



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

9 2010
Số 399

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 47

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Tr. s: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoitre



Chúc mừng Giáo sư NGÔ BẢO CHÂU
nhận giải thưởng FIELDS năm 2010

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

ĐẢM BẢO ĐỦ SÁCH GIÁO KHOA PHỤC VỤ NĂM HỌC MỚI



Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam Ngô Trần Ái trao tặng SGK cho học sinh con Thương binh - Liệt sĩ 9 tỉnh miền Trung Tây Nguyên tại Quảng Trị, ngày 25/7/2010.

Để đảm bảo đủ sách giáo khoa và các sản phẩm giáo dục phục vụ năm học 2010–2011, ngay từ đầu năm 2010, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã triển khai nhiều hoạt động đồng bộ đảm bảo mục tiêu: *Giữ ổn định giá sách giáo khoa, đáp ứng 100% học sinh có sách giáo khoa để học tập, không để thiếu sách, sót sách trên mọi miền đất nước.*

Đến cuối tháng 8/2010 đã có trên 80 triệu bản sách giáo khoa các cấp học được phát hành đến tay học sinh trong cả nước. NXBGDVN đã dành trên 70 nghìn bộ sách giáo khoa, trị giá hơn 7 tỉ đồng tặng cho học sinh là con Thương binh – Liệt sĩ.

Việc triển khai 2 tháng phát hành sách giáo dục (Tháng phát hành sách phục vụ hè bắt đầu từ 20/5 đến 20/6/2010 và Tháng phát hành sách phục vụ năm học mới từ 20/7 đến 20/8/2010) đã giúp học sinh có thể mua sách giáo khoa sớm cho năm học mới và có đủ sách cần thiết khi năm học mới chính thức bắt đầu. Bảng giá sách giáo khoa được niêm yết tại tất cả các cửa hàng sách của NXBGDVN, các công ty Sách – Thiết bị trường học trên cả nước và thông báo trên Web: <http://www.nxbgd.vn/> của NXBGDVN.

Đặc biệt, NXBGDVN tiếp tục tổ chức phong trào mua - bán sách giáo khoa cũ nhằm giúp cho các học sinh nghèo và học sinh có hoàn cảnh khó



Các em học sinh chọn SGK cho năm học mới
(Theo báo Thanh niên, 16/8/2010)

khăn có thể mua sách với giá rẻ; đồng thời giáo dục tính tiết kiệm, nâng niu giữ gìn sách học tập cho các em học sinh.

Ngoài sách giáo khoa, NXBGDVN đã cung ứng đầy đủ sách bổ trợ, sách nâng cao kiến thức, bản đồ, tranh ảnh giáo dục, tập vở học sinh,... phục vụ mọi nhu cầu học tập của học sinh.

Với những biện pháp trên, năm học 2010 – 2011 học sinh trong cả nước yên tâm có đủ sách giáo khoa và các dụng cụ học tập khi bước vào năm học mới.

BẠCH KIM

THƯ CỦA CHỦ TỊCH NƯỚC NGUYỄN MINH TRIẾT

**Gửi các thầy giáo, cô giáo, cán bộ viên chức ngành Giáo dục,
các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên cả nước
nhân dịp khai giảng năm học mới 2010 - 2011**

Nhân ngày khai giảng năm học mới và ngày **toàn dân đưa trẻ đến trường**, tôi thân ái gửi tới các thế hệ nhà giáo, cán bộ, công nhân viên chức ngành Giáo dục, các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên trong cả nước lời chúc mừng tốt đẹp nhất.

Năm học 2009-2010, toàn ngành Giáo dục đã có nhiều cố gắng đạt được những thành tựu quan trọng. Hệ thống, quy mô, mạng lưới giáo dục đào tạo tiếp tục được mở rộng. Chất lượng và hiệu quả giáo dục đã có tiến bộ. Việc giáo dục đạo đức, pháp luật, lý tưởng và ý chí để xây dựng và bảo vệ Tổ quốc cho học sinh, sinh viên được chú trọng. Chương trình kiên cố hóa trường lớp và hạ tầng công nghệ thông tin được quan tâm đầu tư. Sau 10 năm thực hiện Chiến lược phát triển giáo dục, tất cả các tỉnh, thành phố đều đã đạt chuẩn phổ cập giáo dục trung học cơ sở và cơ bản phổ cập giáo dục tiểu học đúng độ tuổi. Đội ngũ nhà giáo đạt chuẩn trình độ đào tạo ở các cấp học đều tăng. Nhiều học sinh đạt giải cao trong các kì thi quốc gia, quốc tế. Phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực" đã huy động được các lực lượng xã hội cùng chung tay thực hiện giáo dục toàn diện cho học sinh... Tôi nhiệt liệt biểu dương sự nỗ lực và những thành tựu của ngành Giáo dục, đặc biệt là tập thể, cá nhân đi đầu trong các cuộc vận động và các phong trào thi đua của ngành, các nhà giáo đang công tác ở vùng sâu, vùng xa, biên giới và hải đảo.

Năm học 2010-2011, đây là năm học đầu tiên thực hiện Nghị quyết Đại hội Đảng các cấp và Đại hội Đảng toàn quốc lần

thứ XI, ngành Giáo dục và Đào tạo phải quán triệt sâu sắc các chủ trương, chính sách của Đảng, Nhà nước, tiếp tục đổi mới quản lý và nâng cao chất lượng giáo dục với những giải pháp mạnh mẽ. Toàn ngành cần tập trung nguồn lực để triển khai các đề án phát triển giáo dục đã được Chính phủ phê duyệt, quan tâm hơn nữa đến các vùng sâu, vùng xa, vùng đồng bào còn nhiều khó khăn...

Các em học sinh, sinh viên yêu quý!

Vừa qua, chúng ta vô cùng tự hào đón tin vui: Giáo sư Ngô Bảo Châu, người Việt Nam đầu tiên được vinh danh và nhận Giải thưởng Fields, giải thưởng cao quý nhất giành cho những nhà toán học đạt thành tựu kiệt xuất trên thế giới. Tôi mong các em học sinh, sinh viên hãy noi theo các tấm gương học giỏi, rèn luyện tốt, đặc biệt là của Giáo sư Ngô Bảo Châu, vươn lên chiếm lĩnh những đỉnh cao của khoa học, góp phần phụng sự đất nước và làm rạng danh dân tộc Việt Nam.

Tôi đề nghị các cấp ủy Đảng, chính quyền, các tổ chức chính trị, xã hội và toàn thể nhân dân tiếp tục quan tâm, chăm lo nhiều hơn nữa cho sự nghiệp "trồng người", tạo điều kiện tốt hơn, đầy đủ hơn cho việc học tập, rèn luyện và phấn đấu của con em chúng ta.

Chúc các thầy, cô giáo, cán bộ, công nhân viên chức ngành Giáo dục và toàn thể các em học sinh, sinh viên đạt được nhiều thành tích xuất sắc trong năm học mới.

Thân ái!

NGUYỄN MINH TRIẾT



GS Ngô Bảo Châu

Nhân dịp giáo sư **NGÔ BẢO CHÂU** NHẬN GIẢI THƯỞNG **FIELDS**

VŨ ĐÌNH HÒA
(Trường ĐHSP Hà Nội)

GIẢI THƯỞNG FIELDS được trao cho tối đa bốn nhà toán học trẻ không quá 40 tuổi có những đóng góp quan trọng cho toán học tại mỗi kì Đại hội Toán học Thế giới (ICM) của Hiệp hội Toán học Quốc tế (IMU). Đại hội này được tổ chức bốn năm một lần. Nhà toán học Canada John Charles Fields là người sáng lập giải thưởng. Nó được trao lần đầu vào năm 1936 và từ năm 1950 đến nay được trao đều đặn.

Huy chương Fields được làm bằng vàng, mặt trước khắc hình nhà bác học thiên tài Hy Lạp cổ đại Archimedes, còn tên người nhận giải khắc ở rìa của Huy chương.

Giới hạn tuổi của giải Fields được áp dụng nghiêm ngặt. Vì thế, nhiều nhà toán học hàng đầu thế giới không được nhận giải vì những công trình vĩ đại của họ ra đời sau tuổi 40.

Cho đến nay, trên thế giới đã có 52 nhà toán học được nhận Huy chương Fields. Trong đó, Hoa Kỳ dẫn đầu với 13 người.

Đúng 12 giờ 55 phút (theo giờ Việt Nam) ngày 19/8/2010, tại Đại hội Toán học Thế giới tổ chức ở Hyderabad, Ấn Độ, GS Ngô Bảo Châu đã vinh dự được Tổng thống Ấn Độ Pratibha Patil trao Giải thưởng Fields cùng với ba nhà toán học: Elon Lindenstrauss (Israel), Stanislav Smirnov (Nga), Cedric Villani (Pháp). Như vậy Việt Nam đã trở thành nước châu Á thứ hai sau Nhật Bản có vinh dự nhận Giải thưởng Fields.

1. Lịch sử khoa học của GS Ngô Bảo Châu

GS Ngô Bảo Châu sinh ngày 15/11/1972 tại Hà Nội, là con GS. TSKH Ngô Huy Cẩn và PGS. TS Trần Lưu Vân Hiến. Thời niên thiếu Châu học trường Thực nghiệm Giảng Võ, rồi trường THCS Trưng Vương và sau đó học tại Khối Trung học phổ thông chuyên Toán của trường ĐHTT Tổng hợp Hà Nội, nay là ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

Ở trường phổ thông, những năm đầu Châu học trường thực nghiệm của thầy Hồ Ngọc Đại, về nhà được bố giao bài tập toán để làm. Khi Châu học hết lớp năm, bắt đầu học chuyên toán ở trường Trưng Vương lớp thầy Tôn Thân. Ở nhà, bố Châu nhờ một cán bộ trẻ ở Viện Cơ học là anh Phạm Ngọc Hùng dạy kèm. Phạm Ngọc Hùng vốn học chuyên toán và từng sang học toán ở Minsk. Anh Hùng kèm Châu hai năm rồi bảo: "Có lẽ em đã hết vốn, để em nhờ bạn bên Viện Toán". Người mà anh Hùng nhờ chính là anh Lê Tuấn Hoa, sau khi tốt nghiệp tổng hợp toán ở Nga về làm việc tại Viện Toán và chuẩn bị đi làm Nghiên cứu sinh. Sau đó, anh Lê Tuấn Hoa nhờ tôi (tác giả bài báo), bấy giờ làm việc ở Viện Tính toán và Điều khiển, mới hoàn thành nghiên cứu sinh tại Đức về.

Tôi dạy Ngô Bảo Châu, như anh Cẩn (bố của Ngô Bảo Châu) đã trả lời phỏng vấn trên Vnexpress, hết sức vô tư, nhưng cũng rất quy củ, có giờ giấc và bài vở nghiêm chỉnh. Phần nhiều bài tập do tôi tự nghĩ ra để thử thách Châu. Thực sự, lúc ấy Châu đã như một nhà toán học trẻ, làm việc rất sáng tạo và năng động.

Điểm nổi bật của Ngô Bảo Châu là làm việc tới nơi tới chốn. Ngoài bài tập của các thầy giao cho, Châu luôn tự đọc thêm sách và tự ghi chép rất cẩn thận. Bài toán nào chưa giải ra, Châu luôn dằn vặt, suy nghĩ cho tới lúc tìm ra được lời giải. Đây chính là đức tính quý báu được rèn luyện trong lớp năng khiếu giúp Châu bước vào làm khoa học thực sự.

Năm 1988, Ngô Bảo Châu tham dự Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế tại Úc và đoạt Huy chương Vàng với điểm số tuyệt đối 42/42. Mùa hè năm sau, Châu tiếp tục đoạt Huy chương Vàng Olympic Toán học Quốc tế tại Đức với điểm số 40/42.

Cũng trong năm 1989, Châu sang Pháp để học tại Trường Đại học Paris VI và bảo vệ luận án Tiến sĩ khi mới 25 tuổi tại Đại học Sư phạm Paris. Năm 2003, ở tuổi 31, Châu hoàn thành Luận án habilitation (tương đương Tiến sĩ khoa học) tại Trường Đại học Paris XI. Đầu năm 2004, Châu trở thành Giáo sư của trường Đại học này.

Cũng trong năm 2004, Châu và GS Gerard Laumon, người thầy của Châu, cùng nhận Giải thưởng nghiên cứu Clay của Viện Toán học Clay (Hoa Kỳ) dành cho những người đạt thành tựu xuất sắc nhất trong năm nhờ giải quyết một trường hợp đặc biệt của “Chương trình Langlands”.

Năm 2005, khi 33 tuổi, Ngô Bảo Châu được nhà nước Việt Nam phong đặc cách hàm Giáo sư và trở thành vị giáo sư trẻ nhất của Việt Nam tính đến thời điểm đó.

Sau khi nhận Giải thưởng Clay, Ngô Bảo Châu được Viện Nghiên cứu Khoa học cao cấp tại Princeton – Hoa Kỳ, mời sang làm Giáo sư. Viện này là nơi quy tụ của nhiều nhà toán học và nhà vật lý hàng đầu thế giới, trong đó nhiều người từng đoạt giải Nobel và giải Fields.

Sau khi chứng minh được “Bổ đề cơ bản”, một giả thuyết then chốt của Chương trình Langlands, Ngô Bảo Châu được trao Giải thưởng Oberwolfach của Đức, Giải thưởng của Viện Hàn lâm Khoa học Pháp (năm 2007).

Công trình của Châu đã được tạp chí đại chúng có uy tín *The Time* (Hoa Kỳ) bình

chọn là “Một trong 10 phát minh khoa học tiêu biểu của năm 2009”. Tháng 6/2010, công trình của Châu mang tên “*Le lemme fondamental pour les Algèbres de Lie*” (Bổ đề cơ bản cho đại số Lie) dày 169 trang được chính thức công bố trong tạp chí *Publications Mathématiques de L’IHÉS* do Nhà xuất bản Springer phát hành. Ngày 19/8/2010, Ngô Bảo Châu đã được nhận giải thưởng cao quý Fields.

GS Ngô Bảo Châu bắt đầu làm việc tại Khoa Toán của Trường ĐH Chicago, Hoa Kỳ từ ngày 1/9/2010.

2. Kết luận

Thành tích nổi bật dẫn tới Giải thưởng Fields của Ngô Bảo Châu là đỉnh cao nhất dành cho một nhà toán học trẻ. Trước đây Việt Nam chưa có ai được Giải thưởng Fields và sau Ngô Bảo Châu cũng không ai dám chắc trong tương lai gần, liệu có nhà toán học Việt Nam thứ hai được Giải thưởng Fields như Ngô Bảo Châu.

Xin nói thêm Huy chương Chern là giải thưởng mới nhất của IMU và chỉ dành cho các nhà toán học có những cống hiến to lớn trong suốt cuộc đời, được khai trương trong dịp Đại hội Toán học Thế giới lần này. Nó được lập ra để tưởng nhớ nhà toán học lừng danh Shiing-Shen Chern (Trần Tinh Thân, 1911–2004), người gốc Trung Quốc. Huy chương Chern được trao kèm với số tiền thưởng 500.000 USD. Theo IMU, đây sẽ là phần thưởng cao quý nhất trong lĩnh vực toán học. Louis Nirenberg, Giáo sư danh dự của Viện Toán học Courant thuộc Đại học New York, Hoa Kỳ là người đầu tiên được nhận Huy chương Chern của Hiệp hội Toán học Quốc tế và Quỹ Huy chương Chern.

Để nhận được Huy chương Chern cao quý này, Ngô Bảo Châu cần phải kiên trì, nỗ lực phấn đấu rất nhiều. Tôi, một trong những thầy giáo cũ của Ngô Bảo Châu, luôn tin tưởng và chúc em “chân cứng đá mềm” vượt mọi chông gai để đạt tới vinh quang cao nhất của sự nghiệp toán học vào một ngày nào đó trong tương lai.



Giải phương trình (PT) bậc bốn, PT chứa ẩn ở mẫu số, PT vô tỉ là dạng toán khó thường gặp trong các kì thi vào lớp 10 THPT chuyên. Bài viết này giới thiệu với bạn đọc thêm một phương pháp khá thú vị để giải dạng toán đó bằng cách đặt **ẩn phụ không hoàn toàn**, đưa bài toán về giải phương trình bậc hai thuần nhất với ẩn mới, còn ẩn cũ được coi như là một tham số. Sau đây là một vài thí dụ sử dụng phương pháp nói trên.

Giải phương trình bằng cách ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN

CHU TUẤN

(GV THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Nội)

I. Đặt ẩn phụ nhằm hạ bậc một phương trình

Dạng tổng quát

$$(ax^2 + b_1x + c)(ax^2 + b_2x + c) = mx^2,$$

với $a, b_1, b_2, c, m \in \mathbb{R}, a, m \neq 0$.

Phương pháp giải

$$\text{Đặt } t = ax^2 + \frac{b_1 + b_2}{2}x + c$$

(*)

PT đã cho trở thành

$$(t - nx)(t + nx) = mx^2 \Leftrightarrow t^2 = (m + n^2)x^2 \quad (**)$$

$$\text{với } n = \frac{b_1 - b_2}{2}.$$

Từ (**) tìm được t theo x , rồi kết hợp (*) tìm được x .

★Thí dụ 1. Giải các phương trình sau

$$a) (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2 \quad (1)$$

$$b) (x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6(x - 1)^2 \quad (2)$$

$$c) x^4 - 9x^3 + 16x^2 + 18x + 4 = 0 \quad (3)$$

$$d) \frac{x^2 - 12}{(x + 2)^2} = 3x^2 - 6x - 3 \quad (4)$$

Lời giải

a) Đặt $t = 2x^2 + x + 1$, PT (1) trở thành

$$(t - 4x)(t + 4x) = 9x^2 \Leftrightarrow t^2 - 16x^2 = 9x^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 25x^2 \Leftrightarrow t = -5x \text{ hoặc } t = 5x.$$

$$\bullet \text{ Với } t = -5x \text{ thì } 2x^2 + x + 1 = -5x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

$$\bullet \text{ Với } t = 5x \text{ thì } 2x^2 + x + 1 = 5x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của PT (1) là } \left\{ \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}; \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \right\}$$

b) Đặt $u = x - 1$ đưa PT (2) về dạng tổng quát $(u^2 - 7u - 3)(u^2 - 2u - 3) = 6u^2$. Mời bạn đọc giải tiếp theo phương pháp đã nêu. Ta có thể giải cách khác như sau:

Viết PT đã cho về dạng

$$(x^2 - 4 - 5x + 5)(x^2 - 4) - 6(x - 1)^2 = 0.$$

Đặt $t = x^2 - 4$, PT trên trở thành

$$t^2 + (-5x + 5)t + (-6x - 6)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 6x + 6)(t + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 6x - 6 \\ t = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 6x - 6 \\ x^2 - 4 = -x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 2 = 0 \\ x^2 + x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{7} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của PT (2) là } \left\{ 3 \pm \sqrt{7}; \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \right\}.$$

c) PT (3) tương đương với

$$x^4 - 9x(x^2 - 2) + 16x^2 + 4 = 0.$$

Đặt $t = x^2 - 2$ thì $t^2 = x^4 - 4x^2 + 4$, PT trên trở thành

$$t^2 - 9xt - 20x^2 = 0 \Leftrightarrow (t - 4x)(t - 5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4x \\ t = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 4x \\ x^2 - 2 = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 = 0 \\ x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải tìm được $x = 2 \pm \sqrt{6}$; $x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của PT (3) là $\left\{ 2 \pm \sqrt{6}; \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} \right\}$.

Nhận xét. PT (3) là dạng PT bậc bốn tổng quát đầy đủ. Ta có thể đưa về phương trình tích như sau.

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow (x^4 - 5x^3 - 2x^2) - (4x^3 - 20x^2 - 8x) \\ &\quad - (2x^2 - 10x - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 4x - 2)(x^2 - 5x - 2) = 0 \quad (3') \end{aligned}$$

Giải PT (3') là dễ dàng, nhưng để đưa được về dạng PT (3') thì không đơn giản!

d) ĐK $x \neq -2$. Khử mẫu thức ta được phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 3x^4 + 6x^3 - 16x^2 - 36x - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^4 + 6x(x^2 - 6) - 16x^2 - 12 &= 0. \end{aligned}$$

Tương tự phần c). Đặt $t = x^2 - 6$ thì $t^2 = x^4 - 12x^2 + 36$, suy ra $3x^4 = 3t^2 + 36x^2 - 108$, PT trên trở thành

$$\begin{aligned} 3t^2 + 6xt + 20t &= 0 \Leftrightarrow t(3t + 6x + 20) = 0 \\ \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } 3t &= -6x - 20. \end{aligned}$$

• Với $t = 0$ thì $x^2 - 6 = 0$, suy ra $x = \pm \sqrt{6}$ (thỏa mãn ĐK).

• Với $3t = -6x - 20$ ta có $3x^2 - 18 = -6x - 20$ hay

$$3x^2 + 6x + 2 = 0 \text{ suy ra } x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy tập nghiệm của PT (4) là $\left\{ \pm \sqrt{6}; \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3} \right\}$. $\square$

II. Đặt ẩn phụ nhằm khử mẫu thức bậc hai

Dạng tổng quát. Có thể là một trong ba dạng sau

$$i) \frac{mx}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{nx}{ax^2 + b_2x + c} = p;$$

$$ii) \frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} + \frac{ax^2 + d_1x + c}{ax^2 + d_2x + c} = 0;$$

$$iii) \frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} + \frac{px}{ax^2 + dx + c} = 0.$$

Ở đó $a, m, n, p \neq 0$.

Cách giải. Đặt $t = ax^2 + c$, đưa PT đã cho về dạng bậc hai theo ẩn t và tham số x , tìm t theo x . Cuối cùng giải phương trình $t = ax^2 + c$ để tìm x .

★ **Thí dụ 2.** Giải phương trình

$$\frac{2x}{3x^2 - 5x + 2} + \frac{13x}{3x^2 + x + 2} = 6 \quad (5)$$

Lời giải. Đặt $t = 3x^2 + 2$, PT đã cho trở thành

$$\frac{2x}{t - 5x} + \frac{13x}{t + x} = 6. \text{ ĐK } t \neq 5x, t \neq -x.$$

Khử mẫu thức ta được PT tương đương

$$\begin{aligned} 2t^2 - 13tx + 11x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - x)(2t - 11x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t = x \text{ hoặc } t = \frac{11}{2}x \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2 = x \text{ hoặc } 3x^2 + 2 = \frac{11}{2}x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; x = \frac{4}{3}.$$

Vậy PT (5) có hai nghiệm như trên. $\square$

III. Đặt ẩn phụ nhằm khử căn thức

Dạng tổng quát. Có thể là một trong hai dạng sau

$$i) ax^2 + bx + c = (mx + n)\sqrt{px + q}, a, m, p \neq 0;$$

$$ii) ax^2 + bx + c = (mx + n)\sqrt{px^2 + qx + k}, a, m, p \neq 0.$$

Phương pháp giải

Đặt $t = \sqrt{px + q}$ hoặc $t = \sqrt{px^2 + qx + k}$, ĐK $t \geq 0$.

Đưa PT đã cho về PT bậc hai theo t , tìm t

theo x , rồi giải PT $t = \sqrt{px + q}$ hoặc

$t = \sqrt{px^2 + qx + k}$ để tìm x .

★ **Thí dụ 3.** Giải các phương trình sau

$$a) x^2 + 4x + 1 - (2x + 1)\sqrt{3x + 1} = 0 \quad (6)$$

$$b) 10x^2 + 3x + 1 = (1 + 6x)\sqrt{x^2 + 3} \quad (7)$$

Lời giải

a) Đặt $\sqrt{3x+1}=t$, ($t \geq 0$) thì $3x+1=t^2$, PT đã cho trở thành

$$t^2 - (2x+1)t + x(x+1) = 0 \Leftrightarrow t = x \text{ hoặc } t = x+1.$$

• Với $t = x$ thì $\sqrt{3x+1} = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x+1=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

• Với $t = x+1$ thì $\sqrt{3x+1} = x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x+1=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x=0; x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của PT (6) là $\left\{0; 1; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

b) Đặt $\sqrt{x^2+3}=t$ ($t \geq 0$) thì $x^2+3=t^2$, PT đã cho trở thành

$$t^2 - (6x+1)t + 9x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 3x+2 \text{ hoặc } t = 3x-1.$$

• Với $t = 3x+2$ thì $\sqrt{x^2+3} = 3x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 \geq 0 \\ x^2+3=(3x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{7}}{4}.$$

• Với $t = 3x-1$ thì $\sqrt{x^2+3} = 3x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x^2+3=(3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{4}; x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy tập nghiệm của PT (7) là $\left\{1; \frac{-3+\sqrt{7}}{4}\right\}$. $\square$

Cuối cùng, mời các bạn luyện tập thông qua các bài toán dưới đây.

Giải các phương trình sau:

1. $(x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 5x - 1) = (x^2 + 5x + 3)(2x^2 - 5x - 1);$

2. $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1;$

3. $\frac{2}{3x^2-4x+1} + \frac{13}{3x^2+2x+1} = \frac{6}{x}.$

SÁCH MỚI



TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Tập 1: Đại số, Lượng giác, Giải tích

260 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 36.500 đồng

Tập 2: Hình học, Tổ hợp - Xác suất, Số phức

240 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 34.500 đồng



Các bạn có thể mua các ấn phẩm trên tại Tòa soạn, các cơ sở Bưu điện, các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương, các cửa hàng sách của NXBGD Việt Nam. Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÈ, 187B GIẢNG VÔ, HÀ NỘI

Để biết thêm chi tiết xin liên hệ với Tòa soạn :

ĐT - FAX : 04.35121606.

Email : tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

Lời giải đề thi vào lớp 10

KHỐI THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM HỌC 2010 - 2011

(Đề thi đã đăng trên THPT số 398, tháng 8 năm 2010)

VÒNG 1

Câu 1. a) PT hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) có dạng

$$x^2 - (m-1)x + m-3 = 0.$$

$$\Delta = (m-1)^2 - 4m + 12 = (m-3)^2 + 4 > 0, \forall m \text{ (đpcm).}$$

b) Theo hệ thức Viète ta có

$$x_1 + x_2 = m-1; x_1 x_2 = m-3.$$

Vì $A \in (P), B \in (P)$ nên $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$. Từ đó

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = 8 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 8$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(m-3) = 8 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -1; m = 5.$$

Đáp số. $m = -1; m = 5$.

Câu 2. Rút gọn, ta được $P = \frac{4}{\sqrt{xy}}$, ĐK $x > 0$;

$y > 0; x \neq y$.

Với $x = \sqrt{5+2\sqrt{6}}; y = \sqrt{5-2\sqrt{6}}$ có $xy = 1$ nên $P = 4$.

Câu 3. ĐK $x \geq 4$. Khi đó PT đã cho tương đương với $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-4)} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)}, x = 5 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 5$.

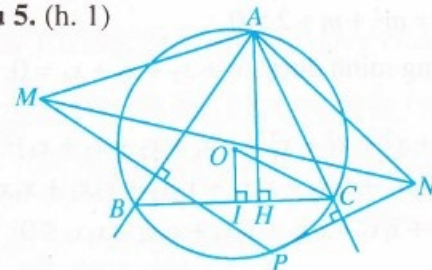
Câu 4. Ta có

$$P = (x - \sqrt{y})^2 + (y - \sqrt{x})^2 + 2010 \geq 2010,$$

với mọi $x \geq 0; y \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$ hoặc $x = y = 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2010.

Câu 5. (h. 1)



Hình 1

a) Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $\widehat{IOC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$, $OC = R = 2$, nên

$$IC = OC \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ suy ra } BC = 2IC = 2\sqrt{3}.$$

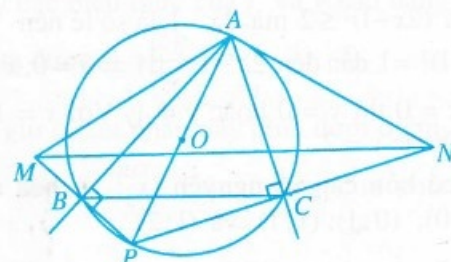
$$\text{Vì vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 3\sqrt{3} \text{ (đvdt).}$$

b) Ta có $AM = AN = AP$ nên tam giác AMN cân tại A. Lại có $\widehat{MAN} = 2(\widehat{BAP} + \widehat{PAC}) = 120^\circ$.

Nhận thấy MN là cạnh đáy của tam giác cân có góc ở đỉnh không đổi. Do đó MN lớn nhất khi và chỉ khi cạnh bên AM lớn nhất. Mà $AM = AP \leq 2R$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi $AP = 2R = 4$.

Khi đó P là giao điểm thứ hai của AO với đường tròn (O; 2), B là trung điểm của PM, C là trung điểm của PN. Vì vậy BC là đường trung bình của tam giác PMN. Suy ra

$$MN = 2BC = 4\sqrt{3} \text{ (h. 2).}$$



Hình 2

Số 399 (9-2010)

TOÁN HỌC
& Tuổi trẻ 7

VÒNG 2

Câu 1. a) Đặt $t = x^2, t \geq 0$, PT (1) có dạng

$$t^2 - 2(m+1)t + m^2 + m + 2 = 0 \quad (2)$$

PT (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m-1 > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = m^2 + m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

b) Chứng minh được $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Khi đó

$$0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$$

$$\Rightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \leq 0$$

(đpcm).

Câu 2. a) Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của PT. Xét $x \neq 0$, PT đã cho tương đương với

$$\frac{12}{x + \frac{2}{x} + 4} - \frac{3}{x + \frac{2}{x} + 2} = 1.$$

Đặt $t = x + \frac{2}{x}$ với $|t| \geq 2\sqrt{2}$, PT trên trở thành

$$\frac{12}{t+4} - \frac{3}{t+2} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 4 \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

Với $t = 4$ thì $x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$.

Vậy PT đã cho có hai nghiệm như trên.

b) Vì x, y nguyên nên điều kiện đã cho tương đương với

$$4x^2 + y^2 \leq 2xy + 2x + y$$

$$\Leftrightarrow (2x-y)^2 + (y-1)^2 + (2x-1)^2 \leq 2.$$

suy ra $(2x-1)^2 \leq 2$ mà $2x-1$ là số lẻ nên

$$(2x-1)^2 = 1 \text{ dẫn đến } 2x-1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0; x = 1.$$

Với $x = 0$ thì $y = 0$ hoặc $y = 1$. Với $x = 1$ thì $y = 1$ hoặc $y = 2$.

Vậy có bốn cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(0; 0); (0; 1); (1; 1)$ và $(1; 2)$.

Câu 3. Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

$$0 < \sqrt{x(y+z)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2x(y+z)} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} (2x+y+z).$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{\sqrt{x(y+z)}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{2x+y+z}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{\sqrt{y(z+x)}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{x+2y+z};$$

$$\frac{1}{\sqrt{z(x+y)}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{x+y+2z}.$$

Cộng theo về ba BĐT trên và áp dụng BĐT

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9, \text{ với } a > 0, b > 0, c > 0,$$

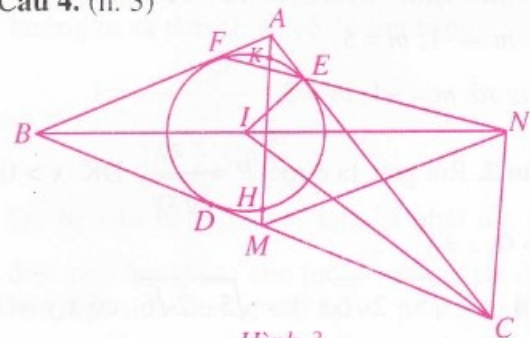
ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x(y+z)}} + \frac{1}{\sqrt{x(z+x)}} + \frac{1}{\sqrt{z(x+y)}} \geq \frac{18\sqrt{2}}{4(x+y+z)} = \frac{1}{4} \text{ (đpcm).}$$

$$\geq \frac{18\sqrt{2}}{4(x+y+z)} = \frac{1}{4} \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 6\sqrt{2}$.

Câu 4. (h. 3)



Hình 3

a) Ta có $MD^2 = MK \cdot MH$; $AF^2 = AH \cdot AK$. Do $AH = MK$ nên $MH = AK$, từ đó $MD = AF$. Lại có $BD = BF$, suy ra $BA = BM$ (đpcm).

b) Ta có $\widehat{NIC} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C})$;

$$\widehat{NEC} = \widehat{AEF} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{A}) = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}).$$

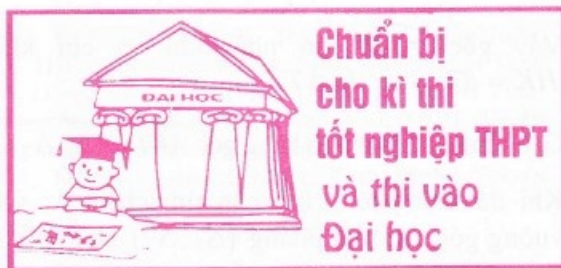
Suy ra $\widehat{NIC} = \widehat{NEC}$, do đó tứ giác CIEN nội tiếp,

$$\text{dẫn đến } \widehat{INC} = \widehat{IEC} = 90^\circ \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC = MB$$

$$\Rightarrow \widehat{MNB} = \widehat{MBN} = \widehat{NBA} \Rightarrow MN \parallel AB \text{ (đpcm).}$$

LÊ XUÂN SƠN

(GV Khối THPT chuyên ĐH Vinh) giới thiệu.



BẢN CHẤT HÌNH HỌC của các bài toán CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN

VÕ TRỌNG TRÍ
(GV THPT Anh Sơn I, Nghệ An)

Như ta đã biết, có thể sử dụng công cụ giải tích để xét sự biến thiên và tìm cực trị của một số đại lượng như độ dài, khoảng cách, góc trong các bài toán tọa độ trong không gian. Mặc dù cách giải khá rõ ràng, nhưng lại phải tính toán phức tạp. Trong bài báo này chúng ta xét một số bài toán cực trị với bản chất hình học của nó, từ đó giải bài toán cụ thể bằng công cụ thuần túy hình học.

Trong bài viết này chúng tôi kí hiệu $\vec{u}_d$ là vector chỉ phương của đường thẳng d , $\vec{n}_{(\alpha)}$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) và các bài toán đều được xét trong không gian.



1. Bài toán cực trị về họ mặt phẳng, họ đường thẳng quay xung quanh một điểm cố định

★ **Bài toán 1.** Cho hai điểm phân biệt A và B . Tìm vị trí của mặt phẳng (α) chứa B và cách A một khoảng lớn nhất.

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (α) . Khi đó tam giác ABH vuông tại H và $d(A;(\alpha)) = AH \leq AB$. Vậy khoảng cách đó lớn nhất

khi H trùng B , khi đó (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với AB .

Bài toán tương tự là tìm đường thẳng qua B và cách A một khoảng lớn nhất. □

★ **Thí dụ 1.** Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $B(1;2;-1)$ và cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất.

Lời giải. Theo Bài toán 1, mặt phẳng cần tìm có một vector pháp tuyến là $\vec{OB} = (1;2;-1)$. Vậy PT mặt phẳng cần tìm là

$$1(x-1)+2(y-2)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow x+2y-z-6=0. \square$$

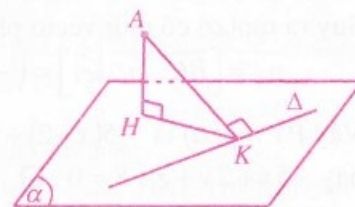
2. Bài toán cực trị về họ mặt phẳng quay xung quanh một đường thẳng cố định

★ **Bài toán 2.** Cho điểm A và đường thẳng Δ không đi qua A . Tìm vị trí của mặt phẳng (α) chứa Δ sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng đó là lớn nhất.

Lời giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (α) , K là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ (h. 1).

Ta thấy $d(A;(\alpha)) = AH \leq AK$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Vậy $d(A;(\alpha))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$, hay vị trí mặt phẳng (α) cần tìm là (α) chứa Δ và vuông góc với AK . □



Hình 1

★ **Thí dụ 2a.** Cho mặt phẳng (α) có phương trình $(m-1)x + y + mz - 1 = 0$. Tìm m để khoảng cách từ điểm $A(1;1;2)$ đến mặt phẳng (α) lớn nhất.

Lời giải. Ta thấy mặt phẳng (α) chứa đường

$$\text{thẳng cố định } \Delta \text{ có PT } \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ thì $K(t; 1+t; -t)$; $\overrightarrow{AK} = (t-1; t; -t-2)$.

Vì $\overrightarrow{AK} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0$, nên $(t-1)1 + t + t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}. \text{ Vậy } \overrightarrow{AK} = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right).$$

Mặt phẳng cần tìm vuông góc với AK nên

$$\frac{m-1}{4} = \frac{1}{1} = \frac{m}{5} \Leftrightarrow m = 5. \quad \square$$

★Thí dụ 2b. Cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(2; 0; 2)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm B, C và cách điểm A một khoảng lớn nhất.

Lời giải. Theo Bài toán 2, mặt phẳng cần tìm chứa BC và vuông góc với $mp(ABC)$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 2)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 0; -1)$. Tọa độ vector pháp tuyến của $mp(ABC)$ là

$$\vec{n}_{(ABC)} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}] = (1; 2; 1).$$

Suy ra $mp(\alpha)$ có một vector pháp tuyến là

$$\vec{n}_{\alpha} = [\overrightarrow{BC}, \vec{n}_{(ABC)}] = (-5; 2; 1).$$

Vậy PT $mp(\alpha)$ là $-5(x-2) + 2(y-1) + z = 0$, hay $-5x + 2y + z + 8 = 0. \quad \square$

★Bài toán 3. Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 phân biệt và không song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và tạo với Δ_2 một góc lớn nhất.

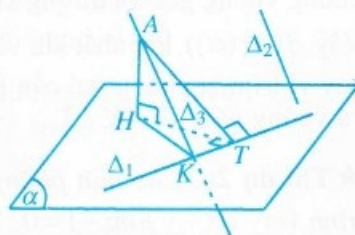
Lời giải. Về một đường thẳng bất kỳ Δ_3 song song với Δ_2 và cắt Δ_1 tại K . Gọi A là điểm cố định trên Δ_3

và H là hình chiếu của A trên $mp(\alpha)$ (h. 2).

Ta có góc giữa Δ_2 và (α) chính là góc $\widehat{AKH}$. Kẻ $AT \perp \Delta_1, (T \in \Delta_1)$.

Khi đó tam giác HKT vuông tại T , nên

$$\cos \widehat{AKH} = \frac{HK}{AK} \geq \frac{KT}{AK} \text{ (không đổi).}$$



Hình 2

Vậy góc $\widehat{AKH}$ lớn nhất khi và chỉ khi $HK = KT$, hay $H \equiv T$.

Góc lớn nhất đó chính bằng góc $\widehat{AKT} = (\Delta_1, \Delta_2)$.

Khi đó mặt phẳng (α) cần tìm chứa Δ_1 và vuông góc với mặt phẳng (Δ_1, Δ_3) hay nó có một vector chỉ phương là $[\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}]$.

Do đó vector pháp tuyến của $mp(\alpha)$ là

$$\vec{n}_{\alpha} = [\vec{u}_{\Delta_1}, [\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}]]. \quad \square$$

★Thí dụ 3. Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}; \quad \Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và tạo với Δ_2 một góc lớn nhất.

Lời giải. Ta thấy hai đường thẳng trên phân biệt và không song song với nhau. Vậy theo kết quả Bài toán 3, thì do

$$\vec{u}_{\Delta_1} = (1; 1; 2), \quad \vec{u}_{\Delta_2} = (1; 1; 1), \text{ suy ra}$$

$$[\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}] = (-1; 1; 0).$$

Do đó vector pháp tuyến của $mp(\alpha)$ là

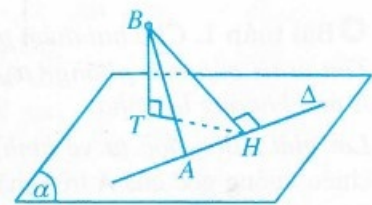
$$\vec{n}_{\alpha} = [\vec{u}_{\Delta_1}, [\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}]] = (-2; -2; 2).$$

Vậy PT $mp(\alpha)$ là $-2x - 2(y-1) + 2z = 0$, hay $x + y - z - 1 = 0. \quad \square$

3. Bài toán cực trị về họ đường thẳng quay xung quanh một điểm cố định trong một mặt phẳng cố định

★Bài toán 4. Cho mặt phẳng (α) và điểm A thuộc (α) , điểm B khác A . Tìm đường thẳng Δ nằm trong (α) đi qua A và cách B một khoảng nhỏ nhất, lớn nhất.

Lời giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên Δ (h. 3). Ta thấy $d(B; \Delta) = BH \leq AB$.



Hình 3

Vậy khoảng cách đó lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv A$.

Khi đó Δ là đường thẳng qua A và có một vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{AB}]$.

Gọi T là hình chiếu của B trên (α) . Ta thấy $BH \geq BT$.

Vậy khoảng cách BH nhỏ nhất bằng BT khi và chỉ khi $H \equiv T$ hay đường thẳng Δ đi qua A và T .

Để viết PT đường thẳng Δ ta có hai cách:

* Tìm hình chiếu vuông góc T của B trên Δ , từ đó viết PT đường thẳng Δ đi qua A và T .

* Tìm tọa độ một vector chỉ phương của đường thẳng Δ : $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, [\vec{n}_\alpha, \vec{AB}]]$. $\square$

★ **Thí dụ 4.** Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;1)$, vuông góc với đường thẳng

$$\Delta': \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ và cách điểm } B(2;0;1)$$

một khoảng lớn nhất.

Lời giải. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ' .

Khi đó đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) , đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất. Theo Bài toán 4, ta có

$$\vec{AB} = (1; -1; 0), \quad \vec{n}_\alpha = (1; 1; 2),$$

$$\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{AB}] = (2; 2; -2).$$

$$\text{Vậy PT đường thẳng } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad \square$$

★ **Bài toán 5.** Cho mặt phẳng (α) và điểm A thuộc (α) , đường thẳng d không song song hay nằm trên (α) . Tìm đường thẳng Δ nằm trong (α) đi qua A và tạo với đường thẳng d góc bé nhất, lớn nhất.

Lời giải. Vẽ đường thẳng qua A song song với d . Trên đường thẳng này lấy B khác A cố định. Hình chiếu vuông góc của B trên Δ và (α) theo thứ tự là H và K (h. 4).

Ta có

$$(\widehat{d, \Delta}) = \widehat{BAH};$$

$$\sin(\widehat{d, \Delta})$$

$$= \sin \widehat{BAH}$$

$$= \frac{BH}{AB} \geq \frac{BK}{AB}.$$

Vậy $(\widehat{d, \Delta})$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$, hay Δ chính là đường thẳng AK .

Ta thấy một vector chỉ phương của Δ lúc đó là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, [\vec{n}_\alpha, \vec{u}_d]]$.

Còn đường thẳng Δ tạo với d góc lớn nhất bằng 90° , và có vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{u}_d]$. $\square$

★ **Bài toán 6.** Cho mặt phẳng (α) và điểm A thuộc (α) , đường thẳng d không song song với (α) , không nằm trên (α) , không đi qua A . Tìm đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) đi qua A sao cho khoảng cách giữa Δ và đường thẳng d là lớn nhất.

Lời giải. Gọi d' là đường thẳng qua A và song song với d và B là giao điểm của d với mp (α) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của

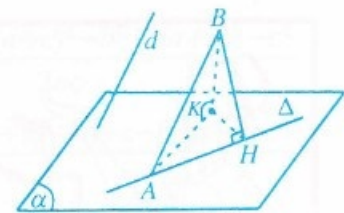
B trên mặt phẳng (d', Δ) (h. 5). Khoảng cách giữa d và Δ bằng BH . Gọi C là hình chiếu vuông góc của B trên d' .

Ta thấy $BH \leq BC$, nên BH lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv C$.

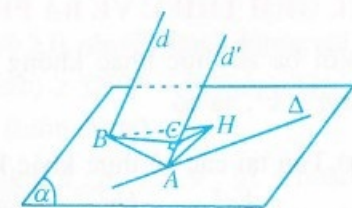
Khi đó đường thẳng Δ có một vector chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{BC}]$.

Có thể thay vector $\vec{BC}$ bằng $\vec{AT}$, trong đó T là hình chiếu vuông góc của A trên d .

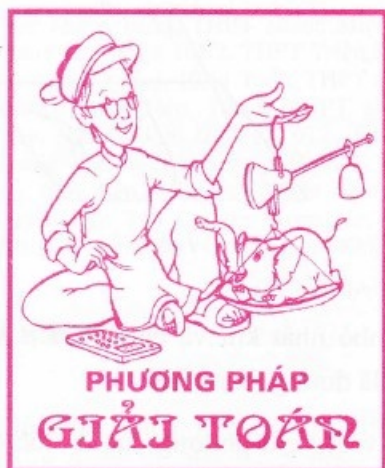
(Xem tiếp trang 28)



Hình 4



Hình 5



MỘT KIỂU ĐỔI BIẾN CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG



NGUYỄN VĂN DŨNG

(GV K22, Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội)

VÕ QUỐC BÁ CẦN

(SV K32, ĐH Y Dược Cần Thơ)

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các bài toán bất đẳng thức (BĐT) ba biến có điều kiện liên quan tới tích (tích ba biến là một hằng số) thường rất khó xử lý trực tiếp. Bài viết này chúng tôi muốn chia sẻ cùng bạn đọc ba phép đổi biến đơn giản nhưng có thể giúp ta giải được một lớp các bài toán dạng này. Đây là ba phép đổi biến hữu ích mà khi sử dụng chúng, ta có thể giải được các bài toán khó về BĐT.

II. GIỚI THIỆU VỀ BA PHÉP ĐỔI BIẾN

Với ba số thực khác không x, y, z thỏa mãn $xyz = k^3$, ta có

a) Tồn tại các số thực khác không a, b, c sao cho $x = \frac{ka^2}{bc}$, $y = \frac{kb^2}{ca}$, $z = \frac{kc^2}{ab}$.

b) Tồn tại các số thực khác không m, n, p sao cho $x = \frac{knp}{m^2}$, $y = \frac{kpm}{n^2}$, $z = \frac{kmn}{p^2}$.

c) Tồn tại các số thực khác không u, v, w sao cho $x = \frac{ku}{v}$, $y = \frac{kv}{w}$, $z = \frac{kw}{u}$.

Chứng minh

a) Chọn $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$ và $c = \sqrt[3]{z}$ thì ta có $\frac{ka^2}{bc} = \frac{k\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{yz}} = \frac{kx}{\sqrt[3]{xyz}} = \frac{kx}{\sqrt[3]{k^3}} = x$.

Tương tự, ta cũng có $y = \frac{kb^2}{ca}$ và $z = \frac{kc^2}{ab}$.

b) Chọn $m = \frac{1}{a}$, $n = \frac{1}{b}$ và $p = \frac{1}{c}$.

c) Chọn $u = \frac{a}{c}$, $v = \frac{b}{a}$ và $w = \frac{c}{b}$.

Ý tưởng của ba phép đổi biến này đơn giản là thế nhưng ứng dụng của chúng trong giải toán thật không hề nhỏ chút nào. Chúng ta sẽ cùng đến với một số thí dụ để minh chứng cho điều này.

III. MỘT SỐ THÍ DỤ ÁP DỤNG

★ **Thí dụ 1.** Với x, y, z là ba số thực thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Chứng minh

Từ giả thiết có $k = 1$. Do đó theo b), ta thấy tồn tại các số thực khác không m, n, p sao cho

$x = \frac{np}{m^2}$, $y = \frac{pm}{n^2}$ và $z = \frac{mn}{p^2}$. Thay vào BĐT

đã cho, nó được viết lại thành

$$\frac{m^4}{(m^2 + np)^2} + \frac{n^4}{(n^2 + pm)^2} + \frac{p^4}{(p^2 + mn)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có $(m^2 + np)^2 \leq (m^2 + n^2)(m^2 + p^2)$. Từ đó có thể đưa bài toán về chứng minh BĐT mạnh hơn là

$$\frac{m^4}{(m^2+n^2)(m^2+p^2)} + \frac{n^4}{(n^2+p^2)(n^2+m^2)} + \frac{p^4}{(p^2+m^2)(p^2+n^2)} \geq \frac{3}{4}.$$

Quy đồng mẫu số và thu gọn, ta viết BĐT này dưới dạng

$$m^2n^2(m^2+n^2) + n^2p^2(n^2+p^2) + p^2m^2(p^2+m^2) \geq 6m^2n^2p^2.$$

Ta thấy BĐT cuối đúng theo BĐT AM-GM. Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Nhận xét. Sử dụng phép đặt ẩn ở c), ta có thể viết được BĐT đã cho dưới dạng

$$\left(\frac{v}{u+v}\right)^2 + \left(\frac{w}{v+w}\right)^2 + \left(\frac{u}{w+u}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Trong trường hợp u, v, w là các số dương, ta có thể sử dụng BĐT AM-GM như sau

$$\left(\frac{v}{u+v}\right)^3 + \left(\frac{v}{u+v}\right)^3 + \frac{1}{8} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{v}{u+v}\right)^2.$$

Từ đó, suy ra

$$\left(\frac{v}{u+v}\right)^3 + \left(\frac{w}{v+w}\right)^3 + \left(\frac{u}{w+u}\right)^3 \geq \frac{3}{8}.$$

Có thể thấy rằng kết quả này tương đương với bài BĐT trong Kỳ thi chọn Đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Toán học Quốc tế năm 2005. $\square$

★ **Thí dụ 2.** Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $xyz = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x^2+2x+4} + \frac{y^2}{y^2+2y+4} + \frac{z^2}{z^2+2z+4} \geq 1.$$

Chứng minh

Ta có $k=2$, theo a) có thể đặt $x = \frac{2a^2}{bc}$,

$$y = \frac{2b^2}{ca} \text{ và } z = \frac{2c^2}{ab}.$$

Thay vào BĐT đã cho và viết nó dưới dạng

$$P = \frac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2} + \frac{b^4}{b^4+b^2ca+c^2a^2} + \frac{c^4}{c^4+c^2ab+a^2b^2} \geq 1.$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có

$$P \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^4+b^4+c^4)+abc(a+b+c)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}.$$

Vậy chỉ cần chứng minh BĐT

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) + a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \quad (*)$$

Thật vậy

$$(*) \Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (ab-ac)^2 + (bc-ba)^2 + (ca-cb)^2 \geq 0$$

(luôn đúng), (đpcm). $\square$

★ **Thí dụ 3.** (IMO 2000) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(x + \frac{1}{y} - 1\right) \left(y + \frac{1}{z} - 1\right) \left(z + \frac{1}{x} - 1\right) \leq 1.$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{u}{v}$, $y = \frac{v}{w}$ và $z = \frac{w}{u}$ với u, v, w là các số dương, BĐT cần chứng minh được đưa về

$$\left(\frac{u}{v} + \frac{w}{v} - 1\right) \left(\frac{v}{w} + \frac{u}{w} - 1\right) \left(\frac{w}{u} + \frac{v}{u} - 1\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow uvw \geq (u+v-w)(v+w-u)(w+u-v).$$

Đây là một kết quả quen thuộc. $\square$

★ **Thí dụ 4.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}} + \frac{1}{\sqrt{1+8y}} + \frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geq 1.$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{np}{m^2}$, $y = \frac{pm}{n^2}$ và $z = \frac{mn}{p^2}$ với m, n, p

là các số dương. BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+8np}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+8pm}} + \frac{p}{\sqrt{p^2+8mn}} \geq 1.$$

Để chứng minh BĐT này, rõ ràng ý tưởng tự nhiên nhất chính là tìm cách khử đi các căn thức. Muốn vậy, viết lại về trái rồi sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta được

$$\begin{aligned} & \frac{m^2}{m\sqrt{m^2+8np}} + \frac{n^2}{n\sqrt{n^2+8pm}} + \frac{p^2}{p\sqrt{p^2+8mn}} \\ & \geq \frac{(m+n+p)^2}{m\sqrt{m^2+8np} + n\sqrt{n^2+8pm} + p\sqrt{p^2+8mn}}, \\ & \text{và } m\sqrt{m^2+8np} + n\sqrt{n^2+8pm} + p\sqrt{p^2+8mn} \\ & \leq \sqrt{(m+n+p)(m^3+8mnp+n^3+8mnp+p^3+8mnp)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } & \frac{m}{\sqrt{m^2+8np}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+8pm}} + \frac{p}{\sqrt{p^2+8mn}} \\ & \geq \sqrt{\frac{(m+n+p)^3}{m^3+n^3+p^3+24mnp}}. \end{aligned}$$

Như thế, chỉ cần chứng minh

$$(m+n+p)^3 \geq m^3+n^3+p^3+24mnp$$

$$\Leftrightarrow m(n-p)^2 + n(p-m)^2 + p(m-n)^2 \geq 0$$

(BĐT này luôn đúng), (đpcm). $\square$

★ **Thí dụ 5.** (IMO 2008) Cho x, y, z là các số thực khác 1 thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \geq 1.$$

Chứng minh

$$\text{Đặt } x = \frac{a^2}{bc}, y = \frac{b^2}{ca} \text{ và } z = \frac{c^2}{ab}.$$

Khi đó BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^4}{(a^2-bc)^2} + \frac{b^4}{(b^2-ca)^2} + \frac{c^4}{(c^2-ab)^2} \geq 1.$$

Đến đây, sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a^4}{(a^2-bc)^2} + \frac{b^4}{(b^2-ca)^2} + \frac{c^4}{(c^2-ab)^2} \\ & \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2-bc)^2 + (b^2-ca)^2 + (c^2-ab)^2}. \end{aligned}$$

Ta thấy BĐT

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq (a^2-bc)^2 + (b^2-ca)^2 + (c^2-ab)^2$$

$$\Leftrightarrow (bc+ca+ab)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. $\square$

Nhận xét. Ta cũng có thể sử dụng phép đặt c) để giải bài toán này.

IV. LỜI KẾT

Qua những thí dụ ở trên, chúng ta có thể thấy được phạm vi ứng dụng của ba phép đổi biến a), b), c) là rất rộng. Chúng rất thích hợp để sử dụng giải toán bất đẳng thức trong các kì thi chọn học sinh giỏi. Ngoài ra, ta cũng có thể tổng quát chúng để có thể giải được các bài toán có nhiều biến số hơn. Chúng tôi sẽ nói rõ hơn về vấn đề này vào một dịp khác. Cuối cùng, xin được nêu ra một số bài tập để các bạn rèn luyện thêm.

V. BÀI TẬP

1. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh các BĐT sau:

$$a) \frac{1}{1+(1+x)^3} + \frac{1}{1+(1+y)^3} + \frac{1}{1+(1+z)^3} \geq \frac{1}{3};$$

$$b) \frac{x+3}{(x+1)^2} + \frac{y+3}{(y+1)^2} + \frac{z+3}{(z+1)^2} \geq 3 \text{ (UK 2005);}$$

$$c) \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 1;$$

$$d) \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+4}} + \frac{1}{\sqrt{4y^2+y+4}} + \frac{1}{\sqrt{4z^2+z+4}} \leq 1.$$

2. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xyz = 27$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+21x+9}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+21y+9}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+21z+9}} \geq \frac{1}{3}.$$

3. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xyz = 8$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{\sqrt{(x^3+1)(y^3+1)}} + \frac{y^2}{\sqrt{(y^3+1)(z^3+1)}} \\ & + \frac{z^2}{\sqrt{(z^3+1)(x^3+1)}} \geq \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(APMO 2005)

Cuộc thi

MỪNG THĂNG LONG - HÀ NỘI TRÒN 1000 TUỔI

ĐÁP ÁN ĐỀ ĐỢT 2

Bài 4. NHÂN VẬT NÀO?

Nhân vật được nhắc đến ở cột hàng dọc là Vua *Lý Thái Tổ*, tên là *Lý Công Uẩn* (974 – 1028). Ông là vị Hoàng đế đầu tiên của nhà Hậu Lý trong lịch sử Việt Nam, trị vì từ năm 1009 đến khi qua đời. Dưới triều ông, triều đình

Trung ương được củng cố, các thế lực phiên quân bị đánh tan. Kinh đô được dời từ Hoa Lư về thành Đại La vào tháng 7 năm 1010 và thành này đã được đổi tên là thành Thăng Long.

THANH LOAN

Bài 5. ĐOÁN NGÀY LỄ HỘI?

Gọi ngày và tháng Lễ hội hoa thứ tự là x và y ($0 < x \leq 31$, $0 < y \leq 12$, $x, y \in \mathbb{N}^*$).

Theo bài ra ta có $12x + 31y = 732 \Leftrightarrow 31y = 12(61 - x)$.

Nhận thấy $31y : 12$ và $\text{ƯCLN}(31, 12) = 1$ nên $y : 12$, mà $0 < y \leq 12$ nên $y = 12$.

Suy ra $x = (732 - 31 \cdot 12) : 12 = 30$.

Vậy Lễ hội hoa đã được khai mạc trọng thể tại vườn hoa Lý Thái Tổ, Hà Nội vào ngày 30/12/2009.

GIA LINH

Bài 6. SỐ HIỆU CỦA ĐÈN RỒNG

Giả sử đèn rồng cần tìm có số hiệu n ($1 \leq n \leq 1000$, $n \in \mathbb{N}^*$).

Nếu $n : k$ và $i = \frac{n}{k} \neq k$ thì trạng thái của đèn không đổi sau lần thứ i và k . Như vậy trạng thái

của đèn chỉ thay đổi khi có $n : k_0$ và $\frac{n}{k_0} = k_0$, hay n là số chính phương.

Vậy n là số chính phương lớn nhất không quá 1000 nên $n = 961$.

HẢI HÀ

<Nhận xét. Ở Đợt 2 này, các bạn gửi bài giải nhiều hơn Đợt 1. Đa số đều giải đúng, nhưng một số bạn trình bày còn dài dòng (ở bài 5, bài 6) và còn nhầm lẫn khi đoán tên nhân vật (ở bài 4). Tuyên dương các bạn sau cố lời giải gọn, chính xác và giải đủ cả ba bài:

Hà Nội: Đinh Quang Danh, 10TN2, THPT Tăng Bạt Hổ; **Hưng Yên:** Đỗ Văn Anh, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Hà Tĩnh:** Phạm Tiến Dũng, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Gia Lai:** Nguyễn Anh Phúc, 11C3, THPT chuyên Hùng Vương, Pleiku; **Nghệ An:** Trương Đình Đức, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Bến Tre:** Cao Thành Chương, 11T, Võ Duy Thức, 12T, THPT chuyên Bến Tre; **Quảng Ngãi:** Phan Cao Thanh Bình, 11T, THPT chuyên Lê Khiết.

Mời các bạn tiếp tục gửi bài cho Đợt 3 nhé. Tạp chí sẽ tổng kết cuộc thi vào tháng 10 tới.

THTT



CÁC LỚP THCS

Bài T1/399. (Lớp 6). Tìm số chính phương có bốn chữ số khác nhau, biết rằng khi viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được số mới có bốn chữ số cũng là số chính phương và chia hết cho số ban đầu.

NGUYỄN VĂN TIẾN
(GV THCS Lâm Thao, Phú Thọ)

Bài T2/399. (Lớp 7). Tìm các số nguyên x, y, z sao cho

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 < xy + 3y + 2z.$$

NGUYỄN TIẾN DŨNG
(GV THCS Kỳ Hà, Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

Bài T3/399. Tính diện tích tam giác ABC , biết độ dài đường cao $AH = 6\text{cm}$, $BH = 3\text{cm}$ và số đo góc CAH bằng ba lần số đo góc BAH .

TRẦN HÀ
(GV THCS Tam Đa, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Bài T4/399. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{232y^3 - x^3}{2xy + 24y^2} + \frac{783z^3 - 8y^3}{6yz + 54z^2} + \frac{29x^3 - 27z^3}{3xz + 6x^2}$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + 2y + 3z = \frac{1}{4}$.

PHẠM HUY THÔNG
(Hà Nội)

Bài T5/399. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB < AC$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC và M là điểm đối xứng của H qua AB . Tia MC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH tại điểm P ($P \neq M$). Tia HP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác APC tại điểm N ($N \neq P$). Gọi E và K tương ứng là giao điểm của AB và BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác APC ($E \neq A, K \neq C$). Chứng minh rằng

- a) EN song song với BC .
b) H là trung điểm của BK .

PHẠM MINH PHƯƠNG
(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/399. Tìm phần nguyên của A , biết rằng

$$A = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt[2010]{\frac{2010}{2009}}.$$

NGUYỄN ĐỨC TRUNG
(GV THPT Nam Giang, Quảng Nam)

Bài T7/399. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+x^2} + \frac{z}{1+t^2} + \frac{t}{1+z^2}$$

trong đó x, y, z, t là bốn số không âm thỏa mãn $x + y + z + t = k$ (k là số dương cho trước).

TRỊNH MINH TUẤN
(GV THPT Thái Phiên, TP. Đà Nẵng)

Bài T8/399. Cho tam giác ABC và điểm M không nằm trên các cạnh của tam giác đó. Chứng minh rằng $\mathcal{P}_{A/(MCB)} = \mathcal{P}_{B/(MCA)} = \mathcal{P}_{C/(MAB)}$ khi và chỉ khi M là trọng tâm tam giác ABC . (Kí hiệu $\mathcal{P}_{T/(XYZ)}$ là phương tích của điểm T đối với đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z).

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/399. Cho tam giác ABC . Một đường tròn cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các cặp điểm $(M, N); (P, Q); (S, T)$ biết rằng M nằm giữa B và N ; P nằm giữa C và Q ; S nằm giữa A và T . Gọi K, H, L lần lượt là giao điểm của SN và QM ; QM và TP ; TP và SN . Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BH, CL đồng quy.

NGUYỄN HỮU PHƯỚC
(SV ĐHBK Hà Nội)

Bài T10/399. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} a_0 = 10 \\ (6 - a_n)(16 + a_{n-1}) = 96, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Hãy tính tổng $S = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{2010}}$.

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/399. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn đẳng thức

$$f(x+y) + f(xy) = x + y + xy; \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

LÊ VIỆT HẢI

(Trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T12/399. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\cos A \cos B \cos C + 8\sqrt{3} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \geq 24 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} - 1.$$

TẠ HOÀNG THÔNG

(TP. Hồ Chí Minh)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

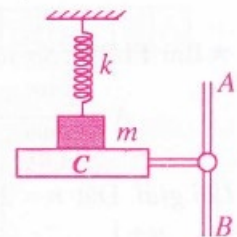
Bài L1/399. Một vật chuyển động với gia tốc không đổi. Sau khoảng thời gian $\Delta t = \tau$, kể từ

khi vật có vận tốc v_0 đến khi vận tốc của vật là $\frac{v_0}{2}$. Sau khoảng thời gian 2τ vận tốc của vật là $\frac{v_0}{4}$. Xác định gia tốc của vật và vận tốc của nó sau khoảng thời gian 3τ .

TRẦN KHÁNH HẢI

(Thừa Thiên - Huế)

Bài L2/399. Cho một cơ hệ như hình vẽ. Giá đỡ C có thể trượt dọc theo trục thẳng đứng AB . Trên giá đỡ đặt một vật có khối lượng $m = 0,1\text{kg}$. Vật này được gắn vào một đầu của lò xo có khối lượng không đáng kể, có độ cứng $k = 20\text{N/m}$. Lúc đầu, lò xo ở trạng thái tự nhiên. Sau đó cho giá đỡ bắt đầu trượt xuống với gia tốc $a = 2\text{m/s}^2$. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.



- Hỏi sau bao lâu thì giá đỡ rời khỏi vật?
- Tính biên độ dao động của vật sau đó.

NGUYỄN VĂN THUẬN

(GV ĐHSPT Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/399. (For 6th grade). Find a four digits perfect square, given that all four digits are distinct, and if these digits are written in reverse order, the result is also a perfect square, and is divisible by the original number.

T2/399. (For 7th grade). Determine all possible choices of three integers x, y and z such that

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 < xy + 3y + 2z.$$

T3/399. Let ABC be a triangle where the length of the altitudes AH is 6cm, BH is 3cm and the measure of angle CAH is three times the measure of angle BAH . Find the area of this triangle.

T4/399. Find the greatest value of the expression

$$M = \frac{232y^3 - x^3}{2xy + 24y^2} + \frac{783z^3 - 8y^3}{6yz + 54z^2} + \frac{29x^3 - 27z^3}{3xz + 6x^2}$$

where x, y and z are positive numbers satisfying the condition $x + 2y + 3z = \frac{1}{4}$.

T5/399. Let ABC be a right triangle with right angle at A and $AB < AC$. Let H be the projection of A onto BC , let M be the point reflection of H across AB . MC meets the circumcircle of triangle ABH at P ($P \neq M$), HP meets the circumcircle of triangle APC at N ($N \neq P$). Let E and K be respectively the intersections of AB and BC with the circumcircle of triangle APC ($E \neq A, K \neq C$). Prove that

- EN is parallel to BC .
- H is the midpoint of BK .

(Xem tiếp trang 28)



★ Bài T1/395. So sánh hai số sau:

$$A = \frac{2^{2009} + 1}{2^{2010} + 1} \text{ và } B = \frac{2^{2010} + 1}{2^{2011} + 1}.$$

Lời giải. Đặt $n = 2^{2009}$, khi đó ta có

$$A = \frac{n+1}{2n+1} \Rightarrow 2A = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1}.$$

$$B = \frac{2n+1}{4n+1} \Rightarrow 2B = \frac{4n+2}{4n+1} = 1 + \frac{1}{4n+1}.$$

Vì $2n+1 < 4n+1$ nên $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{4n+1}$,

suy ra $2A > 2B$, do đó $A > B$. □

◀ Nhận xét. 1) Một số cách giải khác

$$\bullet \frac{A}{B} = \frac{(n+1)(4n+1)}{(2n+1)(2n+1)} = \frac{4n^2 + 4n + 1 + n}{4n^2 + 4n + 1}$$

$$= 1 + \frac{n}{4n^2 + 4n + 1} > 1 \Rightarrow A > B.$$

$$\bullet \frac{1}{A} = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} \text{ và } \frac{1}{B} = \frac{4n+1}{2n+1} = 2 - \frac{1}{2n+1},$$

suy ra $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ nên $A > B$.

2) Có thể tổng quát hóa bài toán bằng cách so sánh hai số sau với n, m là các số nguyên dương:

$$A = \frac{a^n + m}{a^{n+1} + m} \text{ và } B = \frac{a^{n+1} + m}{a^{n+2} + m}.$$

3) Rất nhiều bạn giải đúng, các bạn sau đưa ra nhiều cách giải hoặc nêu được bài toán tổng quát.

Phú Thọ: Trần Thị Kiều Thanh, 6A1, Tạ Thị Hồng Linh, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Việt Anh, Đỗ Thị Như Quỳnh, Trương Thị Hoài Thu, Đào Thị Hồng, Nguyễn Thị Nga, Nguyễn Thị Khánh Huyền, Nguyễn Tuấn Huy, 6A, Phạm Thị Huyền, 6A1, THCS Yên Lạc; Nguyễn Thị Thu Quỳnh, 6A1, THPT Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; **Quảng Ninh:** Nguyễn Trường Giang, Nguyễn Đào Ngọc Quỳnh, 6D, THCS Trọng Điềm, TP. Hạ Long; **Nghệ An:** Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; **Quảng Ngãi:** Vũ Thị Thi, 5A, TH số 2 Hành Phước, Nghĩa Hành;

TP. Hồ Chí Minh: Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 6A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/395. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 45^\circ$, AM là trung tuyến, AD là phân giác trong của tam giác MAC , kẻ DK vuông góc với AB (K thuộc AB). Gọi giao điểm của AM với DK là I . Chứng minh rằng nếu AM là tia phân giác của góc $\widehat{BAD}$ thì BI là tia phân giác của góc $\widehat{ABD}$.

Lời giải. Nếu AM là tia phân giác của góc $\widehat{BAD}$ thì từ giả thiết ta có $\widehat{BAM} = \widehat{MAD} = \widehat{DAC} = 15^\circ$.

Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa B ta dựng tam giác đều ACE , khi đó AM là tia phân giác của $\widehat{EAC}$.

Do đó $\triangle ACM = \triangle AEM$ (c.g.c), suy ra $MC = ME$. Do $MC = MB$ nên $MC = MB = ME$. Suy ra tam giác BEC vuông tại E (1)

Vì tam giác ACE đều nên $AM \perp EC \Rightarrow AM \parallel EB \Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{MAB} = 15^\circ$. Lại có $\widehat{EAB} = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ từ đó $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} \Rightarrow EB = EA = EC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác BCE vuông cân tại E . Vậy $\widehat{ABC} = \widehat{EBC} - \widehat{EBA} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ = \widehat{BAD}$ nên tam giác ABD cân tại D . Do đó DK là phân giác trong của góc $\widehat{ADB}$ (vì $DK \perp AB$). Dẫn đến BI là tia phân giác của góc $\widehat{ABD}$ (đpcm). □

◀ Nhận xét. 1) Đây là bài toán có nhiều cách giải, sử dụng phương pháp vẽ thêm hình phụ. Ngoài cách giải trên, một số bạn kẻ $BP \perp AC$ ($P \in AC$) và dựng điểm Q là giao điểm của các đường thẳng lần lượt vuông góc với AC và BP tại A và B , cũng dẫn đến kết luận tam giác ABD cân tại D .

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn:

Phú Thọ: Dương Mạnh Tùng, 7A1, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; **Quảng Ngãi:** Tống Thành Nguyên, Nguyễn Thúc Phương, Nguyễn Thị Kiều Duyên, 6A, Huỳnh Tiến Vỹ, Bùi Thị Hàn Ný, 7A1, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/395.** Tìm tất cả các số nguyên dương a và b sao cho $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ và $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ đều là số nguyên.

Lời giải. Xét các trường hợp sau

- Nếu $a = b$ thì

$$\frac{a^2+b}{b^2-a} = \frac{b^2+a}{a^2-b} = \frac{a^2+a}{a^2-a} = \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}.$$

Để $\frac{a^2+b}{b^2-a} \in \mathbb{Z}$ thì $a-1$ là ước của 2, mà $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a = 2$; $a = 3$.

Vậy $(a; b) = (2; 2)$, $(a; b) = (3; 3)$.

- Nếu $a > b$ thì $a \geq b+1$; $a^2 > b$. Do đó

$$\frac{b^2+a}{a^2-b} \geq 1 \Rightarrow b^2+a \geq a^2-b \Rightarrow a+b \geq (a-b)(a+b) \Rightarrow a-b \leq 1. \text{ Suy ra } a = b+1.$$

Từ đó, ta có

$$\frac{a^2+b}{b^2-a} = \frac{(b+1)^2+b}{b^2-b-1} = 1 + \frac{4b+2}{b^2-b-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4b+2}{b^2-b-1} \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$\text{Nếu } b \geq 6 \text{ thì } b^2 \geq 6b = 5b+b > 5b+3 \Rightarrow b^2-b-1 > 4b+2 \Rightarrow \frac{4b+2}{b^2-b-1} \notin \mathbb{Z}.$$

Vậy $1 \leq b \leq 5$. Thử trực tiếp với $b = 1, 2, 3, 4, 5$, ta tìm được $b = 1, b = 2$ thỏa mãn (1).

Tương ứng, tìm được $a = 2, a = 3$. Dễ thấy các cặp $(2; 1)$ và $(3; 2)$ thỏa mãn ĐK bài toán.

- Nếu $a < b$ thì tương tự như trường hợp trên, tìm được $(a; b) = (1; 2)$ và $(a; b) = (2; 3)$.

Kết luận. Các các cặp số nguyên dương $(a; b)$ cần tìm là $(2; 2)$, $(3; 3)$, $(2; 1)$, $(3; 2)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Trường hợp $a > b$ có nhiều cách để tìm ra $b = 1, b = 2$. Chẳng hạn, từ (1) $\Rightarrow 4b+2 \geq b^2-b-1 \Leftrightarrow b^2-5b-3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{37}}{2} \leq b \leq \frac{5+\sqrt{37}}{2}$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Đỗ Xuân Việt, 9A, THCS Lập Thạch, Nguyễn Thế Tùng, 9A1, Nguyễn Thị Huệ, 8A1, THCS

Yên Lạc; Nguyễn Đình Lộc, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Phú Thọ:** Nguyễn Hữu Dũng, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Nguyễn Chí Tùng, 7A, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Quảng Ngãi:** Bùi Thị Hàn Ný, 7A1, Phạm Thị Hoài Chương, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/395.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + b + c$. Biết rằng a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $3 \leq a, b, c \leq 5$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 50$.

Lời giải. Vì $3 \leq a, b, c \leq 5$ nên

$$\bullet (a-3)(b-3)(c-3) \geq 0 \Leftrightarrow abc - 3(ab+bc+ca) + 9(a+b+c) - 27 \geq 0 \quad (1)$$

$$\bullet (5-a)(5-b)(5-c) \geq 0 \Leftrightarrow -abc + 5(ab+bc+ca) - 25(a+b+c) + 125 \geq 0 \quad (2)$$

Cộng theo hai vế BĐT (1) và (2) ta được $2(ab+bc+ca) - 16(a+b+c) + 98 \geq 0$.

Lại có $a^2 + b^2 + c^2 = 50$, suy ra

$$(a+b+c)^2 - 16(a+b+c) + 48 \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 16P + 48 \geq 0 \Leftrightarrow (P-8)^2 \geq 16. \quad (3)$$

Vì $a, b, c \geq 3$ nên $P \geq 9$, kết hợp với (3) suy ra $P-8 \geq 4 \Rightarrow P \geq 12$.

$$P = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=12 \\ a^2+b^2+c^2=50 \\ (a-3)(b-3)(c-3)=0 \\ (5-a)(5-b)(5-c)=0 \end{cases}$$

hay $(a; b; c) = (3; 4; 5)$ và các hoán vị của nó. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 12. □

◀ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Tuy nhiên, không ít bạn đã cho lời giải không đúng như sau:

$$\text{Vì } 3 \leq a \leq 5 \text{ nên } (a-3)(a-5) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 15 \leq 0.$$

$$\text{Tương tự } b^2 - 8b + 15 \leq 0; c^2 - 8c + 15 \leq 0. \text{ Suy ra } (a^2 + b^2 + c^2) - 8(a+b+c) + 45 \leq 0.$$

$$\text{Do đó } P = a + b + c \geq \frac{50 + 45}{8} = \frac{95}{8}.$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{95}{8} \text{ khi } a, b, c \in \{3; 5\} (!).$$

Ở đây, các bạn đã quên rằng, khi đó $a^2 + b^2 + c^2 \neq 50$.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn:

Hà Nội: Đặng Thắng Lợi, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Phú Thọ:** Đinh Anh Hoàng, 9A3, THCS Lâm Thao; **Nam Định:** Vũ Thị Thu Hiền, 9A, THCS Hải Hậu; **Bắc Ninh:** Ngô Thị Thanh Nga, 9B, THCS Từ Sơn; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Huệ, Bùi Thị Ngọc Mai, Nguyễn Thu Thủy, 8A1, THCS Yên Lạc;

Dương Phước Thọ, 9A, THCS Lập Thạch; **Thanh Hóa:** Lê Thị Phương, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Cao Minh Sơn, 9D, THCS Cao Xuân Huy, Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, Trần Trung Hiếu, 9A, THCS Hòa Hiếu II; **TP. Hồ Chí Minh:** Phạm Tuấn Huy, 8A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Đồng Nai:** Ông Thế Phương, 9^B, THCS Long Bình, Biên Hòa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/395.** Cho tam giác ABC . Tia phân giác của góc BAC cắt tia phân giác của góc ABC ở I và cắt cạnh BC ở E . Đường vuông góc với AE tại E cắt cung BIC của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC ở H . Chứng minh rằng AH tiếp xúc với cung BIC .

Lời giải. Gọi M là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Vì AI là phân giác của BAC , nên $MB = MC$.

Mặt khác, vì

$\widehat{IBM} = \widehat{IBC} + \widehat{CBM} = \widehat{IBA} + \widehat{CAM} = \widehat{IBA} + \widehat{BAI} = \widehat{BIM}$ nên tam giác BMI cân tại M , suy ra $MB = MI = MC$.

Do đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC , suy ra $MB = MH$ (*)

Hai tam giác BEM và ABM có góc M chung, $\widehat{EBM} = \widehat{BAM}$ nên chúng đồng dạng, suy ra

$$\frac{EM}{BM} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow EM \cdot AM = BM^2.$$

Kết hợp với (*) ta có $EM \cdot AM = MH^2$ mà $HE \perp AM$, và E nằm giữa A và M suy ra $AH \perp MH$ hay AH là tiếp tuyến của đường tròn (M) (đpcm). $\square$

◀ **Nhận xét.** Một số bạn lấy thêm giao điểm thứ hai của EH với đường tròn (M) hoặc là lấy điểm F đối xứng với I qua M rồi sử dụng tính chất của các tam giác đồng dạng cũng đi đến kết quả bài toán. Các bạn sau đây có lời giải tốt nhất: **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thế Tùng, lớp 9A₁, THCS Yên Lạc; **Đỗ Xuân Việt**, 9A, THCS Lập Thạch; **Hà Nam:** Nguyễn Quang Lợi, 7B₁, THCS Liêm Chính, TP. Phú Lý; **Nghệ An:** Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, Phan Thanh Tùng, Đậu Hồng Quân, 8D, THCS Cao Xuân Huy,

Diễn Châu; **Phú Thọ:** Đinh Anh Hoàng, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Trần Tuấn Nghĩa, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Quận Thanh Xuân.

PHAN THỊ MINH NGUYỄN

★ **Bài T6/395.** Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Các đường thẳng AI , BI , CI kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại A' , B' , C' . Chứng minh rằng

$$(p-a)IA'^2 + (p-b)IB'^2 + (p-c)IC'^2 = \frac{1}{2}abc,$$

trong đó $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Lời giải. Giả sử O , R , r lần lượt là tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi D là tiếp điểm của đường tròn $(I; r)$ với cạnh AB . Khi

$$đó ID = AD \cdot \tan \frac{A}{2}, \text{ hay } r = (p-a) \cdot \tan \frac{A}{2}.$$

$$\text{Vì } S_{ABC} = p \cdot r, \text{ nên } S_{ABC} = p(p-a) \cdot \tan \frac{A}{2}.$$

$$\text{Lại có } S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A,$$

$$\text{suy ra } p-a = \frac{bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2}}{p} \quad (1)$$

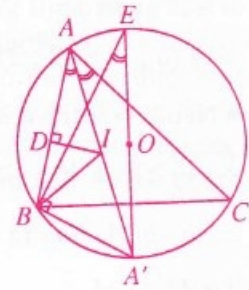
Kẻ đường kính $A'E$ của đường tròn (O) . Ta thấy tam giác $A'IB$ cân tại A' (do $\widehat{A'BI} = \widehat{A'IB} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2}$) nên

$$IA' = BA' = A'E \cdot \sin \frac{A}{2} = 2R \cdot \sin \frac{A}{2} = \frac{a}{2 \cos \frac{A}{2}} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } (p-a)IA'^2 = \frac{a^2 bc}{4p}.$$

$$\text{Tương tự } (p-b)IB'^2 = \frac{ab^2 c}{4p};$$

$$(p-c)IC'^2 = \frac{abc^2}{4p}.$$



$$\begin{aligned} &\text{Do đó } (p-a)IA'^2 + (p-b)IB'^2 + (p-c)IC'^2 \\ &= \frac{abc(a+b+c)}{4p} = \frac{1}{2}abc \text{ (đpcm)}. \square \end{aligned}$$

◀ **Nhận xét.** Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và đều giải đúng với nhiều cách giải khác nhau. Xin nêu tên những bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Trần Tuấn Nghĩa, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Thanh Xuân, Nguyễn Văn Quý, 11A1 Toán, Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, Lương Hữu Bằng, 10A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Hải Phòng:** Phan Đức Minh, 11A15, THPT Thái Phiên; **Phú Thọ:** Đinh Anh Hoàng, 9A3, THCS Lâm Thao, Nguyễn Quốc Hùng, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Lê Chí Hùng, 9A, THCS Tuấn Chính, Vĩnh Tường, Lê Văn Tú, 10A1, Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Lê Văn Trọng, 10A2, Đàm Văn Tú, 10A3, THPT Đội Cấn; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Minh Hương, 11A, THPT Lý Bôn; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Lê Đình Tài, 7A2, THCS Văn Yên, Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I, Dương Đình Quý, 10A1 Toán, THPT chuyên ĐH Vinh, Trương Đình Đức, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Võ Duy Văn, 11A1, THPT Quỳnh Lưu I, Phạm Hùng Vương, 10A1, THPT Phan Đăng Lưu, Yên Thành; **Hà Tĩnh:** Trần Võ Hoàng, 10 Toán I, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** Nguyễn Đức Lâm, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** Bùi Đăng Khoa, Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Bình Định:** Lê Như Ngọc, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nguyễn Quang Hải, 10TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Lê Tân Nghiệp, 10A1, THPT Phù Cát I; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 12A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** Cao Thành Chương, Khổng Hữu Hiệp, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Tiền Giang:** Đỗ Quang Bình, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T7/395.** Giả sử tam giác ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) có ba góc A, B, C thỏa mãn điều kiện $\cos A + \cos B = 2\cos C$.

Chứng minh bất đẳng thức $c \geq \frac{8}{9} \max\{a, b\}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Không giảm tính tổng quát có thể giả sử $a \geq b$. Sử dụng định lý cosin trong tam giác ABC , điều kiện bài toán tương đương với

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} + \frac{(a+c)^2 - b^2}{2ac} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{ab} \\ &\Leftrightarrow \frac{(b+c-a)(a+b+c)}{2bc} + \frac{(a+c-b)(a+b+c)}{2ac} \\ &= \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a(b+c-a) + b(a+c-b) = 2c(a+b-c) \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2c^2 - 2ab + ac + bc = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Cách 1. Từ (1) suy ra b là nghiệm của PT

$$x^2 - (2a-c)x + a^2 + ac - 2c^2 = 0.$$

PT này có nghiệm nên $\Delta = 9c^2 - 8ac \geq 0$.

$$\text{Suy ra } c \geq \frac{8}{9}a = \frac{8}{9} \max\{a, b\}.$$

Cách 2. Từ (1) suy ra c là nghiệm của PT

$$2x^2 - (a+b)x + 2ab - a^2 - b^2 = 0.$$

Từ đó, do $c > 0$ nên

$$c = \frac{a+b + \sqrt{(a+b)^2 + 8(a-b)^2}}{4}.$$

Khi đó, điều phải chứng minh tương đương với

$$c \geq \frac{8}{9}a \Leftrightarrow 9\sqrt{(a+b)^2 + 8(a-b)^2} \geq 23a - 9b \quad (2)$$

Vì $a \geq b \Rightarrow 23a - 9b \geq 0$, nên (2) tương đương với $81(9a^2 + 9b^2 - 14ab) \geq 529a^2 - 414ab + 81b^2$
 $\Leftrightarrow (5a - 9b)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Đẳng thức xảy ra khi $a : b : c = 9 : 5 : 8$ hoặc $a : b : c = 5 : 9 : 8$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán có thể tổng quát như sau:

Với hai số thực m, n thỏa mãn

$$m\cos A + n\cos B = (m+n)\cos C.$$

Khi đó, với $t = \max\{a, b\}$ ta có bất đẳng thức

$$c^2(5m^2 + 4mn) + t^2(m-n)^2 - 2tc(m-n)(m+2n) \geq 0.$$

Chứng minh tương tự như trên, xin dành cho bạn đọc.

2) Có nhiều bạn khi xét đẳng thức xảy ra đã bỏ sót một trường hợp. Không có bạn nào xét được bài toán tổng quát. Các bạn dưới đây có lời giải tốt hơn cả:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Nguyễn Đức Anh, 10A1, Lê Văn Trọng, 10A2, THPT Đội Cấn; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Huyền Trang, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Hải Dương:** Bùi Huy Hoàng, 10A, THPT Kim Thành I; **Trần Quang Thanh**, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Nguyễn

Ngọc Thiên, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Thanh Hoá:** Hoàng Văn Hiệp, 10B2, THPT Triệu Sơn II; **Nghệ An:** Dương Đình Quý, 10A1 Toán, THPT chuyên ĐH Vinh; Trương Đình Đức, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I; **Quảng Trị:** Nguyễn Anh Quốc, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** Không Hữu Hiệp, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Quảng Nam:** Hà Văn Huỳnh Anh, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Tam Kỳ.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ Bài T8/395. Giải phương trình

$$x^{\log_7 11} + 3^{\log_7 x} = 2x.$$

Lời giải. Điều kiện $x > 0$. PT có thể viết thành $11^{\log_7 x} + 3^{\log_7 x} = 2 \cdot 7^{\log_7 x}$ (1)

Giả sử PT có nghiệm $x = \alpha$, nghĩa là

$$11^{\log_7 \alpha} + 3^{\log_7 \alpha} = 2 \cdot 7^{\log_7 \alpha} \\ \Leftrightarrow 11^{\log_7 \alpha} - 7^{\log_7 \alpha} = 7^{\log_7 \alpha} - 3^{\log_7 \alpha} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = (t+4)^{\log_7 \alpha} - t^{\log_7 \alpha}$.

Hàm số $f(t)$ liên tục và có

$$f'(t) = \log_7 \alpha \left((t+4)^{\log_7 \alpha - 1} - t^{\log_7 \alpha - 1} \right), \text{ khi } t > 0.$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow f(7) = f(3)$.

Theo định lý Lagrange, tồn tại giá trị $c \in (3; 7)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = 0 \\ \Rightarrow \log_7 \alpha \left((c+4)^{\log_7 \alpha - 1} - c^{\log_7 \alpha - 1} \right) = 0. \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_7 \alpha = 0 \\ (c+4)^{\log_7 \alpha - 1} = c^{\log_7 \alpha - 1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_7 \alpha = 0 \\ \log_7 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 7. \end{cases}$$

Thử lại, ta thấy PT đã cho có hai nghiệm là $x = 1$; $x = 7$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể giải bài toán bằng cách sau :
Đặt $t = \log_7 x$, PT (1) trở thành

$$11^t + 3^t = 2 \cdot 7^t \Leftrightarrow \left(\frac{11}{7} \right)^t + \left(\frac{3}{7} \right)^t = 2 \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{11}{7} \right)^t + \left(\frac{3}{7} \right)^t - 2$ thì

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ và}$$

$$f''(t) = \left(\frac{11}{7} \right)^t \ln^2 \frac{11}{7} + \left(\frac{3}{7} \right)^t \ln^2 \frac{3}{7} > 0.$$

Vậy hàm số $f'(t)$ luôn đồng biến nên PT $f'(t) = 0$ có không quá một nghiệm, suy ra PT $f(t) = 0$ có không quá hai nghiệm. Do đó PT (3) có đúng hai nghiệm là $t = 0$ và $t = 1$. Từ đó suy ra nghiệm của PT đã cho.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Yên Bái: Hà Tuấn Dũng, 10K, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Thái Bình:** Nguyễn Thanh Hải, 12C2, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Ngãi:** Bùi Tá Việt Trí, 11 Toán 2, THPT Lê Khiết, TP Quảng Ngãi; **Cà Mau:** Nguyễn Phạm Tuấn Anh, 12T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 12A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T9/395. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x+4} = x^3 + 3x^2 + x - 2.$$

Lời giải. Cộng hai vế với $3x + 4$, ta được PT tương đương

$$3x + 4 + \sqrt[3]{3x+4} = (x+1)^3 + (x+1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+4} = x+1 \\ (\text{vì nếu } a < b \text{ thì } a^3 < b^3 \Rightarrow a^3 + a < b^3 + b) \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - 3(x+1) = 1 \quad (1)$$

Xét trường hợp $|x+1| \leq 2$. Khi đó tồn tại duy nhất $\varphi \in [0; \pi]$ sao cho $x+1 = 2\cos\varphi$. Suy ra $(x+1)^3 - 3(x+1) = 2(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) = 2\cos 3\varphi$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow 2\cos 3\varphi = 1 \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\varphi = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp với $0 \leq \varphi \leq \pi$, suy ra $\varphi \in \left\{ \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9} \right\}$.

Chú ý rằng đa thức bậc ba có không quá ba nghiệm thực. Bởi vậy PT (1) có ba nghiệm

$$x \in \left\{ 2\cos \frac{\pi}{9} - 1; 2\cos \frac{5\pi}{9} - 1; 2\cos \frac{7\pi}{9} - 1 \right\}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Đây là bài toán đại số giải bằng phương pháp lượng giác. Bài toán này thuộc dạng cơ bản, không cần biến đổi phức tạp. Các bạn sau đây sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Võ Trung Hiếu, 10A2, THPT Hưng Hòa, Tam Nông; **Hưng Yên:** Lương Đức Hiếu, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** Lê Thị Thanh Nga, 10A1, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam Định:** Trần Quang Huy, 10A1, THPT Hải Hậu; **Thanh Hóa:** Lê Phú Cường.

10A3, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, Lê Văn Tuấn, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Tuấn Anh, Dương Đình Quý, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Nam:** Hà Văn Huỳnh Anh, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Ngãi:** Phạm Thành Công, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Nguyễn Danh Nhân, Lê Tấn Nghiệp, 10A1, THPT Phù Cát II; Lê Như Ngọc, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/395.** Cho X là tập hợp con của tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, 2010\}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

1) $|X| = 62$.

2) Với mọi $x \in X$ đều tồn tại $a, b \in X \cup \{0; 2011\}$

(a và b đều khác x) sao cho $x = \frac{a+b}{2}$.

Chứng minh rằng có hai phần tử x, y của X sao cho $|x-y| \geq 11$ và $\frac{x+y}{2}$ không thuộc X .

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Giả sử X có 62 phần tử $x_1, x_2, \dots, x_{62}$ đã được sắp thứ tự $x_1 < x_2 < \dots < x_{62}$. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử không tồn tại hai phần tử x, y của X sao cho $|x-y| \geq 11$ và $\frac{x+y}{2}$ không thuộc X . Ta sẽ chứng minh rằng các phần tử của X đều cùng tính chẵn lẻ.

Vì $X \subset \{1, 2, 3, \dots, 2010\}$ nên $x_{i+1} \geq x_i + 1$ với $i = 1, 2, \dots, 61$. Do đó $x_{62} - x_k \geq 11$, với $k = 1, 2, \dots, 51$. Suy ra x_k ($k = 1, 2, \dots, 51$) cùng tính chẵn lẻ với x_{62} , vì nếu không như vậy, tức tồn tại x_k khác tính chẵn lẻ với x_{62} , thì $\frac{x_k + x_{62}}{2} \in X$, trái với giả thiết. Lập luận

tương tự, ta thấy x_l , $l = 12, 13, \dots, 62$ cùng tính chẵn lẻ với x_1 . Từ đó suy ra mọi $x_1, x_2, \dots, x_{62}$ cùng tính chẵn lẻ. Tiếp theo, với giả thiết 2) của bài toán thì tồn tại $a, b \in X \cup \{0; 2011\}$,

($a \neq b$) sao cho $x_{62} = \frac{a+b}{2}$. Vì $x_{62} > x_i$, $i = 1, 2, \dots, 61$ nên tồn tại x_p , với $p = 1, 2, \dots, 61$

sao cho $x_{62} = \frac{x_p + 2011}{2}$ kéo theo x_p là một

số lẻ. Tương tự, do $x_i < x_1$, với $i = 2, 3, \dots, 61$ nên tồn tại x_q với $q = 2, 3, \dots, 61$ sao cho

$x_1 = \frac{x_q + 0}{2}$, kéo theo x_q là một số chẵn. Như

vậy, x_p và x_q là hai phần tử của X khác tính chẵn lẻ, trái với kết quả khẳng định ở trên, tức điều giả sử là sai.

Kết luận: Vậy, có hai phần tử x, y của X sao

cho $|x-y| \geq 11$ và $\frac{x+y}{2}$ không thuộc X . $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn có nhận xét có thể thay $|X| = 33$.

2) Bạn La Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa đã đưa ra bài toán tổng quát sau đây (không cần điều kiện 2)

Cho X là tập hợp con của tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, $|X| = k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$). Chứng minh rằng có hai phần

tử x, y của X sao cho $|x-y| \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1$ và $\frac{x+y}{2}$ không thuộc X .

3) Các bạn sau đây có lời giải đúng

Vĩnh Phúc: Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Nguyễn Ngọc Thiện, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Hà Nam:** Đỗ Minh Tiếp, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam Định:** Trần Trọng Huy, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Huyền Trang, 10T, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Lê Quang Lâm, La Văn Tuấn, 10T, Nguyễn Anh Thắng, La Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Tuấn Anh, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1 THPT Lê Hồng Phong; **Quảng Nam:** Võ Văn Quang, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Bến Tre:** Không Hữu Hiệp, 11T, THPT chuyên Bến Tre; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, Bùi Đăng Khoa 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T11/395.** Người ta dán hai mép đối diện một bàn cờ $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ô vuông thành một hình trụ và sau đó dán hai mép đối diện của hình trụ lại thành một bàn cờ hình xoắn. Chứng minh rằng có thể xếp n quân Hậu trên bàn cờ hình xoắn $n \times n$ này sao cho chúng đôi một không ăn nhau khi và chỉ khi $(n, 6) = 1$.

(Hai quân Hậu ăn được nhau nếu như chúng trên cùng một cột, một hàng, hoặc trên cùng một đường chéo).

Lời giải. Ta lập hệ trục tọa độ theo hai cạnh liên tiếp của bàn cờ ban đầu. Như vậy mỗi ô vuông của bàn cờ ứng với mỗi tọa độ $(i; j)$, $(1 \leq i, j \leq n)$. Dễ thấy rằng trên bàn cờ hình xuyên, hai quân Hậu ở hai ô $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ ăn được nhau khi và chỉ khi xảy ra một trong các điều kiện sau:

• Cùng hàng $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ (1)

• Cùng cột $y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$ (2)

• Cùng đường chéo phụ
 $x_1 - y_1 \equiv x_2 - y_2 \pmod{n}$ (3)

• Cùng đường chéo chính
 $x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}$ (4)

Ta chứng minh bài toán.

Điều kiện đủ

Nếu $(n, 6) = 1$, ta xếp n quân Hậu theo cách đặt quân Hậu thứ i vào ô tọa độ $(i; 2i) \pmod{n}$. Chẳng hạn, nếu $n = 7$ thì quân Hậu thứ năm được đặt vào ô $(5; 3)$.

Dễ kiểm tra thấy hai quân Hậu $(i; 2i)$ và $(j; 2j)$ ($1 \leq i, j \leq n, i \neq j$) không thể ăn nhau được, vì từ $(n, 6) = 1$ ta có hai quân Hậu này:

• Không cùng hàng do $i \neq j \pmod{n}$;

• Không cùng cột do $2i \neq 2j \pmod{n}$;

• Không cùng đường chéo phụ do
 $i - 2i \neq j - 2j \pmod{n}$;

• Không cùng đường chéo chính do
 $i + 2i \neq j + 2j \pmod{n}$.

Điều kiện cần

Giả sử có thể xếp n quân Hậu đôi một không ăn nhau trên bàn cờ hình xuyên $n \times n$ ô vuông. Do (1), trên mỗi hàng có đúng một quân Hậu, cho nên ta kí hiệu tọa độ của quân Hậu trên hàng i là $(i; \pi(i))$. Theo (2), $\pi(i) \pmod{n}$, là một hoán vị của $1, 2, \dots, n$. Theo (3) và (4) ta có $\pi(i) - i \pmod{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, là một hoán vị của $1, 2, \dots, n$ (5)

$\pi(i) + i \pmod{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, là một hoán vị của $1, 2, \dots, n$ (6)

Từ (5) ta có

$$\sum_{i=1}^n (\pi(i) - i) \equiv \sum_{i=1}^n i \pmod{n};$$

$$0 \equiv \frac{n(n+1)}{2} \pmod{n};$$

Suy ra $(n+1) : 2 \Rightarrow (n, 2) = 1$ (7)

Từ (5) và (6) ta có

$$\sum_{i=1}^n ((\pi(i) - i)^2 + (\pi(i) + i)^2) \equiv 2 \sum_{i=1}^n i^2 \pmod{n};$$

$$\Rightarrow 4 \sum_{i=1}^n i^2 \equiv 2 \sum_{i=1}^n i^2 \pmod{n};$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n i^2 \equiv 0 \pmod{n};$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \equiv 0 \pmod{n}. \text{ Suy ra}$$

$(n+1)(2n+1) : 3 \Rightarrow (n, 3) = 1$. (8)

Từ (7) và (8) suy ra $(n, 6) = 1$ (đpcm). $\square$

◀ **Nhận xét.** Rất ít bạn gửi lời giải tới tòa soạn và không bạn nào cho lời giải đúng. Đây có lẽ vẫn là mảng toán khó đối với các bạn.

VŨ ĐÌNH HÒA

★ **Bài T12/395.** Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn có AC song song với DF , BE là đường kính của đường tròn. Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm của AB với EF và BC với DE ; I là giao điểm của AN với CM . Chứng minh rằng EI vuông góc với AC .

Lời giải

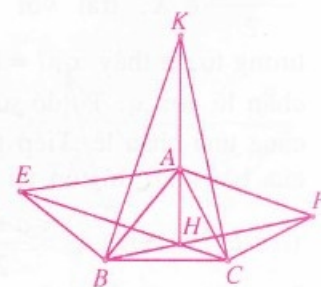
Bổ đề. Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng hai tam giác ABE , ACF đồng dạng và theo thứ tự vuông tại B , C ; BF cắt CE tại H . Khi đó $AH \perp BC$.

Chứng minh (h. 1)

Trên đường thẳng qua A vuông góc với BC lấy điểm K sao

$$\text{cho } \frac{KA}{CB} = \frac{BA}{EB} \quad (1)$$

Vì $AK \perp BC$; $AB \perp BE$



Hình 1

và các góc $\widehat{KAB}, \widehat{CBE}$ cùng tù nên

$$\widehat{KAB} = \widehat{CBE} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta KAB \sim \Delta CBE$. Do đó

$$\widehat{ABK} = \widehat{BEC}.$$

Chú ý rằng $\widehat{ABE} = 90^\circ$, suy ra

$$KB \perp CE \quad (3)$$

Lại có, $\Delta ABE \sim \Delta ACF$ (giả thiết) suy ra

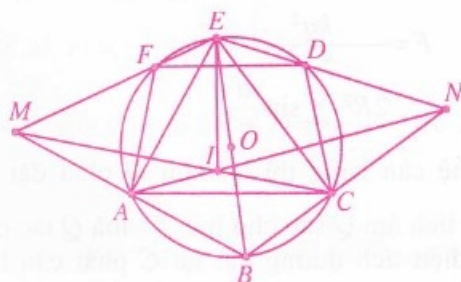
$$\frac{BA}{EB} = \frac{CA}{FC} \quad (4)$$

Từ (1) và (4), suy ra $\frac{KA}{BC} = \frac{CA}{FC}$.

Hoàn toàn chứng minh tương tự như trên, suy ra $KC \perp BF$ (5)

Từ (3) và (5) suy ra H là trực tâm của tam giác KBC . Do đó $KH \perp BC$ mà $KA \perp BC$ (cách vẽ), suy ra ba điểm K, A, H thẳng hàng, dẫn đến $AH \perp BC$ (đpcm).

Trở lại giải bài toán (h. 2).



Hình 2

Vì $AC \parallel FD$ nên $AE = CD$. Do đó

$$\widehat{MEA} = \widehat{FEA} = \widehat{DEC} = \widehat{NEC} \quad (6)$$

Vì BE là đường kính của đường tròn (O) nên các góc $\widehat{BAE}, \widehat{BCE}$ là góc vuông. Do đó các góc $\widehat{MAE}, \widehat{NCE}$ cũng là góc vuông. (7)

Từ (6) và (7) suy ra hai tam giác EAM và ECM đồng dạng với nhau và theo thứ tự vuông tại A và C . Áp dụng bổ đề trên ta có $EI \perp AC$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán này thuộc dạng cơ bản nên khá nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên vẫn có bạn giải sai.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt.

Vĩnh Phúc: Lê Văn Tú, 10A1, Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phan Văn Tín**, 9A1, THCS Yên Lạc; **Ninh Bình:** Vũ Thị Minh Phương, 12T, THPT Lương Văn Tụy; **Hà Nam:** Trần Minh Hải, 10A2, THPT A Phú Lý; **Hải Dương:** Bùi Huy Hoàng, 10A, THPT Kim Thành I; **Thanh Hoá:** Lê Văn Tuấn, Trương Vũ Liệu, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Đà Nẵng:** Bùi Đăng Khoa, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre.** Không Hữu Hiệp, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/395.** Một sợi dây đồng chất chiều

dài $\frac{\pi R}{2}$ nằm trên một hình trụ nhẵn bán kính

R có trục nằm ngang. Tìm lực căng của sợi

dây tại điểm A (xác

định bởi góc α như

hình vẽ) ngay sau

khí thả. Cho khối

lượng sợi dây bằng

m , gia tốc trọng

trường bằng g .



Lời giải. Ở thời điểm ngay sau khi thả dây, gia tốc của các phần tử có phương tiếp tuyến và bằng nhau về độ lớn, ta kí hiệu gia tốc này là a .

Xét trong khoảng thời gian t rất ngắn sao cho gia tốc là không đổi, sợi dây dịch chuyển được

một đoạn nhỏ $l = \frac{at^2}{2}$ và đạt vận tốc $v = at$.

Ta sẽ sử dụng định luật bảo toàn năng lượng để tìm gia tốc a của dây. Xem như đoạn dây độ dài l chuyển xuống đầu dưới, do đó độ cao của phần dây bị giảm một đoạn R . Độ giảm thế năng của đoạn dây đó sẽ chuyển thành động năng của toàn bộ sợi dây, ta có

$$\frac{ml}{\pi \frac{R}{2}} g R = \frac{mv^2}{2}.$$

Thay các biểu thức của l và v vào đẳng thức

$$\text{trên ta được } a = \frac{2g}{\pi}.$$

Bây giờ ta xét phần dây phía dưới điểm A có

khối lượng $\frac{m\alpha}{\frac{\pi}{2}}$. Động năng của phần dây

này có được bằng tổng công do trọng lực của

nó và công của lực căng T của dây tại A. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$\frac{ml}{\frac{\pi}{2}} \cdot gR \sin \alpha - Tl = \frac{m\alpha}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Thay l, v ở trên vào đẳng thức này ta được

$$T = \left(\sin \alpha - \frac{2\alpha}{\pi} \right) \cdot \frac{2mg}{\pi}.$$

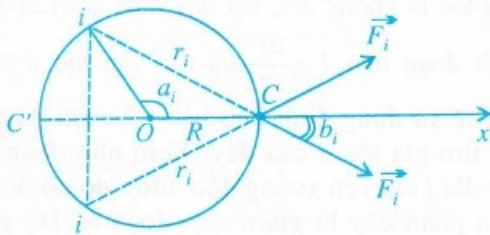
Từ kết quả này ta thấy lực căng ở hai đầu dây là bằng không (do $\alpha = 0$). $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng: **Thái Nguyên:** Vũ Quang Minh 11 Lí THPT Chuyên; **Quảng Ngãi:** Phạm Quốc Độ, 11 B1, Bùi Đức Khánh, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/395.** Cho N điện tích điểm dương q như nhau, nằm cách đều nhau trên một đường tròn tâm O bán kính R . Cần đặt tại tâm đường tròn một điện tích bằng bao nhiêu để hệ cân bằng? Khảo sát thêm với các trường hợp riêng $N = 3$ và $N = 4$.

Lời giải. Ta khảo sát bài toán trong hai trường hợp N chẵn và N lẻ.



a) **Trường hợp N lẻ.** Gọi điện tích của các điện tích điểm dương là q . Xét lực tác dụng lên điện tích điểm dương được đặt tại điểm C bất kì. Trừ điện tích ở C , các điện tích còn lại đều có vị trí đối xứng với nhau từng đôi một qua đường kính $C'C$.

Kí hiệu các điện tích ở về hai phía của đường kính qua $C'C$ lần lượt là $1, 2, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n$ (với $n = \frac{N-1}{2}$). Sao cho các cặp điện tích đối xứng nhau qua $C'C$ mang cùng số thứ tự. Hai điện tích dương thứ i (đối xứng nhau qua đường kính $C'C$, xem hình vẽ)

tác dụng lên điện tích dương đặt ở C hai lực đây $\vec{F}_i$ có độ lớn bằng nhau $F_i = \frac{kq^2}{r_i^2}$, với

$$r_i^2 = 2R^2(1 - \cos a_i) = 2R^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi i}{N} \right) = 4R^2 \sin^2 \frac{\pi i}{N}.$$

Tổng hai lực của hai điện tích dương thứ i tác dụng lên điện tích dương đặt tại C có phương của đường kính $C'C$ (cũng là phương Ox , hình vẽ), và có độ lớn bằng

$$2F_i \cos b_i = \frac{kq^2 \cos b_i}{2R^2 \sin^2 \frac{\pi i}{N}} = \frac{kq^2 \sin \frac{a_i}{2}}{2R^2 \sin^2 \frac{\pi i}{N}} = \frac{kq^2}{2R^2 \sin \frac{\pi i}{N}} \left(\text{do } a_i = \frac{2\pi i}{N}; b_i = \frac{\pi - a_i}{2} \right).$$

Vì vậy, hợp lực mà $(N-1)$ điện tích dương khác tác dụng lên điện tích dương đặt tại C sẽ có phương của đường kính $C'C$, có chiều hướng ra xa tâm O , và có độ lớn bằng

$$F = \frac{kq^2}{\frac{N-1}{2R^2} \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \sin \frac{\pi i}{N}}.$$

Để hệ cân bằng thì tại tâm O phải đặt một điện tích âm Q sao cho lực $\vec{F}'$ mà Q tác dụng lên điện tích dương đặt tại C phải cân bằng với lực $\vec{F}$, nghĩa là $\vec{F}' = -\vec{F}$.

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{kqQ}{R^2} = - \frac{kq^2}{\frac{N-1}{2R^2} \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \sin \frac{\pi i}{N}},$$

$$\text{hay } Q = - \frac{q}{\frac{N-1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \sin \frac{\pi i}{N}}.$$

$$* \text{ Trường hợp } N = 3 \text{ thì } Q = - \frac{q}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = - \frac{q}{\sqrt{3}}.$$

b) **Trường hợp N chẵn.** Xét tương tự như trên, nhưng sẽ còn một điện tích dương q đối

TIN TỨC**HỘI THẢO KHOA HỌC QUỐC TẾ
TẠI HÀ NỘI VÀ THÁI NGUYÊN**

Để thông báo các kết quả mới của Giải tích - Đại số hiện đại và các nghiên cứu ứng dụng (trong tính toán khoa học, nghiên cứu môi trường), Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, Trường ĐHKH, ĐH Thái Nguyên và Hội Toán học Hà Nội đồng tổ chức Hội thảo Khoa học Quốc tế về

**MODERN MATHEMATICAL ANALYSIS
AND APPLICATIONS**

tại Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội vào ngày 28-30/8/2010 và tại TP. Thái Nguyên vào ngày 31/8 – 1/9/2010 do GS.TSKH. NGND Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội đồng khoa học trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội kiêm Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội chủ trì. Hội thảo khoa học lần này được nhiều nhà khoa học, các chuyên gia Toán học hàng đầu đến từ Đức, Nhật Bản, Nga và Việt Nam trực tiếp giảng các chuyên đề và trình bày các báo cáo khoa học tại các phiên họp toàn thể và các tiểu ban. Hội thảo này là sự nối tiếp các nội dung hội thảo tại Hà Nội và Sa Pa thuộc chương trình đề tài trọng điểm QGTD-08.09 xây dựng nhóm nghiên cứu trong khuôn khổ hợp tác khoa học liên Trường – Viện – Hội của trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.



Nhân dịp này, Hội nghị đã tổ chức thăm quan một vài danh thắng của Thái Nguyên: Bảo tàng các dân tộc, Hồ Núi Cốc. Các đại biểu của Hội nghị đã giao lưu văn nghệ với Trường ĐH Thái Nguyên, với Phòng Giáo dục Sóc Sơn. Hội nghị diễn ra trong không khí đầm ấm tình đồng nghiệp và tình thầy trò giữa các thế hệ học và dạy toán. Đợt Hội thảo đã thành công tốt đẹp, để lại nhiều ấn tượng sâu sắc cho các chuyên gia Toán học Quốc tế về đất nước và con người Việt Nam.

PV.

xúng với điện tích dương đặt tại C qua tâm O . Do đó, lực đẩy tổng hợp lên điện tích đặt tại C cũng có phương của đường kính $C'O$, có chiều ra xa tâm O , và có độ lớn bằng

$$F = \frac{kq^2}{4R^2} + \frac{kq^2}{2R^2 \sum_{i=1}^{N-2} \sin \frac{\pi i}{N}}$$

Để hệ cân bằng thì tại O phải đặt một điện tích âm Q , sao cho $\vec{F}' = -\vec{F}$.

$$\text{Suy ra } \frac{kqQ}{R^2} = - \left(\frac{kq^2}{4R^2} + \frac{kq^2}{2R^2 \sum_{i=1}^{N-2} \sin \frac{\pi i}{n}} \right),$$

$$\text{hay } Q = -\frac{q}{4} - \frac{q}{2 \sum_{i=1}^{N-2} \sin \frac{\pi i}{N}}.$$

* Trường hợp $N = 4$ thì

$$Q = -\frac{q}{4} - \frac{q}{2 \sin \frac{\pi}{4}} = -\frac{q(1+2\sqrt{2})}{4}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nam: Đinh Ngọc Hải, 10 Lí, THPT chuyên Hà Nam; **Thái Nguyên:** Vũ Quang Minh, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Nghệ An:** Nguyễn Tiến Dũng, 11A1, THPT Quỳnh Hợp 2; **Hưng Yên:** Hồ Ngọc Hiệp, 10A5, THPT Nam Khoái Châu.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Đố bạn

Bạn hãy thử điền vào các dấu ...; *; **;
*** bằng các số và các phép toán trong
câu nói sau đây

**Ngày Đại lễ ... năm Thăng Long -
Hà Nội đúng vào ngày Chủ nhật *
tháng ** năm *****

Biết rằng

- ... gồm 5 chữ số 3, hoặc 7 chữ số 4;
- * gồm 4 chữ số 8;
- ** gồm 4 chữ số 7;
- *** gồm 9 chữ số 5.

AN - THANH - KHÔI
(Hà Nội)

BẢN CHẤT HÌNH HỌC... (Tiếp trang 11)

BÀI TẬP

1. Cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-1=0$, điểm $A(1;1;-1)$

và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.

- Viết PT đường thẳng Δ đi qua A , nằm trong mặt phẳng (α) sao cho khoảng cách giữa Δ và d lớn nhất;
- Viết PT đường thẳng Δ đi qua A , nằm trong mặt phẳng (α) sao cho góc giữa Δ và d bé nhất;
- Viết PT mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và cách điểm A một khoảng lớn nhất;
- Viết PT mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (α) một góc lớn nhất, nhỏ nhất.

2. Cho họ đường thẳng $\Delta_m: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+(1-m)t \\ z=1+mt \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

- Chứng minh họ đường thẳng Δ_m luôn nằm trong một mặt phẳng cố định và đi qua một điểm cố định;
- Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ_m lớn nhất, nhỏ nhất;
- Tìm m để Δ_m tạo với trục hoành một góc bé nhất, lớn nhất;
- Tìm m để khoảng cách giữa Δ_m và trục Oy lớn nhất.

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/399. Find the interger part of A , where

$$A = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt[2010]{\frac{2010}{2009}}.$$

T7/399. Find the least value of the following expression

$$A = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+x^2} + \frac{z}{1+t^2} + \frac{t}{1+z^2}$$

where x, y, z, t are nonnegative real numbers satisfying $x+y+z+t=k$ (k is a given positive number).

T8/399. Let ABC be a given triangle and M is a point which is not on its sides. Prove that $\mathcal{P}_{A/(MCB)} = \mathcal{P}_{B/(MCA)} = \mathcal{P}_{C/(MAB)}$ if and only if M is the centroid of triangle ABC . ($\mathcal{P}_{T/(XYZ)}$ is the power of the point T with respect to the circle through X, Y, Z).

T9/399. Let ABC be a triangle. A circle intersects with the sides BC, CA and AB at pairs of two points $(M, N); (P, Q)$ and (S, T) respectively, where M lies between B and N ; P lies between C and Q , and S lies between A and T . Let K, H, L be respectively the intersections of SN and QM ; QM and TP ; TP and SN . Prove that the lines AK, BH, CL are concurrent.

T10/399. Let (a_n) be a sequence of numbers such that

$$\begin{cases} a_0 = 10 \\ (6-a_n)(16+a_{n-1}) = 96, \quad n=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Find the sum $S = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{2010}}$.

T11/399. Find all functions $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that the following equality holds

$$f(x+y) + f(xy) = x+y+xy; \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

T12/399. Let ABC be a triangle. Prove that

$$\begin{aligned} & \cos A \cos B \cos C + 8\sqrt{3} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ & \geq 24 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} - 1. \end{aligned}$$

Translated by LE MINH HA



GẤP GIẤY (ORIGAMI) và DỰNG HÌNH

ĐOÀN QUỲNH (Hà Nội)

PHAN THỊ MINH NGUYỆT (NXBGD Việt Nam)

Từ "Origami" tiếng Nhật có nghĩa là "gấp giấy". Chủ yếu nó là một vấn đề của nghệ thuật. Nhưng đứng về góc độ toán học, ta có thể nhìn nhận "gấp giấy" như một thuật toán dựng hình trong mặt phẳng như sau:

Khi gấp tờ giấy một lần rồi mở ra, ta được một vết hằn trên giấy gọi là nếp gấp mà ta coi là một đường thẳng trong mặt phẳng tờ giấy. Đường thẳng đó ta gọi là "đường thẳng dựng được" (bằng cách gấp giấy). Giao điểm của hai đường thẳng dựng được gọi là "điểm dựng được".

Bằng cách gấp giấy như thế, ta thừa nhận có thể làm các điều sau:

1) Đường thẳng qua hai điểm dựng được là đường thẳng dựng được (h. 1).



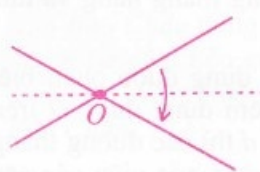
Hình 1

Hình 2

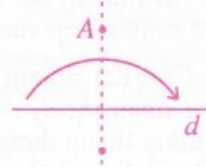
2) Đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt dựng được A, B (còn gọi là đoạn thẳng dựng được) là đường thẳng dựng được (gấp giấy sao cho A đến trùng với B (h. 2)).

Từ hai điều đó suy ra trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt dựng được A, B là một điểm dựng được; vì theo 1), đường thẳng AB dựng được, theo 2), đường trung trực của đoạn AB dựng được nên giao của hai đường thẳng này, tức trung điểm của đoạn AB , là điểm dựng được.

3) Mỗi đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng dựng được, phân biệt, cắt nhau là một đường thẳng dựng được (gấp giấy sao cho nếp gấp đi qua giao điểm O của hai đường thẳng và đưa một điểm khác O của một đường thẳng đến nằm trên đường thẳng kia (h. 3)).



Hình 3



Hình 4

4) Đường thẳng đi qua điểm dựng được A vuông góc với đường thẳng dựng được d là một đường thẳng dựng được (gấp giấy sao cho nếp gấp đi qua A (nhưng khác d nếu A thuộc d) và đưa một điểm nào đó của đường thẳng d đến trùng một điểm khác thuộc đường thẳng đó (h. 4)).

Nhận xét. Từ bốn điều trên suy ra:

- Cho điểm dựng được A và đường thẳng dựng được d không đi qua A thì đường thẳng đi qua A song song với d là đường thẳng dựng được (dựng đường thẳng d' qua A vuông góc với d , rồi dựng đường thẳng vuông góc với d' tại A);
- Cho ba điểm dựng được A, B, C không thẳng hàng thì điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành là một điểm dựng được;
- Cho hai điểm phân biệt dựng được A, B thì điểm C sao cho B là trung điểm của đoạn AC là một điểm dựng được (dựng hình bình hành $BADE$ rồi dựng đường thẳng qua E song song với DB cắt đường thẳng AB tại C cần dựng).

Từ đó suy ra điểm đối xứng của một điểm dựng được qua một đường thẳng dựng được là một điểm dựng được.

• Cho hai điểm phân biệt dựng được A, B , cho điểm dựng được A' trên đường thẳng dựng được d thì các điểm B', B'' trên đường thẳng d sao cho $A'B' = A'B'' = AB$ là các điểm dựng được. Thực vậy

Khi A trùng với A' : Nếu B thuộc d thì B' trùng với B , còn B'' là điểm sao cho A' là trung điểm của $B'B''$; nếu B không thuộc d thì dựng các đường phân giác m', m'' của góc giữa d và đường thẳng AB , dựng các đường thẳng qua B vuông góc với m', m'' , chúng cắt d theo thứ tự tại các điểm B', B'' cần dựng;

Khi A khác A' : Nếu A, B, A' không thẳng hàng, dựng bình hành $A'ABB_1$ thì $A'B_1 = AB$ và đưa về trường hợp trên; nếu A, B, A' thẳng hàng, dựng hình bình hành ABB_1A_1 được $A_1B_1 = AB$ mà A_1, B_1, A' không thẳng hàng và đưa về trường hợp vừa xét.

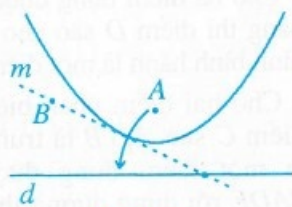
• Cho hai đường thẳng dựng được phân biệt cắt nhau d_1, d_2 ; cho điểm dựng được O trên đường thẳng dựng được d thì các đường thẳng d', d'' đi qua O sao cho các góc giữa các cặp đường thẳng d với d', d với d'', d_1 với d_2 bằng nhau là các đường thẳng dựng được. Thực vậy:

Khi góc giữa d_1 và d_2 là góc vuông thì d' và d'' trùng nhau và dựng được theo điều thừa nhận 4).

Khi góc đó không vuông, lấy điểm C trên d_2 khác giao điểm A của d_1 với d_2 , qua C dựng đường vuông góc với d_1 cắt d_1 ở B rồi dựng điểm B' thuộc d sao cho $OB' = AB$, dựng đường thẳng d' vuông góc với d tại B' , trên d' dựng các điểm C' và C'' sao cho $B'C' = B'C'' = BC$ thì các đường thẳng OC', OC'' là các đường thẳng cần dựng.

Bây giờ ta thừa nhận thêm bằng cách gấp giấy ta có điều 5) sau đây.

5) Cho hai điểm phân biệt dựng được A, B và đường thẳng dựng được d không đi qua A thì đường thẳng m qua B sao cho điểm đối xứng của A qua m là một điểm thuộc d (nếu có m như thế) là một đường thẳng dựng được



Hình 5

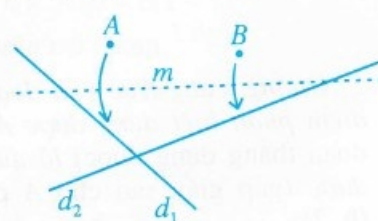
được (gấp giấy sao cho nếp gấp đi qua B và đưa A đến nằm trên d (h. 5)).

Để ý rằng nếu có đường thẳng m thì điểm đối xứng của A qua m là điểm A' thuộc d mà $BA' = BA$ tức là A' là một giao điểm của d với đường tròn tâm B bán kính bằng BA . Vậy nếu định nghĩa đường tròn với tâm dựng được và đi qua một điểm dựng được là đường tròn dựng được thì điều 5) nói rằng các giao điểm của đường thẳng dựng được với đường tròn dựng được (nếu có) là những điểm dựng được. (Để thấy điều kiện để có các giao điểm đó tức là điều kiện để có đường thẳng m là khoảng cách AB phải lớn hơn hoặc bằng khoảng cách từ B đến đường thẳng d). Về mặt hình học, cũng có thể nói m là tiếp tuyến qua B của parabol nhận A làm tiêu điểm và d làm đường chuẩn. Khi B thuộc d thì m là một đường phân giác của góc hợp bởi hai đường thẳng d và BA .

Từ các điều nói trên, bạn đọc dễ suy ra rằng các giao điểm của hai đường tròn dựng được (nếu có) là những điểm dựng được, rồi từ đó đến được kết luận: Mọi bài toán dựng hình được trong mặt phẳng (dựng điểm thỏa mãn một tính chất hình học nào đó) bằng thước và compa đều dựng được bằng gấp giấy (thỏa mãn năm điều từ 1) đến 5)). Điều ngược lại tất nhiên cũng đúng: Dựng được bằng gấp giấy thỏa mãn các điều từ 1) đến 5) thì dựng được bằng thước và compa. Bạn đọc có thể lấy một số bài toán dựng hình quen thuộc bằng thước và compa rồi tìm cách giải bằng gấp giấy, tìm cách gấp càng ít lần càng tốt (ngay cả với những điều trình bày trên đây).

Hơn nữa, ta thừa nhận thêm bằng cách gấp giấy, ta có điều 6) sau đây:

6) Cho hai điểm phân biệt dựng được A, B và hai đường thẳng dựng được d_1, d_2 (giả sử A không thuộc d_1 và B không thuộc d_2) thì đường thẳng m sao cho điểm đối xứng của A qua m thuộc d_1 và điểm đối xứng của B qua m thuộc d_2 (nếu có đường thẳng m như thế) là một đường thẳng dựng được (gấp giấy đưa A đến nằm trên d_1 và đồng thời đưa B đến nằm trên d_2 (h. 6)).

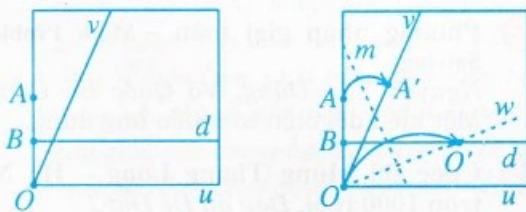


Hình 6

Khi đó, có những bài toán dựng hình không dựng được bằng thước và compa nhưng lại dựng được bằng cách gấp giấy, chẳng hạn hai bài toán nổi tiếng là *bài toán chia ba một góc tùy ý* và *bài toán gấp đôi khối lập phương*

1. Bài toán chia ba một góc tùy ý. Cho góc tạo bởi hai đường thẳng phân biệt dựng được Ou, Ov , cần dựng đường thẳng Ow sao cho $\widehat{uOw} = \frac{1}{3}\widehat{uOv}$.

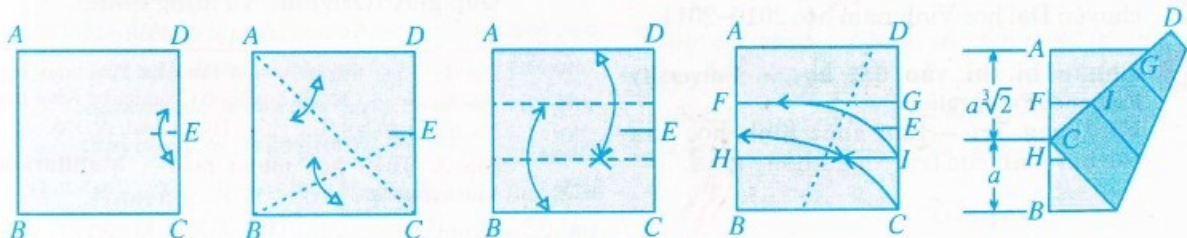
Dễ dàng giải cho trường hợp góc $\widehat{uOv}$ vuông, ta chỉ cần giải cho trường hợp $\widehat{uOv}$ nhọn. Muốn thế, trên đường thẳng vuông góc với Ou tại O lấy điểm A khác O (A nằm cùng phía với tia Ov đối với đường thẳng Ou), dựng trung điểm B của OA , dựng đường thẳng d qua B song song với Ou , rồi theo 6), dựng đường thẳng m sao cho điểm A' đối xứng của A qua m thuộc Ov và điểm O' đối xứng của O qua m thuộc d sao cho tia OO' nằm trong góc nhọn $\widehat{uOv}$. Bạn đọc hãy chứng minh rằng đường thẳng qua O vuông góc với m , tức đường thẳng OO' , là đường thẳng Ow cần dựng, nghĩa là $\widehat{uOO'} = \frac{1}{3}\widehat{uOv}$ (h. 7).



Hình 7

2. Bài toán gấp đôi khối lập phương. Dựng một khối lập phương có thể tích gấp đôi thể tích của một khối lập phương cho trước.

Bài toán này đưa về việc dựng một đoạn thẳng có độ dài bằng $\sqrt[3]{2}$ (khi đã dựng được đoạn thẳng có độ dài bằng 1). Điều này không thực hiện được bằng thước và compa, nhưng có thể



Hình 8

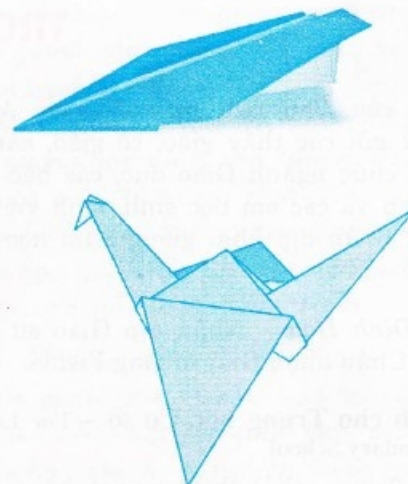
dựng được bằng cách gấp giấy qua miêu tả sau đây (của Peter Messer (h. 8)).

($ABCD$ là hình vuông bất kì, a là độ dài ta đặt sau khi gấp. Từ đó, dựng được $\sqrt[3]{2}$ là đoạn thẳng tỉ lệ thứ tư của ba đoạn thẳng đã dựng được : $a\sqrt[3]{2}$, a và 1).

Những điều thừa nhận từ 1) đến 6) được lấy từ các tiên đề Origami được nhà toán học người Ý gốc Nhật Humiaki Huzita đưa ra năm 1992.

Người ta còn xét vấn đề gấp giấy thành hình trong không gian, chẳng hạn gấp tờ giấy hình vuông, hình chữ nhật, ... thành con chim, thành chiếc thuyền, thành chiếc máy bay, ... (mà hầu như các em nhỏ vẫn còn khá quen thuộc và đó mới là ý nghĩa thông dụng của từ "Origami"), dưới góc độ ánh xạ từ hình vuông, hình chữ nhật, ... trong mặt phẳng vào không gian thỏa mãn một số điều kiện nào đó và ứng dụng cả vào những lí thuyết toán học cao cấp như *phương trình đạo hàm riêng*.

Để làm quen với "Origami", các bạn hãy thử gấp hình chiếc máy bay và con hạc giấy nhé. (h. 9).



Hình 9



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 399 (9.2010)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

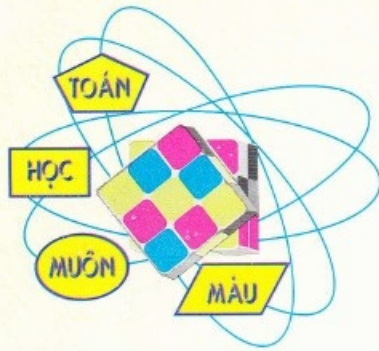
- 1** Thư của Chủ tịch nước *Nguyễn Minh Triết* gửi các thầy giáo, cô giáo, cán bộ viên chức ngành Giáo dục, các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên cả nước nhân dịp khai giảng năm học mới 2010 – 2011.
 - 2** *Vũ Đình Hòa* – Nhân dịp Giáo sư Ngô Bảo Châu nhận Giải thưởng Fields.
 - 4** **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Chu Tuấn – Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ không hoàn toàn.
 - 7** Lời giải Đề thi vào lớp 10 Khối THPT chuyên Đại học Vinh năm học 2010–2011.
 - 9** **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Võ Trọng Trí – Bản chất hình học của các bài toán cực trị trong không gian.
 - 12** **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Nguyễn Văn Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn – Một kiểu đổi biến có nhiều ứng dụng.
 - 15** **Cuộc thi Mừng Thăng Long – Hà Nội tròn 1000 tuổi. Đáp án Đề Đợt 2**
 - 16** **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/399 ..., T12/399, L1/399, L2/399.
 - 18** **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 395.
 - 29** **Toán học & đời sống – Math and Life**
Đoàn Quỳnh, Phan Thị Minh Nguyệt – Gấp giấy (Origami) và dựng hình.
- Bìa 1:** Tổng thống Ấn Độ Pratibha Patil trao Huy chương Fields cho GS Ngô Bảo Châu tại Lễ Khai mạc Đại hội Toán học Thế giới ở Hyderabad, Ấn Độ.
- Bìa 3:** Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH

Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mỹ thuật : MINH THO

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



Giải đáp:

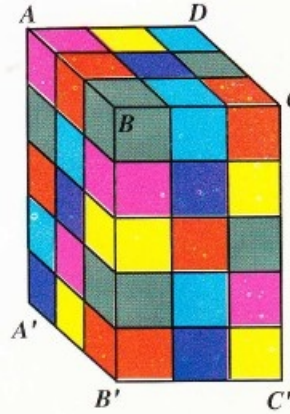
HÌNH HỘP NHIỀU MÀU

(Đề đăng trên THPT số 390, tháng 12.2009)

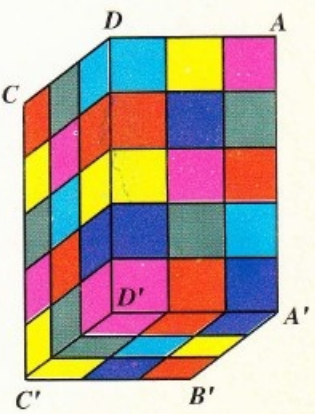
- 1) Có nhiều cách dùng sáu màu để tô các ô vuông trên các mặt của hình hộp (gồm 45 hình lập phương) thỏa mãn yêu cầu của đề bài, chẳng hạn như ở hình 1 và hình 2.
- 2) Giả sử dùng năm màu để tô các mặt của hình hộp mà thỏa mãn hai điều kiện của đề bài. Xét sự tô màu (năm màu) trên hình vuông kích thước 3×3 ô vuông ta thấy có hai quy luật sau:

- Màu của ô vuông nằm giữa phải khác màu của tám ô vuông xung quanh (do điều kiện thứ hai).
 - Tám ô vuông xung quanh được tô bởi bốn màu nên mỗi màu được tô vào hai ô vuông chéo nhau của mỗi hình chữ nhật kích thước 2×3 ô vuông (do điều kiện thứ nhất).
- Sử dụng hai quy luật đó để tô màu một đáy 3×3 ô vuông của hình hộp, rồi xét sự tô màu của bốn hình vuông kích thước 3×3 ô vuông kề với đáy đã tô màu, sẽ dẫn đến mâu thuẫn. Vậy không thể dùng năm màu để tô các ô vuông trên các mặt của hình hộp kích thước $3 \times 3 \times 5$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

PHI PHI



Hình 1



Hình 2



Giải đáp: ĐIỀN SỐ CHO ĐÚNG

(Đề đăng trên THPT số 391, tháng 1.2010)



	<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>
1	9	÷	3	×	2	=	6
	+		−		×		+
2	6	+	1	−	5	=	2
	÷		+		−		÷
3	5	×	2	−	9	=	1
	=		=		=		=
4	3	+	4	+	1	=	8

Theo giả thiết $a_1 \neq 3, a_1 \neq 6, a_2 \neq 3, b_1 \neq 2, d_3 \neq 2$ (1)

Từ $d_4 = 3 + b_4 + c_4 \geq 3 + 2 + 1 = 6$, suy ra

$6.d_3 \leq d_4.d_3 = 6 + d_2 \leq 6 + 9 = 15$, kết hợp (1) $\Rightarrow d_3 = 1$ (2)

Từ $3 + b_4 + c_4 \leq 9$ có $c_4 \leq 6 - b_4 \leq 5$, do đó

$5.c_1 = c_3 + c_4 \leq 9 + 5 = 14 \Rightarrow c_1 = 1$ hoặc $c_1 = 2$.

Nếu $c_1 = 1$ thì $b_1 \neq 1$ nên $a_1 = 6.b_1 \geq 6 \times 2 = 12$ (loại).

Vậy $c_1 = 2$ và có $a_1 = 3b_1$, kết hợp với (1) có $a_1 = 9, b_1 = 3$.

Mặt khác $3.a_3 = 9 + a_2$ nên a_2 là bội của 3 mà $a_2 \neq 3$ (theo (1)) suy ra $a_2 = 6$.

Từ đó $a_3 = 5$, cùng với (2) có $c_3 = 9$ nên $c_4 = 1$.

Do $6 + d_2 + 1 = d_4 \leq 9$ nên $d_2 \leq 2$ mà $d_2 \neq 1$ (theo (2)),

suy ra $d_2 = 2$.

Từ đó, $b_2 = 1, b_4 = 4$ và $d_4 = 8$.

Bài toán có nghiệm duy nhất như ở bảng hình vuông.

Nhận xét. Nhiều bạn gửi bài đã cho đáp số đúng. Các bạn sau có lời giải thích ngắn gọn, được nhận tặng phẩm:

Bắc Ninh: Hà Ngọc Thịnh, 11A1, THPT Thuận Thành 1, Nguyễn Thị Nghiêm, 6B, THCS Cảnh Hưng, Tiên Du; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I; **Thừa Thiên - Huế:** Cao Võ Hoàng Long, 11 chuyên Toán, ĐHKH Huế; **Bình Định:** Nguyễn Ngọc Quý, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** Nguyễn Hoàng Duy, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

ĐAN QUỲNH

KHOI THPT CHUYÊN TOÁN - TIN, ĐHKHTN, ĐHQG HÀ NỘI

45 năm xây dựng và trưởng thành



GS. TSKH Trần Văn Nhung (nguyên Thứ trưởng Bộ GD&ĐT, học sinh chuyên Toán khóa 1 của Khối) tặng hoa cho PGS. TS Nguyễn Vũ Lương, Chủ nhiệm Khối chuyên Toán - Tin.



Thầy và trò của Khối tham gia hoạt động ngoại khóa.

Khoi chuyên Toán Đại học Tổng hợp Hà Nội được thành lập vào tháng 9 năm 1965, Thủ tướng Phạm Văn Đồng đã ký quyết định thành lập lớp Toán "đặc biệt" đặt tại Khoa Toán, Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội. Lớp có nhiệm vụ phát hiện, đào tạo, bồi dưỡng những học sinh năng khiếu Toán học, tạo nguồn đào tạo đội ngũ những nhà khoa học kỹ thuật xuất sắc, tài năng để xây dựng và bảo vệ Tổ quốc.

Ban đầu chỉ có một lớp với 38 học sinh, đến nay Khối THPT chuyên Toán - Tin, Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội đã phát triển vượt bậc, trở thành một trung tâm đào tạo học sinh năng khiếu Toán - Tin hàng đầu của Việt Nam.

Từ năm 1974 đến 2010, học sinh chuyên Toán của Khối đã mang về cho đất nước 66 Huy chương Quốc tế các loại với 24 Huy chương Vàng trong tổng số 30 Huy chương Vàng của Việt Nam, trong đó có bốn học sinh đoạt Huy chương Vàng hai năm liền là: Ngô Bảo Châu (1988, 1989), Đào Hải Long (1994, 1995), Ngô Đắc Tuấn (1995, 1996), Lê Hùng Việt Bảo (2003, 2004). Đặc biệt trong Kỳ thi Olympic Toán học tại Hàn Quốc năm 2000, học sinh chuyên Toán của Khối đã đoạt 3 Huy chương Vàng và 1 Huy chương Bạc.

Về Tin học, tính đến năm 2010 học sinh của Khối đã mang về cho đất nước 29 Huy chương trong các Kỳ thi Olympic Tin học. Đặc biệt học sinh Nguyễn Ngọc Huy đã hai lần đoạt Huy chương Vàng (các năm 1999, 2000). Năm 2003 toàn bộ đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Tin học tại Hoa Kỳ đều là học sinh chuyên Tin của Khối và đều đoạt giải.

Cho đến nay, Khối đã đào tạo được 45 khóa chuyên Toán và 16 khóa chuyên Tin. Nhiều học sinh đã trở

thành những Giáo sư, Tiến sĩ Khoa học đầu ngành; nhiều người đã và đang giữ trọng trách tại các Bộ, các trường Đại học, các viện nghiên cứu lớn, các đơn vị kinh tế mũi nhọn của đất nước.

Năm 2010 có rất nhiều sự kiện đến với Khối chuyên Toán - Tin, đó là Khối vừa tròn 45 năm, cũng là năm thành lập Trường chuyên Khoa học Tự nhiên do PGS. TS Nguyễn Vũ Lương làm Hiệu trưởng. Trường chuyên hiện có các bộ môn Toán học, Tin học, Vật lý, Hóa học, Sinh học, Ngoại ngữ và các môn khoa học xã hội khác với 44 cán bộ giáo viên và hơn 1300 học sinh.

Điều kì diệu đã đến với đất nước Việt Nam nói chung và Khối chuyên Toán - Tin nói riêng. Vào 12 giờ 55 phút (theo giờ Việt Nam) ngày 19/8/2010, GS. Ngô Bảo Châu, nguyên là học sinh của Khối, đã được trao Giải thưởng Fields tại đại hội Toán học thế giới tổ chức ở Hyderabad, Ấn Độ.

Làm nên những thành công của Khối THPT chuyên Toán - Tin trong 45 năm qua trước hết là nhờ đường lối lãnh đạo đúng đắn của Đảng và Nhà nước, sự quan tâm ngày càng có hiệu quả của các cấp lãnh đạo, của Khoa Toán, của Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội nay là Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, cùng với sự nỗ lực phấn đấu kiên cường, bền bỉ của các thế hệ thầy trò Khối THPT chuyên Toán - Tin.

Các phần thưởng cao quý mà Khối đã được Đảng và Nhà nước trao tặng là:

- ❖ Huân chương Lao động hạng Ba năm 1985
- ❖ Huân chương Lao động hạng Nhì năm 1995
- ❖ Huân chương Lao động hạng Nhất năm 2000.
- ❖ Huân chương Độc lập hạng Ba năm 2005.
- ❖ Anh hùng Lao động năm 2005.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT09M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2010

Giá : 8000 đồng
Tám nghìn đồng