqrt{3})}{2}$$

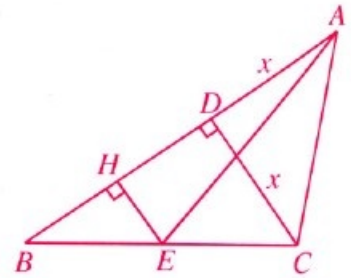
$$\Rightarrow DH = \frac{x\sqrt{3}}{2}; DB = 2DH = x\sqrt{3};$$

$$BC = \sqrt{DB^2 + DC^2} = 2x.$$

Tam giác BDC vuông tại D có $\frac{DC}{BC} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{CBD} = 30^\circ$, do đó $\widehat{BCD} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = 105^\circ. \quad \square$



Hình 5

★ **Thí dụ 5.** Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 105^\circ$ và $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$. Tính số đo các góc ABC và ACB .

Lời giải. Kẻ $BH \perp AC$, đặt $BH = x$, $HC = y$. Từ giả thiết ta có $\widehat{A} = 75^\circ$, suy ra $\widehat{ABH} = 15^\circ$. Xét hai khả năng xảy ra.

Trường hợp 1. Điểm H nằm giữa hai điểm A và C (h. 6).

Ta có

$$AH = BH \cdot \tan 15^\circ$$

$$= x(2 - \sqrt{3});$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$= 4x^2(2 - \sqrt{3})$$

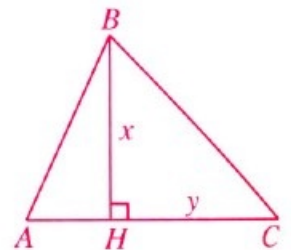
$$\Rightarrow AB = x(\sqrt{6} - \sqrt{2}); BC = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Giả thiết $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + (x(2 - \sqrt{3}) + y)\sqrt{2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(x + y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y.$$



Hình 6

(Xem tiếp trang 11)

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI NĂM HỌC 2010 - 2011

VÒNG 1

(Dành cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{3}{2} - \left(x^4 - \frac{x^4+1}{x^2+1} \right) \cdot \frac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6} \right) : \frac{x^2+29x+78}{3x^2+12x-36}$$

1) Rút gọn biểu thức A .

2) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho A có giá trị nguyên.

Câu 2. (2 điểm) Cho hai đường thẳng

$$(d_1): y = (2m^2 + 1)x + 2m - 1; (d_2): y = m^2x + m - 2,$$

với m là tham số.

1) Tìm tọa độ giao điểm I của (d_1) và (d_2) theo m .

2) Khi m thay đổi, chứng minh rằng điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 3. (2 điểm) Giả sử bộ ba số thực $(x; y; z)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x+1 = y+z \\ xy + z^2 - 7z + 10 = 0 \end{cases}$$

(I)

1) Chứng minh $x^2 + y^2 = -z^2 + 12z - 19$.

2) Tìm tất cả các bộ $(x; y; z)$ thỏa mãn hệ (I) sao cho $x^2 + y^2 = 17$.

Câu 4. (3 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a . Trong hình vuông đó lấy điểm K sao cho tam giác ABK đều. Các đường thẳng BK và AD cắt nhau tại P .

1) Tính độ dài đoạn thẳng KC theo a .

2) Trên đoạn thẳng AD lấy điểm I sao cho $DI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, các đường thẳng CI và BP cắt nhau tại H . Chứng minh tứ giác $CHDP$ nội tiếp một đường tròn.

3) Gọi M và L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CP và KD . Chứng minh $LM = \frac{a}{2}$.

(I)

Câu 5. (1 điểm) Giải phương trình $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6(x - 1)^2$.

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2 điểm)

1) Giả sử a và b là hai số dương khác nhau và thỏa mãn $a - b = \sqrt{1 - b^2} - \sqrt{1 - a^2}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 = 1$.

2) Chứng minh rằng

$$\sqrt{2009^2 + 2009^2 \times 2010^2 + 2010^2}$$

là một số nguyên dương.

Câu 2. (2 điểm) Giả sử bốn số thực a, b, c, d đôi một khác nhau và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

i) Phương trình $x^2 - 2cx - 5d = 0$ có hai nghiệm là a và b .

ii) Phương trình $x^2 - 2ax - 5b = 0$ có hai nghiệm là c và d .

Chứng minh rằng

1) $a - c = c - b = d - a$.

2) $a + b + c + d = 30$.

Câu 3. (2 điểm) Giả sử m và n là những số nguyên dương với $n > 1$. Đặt $S = m^2n^2 - 4m + 4n$. Chứng minh rằng

1) Nếu $m > n$ thì $(mn^2 - 2)^2 < n^2S < m^2n^4$.

2) Nếu S là số chính phương thì $m = n$.

(Xem tiếp trang 12)



Cách giải. Giả sử $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số đã cho sao cho $x_A < x_0 < x_B$ với $x_0 = -\frac{q}{p}$.

Đặt $x_A = x_0 - a$; $x_B = x_0 + b$ ($a > 0; b > 0$); Tính AB^2 theo a, b ; Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương để suy ra kết quả.

Một số dạng toán

VỀ KHOẢNG CÁCH LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , giả sử $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Khi đó

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

- Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $(\Delta) ax + by + c = 0$, ($a^2 + b^2 \neq 0$) là

$$d(M; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- Hai đường thẳng $y = a_1x + b_1$ và $y = a_2x + b_2$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a_1 \cdot a_2 = -1$.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Trong phần này, ta nêu các dạng toán liên quan đến hàm phân thức $y = \frac{mx + n}{px + q}$. Đối với

hàm số $y = \frac{mx^2 + nx + k}{px + q}$ cách giải hoàn toàn tương tự.

I. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số phân thức

★ **Bài toán 1.** Giả sử A, B là hai điểm trên hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{mx + n}{px + q}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách AB .

Độ dài đoạn AB nhỏ nhất khi AB đi qua giao điểm hai đường tiệm cận và là phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị. □

★ **Thí dụ 1.** Giả sử A, B là hai điểm nằm trên hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách AB .

Lời giải. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -2$. Giả sử $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số đã cho, với $x_A < -2 < x_B$.

Đặt $x_A = -2 - a$; $x_B = -2 + b$ với $a > 0, b > 0$.

Ta có $y_A = 1 + \frac{1}{a}$; $y_B = 1 - \frac{1}{b}$;

$$AB^2 = (a+b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = (a+b)^2 \left(1 + \frac{1}{a^2b^2}\right).$$

Từ BĐT Cauchy cho hai số dương, ta được

$$\begin{aligned} AB^2 &= (a+b)^2 \left(1 + \frac{1}{a^2b^2}\right) \geq 4ab \left(1 + \frac{1}{a^2b^2}\right) \\ &= 4 \left(ab + \frac{1}{ab}\right) \geq 8. \end{aligned}$$

Từ đó $\min AB = 2\sqrt{2}$ khi $a = b = 1$, tương ứng với hai điểm $A(-3; 2)$ và $B(-1; 0)$. $\square$

II. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai giao điểm của một đường thẳng với đồ thị của hàm số phân thức

★ **Bài toán 2.** Cho hàm số $y = \frac{mx+n}{px+q}$ (1)

và đường thẳng $y = ax + b$ (2), trong đó a, b có chứa tham số. Chứng minh rằng đường thẳng có PT (2) luôn cắt đồ thị của hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh. Tìm giá trị nhỏ nhất độ dài đoạn AB .

Cách giải. Xét PT hoành độ giao điểm

$$\frac{mx+n}{px+q} = ax+b;$$

Biến đổi về một PT bậc hai $f(x) = 0$; Chứng

tỏ rằng $\Delta > 0$; $f(x_0) \neq 0 \left(x_0 = -\frac{q}{p} \right)$ với mọi

giá trị của tham số; Áp dụng định lí Viète để chứng minh rằng $(px_1+q)(px_2+q) < 0$, dẫn đến $x_1 < x_0 < x_2$, suy ra đường thẳng có PT (2) luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số và có $y_1 = ax_1 + b, y_2 = ax_2 + b$;

Tính AB^2 theo tham số rồi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức AB^2 . $\square$

★ **Thí dụ 2.** Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng $(d_m) y = -x + m$ luôn cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số đó. Tìm giá trị nhỏ nhất độ dài đoạn AB .

Lời giải. Xét PT $\frac{3x-1}{2x+1} = -x + m$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x^2 - 2(m-2)x - m - 1 = 0 \left(x \neq -\frac{1}{2} \right).$$

Ta có $\Delta' = m^2 - 2m + 6 > 0, \forall m$ và

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2} \neq 0 (\forall m)$, nên họ đường thẳng (d_m) luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

Áp dụng định lí Viète, ta có

$$(2x_1+1)(2x_2+1) = 4x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 1 = -5 < 0$$

$\Rightarrow x_1 < -\frac{1}{2} < x_2$, nên hai điểm A, B thuộc hai nhánh của đồ thị và $y_1 = -x_1 + m, y_2 = -x_2 + m$
 $\Rightarrow y_1 - y_2 = -(x_1 - x_2)$.

Ta được

$$AB^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2).$$

Dễ dàng tính được $AB^2 = 2(m-1)^2 + 10 \geq 10$.

Suy ra $\min AB = \sqrt{10}$ đạt được khi $m = 1$. $\square$

III. Khoảng cách lớn nhất từ một điểm đến một tiếp tuyến của hàm số phân thức

★ **Bài toán 3.** Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận, (Δ) là một tiếp tuyến bất kì của đồ thị hàm số $y = \frac{mx+n}{px+q}$. Tìm giá trị lớn nhất khoảng cách từ I đến (Δ) .

Cách giải. Giao điểm hai đường tiệm cận là điểm $I\left(-\frac{q}{p}; \frac{m}{p}\right)$; Viết PT tiếp tuyến tại điểm $(x_0; y_0)$ bất kì thuộc đồ thị dưới dạng $ax + by + c = 0 (\Delta)$; Tính khoảng cách $d(I; \Delta)$ theo x_0 , rồi tìm giá trị lớn nhất của biểu thức này. $\square$

★ **Thí dụ 3.** Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận, (Δ) là một tiếp tuyến bất kì của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$. Tìm giá trị lớn nhất khoảng cách từ I đến (Δ) .

Lời giải. Ta có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$; giao điểm của hai đường tiệm cận là điểm $I(-1; 1)$.

Giả sử điểm $M\left(x_0; \frac{x_0+2}{x_0+1}\right)$ thuộc đồ thị hàm số. PT tiếp tuyến (Δ) với đồ thị hàm số tại M là

$$y = \frac{-1}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+2}{x_0+1}$$

$$\Leftrightarrow x + (x_0+1)^2 \cdot y - (x_0+1)(x_0+2) = 0.$$

Ta có

$$d(I; \Delta) = \frac{2|x_0+1|}{\sqrt{1+(x_0+1)^4}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{(x_0+1)^2} + (x_0+1)^2}} \leq \sqrt{2}$$

(Áp dụng BĐT Cauchy).

Từ đó $\max d(I; \Delta) = \sqrt{2}$ khi $(x_0+1)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0; x_0 = -2. \quad \square$$

IV. Khoảng cách lớn nhất từ một điểm đến một đường thẳng đi qua điểm cố định

★ **Thí dụ 4.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm cực đại cực tiểu. Tìm giá trị lớn nhất khoảng cách từ điểm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{4}\right)$ đến đường thẳng (Δ) .

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Tức là cần có

$$\Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Chia đa thức y cho y' , ta được

$$y = y' \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + \frac{m}{3} + 1.$$

Giả sử hàm số có cực đại, cực tiểu tại các điểm $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$.

Vì $y'(x_1) = 0; y'(x_2) = 0$ nên PT đường thẳng (Δ) qua hai điểm cực đại, cực tiểu là

$$y = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + \frac{m}{3} + 1$$

$$\text{hay } y = \frac{m}{3}(2x+1) - 2x + 1.$$

Với $x = -\frac{1}{2}$ ta có $y = 2$. Do đó đường thẳng

(Δ) luôn đi qua điểm cố định $A\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. Hệ

số góc của đường thẳng IA là $k = \frac{3}{4}$. Kẻ

$IH \perp (\Delta)$ ta thấy $d(I; \Delta) = IH \leq IA = \frac{5}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $IA \perp (\Delta)$

$$\Leftrightarrow \frac{2m}{3} - 2 = -\frac{1}{k} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa mãn}$$

bài toán). Vậy $\max d(I; \Delta) = \frac{5}{4}$ khi $m = 1$. $\square$

Lưu ý. Cho điểm cố định I và một đường thẳng (Δ) thay đổi. Nếu (Δ) luôn đi qua điểm cố định A thì $\max d(I; \Delta) = IA$, khi $IA \perp (\Delta)$.



BÀI TẬP

1. Giả sử I là giao điểm của hai đường tiệm cận và M là điểm bất kì thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất độ dài IM .

2. Giả sử A, B là hai điểm trên hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x-1}{x-1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách AB .

3. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$. Một tiếp tuyến bất kì của đồ thị cắt hai đường tiệm cận tại A, B . Tìm giá trị nhỏ nhất độ dài AB .

4. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 2$. Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm cực đại cực tiểu. Tìm giá trị lớn nhất khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (Δ) .

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

2) Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 8.

Câu II. (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} |xy - 18| = 12 - x^2 \\ xy = 9 + \frac{1}{3}y^2. \end{cases}$$

2) Giải phương trình $4^x + (x-12)2^x + 11 - x = 0$.

Câu III. (1 điểm)

Tính thể tích khối chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và khoảng cách giữa cạnh bên và cạnh đáy đối diện bằng m.

Câu IV. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x(\cos x + \sin^5 x) dx$.

Câu V. (1 điểm)

Cho tam giác ABC, với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

thỏa mãn hệ điều kiện
$$\begin{cases} a(a+c) = b^2 \\ b(b+a) = c^2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng

(d) : $3x - 4y + 5 = 0$ và đường tròn

(C) : $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$.

Tìm những điểm M thuộc (C) và N thuộc (d) sao cho MN có độ dài nhỏ nhất.

2) Trong không gian (Oxyz) cho hai mặt phẳng

(P₁) : $x - 2y + 2z - 3 = 0$

(P₂) : $2x + y - 2z - 4 = 0$

và đường thẳng

(d) : $\frac{x+2}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{3}$

Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P₁) và (P₂).

Câu VIIa. (1 điểm)

Đặt $(1-x+x^2-x^3)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$.

Tính hệ số a_7 .

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb. (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường tròn

(C) : $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 1$ và điểm $M\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

Tìm trên (C) những điểm N sao cho MN có độ dài lớn nhất.

2) Trong không gian (Oxyz), cho mặt cầu

(S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$

và mặt phẳng (P) : $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

Tìm những điểm M thuộc (S), N thuộc (P) sao cho MN có độ dài nhỏ nhất.

Câu VIIb. (1 điểm)

Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số

$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x}$ khi $x \neq 0$, và $f(0) = 0$; tại điểm $x_0 = 0$.

DƯƠNG CHÂU DINH

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) ĐK để đồ thị hàm số có cực đại và cực tiểu là $m > 0$. Các điểm cực trị là

$$A(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} - 3m + 1) \text{ và}$$

$$B(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} - 3m + 1). \text{ Đáp số: } m = \frac{1}{3}.$$

Câu II. 1) Đặt ĐK rồi đưa PT đã cho về dạng $(3 - \cos x)^2 = (2 + \sin x)^2$ suy ra $\cos x + \sin x = 1$.

Đáp số. $x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2) Đưa HPT về dạng $\begin{cases} x^3 = y^3 + 9 \\ x^2 - x = -2y^2 - 4y. \end{cases}$ Nhân hai

vế của PT thứ hai với 3 rồi trừ theo vế với PT thứ nhất thu được $(x-1)^3 = (y+2)^3$ hay $x = y+3$.

Đáp số. $(x; y) = (1; -2); (x; y) = (2; -1)$.

Câu III. Ta có $I = I_1 + I_2 - I_3$ trong đó

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x) dx;$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1 + \sin x) dx = 2 \ln 2 - 1,$$

Chú ý $\cos x dx = d(1 + \sin x)$;

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx = I_1 \text{ (đặt } t = \frac{\pi}{2} - x).$$

$$\text{Đáp số. } I = \ln \frac{4}{e}.$$

Câu IV. Gọi M là trung điểm của BC , ta có $DM \perp (ABC)$. Tam giác DBC vuông cân tại D .

Từ đó $BC = 2a$; $DM = a$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{6} a^3.$$

Câu V. Từ BĐT Cauchy, ta có $xyz \leq 1$ và

$$Q = \frac{1}{2xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\text{mà } \sqrt[3]{(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)} \leq \frac{2(xy+yz+zx)}{3}$$

$$\text{nên } Q \geq 1 \Rightarrow P \geq Q + \frac{1}{2xyz} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu VI.a. 1) Tìm được $B(-1; -1)$; $A(-3; 4)$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Suy ra $D(2; 2)$ nằm trên AC . Từ đó viết

được PT đường thẳng AC . Đáp số. $C\left(\frac{11}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

2) Giả sử PT đường thẳng cần tìm là

$$(\Delta): a(x-1) + b(y-2) + c(z-3) = 0, \quad M \in (\Delta)$$

với $\vec{n}_\Delta = (a, b, c)$. VTCP của Ox và VTPT của $mp(Oxz)$ lần lượt là $\vec{n}_1 = (1; 0; 0)$; $\vec{n}_2 = (0; 1; 0)$.

Từ giả thiết suy ra $|\cos(\vec{n}_\Delta, \vec{n}_1)| = |\cos(\vec{n}_\Delta, \vec{n}_2)| = \frac{1}{2}$.

Giải PT này, chọn $a = 1$ ta được $b = \pm 1$, $c = \pm \sqrt{2}$. Có 4 đường thẳng thỏa mãn đề bài.

Câu VII.a. ĐK $x > -1$. Xét hàm số

$f(x) = e^x - \ln(1+x) - 1$ trên $(-1; +\infty)$. Ta có

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}; \quad f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0,$$

với $\forall x \in (-1; +\infty)$. Suy ra $f'(x)$ đơn điệu tăng.

Nhận thấy $f'(0) = 0$, suy ra $f'(x) > 0, \forall x > 0$;

$f'(x) < 0, \forall x < 0$. Lập bảng biến thiên hàm $f(x)$

thu được $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in (-1; +\infty)$ và $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$. Đáp số. $x = 0$.

Câu VI.b. 1) Gọi $M(x_0^2; x_0) \in (P)$. Yêu cầu bài

$$\text{toán} \Leftrightarrow \begin{cases} OM = \sqrt{2} \\ OM = \sqrt{6} \end{cases} \text{ Từ đó } x_0 \in \{\pm 1; \pm \sqrt{2}\}.$$

Đáp số. $M \in \{M_1(1; 1); M_2(1; -1); M_3(2; \sqrt{2}); M_4(2; -\sqrt{2})\}$.

2) Giả sử $B(x_0; y_0; x_0 + y_0 - 6)$. Giải hệ

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}| \end{cases} \text{ được } (x_0; y_0) \in \{(2, 3); (3, 1)\}.$$

Từ đó $D \in \{D_1(5; 3; -4); D_2(4; 5; -3)\}$.

Câu VII.b ĐK $x \geq -1$. Khi đó PT tương đương

với $2\sqrt{x+1} + x + 2 = \sqrt[3]{x^3 + 2}$. Suy ra

$$x + 2 \leq \sqrt[3]{x^3 + 2} \Leftrightarrow 6(x+1)^2 \leq 0 \Rightarrow x = -1.$$

Thử lại, thấy thỏa mãn. Đáp số. $x = -1$.

TRẦN QUỐC LUẬT

(SV Khoa Toán, ĐH Vinh, Nghệ An)



Một số bài toán liên quan đến PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Trong các Kỳ thi Olympic Toán học Quốc gia và Quốc tế chúng ta thường gặp các bài toán về phương trình (PT) nghiệm nguyên. Các định nghĩa và định lý sau thường được sử dụng trong việc tìm lời giải cho các bài toán tìm nghiệm nguyên của một PT.

1) Định lý nhỏ Fermat. Nếu p là số nguyên tố và a là số nguyên không chia hết cho p thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

2) Số chính phương (mod n)

a) Định nghĩa. Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Số nguyên a được gọi là số chính phương (mod n) nếu tồn tại $x \in \mathbb{N}$ sao cho $x^2 \equiv a \pmod{n}$.

Dựa vào định nghĩa và định lý nhỏ Fermat bạn đọc tự chứng minh các kết quả b), d), e) sau:

b) Định lý 1. Cho số nguyên tố p .

i) Nếu $p = 2$ thì mọi số lẻ a đều là số chính phương (mod 2).

ii) Nếu $p > 2$ thì a là số chính phương (mod p) khi và chỉ khi $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.

Còn a là số không chính phương (mod p) khi và chỉ khi $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

c) Ký hiệu Legendre. Cho số nguyên tố lẻ p ; a là số nguyên không chia hết cho p . Ký hiệu

$\left(\frac{a}{p}\right)$ được định nghĩa như sau:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a \text{ là số chính phương (mod } p) \\ -1 & \text{nếu } a \text{ là số không chính phương (mod } p). \end{cases}$$

d) Định lý 2. Cho số nguyên tố p và số nguyên a không chia hết cho p . Khi đó

$$+) a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p};$$

$$+) \text{ Nếu } a \equiv b \pmod{p} \ (a, b \in \mathbb{Z}; (a, p) = (b, p) = 1)$$

$$\text{thì } \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right);$$

$$+) \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right) \ (a, b \in \mathbb{Z}; (a, p) = (b, p) = 1);$$

$$+) \left(\frac{a^2}{p}\right) = 1; \quad +) \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}};$$

$$+) \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

e) Luật tương hỗ Gauss. Nếu p, q là các số nguyên tố lẻ và $p \neq q$ thì $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$

Tiếp theo, chúng tôi xin giới thiệu một số bài toán về PT nghiệm nguyên với lời giải của chúng.

★ Bài toán 1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, n) thỏa mãn $x^3 + 2x + 1 = 2^n$.

(Olympic Serbia năm 2007)

Lời giải. Giả sử x, n là các số nguyên dương sao cho $x^3 + 2x + 1 = 2^n$ (1).

Nếu $n \leq 2$ thì tìm được $n = 2$ và $x = 1$.

Giả sử $n \geq 3$, từ (1) ta thấy x lẻ.

Từ (1) có $x(x^2 + 2) = 2^n - 1$. Vì $x(x^2 + 2) \div 3$ nên n chẵn.

Cũng từ (1) suy ra $x^3 + 2x + 3 = 2^n + 2$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 3) = 2^n + 2.$$

Giả sử p là một ước nguyên tố của $x^2 - x + 3$, suy ra p lẻ và -2 là số chính phương (mod p). Từ đó

$$1 = \left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Suy ra p có dạng $8m + 1$ hoặc $8m + 3$ ($m \in \mathbb{N}$).

Ta có $x^3 + 2x + 1 \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{8}$

$\Rightarrow x^2 - x + 3 \equiv 7 \pmod{8}$. Đó là điều vô lí.

Vậy chỉ có một cặp số nguyên dương $(x; n)$ duy nhất thỏa mãn đề bài là $(x; n) = (1; 2)$. $\square$

★ Bài toán 2. Chứng minh tồn tại vô số cặp số nguyên dương $(m; n)$ sao cho $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$ là một số nguyên dương.
(Olympic Anh năm 2007)

Lời giải. Ta chứng minh rằng PT

$$\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = 4 \quad (1)$$

có vô số nghiệm nguyên dương. Thật vậy

$$PT (1) \Leftrightarrow x^2 + (1-4y)x + y^2 + y = 0 \quad (2)$$

Ta thấy $(x_1 = 1, y_1 = 1)$ là một nghiệm nguyên dương của PT (2).

Xét dãy $(t_k) (k \geq 1)$ sao cho $t_1 = t_2 = 1$,

$$t_{k+2} = 4t_{k+1} - t_k - 1 \quad (k \geq 1).$$

Dễ dàng chứng minh được $t_{k+1} > t_k > 0, \forall k \geq 2$.

Ta có $(t_1; t_2)$ là một nghiệm nguyên dương của PT (2). Giả sử $(t_k; t_{k+1})$ là một nghiệm nguyên dương của PT (2) tức là

$$t_k^2 + (1-4t_{k+1})t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0.$$

$$\text{Xét } t_{k+2}^2 + (1-4t_{k+1})t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1}$$

$$- (t_k^2 + (1-4t_{k+1})t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1})$$

$$= t_{k+2}^2 - t_k^2 + (1-4t_{k+1})(t_{k+2} - t_k)$$

$$= (t_{k+2} - t_k)(t_{k+2} + t_k + 1 - 4t_{k+1}) = 0$$

$$\Rightarrow t_{k+2}^2 + (1-4t_{k+1})t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0.$$

Suy ra $(x; y) = (t_{k+1}; t_{k+2})$ cũng là nghiệm nguyên dương của PT (2).

Vì $t_{k+1} > t_k, \forall k \geq 2$ nên PT (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

Vậy tồn tại vô số cặp số nguyên dương $(m; n)$

sao cho $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$ là một số nguyên dương. $\square$

★ Bài toán 3. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên dương n sao cho $n^7 + 7$ là bình phương của một số nguyên dương.

(Đề chọn Đội tuyển Hoa Kỳ thi IMO năm 2008)

Lời giải. Giả sử $n^7 + 7 = a^2 (a \in \mathbb{N}^*)$.

Khi đó $n^7 + 128 = a^2 + 121 \Rightarrow a^2 + 121$

$$= (n+2)(n^6 - 2n^5 + 4n^4 - 8n^3 + 16n^2 - 32n + 64).$$

Nếu n chẵn thì $a^2 \equiv 7 \pmod{8}$. Đó là điều vô lí. Vậy n lẻ, suy ra $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Đặt $b = n^6 - 2n^5 + 4n^4 - 8n^3 + 16n^2 - 32n + 64$ thì b lẻ và

$$b \equiv n^6 - 2n^5 + n^4 - n^4 \equiv n^4(n-1)^2 - n^4 \pmod{4}$$

Vì $n^4 \equiv 1 \pmod{4}$ và $n-1$ chẵn

$$\Rightarrow (n-1)^2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow b \equiv -1 \pmod{4} (*)$$

$\Rightarrow b$ có ước nguyên tố dạng $4k+3 (k \in \mathbb{N})$.

Giả sử p là ước nguyên tố dạng $4k+3 (k \in \mathbb{N})$

của $b \Rightarrow a^2 + 121 : p \Rightarrow p = 11$ và $a : p \Rightarrow$

$a = 11q (q \in \mathbb{N}^*)$ và $b : 11$. Nếu $n+2 : 11$ thì

$$b \equiv 7.8^2 \pmod{11}. \text{ Đó là điều vô lí.}$$

Vậy $n+2$ không chia hết cho 11.

Mặt khác $a^2 + 121 : 121 \Rightarrow b : 121 \Rightarrow b = 121r$ ($r \in \mathbb{N}^*, r$ lẻ). Ta có

$$a^2 + 121 = 121(q^2 + 1) = (n+2)b = 121r(n+2)$$

$$\Rightarrow r(n+2) = q^2 + 1 \text{ suy ra } r \text{ không có ước}$$

nguyên tố dạng $4t+3 (t \in \mathbb{N}) \Rightarrow b \equiv 1 \pmod{4}$.

Đó là điều vô lí với (*).

Vậy không tồn tại số nguyên dương n sao cho $n^7 + 7$ là bình phương của một số nguyên dương. $\square$

★ Bài toán 4. Tìm tất cả các nghiệm nguyên không âm của phương trình $12^x + y^4 = 2008^z$
(Olympic Serbia năm 2008)

Lời giải. • Cách 1. Giả sử x, y là các số nguyên không âm sao cho $12^x + y^4 = 2008^z$.

Nếu $z = 0$ thì $x = 0, y = 0$.

Nếu $z > 0$ thì $2008^z : 2008$. Ta có $2008 = 251.2^3$.

Giả sử x chẵn, khi đó $x = 2x_1 (x_1 \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow (12^{x_1})^2 \equiv -y^4 \pmod{251}$. Áp dụng Định lý nhỏ Fermat ta có

$$1 \equiv (12^{x_1})^{250} \equiv (-y^2)^{250} \equiv -1 \pmod{251}.$$

Đó là điều vô lí.

Giả sử x lẻ. Hiển nhiên y chẵn, lúc đó $y = 2^u y_1$

$$(y_1 \in \mathbb{N}^*, y_1 \text{ lẻ}, u \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 2^{2x} 3^x + 2^{4u} y_1^4 = 2^{3z} 251^z.$$

Ta có $2x \neq 4u$ (vì x lẻ) nên $3z = 2x$ hoặc $3z = 4u$.

Trường hợp 1. $3z = 2x < 4u \Rightarrow z : 2$ và

$$3^x + 2^{4u-2x} y_1^4 = 251^z.$$

Vế trái có dạng $4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$) (vì x lẻ), vế phải có dạng $4m+1$ ($m \in \mathbb{N}$). Đó là điều vô lí.

Trường hợp 2. $3z = 4u < 2x \Rightarrow z : 2$. Ta có

$$2^{2x-4u} \cdot 3^x + y_1^4 = 251^z. \text{ Vế phải có dạng } 5k+1 (k \in \mathbb{N}).$$

Nếu y_1 không chia hết cho 5 thì $y_1^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

Suy ra $2^{2x-4u} \cdot 3^x \equiv 0 \pmod{5}$. Đó là điều vô lí.

Nếu $y_1 : 5$ thì $1 \equiv 2^{2x-4u} \cdot 3^x \equiv -3^x \equiv \pm 3 \pmod{5}$ (vì x lẻ). Đó là điều vô lí.

Vậy PT đã cho có một nghiệm nguyên không âm duy nhất là $x = y = z = 0$.

• **Cách 2.** Giả sử $z > 0$ thì $y > 0$. Với x chẵn thì vế trái có dạng $a^2 + b^2$, với x lẻ thì vế trái có dạng $a^2 + 3b^2$, trong đó a, b là các số nguyên dương không chia hết cho 251. Tuy nhiên -1 và -3 không là số chính phương $\pmod{251}$. Vậy PT đã cho không có nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $z > 0$. $\square$

Cuối cùng là một số bài toán dành cho bạn đọc.

1. Chứng minh rằng PT $x^2 + 5 = y^3$ không có nghiệm nguyên. (Olympic Ba Lan năm 2007)

2. Chứng minh rằng PT $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = 3$ có vô số nghiệm nguyên dương.

3. Cho số nguyên tố p . Chứng minh rằng số $3^p + 7p - 4$ không là bình phương của một số nguyên.

4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^3 - 1$ là bình phương của một số nguyên.

5. Tìm tất cả các số nguyên a để tồn tại các số dương phân biệt x, y sao cho $(ax^2 + 1)^2$ chia hết cho $axy + 1$.

6. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ sao cho $2p^q - q^p = 7$.

VÀI ỨNG DỤNG... (Tiếp trang 2)

Từ đó, tam giác BHC vuông cân tại H

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 45^\circ, \widehat{ABC} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ.$$

Trường hợp 2. Điểm H nằm ngoài hai điểm A và C .

Từ giả thiết, ta có $\widehat{ABC} = 15^\circ$. Suy ra $\widehat{ACB} = 90^\circ$ tức là $C \equiv H$. Đặt $BC = x$, tính được

$$AC = BC \cdot \tan 15^\circ = x(2 - \sqrt{3});$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{x^2 + x^2(2 - \sqrt{3})^2} \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot x. \end{aligned}$$

Theo giả thiết $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{6} - \sqrt{2})x + x(2 - \sqrt{3})\sqrt{2} = 2x$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}x \text{ (vô lí).}$$

Vậy không xảy ra trường hợp này.

Kết luận $\widehat{B} = 60^\circ; \widehat{C} = 45^\circ$. $\square$

Qua các thí dụ trên chúng ta thấy rằng trong nhiều bài toán công thức tính $\tan 15^\circ$ tỏ ra rất thuận lợi. Rất mong tiếp tục nhận được sự trao đổi của các bạn.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính các cạnh của tam giác ABC , biết $\widehat{A} = 105^\circ, \widehat{B} = 45^\circ$ và chu vi của tam giác bằng $\sqrt{27} + \sqrt{18} + 9$.

2. Cho M là một điểm nằm trong hình vuông $ABCD$ thỏa mãn $\widehat{MAD} = \widehat{MDA} = 15^\circ$. Chứng minh rằng tam giác MBC đều.

3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 2AB$ và điểm M nằm trên cạnh AD sao cho $\widehat{ABM} = 15^\circ$. Chứng minh rằng $MC = BC$.

4. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 45^\circ, \widehat{ABC} = 75^\circ$. M là điểm trên cạnh AB sao cho $MB = 2MA$. Tính số đo của góc ACM .

5. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 75^\circ$, đường cao CH và $CH = \frac{1}{2}AB$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

TIN TỨC

VIỆN TOÁN HỌC VIỆT NAM

đón nhận Huân chương Độc lập hạng Nhì

Sáng ngày 12/10/2010, Viện Toán học Việt Nam đã long trọng tổ chức kỉ niệm 40 năm thành lập và đón nhận Huân chương Độc lập hạng Nhì do Nhà nước trao tặng.

Năm 1969, theo Quyết định của Thủ tướng Phạm Văn Đồng, Viện Toán học Việt Nam (cơ quan nghiên cứu hàng đầu của ngành Toán học trong nước) chính thức thành lập. Trải qua 40 năm, dưới sự lãnh đạo của các Giáo sư đầu ngành Toán học Việt Nam như GS. Nguyễn Văn Thiêm, GS. Hoàng Tuy, Viện Toán học đã trưởng thành vượt bậc, trở thành cơ quan đào tạo hàng đầu của ngành Toán. Các thành tựu nghiên cứu của Viện Toán học được đánh giá là một trong mười cơ sở nghiên cứu toán xuất sắc nhất ở các nước đang phát triển. Các kết quả nghiên cứu của Viện được giới Toán học quốc tế đưa vào sách giáo khoa và sách chuyên khảo quốc tế. Nhiều cán bộ của Viện đã trở thành những chuyên gia đầu ngành trong nước,

trong đó có nhiều người đạt được các thành tựu mang tầm thế giới, được nhận các giải thưởng quốc gia và quốc tế, được phong Bằng tiến sĩ danh dự của các trường đại học quốc tế hay bầu làm Viện sĩ một số Viện Hàn lâm Khoa học danh giá như GS. Hoàng Tuy, GS. Hà Huy Khoái, GS. Nguyễn Khoa Sơn, GS. Ngô Việt Trung, GS. Hoàng Xuân Phú và PGS. Phùng Hồ Hải.

Hàng năm, Viện Toán học cũng đón tiếp các nhà Toán học quốc tế sang làm việc và trao đổi chuyên môn. Trong đó có những nhà Toán học hàng đầu thế giới, những người được nhận các giải thưởng cao quý như Giải thưởng Fields. Viện Toán học cũng đã góp phần xây dựng đội ngũ cán bộ giảng dạy môn Toán ở hầu hết các trường đại học lớn trên cả nước, nâng cao chất lượng giảng dạy môn Toán ở Việt Nam và bồi dưỡng đội tuyển thi Olympic Toán học Quốc tế.

PV

ĐỀ THI VÀO LỚP 10... (Tiếp trang 3)

Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC với $AB > AC$, $AB > BC$. Trên cạnh AB lấy các điểm M và N sao cho $BC = BM$ và $AC = AN$.

1) Chứng minh điểm N nằm trong đoạn thẳng BM .

2) Qua M và N kẻ MP song song với BC và NQ song song với CA ($P \in CA, Q \in CB$). Chứng minh rằng $CP = CQ$.

3) Cho $\widehat{ACB} = 90^\circ$, $\widehat{CAB} = 30^\circ$ và $AB = a$. Hãy tính diện tích của tam giác MCN theo a .

Câu 5. (1 điểm). Trên một bảng đen ta viết ba số $\sqrt{2}; 2; \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta bắt đầu thực hiện một trò

chơi như sau: Mỗi lần chơi ta xóa hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là a và b , rồi viết vào hai vị trí vừa xóa hai số mới là $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$

và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$, đồng thời giữ nguyên số còn lại.

Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng luôn có ba số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không thể có đồng thời ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV Trường THPT chuyên ĐHSPhà Nội) giới thiệu

BẠN CÓ BIẾT ?

Chứng minh định lý toán học BẰNG CÔNG CỤ VẬT LÝ

Vật lý áp dụng kiến thức toán học để lượng hóa mối quan hệ giữa các đại lượng Vật lý. Ngược lại Vật lý minh họa các công thức Toán học.

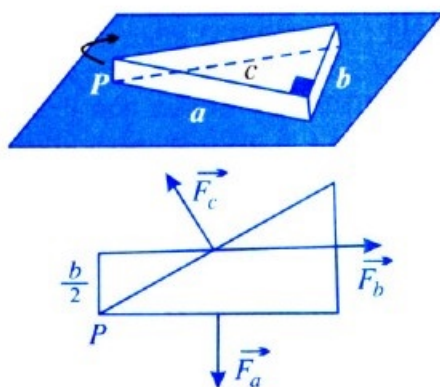
Sau đây là hai trường hợp áp dụng các quy luật Vật lý để "chứng minh" các công thức trong "Định lý Pythagore", và "Định lý sin trong tam giác".

1. "Chứng minh" Định lý Pythagore

Cách chứng minh sau do M. Levi đề nghị:

Xét một cái hộp hình lăng trụ đứng có đáy tam giác vuông với độ dài các cạnh lần lượt là a, b và c (c là cạnh huyền). Ta sẽ chứng minh $a^2 + b^2 = c^2$.

Đổ đầy nước vào hộp và đặt hộp nằm yên trên bàn. Hộp không trượt, không quay.



Hình 1

Áp lực tác động lên mỗi vách hộp tương đương với một lực thẳng góc với vách đó tại tâm vách. Điều đó đúng với cả ba vách. Vì hộp không quay nên tổng momen của các lực tác dụng lên hộp đối với một trục quay bất kỳ nào đó đều bằng không.

Ở đây có ba lực tác dụng lên ba vách của hộp.

Ta kí hiệu các lực này thứ tự là $\vec{F}_a, \vec{F}_b, \vec{F}_c$ tương ứng với vách các hình chữ nhật có các kích thước là $(a; h), (b; h), (c; h)$, trong đó h là chiều cao của hộp. Gọi p là áp suất của nước ở tại các điểm nằm trong mặt phẳng đi qua tâm lăng trụ và song song với đáy của lăng trụ đó. Ta có

$$F_a = p.S_a = p.a.h; \quad F_b = p.S_b = p.b.h;$$

$$F_c = p.S_c = p.c.h.$$

Bây giờ ta hãy tính tổng momen của các lực $\vec{F}_a, \vec{F}_b, \vec{F}_c$ đối với trục quay đi qua một đỉnh của hộp và vuông góc với đáy hộp (ở hình 1, trục quay này đi qua điểm P). Như trên đã nói, tổng momen của các lực này bằng không, đồng thời từ hình 1 (phía dưới), ta có momen của các lực $\vec{F}_a, \vec{F}_b$ ngược chiều với momen của lực

$$\vec{F}_c, \text{ nên } \frac{a}{2}(p.a.h) + \frac{b}{2}(p.b.h) - \frac{c}{2}(p.c.h) = 0.$$

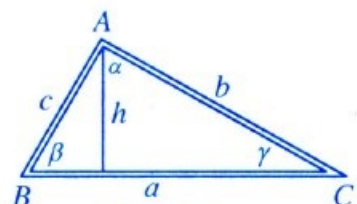
Từ đây suy ra $a^2 + b^2 = c^2$ (đpcm).

2. "Chứng minh" Định lý sin trong tam giác

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, có số đo góc đối diện lần lượt là α, β, γ .

Xét ba ống đựng nước, tiết diện không đổi, được xếp thành hình tam giác ABC với ống BC nằm ngang (xem hình 2).



Hình 2

Vì ống BC đặt nằm ngang, nên áp suất P_B ở B và áp suất P_C ở C bằng nhau, do đó $P_B - P_A = P_C - P_A$.

Nhưng hiệu áp suất $P_C - P_A$ giữa C và A là tỉ lệ với độ cao của cột nước trên điểm A , tức là $b \sin \gamma$. Cũng như vậy, hiệu áp suất $P_B - P_A$ giữa B và A tỉ lệ với $c \sin \beta$, với cùng một hằng số tỉ lệ (phụ thuộc vào tiết diện ống và chất lỏng trong ống). Vì các hiệu đó bằng

nhau nên $b \sin \gamma = c \sin \beta$ tức là $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Hệ thức $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ cũng được chứng minh tương tự bằng cách đặt ống AB nằm ngang.

PHAN THANH QUANG

(Theo *Pour la Science*,
số 388 – tháng 2/2010)

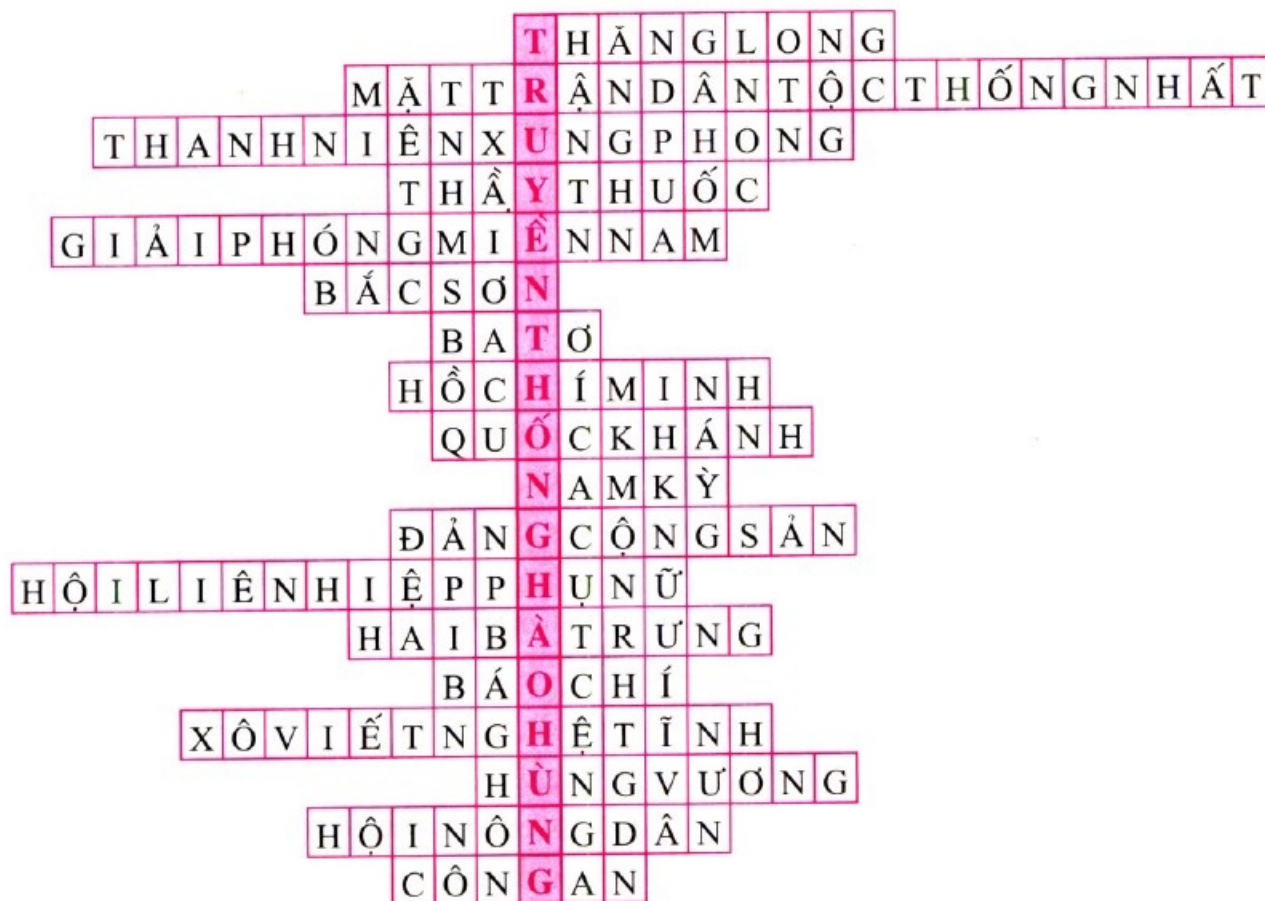


Giải đáp:

NHỮNG NGÀY LỄ, KỈ NIỆM LỚN

năm 2010

(Đề đăng trên THPT số 393, tháng 3 năm 2010)



Dòng chữ ghi ở cột dọc màu đỏ là:

TRUYỀN THỐNG HÀO HÙNG

Các bạn sau có lời giải tốt, được nhận tặng phẩm:

Phú Thọ: Lê Thanh Bình, 10A4, THPT Công nghiệp Việt Trì; **Hà Nội:** Phí Thị Thu Hằng, 11A4, THPT Thạch Thất; **Nghệ An:** Cao Thị Hà Lê, 10A1, Khối THPT chuyên ĐH Vinh; **Đà Nẵng:** Hồ Minh Nhật, THPT Phan Châu Trinh; **Bình Định:** Đinh Quang Danh, 10TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Nguyễn Thị Bích Hồng, 12A3, THPT Quang Trung, Tây Sơn.

VÂN KHANH



Giải đáp

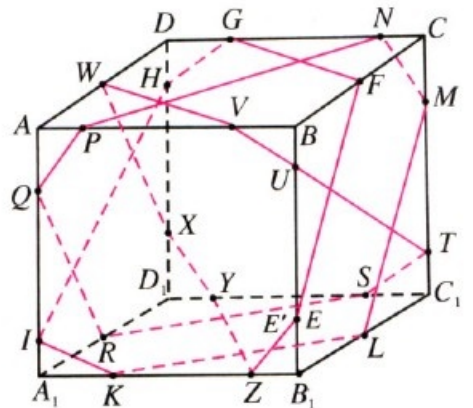
CON KIẾN bò trên khối lập phương



(Đề đăng trên THPT số 394, tháng 4 năm 2010)

Giả sử con kiến bò theo đường gấp khúc $EFGHIKLMNPQRSTUVWXYZE'$ với E' thuộc cạnh BB_1 như ở hình bên. Gọi a là độ dài của cạnh hình lập phương. Do $\widehat{CFG} = \widehat{BFE}$ nên hai tam giác vuông FCG và FBE đồng dạng, suy ra $\frac{CG}{CF} = \frac{BE}{BF}$. Từ đó $CG = BE = \frac{3}{4}a$ nên $GD = EB_1 = \frac{1}{4}a$. Ta lại có $\triangle GCF \sim \triangle GDH$, suy ra $DH = \frac{1}{6}a$. Tiếp tục xét các tam giác đồng dạng ta tính được $IA_1 = \frac{1}{6}a$, $KA_1 = \frac{1}{4}a$ với K thuộc cạnh A_1B_1 , nghĩa là $KB_1 = 3KA_1$. Tiếp tục như thế, con kiến từ điểm K sau khi đi qua năm mặt của hình lập phương thì đến điểm Q thuộc cạnh AA_1 với $QA_1 = 3QA$, lại qua năm mặt nữa thì đến điểm V thuộc cạnh AB với $VA = 3VB$, lại qua năm mặt nữa thì đến điểm E' thuộc cạnh BB_1 với $E'B = 3E'B_1$, nghĩa là điểm E' trùng với điểm E .

ĐAN QUỲNH



Nhân Ngày nhà giáo Việt Nam 20 tháng 11 một thầy giáo dạy Tin học mang một bó hoa kèm theo tám bưu thiếp tặng một cô giáo dạy Toán, trên bưu thiếp viết dòng chữ được mã hóa bằng các chữ số như sau:

13900160230050400530435010

11180110972890729310119490

896308710030053073901

937709994012931011181

Thầy giáo cho biết mỗi chữ cái tiếng Việt, mỗi dấu đi kèm với nguyên âm và ô trống giữa hai từ đều được mã hóa bởi một kí tự gồm hai chữ số viết theo hàng dọc từ $\begin{smallmatrix} 0 & \\ & 9 \end{smallmatrix}$ đến $\begin{smallmatrix} 9 & \\ & 0 \end{smallmatrix}$.

Cô giáo phát hiện ra rằng các số có hai chữ số ghi theo hàng dọc hầu hết là các số nguyên tố, trừ một vài số có chữ số ở phía trên là 0 và 9. Cô giáo biết rằng có 25 số nguyên tố có hai chữ số và một chữ số (lúc đó thêm chữ số 0 ở phía trên để thành hai chữ số), mà cần đến 35 kí tự mã hóa gồm 29 chữ (không kể F, J, W, Z), ô trống và 5 dấu, do đó cần sử dụng thêm các kí tự có hai chữ số với chữ số 0 hoặc 9 ở phía trên. Sau một lúc cô giáo đã đọc được dòng chữ được mã hóa. Bạn có thể giải mã để đọc được dòng chữ đó không?

AN MINH



CÁC LỚP THCS

Bài T1/401. (Lớp 6). Cho số tự nhiên n lớn hơn 11. Hỏi có tồn tại hay không số tự nhiên x sao cho $n^{2010} < x < n^{2011}$ và x có ít nhất 2011 chữ số tận cùng là 0?

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/401. (Lớp 7). Giả sử p là số nguyên tố, a và b là các số tự nhiên ($a < b$) thỏa mãn điều kiện: Tổng các phân số tối giản có mẫu số p nằm giữa a và b bằng 2011. Tìm các số p, a, b .

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/401. Cho a là số tự nhiên có n chữ số (viết trong hệ thập phân) và a^3 có m chữ số. Hỏi $n + m$ có thể bằng 2011 được không?

ĐÀO HUY TRƯỜNG
(GV THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T4/401. Giải phương trình

$$x + y + z + \sqrt{xyz} = 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} - 2).$$

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi,
Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/401. Cho hình bình hành $ABCD$. Tia phân giác góc BAD cắt các đường thẳng BC, DC lần lượt tại M, N . Gọi E là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và CMN . Tính số đo góc AEC .

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/401. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn hai điều kiện $a + b + c = 1$ và $ab + bc + ca > 0$.

LÊ VIỆT HẢI
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T7/401. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4 + 9.3^{x^2-2y} = (4 + 9^{x^2-2y}).72y - x^2 + 2 \\ 4^x + 4 = 4x + 4\sqrt{2y - 2x + 4}. \end{cases}$$

PHẠM VĂN TRƯỜNG
(SV Lớp Điện tử 10, K52, ĐHBK Hà Nội)

Bài T8/401. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4a$. M, N lần lượt là hai điểm nào đó trên các mặt cầu $S(D; a), S(C; 2a)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2NB + 4MN$.

LÊ HOÀI BẮC
(GV THPT Nguyễn Văn Cừ, Xuân Sơn,
Châu Đức, Bà Rịa - Vũng Tàu)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/401. Cho tam giác nhọn ABC với $AB \neq AC$. Từ điểm P nằm trong tam giác sao cho $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$, ta hạ các đường vuông góc PM và PN theo thứ tự xuống các cạnh AB và AC . Gọi O là trung điểm của BC . Phân giác các góc BAC và MON cắt nhau tại R . Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BMR và CNR có một điểm chung nằm trên đoạn BC .

LÊ VIỆT ÂN
(SV lớp Toán 1B, ĐHSPT Huế)

Bài T10/401. Cho a là số thực dương tùy ý. Xét dãy số (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) xác định bởi

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{x_n \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}{x_n + 1}$$

với mọi $n = 1, 2, \dots$ (ở tử có n số 2).

Chứng minh rằng dãy số (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

TRẦN QUANG VINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Bài T11/401. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+f(y))$$

$$= f^4(y) + 4x^3 f(y) + 6x^2 f^2(y) + 4x f^3(y) + f(-x)$$

với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

NGUYỄN HOÀNG NAM

(GV THPT K'Bang, Gia Lai)

Bài T12/401. Cho tam giác đều ABC với bán kính đường tròn ngoại tiếp R và P là điểm nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng

$$PA \cdot PB \cdot PC \leq \frac{9}{8} R^3.$$

TRẦN QUANG HÙNG

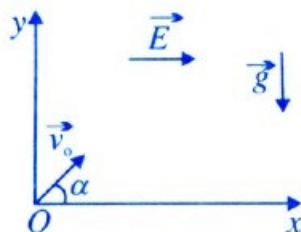
(GV trường chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/401. Trong không gian có điện trường đều $\vec{E}$ nằm ngang và trọng trường với gia tốc $\vec{g}$. Một quả cầu kim

loại khối lượng m , mang điện tích q ($q > 0$) được ném lên với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ (hình vẽ).

Hãy tìm góc ném α để vận tốc của quả cầu luôn tăng. Bỏ qua sức cản không khí.



PHẠM XUÂN THI

(GV trường Sĩ quan Lục quân 2 - 3CB - 38
Biển Hòa, Đồng Nai)

Bài L2/401. Cho đoạn mạch RLC mắc nối tiếp như hình vẽ.



Biết $R = 40\Omega$, ống dây có điện trở thuần $r = 10\Omega$

và hệ số tự cảm $L = \frac{1}{2\pi} \text{H}$, $u_{AB} = 50\sqrt{2} \cos(100\pi t) \text{V}$.

Tụ điện có điện dung thay đổi được.

a) Tìm giá trị cực tiểu có thể đạt được của U_{AM} khi điện dung C của tụ điện thay đổi.

b) Vẽ dạng đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của U_{AM} theo Z_C .

NGUYỄN VĂN THUẬN

(GV ĐHSPT Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/401. (For 6th grade). Let n be a natural number greater than 11. Does there exist a natural number x so that $n^{2010} < x < n^{2011}$ and the last 2011 digits of x are 0?

T2/401. (For 7th grade). Let p be a prime number, a and b are natural numbers ($a < b$) such that the sum of all irreducible fractions with denominator p which lies between a and b is equal to 2011. Find the values of p, a, b .

T3/401. Let a be an n -digits natural number (in decimal system) and a^3 has m digits. Can $n + m$ be equal to 2011? Why?

T4/401. Solve the equation

$$x + y + z + \sqrt{xyz} = 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} - 2).$$

T5/401. Let $ABCD$ be a parallelogram. The angle-bisector of BAD meets BC, DC at M, N respectively. Let E be the other intersection point of the circumcircles of the triangles BCD and CMN . Find the measure of angle AEC .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/401. Find the least value of

$$A = \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

where a, b, c are real numbers satisfying $a + b + c = 1$ and $ab + bc + ca > 0$.

T7/401. Solve the system of equations

$$\begin{cases} 4 + 9.3^{x^2-2y} = (4 + 9^{x^2-2y}).7^{2y-x^2+2} \\ 4^x + 4 = 4x + 4\sqrt{2y-2x+4}. \end{cases}$$

T8/401. Let $ABCD$ be a square of side $4a$. M, N are points on the spheres $S(D; a), S(C; 2a)$. Determine the minimum value of the sum $MA + 2NB + 4MN$.

(Xem tiếp trang 27)



★ Bài T1/397. So sánh hai phân số

$$A = \frac{1010^{1010}}{2010^{2010}} \text{ và } B = \frac{2010^{2010}}{3010^{3010}}.$$

Lời giải. Ta có

$$A \cdot 2010^{1000} = \frac{1010^{1010} \cdot 2010^{1000}}{2010^{2010}} = \left(\frac{101}{201}\right)^{1010}.$$

$$B \cdot 2010^{1000} = \frac{2010^{2010} \cdot 2010^{1000}}{3010^{3010}} = \left(\frac{201}{301}\right)^{3010}.$$

$$\text{Từ } \frac{101}{201} > \frac{1}{2} > \frac{40401}{90601} = \left(\frac{201}{301}\right)^2 \text{ và } \frac{201}{301} < 1$$

$$\text{có } \left(\frac{101}{201}\right)^{1010} > \left(\frac{201}{301}\right)^{2 \times 1010} = \left(\frac{201}{301}\right)^{2020} > \left(\frac{201}{301}\right)^{3010}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } A &= \left(\frac{101}{201}\right)^{1010} \cdot \frac{1}{2010^{1000}} \\ &> \left(\frac{201}{301}\right)^{3010} \cdot \frac{1}{2010^{1000}} = B \text{ hay } A > B. \quad \square \end{aligned}$$

➤ Nhận xét. Các bạn sau có lời giải gọn:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Hồng Ngọc, 6A, THCS Lập Thạch; Hà Nội: Nguyễn Minh Hoàng, Phạm Minh Đức, Nguyễn Thị Bích Ngọc, Nguyễn Nhật Minh, 6A4, THCS Đồng Đa, Q. Đống Đa; Hà Nam: Đỗ Đăng Dương, 6A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Lưu,

Thanh Liêm; Quảng Ngãi: Tống Thành Nguyễn, Nguyễn Thúy Phương, Nguyễn Thị Hạ Vy, Cao Thị Thúy Diễm, 6A, THCS Hành Phước, Nguyễn Khắc Cao Kỳ, 6B, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; TP. Hồ Chí Minh: Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 6A3, THCS Trần Đại Nghĩa; Bến Tre: Nguyễn Hoàng Kim Thy, 6', THCS Tân Trung, Mỏ Cày Nam.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/397. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} \geq 60^\circ$. Chứng minh rằng $AB + AC \leq 2BC$.

Lời giải. Trường hợp 1.

$\widehat{BAC} = 60^\circ$ (h. 1). Vẽ phân giác AE của góc BAC. Kẻ $BH \perp AE$, $CK \perp AE$ (H và K thuộc tia AE). Các tam giác vuông ABH và ACK có

$$\widehat{BAH} = \widehat{CAK} = 30^\circ$$

$$\text{nên } BH = \frac{1}{2}AB, CK = \frac{1}{2}AC.$$

$$\text{Suy ra } BH + CK = \frac{1}{2}(AB + AC)$$

$$\Rightarrow AB + AC = 2(BH + CK) \quad (1)$$

Mặt khác, $BH \leq BE$; $CK \leq CE$

$$\Rightarrow BH + CK \leq BE + CE = BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB + AC \leq 2BC$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv E \equiv K \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Trường hợp 2. $\widehat{BAC} > 60^\circ$ (h. 2).

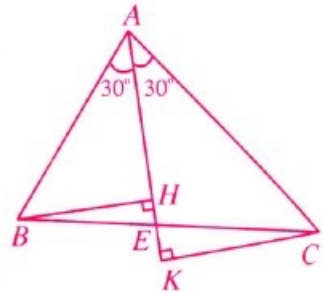
Trên BC lấy điểm B' sao cho $\widehat{CAB'} = 60^\circ$.

Theo trường hợp 1

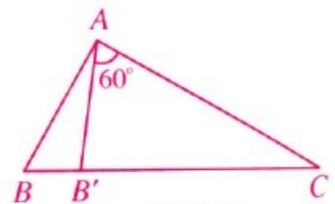
$$AB' + AC \leq 2B'C \quad (3)$$

Trong tam giác ABB' ta có

$$AB - AB' < BB' < 2BB' \quad (4)$$



Hình 1



Hình 2

ACER VIET NAM, BCD PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIÊN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

Phối hợp tổ chức và trao giải thưởng xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

Từ (3) và (4) suy ra $AB + AC < 2BC$. (trường hợp 2 không xảy ra dấu đẳng thức).

Tóm lại ta luôn có $AB + AC \leq 2BC$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Bài toán tuy đơn giản nhưng khá hay và có nhiều cách chứng minh. Ngoài cách giải trên, có bạn đã dựa vào bổ đề "Nếu tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} \geq 30^\circ$ thì $BC \leq 2AC$ ", sau đó chứng minh tương tự như trường hợp 1 của lời giải đã nêu.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bác Ninh: Lê Thị Hải Ninh, 7A, THCS Yên Phong;

Vĩnh Phúc: Phạm Văn Nhiệm, 6A, THCS Yên Lạc;

Hải Phòng: Nguyễn Hữu Bảo Minh, 7A1, THCS Hồng Bàng;

Nghệ An: Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương;

Quảng Ngãi: Tống Thành Nguyễn, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành;

Ninh Bình: Tô Minh Hiền, 7A, THCS Phát Diệm, Kim Sơn.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/397.** Tìm phần dư khi chia 3^{2^n} cho 2^{n+3} , trong đó n là số nguyên dương.

Lời giải. Cách 1. (Theo đa số các bạn). Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp mệnh đề:

Với $n \in \mathbb{N}^*$, thì khi chia 3^{2^n} cho 2^{n+3} sẽ có phần dư là $2^{n+2} + 1$. Thật vậy

– Với $n = 1$ ta có $3^{2^1} = 9$ chia cho $2^{1+3} = 16$ dư $9 = 2^{1+2} + 1$. Mệnh đề đúng với $n = 1$.

– Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) nghĩa là $3^{2^k} = 2^{k+3} \cdot A + 2^{k+2} + 1$ với $A \in \mathbb{N}^*$.

Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, tức là $3^{2^{k+1}}$ chia cho 2^{k+4} dư $2^{k+3} + 1$. Ta có

$$\begin{aligned} 3^{2^{k+1}} &= (3^{2^k})^2 = (2^{k+3} \cdot A + 2^{k+2} + 1)^2 \\ &= 2^{2k+6} \cdot A^2 + 2^{2k+4} + 1 + 2 \cdot 2^{k+3} \cdot A \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 2^{k+3} \cdot A + 2 \cdot 2^{k+2} \\ &= 2^{k+4} (2^{k+2} \cdot A^2 + 2^k + 2^{k+2} \cdot A + A) + 2^{k+3} + 1. \end{aligned}$$

Vì $k \in \mathbb{N}^*$ nên $2^{k+3} + 1 < 2^{k+3} + 2^{k+3} = 2^{k+4}$. Do đó $3^{2^{k+1}}$ chia cho 2^{k+4} dư $2^{k+3} + 1$. Theo nguyên lý quy nạp thì mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy phần dư khi chia 3^{2^n} cho 2^{n+3} là $2^{n+2} + 1$, với n nguyên dương.

Cách 2. Ta có

$$3^{2^n} = (3^{2^{n-1}} - 1) + 1$$

$$= (3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^{2^2} + 1) \dots (3^{2^{n-1}} + 1) + 1.$$

Dễ thấy $3^{2^k} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Do đó các số $3^2 + 1, 3^{2^2} + 1, \dots, 3^{2^{n-1}} + 1$ chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4. Hay $3^{2^k} + 1 = 2 \cdot p_k$ với $k \in \mathbb{N}^*$ và p_k là số lẻ. Suy ra

$$(3^2 + 1) \cdot (3^{2^2} + 1) \dots (3^{2^{n-1}} + 1) = 2^{n-1} \cdot (2m + 1),$$

với $m \in \mathbb{N}$.

$$\text{Vậy } 3^{2^n} = 2 \cdot 4 \cdot 2^{n-1} (2m + 1) + 1 = m \cdot 2^{n+3} + 2^{n+2} + 1.$$

Vì $2^{n+2} + 1 < 2^{n+2} + 2^{n+2} = 2^{n+3}$ nên phần dư khi chia 3^{2^n} cho 2^{n+3} là $2^{n+2} + 1$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đa số các bạn đều tìm đúng được kết quả. Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: Phạm Thị Thanh Thanh, 8A, THCS Lập Thạch;

Hải Phòng: Lê Xuân Tùng, 8B1, THCS Trần Phú, Lê Chân;

Nghệ An: Nguyễn Văn Tiến, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Cao Minh Sơn, 9D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Lê Kim Nhã, 9B, THCS Diễn Lâm, Diễn Châu.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/397.** Cho tam giác ABC . Dựng hình bình hành $AMPN$ sao cho các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC ; điểm P nằm bên trong tam giác ABC . Gọi Q là giao điểm của đường thẳng AP và cạnh BC . Chứng minh rằng

$$\frac{AM \cdot AN \cdot PQ}{AB \cdot AC \cdot AQ} \leq \frac{1}{27}.$$

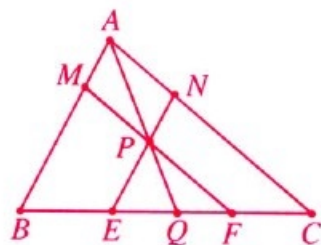
Hãy xác định vị trí điểm P để đẳng thức xảy ra.

Lời giải. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của NP, MP với BC . Do $NE \parallel AB, MF \parallel AC$ nên theo định lý Thales, ta có

$$\frac{AM}{AB} = \frac{FC}{BC}; \quad \frac{AN}{AC} = \frac{BE}{BC}$$

$$\frac{PQ}{AQ} = \frac{EQ}{BQ} = \frac{FQ}{QC} = \frac{EQ + FQ}{BQ + QC} = \frac{EF}{BC}.$$

$$\text{Từ đó } \frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC} + \frac{PQ}{AQ} = \frac{FC}{BC} + \frac{BE}{BC} + \frac{EF}{BC} = 1.$$



Từ bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương

$$a = \frac{AM}{AB}, b = \frac{AN}{AC}, c = \frac{PQ}{AQ} \text{ với } a + b + c = 1,$$

$$\text{ta có } a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{27} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Khi đó

$$MN \parallel BC \text{ và } \frac{PQ}{AQ} = \frac{1}{3}. \text{ Vì } AP \text{ đi qua trung}$$

điểm của MN nên Q cũng là trung điểm của BC . Do đó AQ là trung tuyến và P là trọng tâm tam giác ABC . $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương a^3, b^3, c^3 được chứng minh như sau :

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c) \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} + 3abc \geq 3abc.$$

2) Mấu chốt của bài toán trên là chứng minh hệ thức

$$\frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC} + \frac{PQ}{AQ} = 1.$$

Ngoài cách giải trên, các bạn còn có nhiều cách khác cũng ngắn gọn, chẳng hạn như chứng minh $\frac{AM}{AB} = \frac{S_{APC}}{S_{ABC}}, \frac{AN}{AC} = \frac{S_{APB}}{S_{ABC}}, \frac{PQ}{AQ} = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}$; hoặc kẻ thêm đường phụ qua P song song với BC rồi chuyển các tỉ số trên thành các tỉ số của ba độ dài trên cạnh AC .

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Nghe An: Đậu Hồng Quân, 8D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Trương Công Phú,** 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương. **Vĩnh Phúc:** Hoàng Minh Phương, 9A¹, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Ngô Văn Hương, Phạm Đức Hiền, 9A, THCS Yên Phong; Lê Bích Ngọc, 9A₁, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh. **Hà Nội:** Lê Minh Phúc, 9A₅, THCS Giảng Võ; **Phú Thọ:** Trịnh Hồng Ngọc, 9A₁, Vũ Tuấn Linh, 8A₁, THCS Lâm Thao; **Bến Tre:** Nguyễn Hoàng Kim Thy, 6¹, THCS Tân Trung, Mỏ Cày Nam. **Nam Định:** Nguyễn Văn Lương, 9A, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ Bài T5/397. Giải phương trình

$$\left(x + \frac{5-x}{\sqrt{x}+1}\right)^2 = \frac{-192(\sqrt{x}+1)}{5\sqrt{x}-x\sqrt{x}} \quad (1)$$

Lời giải. Cách 1. Điều kiện $x > 0$ và $x \neq 5$.

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow \left(\frac{x\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}\right)^2 = \frac{-192(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(5-x)}$$

$$\Leftrightarrow \left(5 - \frac{\sqrt{x}(5-x)}{\sqrt{x}+1}\right)^2 + \frac{192(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(5-x)} = 0.$$

$$\text{Đặt } y = \frac{\sqrt{5(5-x)}}{\sqrt{x}+1} \text{ (} y \neq 0 \text{) ta có}$$

$$(5-y)^2 + \frac{192}{y} = 0 \Leftrightarrow y^3 - 10y^2 + 25y + 192 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+3)(y^2 - 13y + 64) = 0.$$

Do $y^2 - 13y + 64 = (y-6,5)^2 + 21,75 > 0$ nên $y+3=0 \Leftrightarrow y=-3$ (thỏa mãn). Khi đó ta có

$$\frac{\sqrt{x}(5-x)}{\sqrt{x}+1} = -3 \Leftrightarrow -x\sqrt{x} + 8\sqrt{x} + 3 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t > 0$ và $t \neq \sqrt{5}$) ta có

$$t^3 - 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2 + 3t + 1) = 0.$$

Do $t > 0$ nên $t^2 + 3t + 1 > 0$ suy ra $t-3=0 \Leftrightarrow t=3$. Do đó $x = t^2 = 9$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 9$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn tham gia giải bài này. Có

bạn đã đặt $a = x + \frac{5-x}{\sqrt{x}+1}$; $b = \frac{(5-x)\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ để dẫn đến

hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2b = -192 \\ a+b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 5a^2 - 192 = 0 \\ b = 5-a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \end{cases}$$

rồi giải tiếp như trên.

Có bạn phân chia trường hợp $x > 9$, $x < 9$, $x = 9$ để xét cũng cho kết quả đúng.

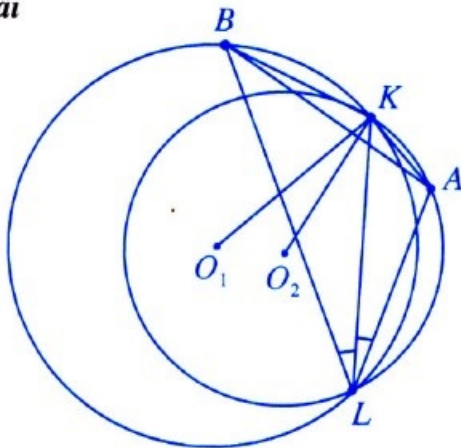
2) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Phạm Lan Hương, 9A, THCS Lập Thạch, Hoàng Minh Phương, 9A, THCS Yên Lạc; **Nam Định:** Ngô Quốc Tiến, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực; **Hà Nam:** Đỗ Đăng Dương, 6A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Lưu, Thanh Liêm; **Nghe An:** Lê Hồng Đức, Nguyễn Văn Tiến, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Đậu Hồng Quân, 8D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Vương Nhật Quân, 9C, THCS Nghi Thái, Nghi Lộc; **Bến Tre:** Nguyễn Hoàng Kim Thy, 6¹, THCS Tân Trung, Mỏ Cày Nam.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T6/397.** Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm K và L sao cho các điểm O_1 và O_2 ở về cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa đoạn thẳng KL . Tiếp tuyến tại K của đường tròn (O_1) cắt đường tròn (O_2) tại A . Tiếp tuyến tại K của đường tròn (O_2) cắt đường tròn (O_1) tại B . Tính diện tích tam giác AKB , biết rằng $AL = 3$, $BL = 6$ và $\tan \widehat{AKB} = -\frac{1}{2}$.

Lời giải



Từ giả thiết có $\widehat{AKL} = \widehat{KBL}$; $\widehat{BKL} = \widehat{LAK}$, suy ra $\triangle AKL \sim \triangle KBL \Rightarrow KL^2 = AL \cdot BL = 18$, và

$$BK = AK \cdot \frac{BL}{KL} = AK \cdot \sqrt{2} \quad (1)$$

Lại có $\widehat{ALK} = 180^\circ - \widehat{KAL} - \widehat{AKL}$
 $= 180^\circ - \widehat{AKL} - \widehat{BKL} = 180^\circ - \widehat{AKB}$.

Do đó $\tan \widehat{ALK} = -\tan \widehat{AKB} = \frac{1}{2}$, suy ra

$$\sin \widehat{ALK} = \sin \widehat{AKB} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (2)$$

$$\text{và } \cos \widehat{ALK} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác AKL ta có

$$\begin{aligned} AK^2 &= AL^2 + KL^2 - 2AL \cdot KL \cdot \cos \widehat{ALK} \\ &= 9 + 18 - \frac{36\sqrt{10}}{5} = 27 - \frac{36\sqrt{10}}{5} \end{aligned} \quad (3)$$

Do đó từ (1), (2) và (3) ta tìm được

$$S_{AKB} = \frac{1}{2} AK \cdot BK \cdot \sin \widehat{AKB} = \frac{27\sqrt{10} - 72}{10} \text{ (dvd)}. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** Số lời giải gửi về Tòa soạn khá nhiều. Hầu hết đều tìm đúng đáp số của bài toán. Xin nêu tên các bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Nguyễn Văn Quý, 11A1, Mạc Đức Huy, 12A1, Trường chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, Nguyễn Ngọc Sơn, 11 Toán 1, Trường THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội;
Vĩnh Phúc: Đỗ Xuân Việt, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Lê Văn Trọng, 11A2, THPT Đội Cấn, Phùng Thị Hương, 11A2, THPT Lê Xoay, Vĩnh Tường; **Phú Thọ:** Tạ Hải Nam, 11T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Hải Dương:** Đồng Xuân Bách, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Nguyễn Ngọc Thiện, 10A1, THPT Thanh Miện I, Bùi Huy Hoàng, 10A, THPT Kim Thành I; **Thái Bình:** Vũ Huy Hoàng, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** Trương Đình Đức, 10A1, Nguyễn Thanh Long, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, Lê Đình Tuấn, 11T7, THPT Đô Lương I, Hoàng Việt Anh, 11A1, THPT Thanh Chương 3; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** Hà Văn Huỳnh Anh, 10/1, Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Nguyễn Thị Dạ Thảo, 11/3, THPT Trần Văn Dư; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, Phan Minh Trí, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Bình Định:** Nguyễn Quang Hải, 10TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Đồng Nai:** Ông Thế Phương, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Bến Tre:** Khổng Hữu Hiệp, 11 Toán, Cao Thành Chương, Trần Hoàng Ân, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Long An:** Huỳnh Phạm Anh Trúc, 11T, THPT chuyên Long An; **Tiền Giang:** Đỗ Quang Bình, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T7/397.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + 5 \geq (a+b)(b+c)(c+a).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bốn số dương, ta có

$$a^3 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} \geq 4\sqrt[4]{a^3 \left(\sqrt[3]{a}\right)^3} = 4a$$

$$\text{hay } a^3 + 3\sqrt[3]{a} \geq 4a \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a^3 = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow a = 1$ (do $a > 0$)

$$\text{Tương tự } b^3 + 3\sqrt[3]{b} \geq 4b \quad (2)$$

$$c^3 + 3\sqrt[3]{c} \geq 4c \quad (3)$$

Cộng theo vế của (1), (2), (3) ta được

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}) \\ \geq 4(a+b+c) = 12 \end{aligned} \quad (4)$$

Mặt khác từ đẳng thức quen thuộc

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a);$$

kết hợp với giả thiết $a+b+c=3$, ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 = 27 - 3(a+b)(b+c)(c+a) \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$27 - 3(a+b)(b+c)(c+a) + 3(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}) \geq 12.$$

Chuyển vế và rút gọn, ta được

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + 5 \geq (a+b)(b+c)(c+a). \text{ Đpcm}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Có thể sử dụng phương pháp đạo hàm chứng minh bất đẳng thức (1) như sau:

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^{\frac{1}{3}} - 4x$;

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 4; \text{ đặt } t = \sqrt[3]{x^2} > 0 \text{ ta thấy } f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^3 + \frac{1}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t^3 + 3t^2 + 3t - 1) = 0.$$

Nhận thấy PT có nghiệm $t=1$ và một nghiệm thoả mãn $0 < t_0 < 1$. Vậy PT $f'(x) = 0$ có nghiệm $x=1$ và một nghiệm thoả mãn $0 < x_0 < 1$; lập bảng biến thiên, ta được $f(x) \geq 0, \forall x > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $x=1$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Lê Minh Phúc, 9A5, THCS Giảng Võ; **Vĩnh Phúc:** Phạm Lan Hương, 9A, THCS Lập Thạch; **Nghệ An:** Đậu Hồng Quân, 8D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** Lê Thị Thu Anh, 10A1, THPT Kỳ Anh; **Bình Định:** Nguyễn Danh Nhân, 10A1, THPT Phù Cát II; **Đồng Nai:** Trần Quang Sang, 10A1, THPT Ngô Quyền, TP Biên Hoà; **Bình Phước:** Dương Tuấn Anh, 9A9, THCS Tân Xuân, Thị xã Đồng Xoài.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T8/397. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 3z^3 + 2z^2 \\ y = 3x^3 + 2x^2 \\ z = 3y^3 + 2y^2 \end{cases}$$

Lời giải. Do hệ PT đã cho có dạng hoán vị vòng quanh nên có thể giả sử $x = \max\{x; y; z\}$.

Hệ PT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + z = 3z^3 + 2z^2 + z \\ y + x = 3x^3 + 2x^2 + x \\ z + y = 3y^3 + 2y^2 + y \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2t^2 + t$, khi đó hệ phương trình đã cho có dạng

$$\begin{cases} x + z = f(z) \\ y + x = f(x) \\ z + y = f(y) \end{cases}$$

Mặt khác, ta có

$$f'(t) = 9t^2 + 4t + 1 > 0, \forall t.$$

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó $x \geq z \Leftrightarrow f(x) \geq f(z)$, tức là $y + x \geq x + z \Leftrightarrow y \geq z$.

Suy ra $f(y) \geq f(z) \Leftrightarrow z + y \geq x + z \Leftrightarrow y \geq x$. Kết hợp với $x = \max\{x; y; z\}$ ta có $x = y$, suy ra $f(y) = f(x) \Leftrightarrow y + z = y + x \Leftrightarrow x = z$.

Vậy $x = y = z$, thay vào các PT của hệ ta có

$$3x^3 + 2x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{1}{3}.$$

Vậy HPT đã cho có ba nghiệm $(x; y; z)$ là

$$(-1; -1; -1), (0; 0; 0), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right). \square$$

➤ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn xét trực tiếp hàm số $g(t) = 3t^3 + 2t^2$ cũng tìm ra đáp số, tuy nhiên cách làm này phức tạp vì hàm g không phải là hàm số đơn điệu.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Đoàn Văn Tươi, 10A1, THPT Gia Bình số 1; **Phú Thọ:** Nguyễn Xuân Thanh, 10A1, THPT Thanh Ba; **Đỗ Quốc Tiến,** 11A1, THPT Thanh Thủy; **Hưng Yên:** Vũ Nhật Khánh, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** Phạm Đức Vượng, Nguyễn Ngọc Thiện, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Bùi Huy Hoàng,** 10A, THPT Kim Thành I; **Thái Bình:** Vũ Huy Hoàng, 10A1, THPT Tây Thụy Anh; **Nam Định:** Trần Quang Huy, 10A1, THPT A Hải Hậu; **Nguyễn Thành Đô,** 11A1, THPT Giao Thủy; **Nghệ An:** Đặng Hữu Trọng, 11A1, THPT Quỳnh Hợp 2, Trường Đinh Đức, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** Phan Thị Thu Hoài, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bến Tre:** Khổng Hữu Hiệp, 11 Toán, Trần Hoàng Ân, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T9/397.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh và h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao tương ứng. Ký hiệu r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng

$$\frac{9R}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{h_a + \sqrt{h_b h_c}} + \frac{1}{h_b + \sqrt{h_c h_a}} + \frac{1}{h_c + \sqrt{h_a h_b}} \leq \frac{1}{2r}.$$

Lời giải. Vì $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right), \forall x, y > 0$ và

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right), \forall x, y > 0 \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_a + \sqrt{h_b h_c}} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{\sqrt{h_b h_c}} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \right). \end{aligned}$$

Tương tự

$$\frac{1}{h_b + \sqrt{h_c h_a}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} \right) \right);$$

$$\frac{1}{h_c + \sqrt{h_a h_b}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} \right) \right).$$

Từ các bất đẳng thức trên, chú ý rằng

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}, \text{ suy ra}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_a + \sqrt{h_b h_c}} + \frac{1}{h_b + \sqrt{h_c h_a}} + \frac{1}{h_c + \sqrt{h_a h_b}} \\ \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = \frac{1}{2r} \end{aligned} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Theo các bất đẳng thức

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9, \forall x, y, z > 0;$$

$$x + y + z \geq \sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}, \forall x, y, z > 0;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq yz + zx + xy, \forall x, y, z$$

$$\text{và chú ý rằng } S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{abc}{4R}$$

(S chỉ diện tích tam giác ABC) ta có

$$\frac{1}{h_a + \sqrt{h_b h_c}} + \frac{1}{h_b + \sqrt{h_c h_a}} + \frac{1}{h_c + \sqrt{h_a h_b}}$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{9}{h_a + h_b + h_c + \sqrt{h_b h_c} + \sqrt{h_c h_a} + \sqrt{h_a h_b}} \\ &\geq \frac{9}{2(h_a + h_b + h_c)} = \frac{9}{4S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \\ &= \frac{9abc}{4S(bc + ca + ab)} = \frac{9R}{bc + ca + ab} \\ &\geq \frac{9R}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Từ (1) và (2) suy ra đpcm. $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán này có rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng. Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tốt:

Bác Ninh: Nguyễn Hữu Thịnh, 12A1, THPT Nguyễn Đăng Đạo; **Vinh Phúc:** Nguyễn Minh Thuận, 11A₁₀, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** Nguyễn Mạnh Hùng, 11A₁, THPT Quỳnh Hợp II, Hoàng Viết Ánh, 11A₁, THPT Thanh Chương; **Hà Tĩnh:** Lê Thị Thu Anh, 10A₁, THPT Kỳ Anh; **Quảng Ngãi:** Đặng Thành Nhân, 11T₁, THPT chuyên Lê Khiết; **Đồng Tháp:** Âu Anh Minh, 10T, THPT Cao Lãnh; **Đắk Lắk:** Trần Khắc Vỹ, 12T, THPT chuyên Nguyễn Du; **Bến Tre:** Cao Thành Phong, 12T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T10/397.** Với mỗi tập A gồm n điểm phân biệt trong mặt phẳng ($n \geq 2$), kí hiệu $T(A)$ là tập các vectơ có điểm đầu và điểm cuối đều thuộc A . Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|T(A)|$.

(Kí hiệu $|T(A)|$ là số phần tử của tập $T(A)$).

Lời giải. (Theo bạn Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, **Phú Yên**).

• **Tìm $\max |T(A)|$.** Số đoạn thẳng với hai đầu mút khác nhau thuộc A là $\frac{n(n-1)}{2}$. Do đó số vectơ khác $\vec{0}$ của $T(A)$ không quá $n(n-1)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} |T(A)| &\leq n(n-1) + 1 \quad (\text{do } \vec{0} \in T(A)) \\ &= n^2 - n + 1. \end{aligned}$$

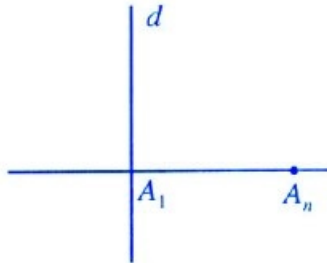
Chọn A là tập n điểm phân biệt thuộc một cung có số đo không quá 90° của một đường

tròn thì dễ thấy không có hai vectơ nào có điểm đầu và điểm cuối thuộc A bằng nhau. Vậy

$$\max |T(A)| = n^2 - n + 1.$$

• *Tìm min $|T(A)|$.* Xét tập A gồm n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ bất kì. Không giảm tổng quát ta giả sử $A_1 A_n = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{A_i A_j\}$.

Gọi d là đường thẳng qua A_1 và vuông góc với $A_1 A_n$. Khi đó tất cả các điểm thuộc tập A đều thuộc nửa mặt phẳng chứa A_n có bờ là d và chỉ có A_1 thuộc d (h. 1).

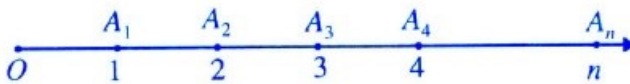


Hình 1.

Thật vậy, giả sử có điểm A_k ($1 < k < n$) không như vậy. Khi đó $\widehat{A_k A_1 A_n} \geq 90^\circ$, dẫn đến $A_k A_n > A_1 A_n$. Mâu thuẫn. Thành thử $2(n-1)$ vectơ khác vectơ không là: $\overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_n}, \overrightarrow{A_n A_1}, \dots, \overrightarrow{A_2 A_1}$ đôi một phân biệt.

Vậy $|T(A)| \geq 2(n-1) + 1 = 2n-1$ (do $\vec{0} \in T(A)$).

Ta chỉ ra một tập A mà $|T(A)| = 2n-1$. Trên trục số ta đặt điểm A_k vào điểm k (h. 2).



Hình 2

Dễ thấy $|T(A)| = 2n-1$ (vì với mọi vectơ $\overrightarrow{A_i A_j}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) đều tồn tại k ($1 < k \leq n$)

sao cho $\overrightarrow{A_1 A_k} = \overrightarrow{A_i A_j}$ hoặc $\overrightarrow{A_k A_1} = \overrightarrow{A_i A_j}$).

Thành thử min $|T(A)| = 2n-1$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Bài toán này có ít bạn tham gia giải và duy nhất có bạn Huy là giải đúng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T11/397.** Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hai điều kiện

$$\begin{cases} f(2012) = 2011 \\ f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Kí hiệu $f_n(x) = \underbrace{f(f \dots f(x))}_{n \text{ lần } f}$. Hãy tính $f(2010)$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Nhận xét rằng, từ điều kiện f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, $f(2012) = 2011$ thì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi $I(f)$ là tập giá trị của hàm f . Khi đó $f_4(2012) = \frac{1}{2011}$ và $I(f) \subset \mathbb{R}^+$.

Trên $I(f)$ ta có $xf_3(x) = 1, \forall x \in I(f)$ hay $f_3(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in I(f)$. Do hàm số f liên tục

trên $\mathbb{R}$ và hàm $g(x) = \frac{1}{x}$ liên tục và nghịch biến trên $I(f)$, nên f nghịch biến trên $I(f)$.

Ta chứng minh $f(x) \equiv \frac{1}{x}$ trên $I(f)$.

Thật vậy, giả sử $\exists x_0 \in I(f)$ để $f(x_0) > \frac{1}{x_0}$ thì $f_2(x_0) < f\left(\frac{1}{x_0}\right)$ (1)

và $\frac{1}{x_0} = f_3(x_0) = f(f_2(x_0)) > f_2\left(\frac{1}{x_0}\right)$,

tức là $f\left(\frac{1}{x_0}\right) < f_3\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy $x_0 > f_2(x_0)$ hay

$f(x_0) < f_3(x_0) = \frac{1}{x_0}$, mâu thuẫn.

Tương tự, ta cũng chứng minh được không tồn tại $x_0 \in I(f)$ để $f(x_0) < \frac{1}{x_0}$. Vậy $f(x) \equiv \frac{1}{x}$

trên $I(f)$. Do đó $f(2010) = \frac{1}{2010}$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là đề toán đã được sử dụng ở TH&TT tháng 10/2008 (bài T10/376) và trong Tuyển tập đề thi Olympic 30.4 lần thứ VIII (chỉ sai khác dữ liệu), rất quen biết và thuộc loại dễ nên có nhiều bạn giải được theo cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/397.** Cho dãy số (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định bởi $x_1 = 2, 1$ và

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 2 + \sqrt{x_n^2 + 8x_n - 4}}{2}.$$

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i+1}^2 - 4}$.

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

Lời giải. (Theo bạn Vũ Huy Hoàng, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Bình).

Nhận xét. Với số thực $a > 2$ bất kì, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a-2+\sqrt{a^2+8a-4}}{2} &> \frac{a-2+\sqrt{a^2+4a+4}}{2} \\ &= \frac{a-2+(a+2)}{2} = a. \end{aligned}$$

Do đó $2, 1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ (1)

Mặt khác, từ công thức truy hồi của dãy (x_n) ở giả thiết bài toán, ta suy ra

$$\begin{aligned} (2x_{n+1} - x_n + 2)^2 &= x_n^2 + 8x_n - 4 \\ \Rightarrow 4x_{n+1}^2 + x_n^2 + 4 - 4x_{n+1}x_n + 8x_{n+1} - 4x_n &= x_n^2 + 8x_n - 4 \\ \Rightarrow x_{n+1}^2 - 4 &= x_{n+1}x_n + 3x_n - 2x_{n+1} - 6 \\ \Rightarrow x_{n+1}^2 - 4 &= (x_{n+1} + 3)(x_n - 2) \\ \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}^2 - 4} &= \frac{x_{n+1} + 3}{x_{n+1}^2 - 4} = \frac{x_{n+1} + 2 + 1}{x_{n+1}^2 - 4} = \frac{1}{x_{n+1} - 2} + \frac{1}{x_{n+1}^2 - 4} \\ \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}^2 - 4} &= \frac{1}{x_n - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2} \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_{n+1}^2 - 4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n - 2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_{n+1} - 2} = 0$$

suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

$$\begin{aligned} \text{Bởi vậy } y_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i+1}^2 - 4} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i - 2} - \frac{1}{x_{i+1} - 2} \right) \\ &= \frac{1}{x_1 - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2} = 10 - \frac{1}{x_{n+1} - 2} \end{aligned}$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 10$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Để rút ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ ta có thể dùng

cách khác: Phương trình giới hạn $x = \frac{x-2+\sqrt{x^2+8x-4}}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = (x+3)(x-2)$ không có nghiệm hữu hạn $x > 2$.

2) Ngoài bạn Hoàng, các bạn học sinh lớp 10 sau cũng có lời giải tốt:

Quảng Ninh: Bùi Hoàng Tùng, 10A3, THPT Uông Bí;
Hà Nam: Nguyễn Chí Linh, Đặng Duy Hiền, 10A1, THPT Hà Nam; **Hải Dương:** Đồng Xuân Bách, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Huyền Trang, 10T, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** Trương Đình Đức, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I; **Quảng Ngãi:** Phạm Thành Công, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Khánh Hòa:** Nguyễn Đình Luận, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Nguyễn Quang Hải, 10TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Nguyễn Danh Nhân, 10A1, THPT Phù Cát II.

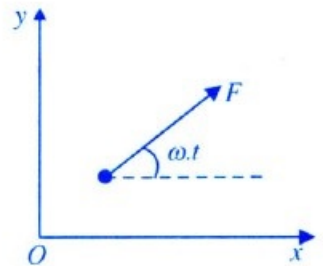
NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài L1/397.** Một hạt có khối lượng m chuyển động trên mặt phẳng ngang, nhẵn, dưới tác dụng của một lực có độ lớn không đổi F và có phương quay trong mặt phẳng này với vận tốc góc không đổi ω . Giả sử lúc $t = 0$ hạt đứng yên, hãy tính

a) Vận tốc của hạt theo thời gian.

b) Quãng đường hạt đi được giữa hai lần dừng liên tiếp và vận tốc trung bình của hạt trong thời gian đó.

Lời giải. a) Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ: gốc O là vị trí ban đầu của hạt, trục Ox hướng cùng chiều với lực ở thời điểm ban đầu ($t = 0$).



Ở thời điểm t lực F đã quay được một góc ωt . Phương trình định luật II Newton cho hạt:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

• Theo phương Ox , ta có

$$F \cos \omega t = m a_x = m \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = \frac{F}{m} \cos \omega t \cdot dt.$$

Tích phân hai vế phương trình này và chú ý điều kiện ban đầu $t = 0, v_x = 0$ ta được

$$v_x = \frac{F}{m\omega} \sin \omega t.$$

• Theo phương Oy , ta có

$$F \sin \omega t = m a_y = m \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow dv_y = \frac{F}{m} \sin \omega t \cdot dt.$$

Tích phân hai vế phương trình này và chú ý điều kiện ban đầu $t = 0, v_y = 0$ ta được

$$v_y = \frac{F}{m\omega}(1 - \cos\omega t)$$

Vận tốc của hạt ở thời điểm t là

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{2F}{m\omega} \sin \frac{\omega t}{2}.$$

b) Tại thời điểm $v = 0$ thì

$$\sin \frac{\omega t}{2} = 0 \Rightarrow t = k \frac{2\pi}{\omega} (k \in \mathbb{N}).$$

Khoảng thời gian giữa hai lần hạt dừng liên tiếp là $\Delta t = t_{k+1} - t_k = \frac{2\pi}{\omega}$.

Quãng đường hạt đi được giữa hai lần dừng liên tiếp là

$$S = \int ds = \int v dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{F}{m\omega} \sin \frac{\omega t}{2} dt = \frac{4F}{m\omega^2}.$$

Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian đó là $\bar{v} = \frac{S}{\Delta t} = \frac{2F}{\pi\omega m}$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng:

Bến Tre: Liêu Khắc Vũ, 10 Lí, THPT chuyên Bến Tre;
Hà Nam: Đinh Ngọc Hải, 11 Lí, THPT chuyên Hà Nam.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/397.** Một quả cầu nhỏ làm bằng hợp kim chì và kẽm ở nhiệt độ $t_1 = 140^\circ\text{C}$, được thả vào một chiếc cốc đặt



nằm ngang chứa 200g nước ở nhiệt độ $t_2 = 30^\circ\text{C}$ (hình vẽ). Nhiệt độ của nước và của quả cầu khi có cân bằng nhiệt là $t_3 = 31,8^\circ\text{C}$. Khi quả cầu cân bằng trong nước thì nó không chạm đáy cốc và thể tích nước trong cốc tăng lên so với trước khi thả là 50cm^3 . Tìm khối lượng của chì và kẽm trong quả cầu nói trên. Cho biết khối lượng riêng của nước là $D = 1000\text{kg/m}^3$; nhiệt dung riêng của nước là $c_0 = 4,2\text{ kJ/kg.}^\circ\text{C}$, của chì là $c_1 = 0,13\text{ kJ/kg.}^\circ\text{C}$, của kẽm là $c_2 = 0,38\text{ kJ/kg.}^\circ\text{C}$. Bỏ qua sự trao đổi nhiệt với cốc và môi trường.

Lời giải. Thể tích của quả cầu là $V = 50\text{cm}^3 = 5.10^{-6}\text{m}^3$. Gọi M là khối lượng của quả cầu. Vì quả cầu lơ lửng trong nước nên khối lượng của nó là

$$M = V.D = 50.10^{-6}.10^3 = 50.10^{-3}(\text{kg}) = 50(\text{g}).$$

Nhiệt lượng mà $m = 200\text{g}$ nước nhận được là $Q = mc_0(t_3 - t_2)$.

Gọi m_1 là khối lượng của chì. Nhiệt lượng mà chì tỏa ra là

$$Q_1 = m_1 c_1 (t_1 - t_3).$$

Gọi m_2 là khối lượng của kẽm. Nhiệt lượng mà kẽm tỏa ra là

$$Q_2 = m_2 c_2 (t_1 - t_3).$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có $Q = Q_1 + Q_2$

$$\text{hay } mc_0(t_3 - t_2) = (m_1 c_1 + m_2 c_2)(t_1 - t_3) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác thì } m_1 + m_2 = M \quad (2)$$

Thay số vào các phương trình (1) và (2), ta được

$$\begin{cases} 14066m_1 + 41116m_2 = 1512000 \\ m_1 + m_2 = 50. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta thu được

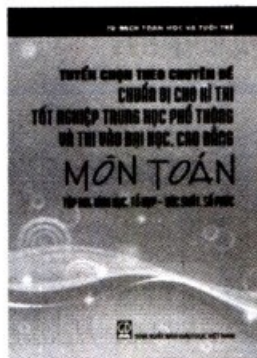
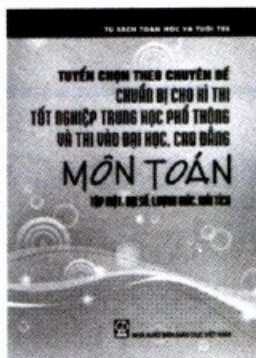
$$m_1 \approx 20\text{g}, m_2 \approx 30\text{g}$$

Vậy khối lượng của chì là 20g, còn khối lượng của kẽm là 30g. $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải gọn và tốt:

Thái Nguyên: Vũ Quang Minh, 11Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Hà Nội:** Bùi Văn Tuấn, 12A1, THPT Ứng Hòa A; **Hải Dương:** Nguyễn Ngọc Thiện, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Minh Hương, 12A, THPT Lý Bôn; **Hưng Yên:** Hồ Ngọc Hiệp, 10A5, Nguyễn Hữu Tuấn, 12A8, THPT Nam Khoái Châu; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I, Đặng Hữu Trọng, 11A1, THPT Quỳnh Hợp 2, Nguyễn Thanh Sơn, 10A1, THPT Diễn Châu 3; **Hà Tĩnh:** Phan Thị Thu Hoài, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh, Bùi Văn Vương, 11A1, THPT Nghèn, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** Phạm Quốc Đón, 12C1, Võ Văn Cường, 10A1, THPT chuyên Lê Khiết; **Cần Thơ:** Nguyễn Long Phước Đường, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bình Định:** Phạm Gia Huy, 11A1, THPT I, An Nhơn; **Bến Tre:** Cao Thành Chương, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN VĂN THUẬN

SÁCH MỚI**TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN****Tập 1: Đại số, Lượng giác, Giải tích****260 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 36.500 đồng****Tập 2: Hình học, Tổ hợp - Xác suất, Số phức****240 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 34.500 đồng**

Các bạn có thể mua các ấn phẩm trên tại Tòa soạn, các cơ sở Bưu điện, các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương, các cửa hàng sách của NXBGD Việt Nam. Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ :

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

Để biết thêm chi tiết xin liên hệ với Tòa soạn :

ĐT - FAX : 04.35121606.**Email : tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn****PROBLEMS... (Tiếp trang 17)****TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD**

T9/401. Let ABC be an acute triangle with $AB \neq AC$. Let P be a point inside the triangle so that $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$, draw lines PM and PN perpendicular to AB and AC respectively. O is the midpoint of BC . The angle-bisectors of BAC and MON intersect at R . Prove that the circumcircles of the triangles BMR and CNR meet at another point on the line segment BC .

T10/401. Let a be a positive real number. Let (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) be a sequence defined by

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{x_n \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}{x_n + 1}$$

for all $n = 1, 2, \dots$ (there are exactly n numbers 2 in the numerator).

Prove that the sequence (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) has a finite limit and find this limit.

T11/401. Find all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the condition

$$\begin{aligned} &f(x + f(y)) \\ &= f^4(y) + 4x^3 f(y) + 6x^2 f^2(y) + 4x f^3(y) + f(-x) \end{aligned}$$

for all x, y in $\mathbb{R}$.

T12/401. Let ABC be an equilateral triangle with circumradius R and let P be a point inside the triangle. Prove that

$$PA \cdot PB \cdot PC \leq \frac{9}{8} R^3.$$

Translated by LE MINH HA



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 401 (11.2010)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121601

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School

Hoàng Đức Nguyên – Vài ứng dụng của công thức tính $\tan 15^\circ$.

3 Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, năm học 2010 – 2011.

4 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation

Nguyễn Anh Dũng – Một số dạng toán về khoảng cách lớn nhất, nhỏ nhất liên quan đến hàm số.

7 Thử sức trước kì thi – Đề số 2.

8 Hướng dẫn giải Đề số 1.

9 Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics

Trần Xuân Đáng – Một số bài toán liên quan đến phương trình nghiệm nguyên.

12 Viện Toán học Việt Nam đón nhận Huân chương Độc lập hạng Nhì.

13 Bạn có biết? – Do you know?

Phan Thanh Quang – Chứng minh định lí toán học bằng công cụ vật lí.

14 Câu lạc bộ – Math Club

15 Giải trí toán học – Math Recreation

16 Đề ra kì này – Problems in This Issue

T1/401 ..., T12/401, L1/401, L2/401.

18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems

Giải các bài của số 397.

28 Kết quả Cuộc thi giải Toán và Vật lí trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm học 2009 – 2010.

Ảnh Bìa 1. Thứ trưởng Bộ GD&ĐT Trần Quang Quý cùng các đại biểu, các thầy cô giáo, học sinh được tặng thưởng trong "Lễ trao giải Học sinh tích cực đọc và giải toán trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ và Toán Tuổi thơ" tại trường THCS Giảng Võ, Hà Nội ngày 18/10/2010.

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH

Trĩ sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật : MINH THƠ

Chế bản : NGUYỄN THỊ ANH

<https://neutrinohelp.org>

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM chung tay cùng miền Trung “vượt lũ”



Thứ trưởng Bộ GD&ĐT Nguyễn Thị Nghĩa, Phó Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam Nguyễn Minh Khang thăm và tặng quà Ngành Giáo dục huyện Can Lộc, tỉnh Hà Tĩnh.

Đợt mưa lũ kéo dài từ ngày 14 đến 20/10/2010 tại các tỉnh Nghệ An, Hà Tĩnh, Quảng Bình đã gây thiệt hại nặng nề về người và tài sản của nhân dân. Đối với ngành Giáo dục, thiệt hại tại ba tỉnh ước tính trên 700 tỉ đồng, trong đó riêng SGK khoảng 27 tỉ đồng.

NXBGD Việt Nam đã tổ chức quyên góp tiền, sách giáo khoa, quần áo, tập vở và đồ dùng học tập... cứu trợ đồng bào miền Trung. Mỗi cán bộ, nhân viên của NXBGD Việt Nam ủng hộ ít nhất 2 ngày lương, 1 bộ SGK, quần áo, Đồng thời cử cán bộ thăm và tặng quà cứu trợ các tỉnh bị thiệt hại nặng từ ngày 27 đến 29/10/2010.

❖ Tại tỉnh Nghệ An, NXBGD Việt Nam đã hỗ trợ các trường học trong tỉnh 50.000 cuốn vở, 20.000 bản SGK, 03 thùng đồ chơi cho trẻ mầm non và hỗ trợ 64 triệu đồng cho 32 gia đình có người thiệt mạng, mỗi gia đình 2 triệu đồng.

❖ Tại tỉnh Hà Tĩnh, tới thăm các trường học tại huyện Can Lộc, NXBGD Việt Nam đã trao tặng 10.000 cuốn vở, 15.000 bản SGK, 10 thùng sách mẫu giáo và hỗ trợ 80 triệu đồng cho 40 gia đình có người thiệt mạng.

❖ Tại tỉnh Quảng Bình, Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam Ngô Trần Ái đã trao tặng 2 trường Tiểu học và THCS huyện Quảng Trạch 658 bộ SGK và tập vở cho các em học sinh; đồng thời hỗ trợ 132 triệu đồng cho 66 gia đình có người thiệt mạng. Chúng kiến những thiệt hại do cơn lũ dữ gây ra, ông chia sẻ: *Chúng tôi rất cảm động khi biết các thầy, cô giáo và các em học sinh vừa trải qua hai trận lũ lớn. Sách vở bị trôi, đường đến trường khó khăn hơn bao giờ hết. Hy vọng với số sách vở này, các em sẽ vượt qua được những khó khăn trước mắt.*

Sau ba đợt quyên góp trong các đơn vị toàn NXBGD Việt Nam đã quyên góp được trên 60.000 bản SGK, trên 6.000 bộ quần áo, trên 60.000 cuốn vở viết, hỗ trợ 138 gia đình có người thiệt mạng và mất tích trong lũ, với tổng số tiền trên **900 triệu đồng**. Đồng thời in khăn trương, chuyển đủ số lượng sách cần thiết tới các tỉnh Nghệ An, Hà Tĩnh, Quảng Bình để phục vụ học sinh vùng lũ.

BẠCH KIM