



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

8 2010
Số 398

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 47

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoitre



CHÚC MỪNG ĐOÀN VIỆT NAM
tại kì thi Olympic Toán học Quốc tế
lần thứ 51

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

trao tặng Nhà tình nghĩa năm 2010



NGƯT Ngô Trần Ái, Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam trao tặng Nhà tình nghĩa cho thầy giáo Nguyễn Lực tại huyện Hải Lăng, tỉnh Quảng Trị.



Công ty CP Đầu tư Tài chính Giáo dục trao tặng Nhà tình nghĩa cho gia đình thầy giáo Nguyễn Quang Huê tại xã Tu Lý, huyện Đà Bắc, tỉnh Hòa Bình.

Từ xa xưa, người Việt Nam đã có câu "Ăn quả nhớ người trồng cây", "Uống nước nhớ nguồn", "Nhường cơm sẻ áo"... Đó là đạo lí, là nghĩa cử tốt đẹp trong đời sống của chúng ta. Với Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGD Việt Nam), công tác xã hội từ thiện đã được coi là nghĩa vụ, là trách nhiệm, là nguyện vọng của toàn thể cán bộ công nhân viên và đã trở thành việc làm thường niên của đơn vị.

Nhân dịp Kỷ niệm 63 năm Ngày Thương Binh – Liệt sĩ (27/7/1947 – 27/7/2010), NXBGD Việt Nam đã tổ chức trao tặng 50 Nhà tình nghĩa (mỗi căn trị giá 40 triệu đồng) cho các đối tượng chính sách: Mẹ Việt Nam anh hùng, gia đình thương binh, gia đình liệt sĩ, đặc biệt đối với các thương binh là nhà giáo gặp khó khăn tại ba miền Bắc - Trung - Nam.

Đó là sự tri ân của tập thể cán bộ, công nhân viên NXBGD Việt Nam đối với những gia đình có công với nước, với những anh hùng liệt sĩ đã anh dũng hi sinh vì sự nghiệp giải phóng đất nước, vì độc lập tự do của dân tộc. Nghĩa cử cao đẹp trên đây lên mạnh mẽ lòng nhân ái, tình đoàn kết, huy động tối đa sự đóng góp của nhiều lực lượng xã hội ở địa phương (mặt trận Tổ quốc, chính quyền, đoàn thể,...) cả về tinh thần và vật chất, cùng chung sức giúp đỡ các gia đình có hoàn cảnh khó khăn.

Năm học 2010 – 2011, NXBGD Việt Nam tiếp tục tổ chức trao tặng trên 70.000 bộ Sách giáo khoa cho con Thương binh - Liệt sĩ ở các địa phương, đảm bảo tất cả các học sinh đều có đủ Sách giáo khoa khi bước vào năm học mới.

PHAN NGỌC QUANG



NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh trao nhà tặng Nhà tình nghĩa cho gia đình thầy giáo Ngô Văn Đông tại huyện Tuy An, tỉnh Phú Yên.



Ba tập chí: Toán học & Tuổi trẻ, Toán Tuổi thơ, Văn học & Tuổi trẻ trao tặng Nhà tình nghĩa cho gia đình bà Nguyễn Thị Nền là mẹ liệt sĩ tại huyện Hạ Hòa, Tỉnh Phú Thọ.



TRUNG HỌC CƠ SỞ

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH MỘT ĐIỂM LÀ TRỌNG TÂM CỦA TAM GIÁC

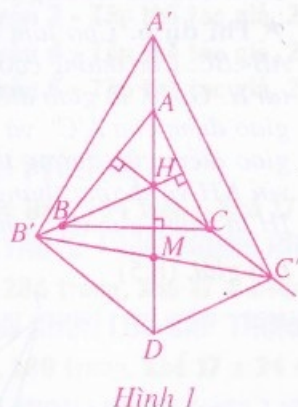
THÁI NHẬT PHƯƠNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi,
Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Để chứng minh điểm G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

★ **PHƯƠNG PHÁP 1.** Chứng minh G thuộc trung tuyến AM và $GA = 2GM$.

★ **Thí dụ 1.** Cho tam giác ABC nhọn với trực tâm H . Trên các tia HA , HB , HC lần lượt lấy các điểm A' , B' , C' sao cho $HA' = BC$, $HB' = AC$, $HC' = AB$. Chứng minh rằng H là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Lời giải. (h. 1). Gọi D là điểm đối xứng của A' qua H và M là giao điểm của $B'C'$ với HD , ta có $\triangle DHB' = \triangle BCA$
 $= \triangle HDC'$ (c.g.c)
 $\Rightarrow DB' = HC'$,
 $HB' = DC'$
 $\Rightarrow MB' = MC'$,
 và $HM = MD$
 $= \frac{1}{2}HD = \frac{1}{2}HA'$.



Hình 1

Do đó H là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. $\square$

★ **PHƯƠNG PHÁP 2.** Chứng minh G nằm trong tam giác ABC và diện tích của ba tam giác GAB , GBC , GCA bằng nhau.

★ **Thí dụ 2.** Cho M là một điểm nằm trong tam giác ABC . Trên các tia Mx , My , Mz theo thứ tự vuông góc với BC , CA , AB lần lượt lấy các điểm A' , B' , C' sao cho $MA' = BC$, $MB' = AC$, $MC' = AB$. Chứng minh rằng M là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Lời giải. (h.2). Trên tia đối của tia Mx , lấy điểm D sao cho $MD = MA' = BC$. Khi đó $\triangle DMB' = \triangle BCA$ (c.g.c)

$$\Rightarrow S_{DMB'} = S_{A'MB'} = S_{BCA}.$$

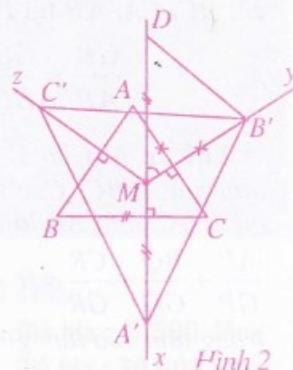
Tương tự có

$$S_{B'MC'} = S_{C'MA'} = S_{BCA}.$$

Do đó

$$S_{A'MB'} = S_{B'MC'} = S_{C'MA'}$$

(đpcm). $\square$

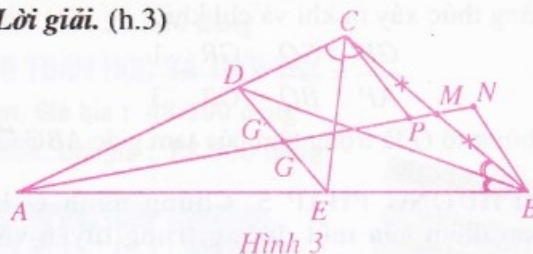


Hình 2

★ **PHƯƠNG PHÁP 3.** Chứng minh G trùng với trọng tâm G' của tam giác ABC .

★ **Thí dụ 3.** Cho tam giác ABC thỏa mãn $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BC}$. Gọi BD , CE là các đường phân giác trong và AM là trung tuyến của nó. Chứng minh rằng giao điểm G của AM và DE là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải. (h.3)



Hình 3

Gọi G' là trọng tâm của tam giác ABC . Trên tia $G'M$ lấy hai điểm N và P sao cho $BN \parallel EG'$ và $CP \parallel DG'$ (1). Theo Định lý Thales và tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{G'N}{G'A} = \frac{EB}{EA} = \frac{CB}{CA} \text{ và } \frac{G'P}{G'A} = \frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{G'N}{G'A} + \frac{G'P}{G'A} = \frac{BC}{CA} + \frac{BC}{BA} = 1 \text{ (theo gt)}$$

$$\Rightarrow G'N + G'P = G'A = 2G'M \Rightarrow MN = MP.$$

Do đó $\triangle NMB = \triangle PMC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BNM} = \widehat{CPM} \Rightarrow BN \parallel CP \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm D, E, G' thẳng hàng. Kết hợp với giả thiết ta có $G' \equiv G$ (đpcm). $\square$

PHƯƠNG PHÁP 4. Chứng minh G nằm trong tam giác ABC ; AG, BG, CG lần lượt cắt BC, CA, AB tại P, Q, R sao cho

$$\frac{GP}{AP} = \frac{GQ}{BQ} = \frac{GR}{CR} = \frac{1}{3}.$$

★ **Thí dụ 4.** Cho G là một điểm nằm trong tam giác ABC . Các tia AG, BG, CG cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R sao cho $\frac{AP}{GP} + \frac{BQ}{GQ} + \frac{CR}{GR} = 9$. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình). Dễ thấy

$$\frac{GP}{AP} + \frac{GQ}{BQ} + \frac{GR}{CR} = \frac{S_{BGC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CGA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AGB}}{S_{ABC}} = 1.$$

Mặt khác, theo BĐT Bunyakovsky, ta có

$$\left(\frac{GP}{AP} + \frac{GQ}{BQ} + \frac{GR}{CR} \right) \left(\frac{AP}{GP} + \frac{BQ}{GQ} + \frac{CR}{GR} \right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{GP} + \frac{BQ}{GQ} + \frac{CR}{GR} \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{GP}{AP} = \frac{GQ}{BQ} = \frac{GR}{CR} = \frac{1}{3}.$$

Chúng ta có G là trọng tâm của tam giác ABC . $\square$

PHƯƠNG PHÁP 5. Chứng minh G là giao điểm của một đường trung tuyến với đường thẳng OH (với O và H lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC).

★ **Thí dụ 5.** Cho tam giác ABC và hai điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh BC, AB sao cho AD và CE cắt nhau tại F . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BF và DE . Gọi O, H lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác AMC . Chứng minh rằng giao điểm của MN và OH là trọng tâm của tam giác AMC .

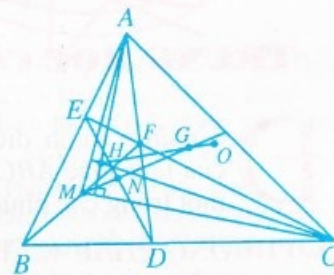
Lời giải. (h. 4). Dễ thấy

$$S_{AMN} = S_{ABD} - (S_{AMB} + S_{BMD}) - (S_{AND} + S_{MND})$$

$$= \frac{1}{4}(S_{BEF} + S_{BDF}) = \frac{1}{4}S_{BEFD}.$$

$$\text{Tương tự } S_{CMN} = \frac{1}{4}S_{BEFD} \Rightarrow S_{AMN} = S_{CMN}.$$

Do đó khoảng cách từ các điểm A và C đến MN là bằng nhau, suy ra MN đi qua trung điểm của AC . Vậy giao điểm của MN và OH là trọng tâm của tam giác AMC . $\square$

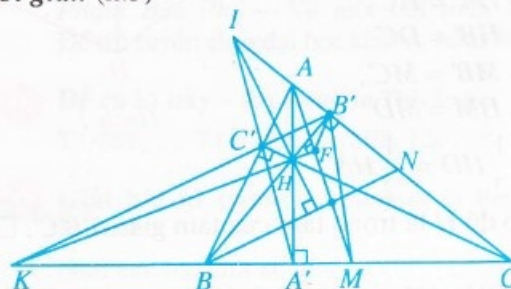


Hình 4

PHƯƠNG PHÁP 6. Chứng minh G là giao điểm của hai đường trung tuyến.

★ **Thí dụ 6.** Cho tam giác ABC có $AB < AC, AB < BC$. Các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H . Gọi K là giao điểm của $B'C'$ và BC , I là giao điểm của $A'C'$ và AC . Chứng minh rằng giao điểm của đường thẳng qua A vuông góc với KH và đường thẳng qua B vuông góc với IH là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải. (h.5)



Hình 5

Gọi giao điểm của đường thẳng qua A vuông góc với KH với các đường thẳng KH, BC lần lượt là F và M . Dễ thấy năm điểm A, C', H, F, B' cùng thuộc một đường tròn. Suy ra

$$\widehat{MFB'} + \widehat{AC'B'} = 180^\circ, \quad \widehat{C'FK} = \widehat{C'B'B} \quad (1)$$

Vì tứ giác $BCB'C'$ nội tiếp nên ta có

$$\widehat{AC'B'} = \widehat{MCB'}; \quad \widehat{C'CK} = \widehat{C'B'B} \quad (2)$$

(Xem tiếp trang 7)



KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ

lần thứ 51 - năm 2010

HÀ HUY KHOÀI
(Trưởng đoàn Việt Nam)

Kì thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 51 (IMO 2010) diễn ra tại Astana, Kazakhstan, từ ngày 2 đến 14/7/2010. Có 98 nước và vùng lãnh thổ tham gia, trong đó 97 nước có học sinh dự thi, tổng số thí sinh là 517. Đoàn Việt Nam gồm 6 học sinh: *Phạm Việt Cường*, *Nguyễn Kiều Hiếu* (Lớp 12, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); *Nguyễn Minh Hiếu* (Lớp 12), *Vũ Đình Long* (Lớp 11) (Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội); *Nguyễn Thái Hưng* (Lớp 11, TH Thực hành, ĐHSP TP Hồ Chí Minh); *Nguyễn Ngọc Trung* (Lớp 12, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ) và các thầy cô giáo: *Hà Huy Khoái* (Viện Toán học, Trường đoàn); *Nguyễn Khắc Minh* (Phó đoàn) cùng các Quan sát viên: *Hoàng Công Chức* (TH Thực hành, ĐHSP TP Hồ Chí Minh); *Phan Thị Hà Dương* (Viện Toán học); *Nguyễn Xuân Lập*, *Đào Mạnh Thắng* (THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); *Nguyễn Duy Thái Sơn* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng).

Như thường lệ, có 6 bài thi, chia làm 2 ngày, mỗi ngày 3 bài thi làm trong 4 giờ 30 phút, với số điểm tối đa cho mỗi bài là 7.

Các nước có đề được chọn là: Pháp (Bài 1), Hồng Kông (Bài 2), Hoa Kỳ (Bài 3), Ba Lan (Bài 4), Hà Lan (Bài 5), Iran (Bài 6). Theo đánh giá chung, đề thi năm nay có 2 bài dễ (Bài 1 và Bài 4), một bài trung bình (Bài 2) và 3 bài tương đối khó. Trong khi thông thường có 2 bài dễ, 2 bài trung bình và 2 bài khó. Vì thế, điểm của thí sinh năm nay nhìn chung thấp hơn thường lệ. Chỉ có duy nhất một thí sinh (Đoàn Trung Quốc) giải được trọn vẹn cả 6 bài.

Tuân thủ nguyên tắc $\frac{1}{2}$ tổng số thí sinh được nhận Huy chương, trong đó tỉ lệ Vàng : Bạc : Đồng là 1 : 2 : 3. Căn cứ điểm của thí sinh, Ban Giám khảo đã quyết định trao Huy chương Đồng cho những thí sinh có tổng điểm từ 15 đến 20; Huy chương Bạc: tổng điểm từ 21 đến 26; Huy chương Vàng: tổng điểm từ 27 đến 42.

Người đạt điểm cao nhất kì thi là thí sinh *Zipei Nie* (Trung Quốc, 42 điểm). Trong đoàn Việt Nam, bạn *Nguyễn Ngọc Trung* đạt điểm cao nhất (28 điểm), xếp thứ 27 của kì thi.

Sau đây là thành tích của Đội tuyển Việt Nam tại IMO 2010:

Họ và tên	Điểm bài thi							Huy chương
	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5	Bài 6	Tổng điểm	
<i>Nguyễn Ngọc Trung</i>	7	7	7	7	0	0	28	Vàng
<i>Nguyễn Kiều Hiếu</i>	7	7	1	7	0	0	22	Bạc
<i>Phạm Việt Cường</i>	7	7	0	7	0	0	21	Bạc
<i>Nguyễn Thái Hưng</i>	7	7	0	7	0	0	21	Bạc
<i>Vũ Đình Long</i>	7	7	0	7	0	0	21	Bạc
<i>Nguyễn Minh Hiếu</i>	6	7	0	7	0	0	20	Đồng

Theo quy định, các kì IMO không tính “giải đồng đội”, tuy nhiên nếu xếp theo tổng điểm thì thứ tự 10 đoàn đầu tiên sẽ là: *Trung Quốc*, *Nga*, *Hoa Kỳ*, *Hàn Quốc*, *Kazakhstan*, *Thái Lan*, *Nhật Bản*, *Thổ Nhĩ Kỳ*, *Đức*,

Serbi. Đoàn Việt Nam đạt tổng điểm 133 xếp thứ 11. Về kết quả của đoàn Việt Nam, đáng tiếc nhất có lẽ là bạn *Nguyễn Minh Hiếu*, khi mắc một sai lầm nhỏ trong tính toán dẫn đến kết quả sai, và theo thang điểm

thì bị trừ một điểm, nhưng đó là một điểm làm đổi màu Huy chương!

Nhận xét. Đề thi năm nay có 3 bài tương đối khó là bài 3 (Số học), bài 5 (Tổ hợp), bài 6 (Đại số). Trong tổng số 517 thí sinh có 16 người giải trọn vẹn bài 3; 37 người giải trọn vẹn bài 5; 14 người giải trọn vẹn bài 6. Đoàn chúng ta có một bạn giải trọn vẹn bài 3, trong khi mọi thành viên của đoàn đều bị 0 điểm ở các bài 5 và 6. Như vậy, điểm yếu “cổ hữu” của học sinh Việt Nam lại được bộc lộ: thường gặp khó trong các bài Tổ hợp. Lần này, không những các bạn đều không giải được bài 5, mà còn mất hết thời gian vào bài đó nên dành chịu điểm 0 ở bài 6, trong khi hoàn toàn có thể làm được một phần (khoảng 2 điểm) của bài 6.

Tình hình trên chỉ có thể khắc phục nếu điều chỉnh cách dạy ở các trường THPT chuyên (tăng thời lượng cho Chuyên đề Toán rời rạc), chú ý hơn về phần Tổ hợp trong các kì tuyển chọn (điều này có lẽ chỉ làm được nếu thay đổi hình thức thi học sinh giỏi Quốc gia, chẳng hạn làm bài trong hai buổi).

IMO không chỉ là một Kỳ thi, mà còn là một ngày hội của học sinh yêu toán. Nước chủ nhà Kazakhstan đã cố gắng nhân dịp IMO 2010 để giới thiệu với hơn 800 vị khách đến từ 98 Quốc gia về đất nước, con người, lịch sử của đất nước Kazakhstan.

IMO lần thứ 52 sẽ được tổ chức tại Hà Lan, từ 16 đến 24 tháng 7, năm 2011.

Sau đây là 6 bài toán thi.

NGÀY THỨ NHẤT (7/7/2010)

Bài 1. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho đẳng thức $f(\lfloor xy \rfloor) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$ thỏa mãn với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. (Trong đó $\lfloor z \rfloor$ là kí hiệu số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng z).

Bài 2. Cho I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và Γ là đường tròn ngoại tiếp của nó. Giả sử đường thẳng AI cắt lại Γ tại D .

Cho E là một điểm trên cung BDC và F là một điểm trên cạnh BC sao cho

$$\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Gọi G là trung điểm của đoạn IF . Chứng minh rằng các đường thẳng DG và EI cắt nhau tại một điểm trên Γ .

Bài 3. Giả sử N là tập hợp các số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho $(g(m) + n)(m + g(n))$ là số chính phương với mọi $m, n \in \mathbb{N}$.

NGÀY THỨ HAI (8/7/2010)

Bài 4. Giả sử P là một điểm bên trong tam giác ABC . Các đường thẳng AP , BP và CP cắt lại đường tròn ngoại tiếp Γ của tam giác ABC tại các điểm K , L và M tương ứng. Tiếp tuyến của Γ tại C cắt đường thẳng AB tại S . Giả sử $SC = SP$. Chứng minh rằng $MK = ML$.

Bài 5. Mỗi một hộp trong sáu hộp $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ ban đầu chứa một đồng xu. Cho phép tiến hành hai loại phép toán sau đây:

Loại 1: Chọn một hộp không rỗng B_j với $1 \leq j \leq 5$. Lấy một đồng xu ra khỏi B_j và bỏ thêm hai đồng xu vào B_{j+1} .

Loại 2: Chọn một hộp không rỗng B_k với $1 \leq k \leq 4$. Lấy một đồng xu ra khỏi B_k và trao đổi số đồng xu đựng trong các hộp (có thể rỗng) B_{k+1} và B_{k+2} cho nhau.

Tồn tại hay không một dãy hữu hạn phép toán như trên sao cho đi đến kết quả cuối cùng là các hộp B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 đều rỗng, còn hộp B_6 đựng đúng 2010^{2010} đồng xu (chú ý rằng $a^{bc} = a^{(bc)}$).

Bài 6. Giả sử $a_1, a_2, a_3, \dots$ là một dãy các số thực dương. Giả sử rằng với số nguyên dương cố định s nào đó, ta có

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

với mọi $n > s$. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương l và N , với $l \leq s$ sao cho

$$a_n = a_l + a_{n-l} \text{ với mọi } n \geq N.$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 KHỐI THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH

NĂM HỌC 2010 - 2011

VÒNG 1

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1. (3 điểm)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m-1)x - m + 3$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 8$.

Câu 2. (1,5 điểm)

Rút gọn và tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right),$$

trong đó $x = \sqrt{5+2\sqrt{6}}$; $y = \sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

Câu 3. (1 điểm)

Giải phương trình

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-4}.$$

Câu 4. (1 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + x - 2x\sqrt{y} + y^2 + y - 2y\sqrt{x} + 2010.$$

Câu 5. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $R = 2$. Biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$, đường cao AH của tam giác ABC bằng 3.

a) Tính diện tích tam giác ABC .

b) Gọi P là một điểm tùy ý trên cung nhỏ BC và M, N lần lượt là các điểm đối xứng của P qua các đường thẳng AB và AC . Xác định vị trí của P sao cho độ dài MN đạt giá trị lớn nhất. Tính độ dài lớn nhất đó.

VÒNG 2

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (3 điểm)

Cho phương trình

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 + m + 2 = 0 \quad (1)$$

a) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

b) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thì

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \leq 0.$$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình

$$\frac{12x}{x^2 + 4x + 2} - \frac{3x}{x^2 + 2x + 2} = 1.$$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn

$$4x^2 + y^2 < 2xy + 2x + y + 1.$$

Câu 3. (1,5 điểm)

Giả sử các số dương x, y, z thỏa mãn hệ thức $x + y + z = 18\sqrt{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{x(y+z)}} + \frac{1}{\sqrt{y(z+x)}} + \frac{1}{\sqrt{z(x+y)}} \geq \frac{1}{4}.$$

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$) ngoại tiếp đường tròn tâm I . Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I) và M là trung điểm của BC .

a) Giả sử đường thẳng AM cắt đường tròn (I) lần lượt tại H, K và $AH = MK$. Chứng minh rằng tam giác ABM cân.

b) Gọi N là giao điểm của EF với BI . Chứng minh rằng MN song song với AB .

LÊ XUÂN SƠN

(GV Khối THPT chuyên ĐH Vinh) giới thiệu.

Số 398 (8-2010)

TOÁN HỌC
5

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

NĂM 2010

(Đề thi đã đăng trên THPT số 397, tháng 7 năm 2010)

Câu 1. a) Tính A^2 ta được $A = \sqrt{10} + \sqrt{2}$.

b) Đáp số: $B = \sqrt{a} - 1$. ĐK $a \geq 0, a \neq 1, a \neq 9$.

Câu 2. a) ĐK cần và đủ để PT đã cho có hai nghiệm trái dấu là

$$(m+3).(m+2).(m+4) < 0 \Leftrightarrow m < -4; -3 < m < -2.$$

b) Xét hai khả năng

- $m+3=0 \Leftrightarrow m=-3$, PT đã cho trở thành

$$3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$

- $m+3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$. PT đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 9(m+2)^2 - 4(m+3)(m+2)(m+4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -(m+2) \left(\left(2m + \frac{19}{4} \right)^2 + \frac{119}{16} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m+2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2.$$

Vậy $m \leq -2$ thì phương trình có nghiệm.

Câu 3. a) ĐK $x \geq \frac{5}{2}$, PT đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+4} - 6\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x-4} + 2\sqrt{2x-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2x-5}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-5}+1)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{2x-5}-3| + \sqrt{2x-5}+1 = 4$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{2x-5}-3| = 3 - \sqrt{2x-5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5}-3 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-5} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 7.$$

Đáp số. $\frac{5}{2} \leq x \leq 7$.

b) ĐK $\begin{cases} x+x^2 \geq 0 \\ x-x^2 \geq 0 \end{cases}$. Áp dụng BĐT Cauchy cho

hai cặp số không âm, ta có

$$\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} \leq \frac{x+x^2+1}{2} + \frac{x-x^2+1}{2} = x+1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+x^2=1 \\ x-x^2=1 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm nên PT đã cho vô nghiệm.

Câu 4. a) Đẳng thức đã cho viết lại như sau

$$z^2 = 2x(x+1) - 4y^3 - 2 \quad (1)$$

$$2 = 2x(x+1) - 4y^3 - z^2 \quad (2)$$

Vì $2x(x+1):4, 4y^3:4, 2:2$, nên từ (1) suy ra $z^2:2 \Rightarrow z:2 \Rightarrow z^2:4$. Như vậy VP(2) chia hết cho 4 trong khi VT(2) = 2 chia 4 dư 2. Vậy không có các số nguyên x, y, z nào thỏa mãn hệ thức đã cho.

b) Áp dụng BDT Cauchy cho hai số dương ta có

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} \Rightarrow \frac{x^2}{y+z} \geq x - \frac{y+z}{4}.$$

$$\text{Tương tự có } \frac{y^2}{z+x} \geq y - \frac{z+x}{4}; \quad \frac{z^2}{x+y} \geq z - \frac{x+y}{4}.$$

Do đó $A \geq \frac{x+y+z}{2} = 1$. Đẳng thức xảy ra khi

$x=y=z=\frac{2}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 1

khi $x=y=z=\frac{2}{3}$.

Câu 5. (h.1) a) Tứ giác $AMBH$ nội tiếp nên $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ (1),

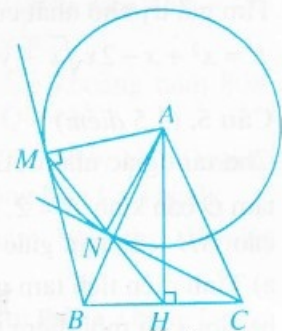
$$\widehat{BMH} = \widehat{BAH} = \frac{1}{2}\widehat{BAC},$$

$$\text{mà } \widehat{BMH} = \frac{1}{2}\widehat{MAN}$$

$$\text{nên } \widehat{BAC} = \widehat{MAN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ (đpcm).

b) Từ câu a) suy ra $\widehat{MNA} = \widehat{BCA}$ mà $\widehat{MNA} + \widehat{ANH} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BCA} + \widehat{ANH} = 180^\circ$



Hình 1

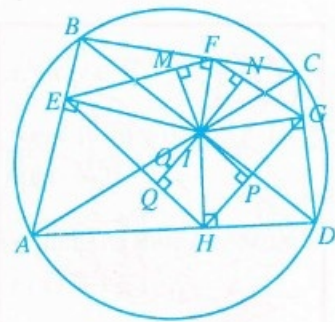
$\Rightarrow$ Tứ giác $ANHC$ nội tiếp nên $\widehat{ANC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$.
Chứng tỏ CN là tiếp tuyến của đường tròn tâm A (đpcm).

Câu 6. Nhận xét. Kết quả bài toán chỉ đúng trong trường hợp điểm O , tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ nằm trong tứ giác đó. Sau đây là lời giải bài toán theo nhận xét trên (h.2).

Từ I kẻ các đường thẳng vuông góc với GH , HE , EF , FG , lần lượt tại P , Q , M , N . Ta có các tứ giác $EBFI$ và $AEIH$ nội tiếp nên $\widehat{IEF} = \widehat{IBF}$; $\widehat{HAI} = \widehat{HEI}$ mà $\widehat{IBF} = \widehat{HAI} \Rightarrow \widehat{HEI} = \widehat{IEF} \Rightarrow IQ = IM$.

Chứng minh tương tự
 $IM = IN$;
 $IN = IP$
 $\Rightarrow IM = IN$
 $= IP = IQ = r$.

Chứng tỏ tứ giác $EFGH$ ngoại tiếp đường tròn tâm I , bán kính r .



Hình 2

NGUYỄN ĐỨC TẤN – NGUYỄN ANH HOÀNG
(TP. Hồ Chí Minh) giới thiệu

PHƯƠNG PHÁP.... (Tiếp trang 2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MFB'} + \widehat{MCB'} = 180^\circ$,
 $\widehat{C'FK} = \widehat{C'CK}$. Suy ra tứ giác $MFB'C$ và $KCF'C$ nội tiếp, dẫn đến $\widehat{KC'C} = \widehat{KFC}$
 $\Rightarrow \widehat{KC'B} = \widehat{MFC}$ mà $\widehat{KC'B} = \widehat{MCB'}$ và $\widehat{MFC} = \widehat{MB'C}$ nên $\widehat{MCB'} = \widehat{MB'C}$.

Vì tam giác $BB'C$ vuông tại B' , suy ra M là trung điểm của BC . Tương tự đường thẳng qua B vuông góc với IH đi qua trung điểm N của AC (đpcm). $\square$

Để kết thúc bài báo, xin mời các bạn cùng giải các bài tập sau:

1. Cho tam giác ABC nhọn có H là trực tâm, O là tâm của đường tròn ngoại tiếp và D là điểm đối xứng của A qua O . Chứng minh rằng hai tam giác AHD và ABC có cùng trọng tâm.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Trên các đoạn OA , OB , OC theo thứ tự lấy các điểm A' , B' , C' thỏa mãn $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = 3$.

Chứng minh rằng trực tâm của tam giác $A'B'C'$ là trọng tâm của tam giác ABC .

3. Cho điểm M nằm trong tam giác đều ABC và các điểm X , Y , Z lần lượt đối xứng với M qua các cạnh AB , BC , CA . Chứng minh rằng hai tam giác ABC và XYZ có cùng trọng tâm.

4. Từ điểm G nằm trong tam giác ABC , kẻ các đường thẳng vuông góc và cắt BC , CA , AB lần lượt tại D , E , F . Trên các tia GD , GE , GF lấy các điểm A' , B' , C' tương ứng sao cho

$\frac{GA'}{BC} = \frac{GB'}{CA} = \frac{GC'}{AB}$. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

5. Gọi D , E , F là hình chiếu vuông góc của điểm G nằm trong tam giác ABC lên các cạnh của nó.

Chứng minh rằng nếu $GD \cdot GE \cdot GF = \frac{2S^2}{27R}$ thì

G là trọng tâm của tam giác ABC (với S là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC).

6. Các điểm A' , B' , C' lần lượt thuộc các cạnh BC , CA , AB của tam giác ABC sao cho AA' , BB' , CC' đồng quy tại G . Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ thì G cũng là trọng tâm của tam giác ABC .

7. Cho hai đường tròn đồng tâm O , AM là dây cung bất kì của đường tròn nhỏ. Vẽ dây cung BC của đường tròn lớn qua M và vuông góc với MA . Trên đoạn OM lấy điểm G sao cho $OG = \frac{1}{3}OM$. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC .

8. Cho tam giác ABC có $BC = 3$, $\widehat{B} = 75^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Gọi O và H theo thứ tự là tâm của đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC . Trên đoạn HO lấy điểm G sao cho $HG = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC .



Vài ứng dụng của định lý CÔSIN trong tam giác

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Trong chương trình toán THPT, Hình học lớp 10 có hai định lý: định lý sin và định lý cosin trong tam giác có nhiều ứng dụng trong việc giải toán. Trong bài viết này chúng tôi muốn khai thác thêm một vài ứng dụng của định lý cosin trong tam giác. Có lẽ nội dung định lý cosin thì ai cũng đã rõ, chúng tôi xin không nêu ra ở đây nữa. Ta hãy bắt đầu bằng các thí dụ.

★ **Thí dụ 1.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + xz + x^2 = 16 \end{cases}$$

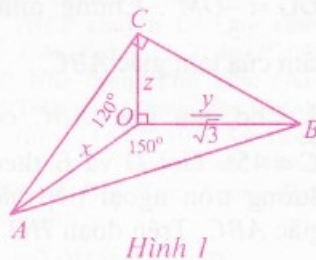
Tính giá trị của biểu thức $P = xy + 2yz + 3xz$.

Phân tích. Đối với bài toán này nếu chúng ta cứ loay hoay vào việc tính toán, thì sẽ mất nhiều thời gian và chưa chắc đã đi tới kết quả. Nhưng nếu nhạy cảm một chút, nhìn vào vẻ trái các phương trình của hệ thì chúng ta thấy có thể vận dụng biểu thức của định lý cosin. Như vậy việc định hướng lời giải của bài toán đã rõ.

Lời giải. Lấy các điểm O, A, B, C trong mặt phẳng, sao cho

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} &= 150^\circ, \\ \widehat{AOC} &= 120^\circ, \\ \widehat{BOC} &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Đặt $OA = x, OB = \frac{y}{\sqrt{3}}, OC = z$ (h. 1).



Hình 1

Áp dụng định lý cosin vào các tam giác AOB, BOC, AOC ta có

$$AB^2 = x^2 + xy + \frac{y^2}{3}, \quad BC^2 = \frac{y^2}{3} + z^2,$$

$$AC^2 = x^2 + xz + z^2.$$

Từ hệ đã cho suy ra $AB = 5, BC = 3, AC = 4$. Vậy tam giác ABC vuông tại C và $S_{ABC} = 6$. Mặt khác

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}}xy + \frac{1}{2\sqrt{3}}yz + \frac{3}{4\sqrt{3}}xz. \end{aligned}$$

Từ đó $P = xy + 2yz + 3xz = 24\sqrt{3}$. □

★ **Thí dụ 2.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn hệ thức

$$\sqrt{a^2 - \sqrt{2}ab + b^2} + \sqrt{b^2 - \sqrt{2}bc + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

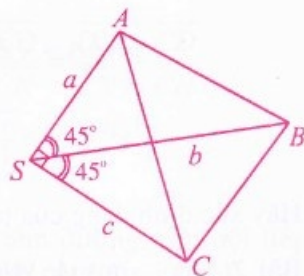
Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{a+c}{b}$.

Phân tích. Bài này có thể sử dụng BĐT Minkowsky để chứng minh

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - \sqrt{2}ab + b^2} + \sqrt{b^2 - \sqrt{2}bc + c^2} \\ \geq \sqrt{a^2 + c^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Nhưng bây giờ ta hãy trở về cội nguồn hình học của BĐT (1) bằng cách sử dụng định lý cosin.

Lời giải. Trên hình 2, lấy bốn điểm S, A, B, C trong mặt phẳng sao cho $SA = a, SB = b, SC = c$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 45^\circ$. (Tia SB nằm giữa hai tia SA, SC). Áp dụng định cosin vào các tam giác ASB, ASC, BSC ta có



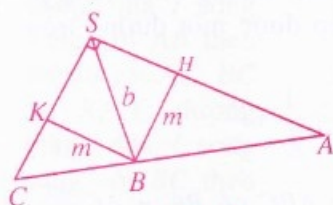
Hình 2

$$AB = \sqrt{a^2 - \sqrt{2}ab + b^2}; \quad AC = \sqrt{a^2 + c^2};$$

$$BC = \sqrt{b^2 - \sqrt{2}bc + c^2}.$$

Mà $AB + BC \geq AC$.

$$\text{nên } \sqrt{a^2 - \sqrt{2}ab + b^2} + \sqrt{b^2 - \sqrt{2}bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + c^2} \quad (1)$$



Hình 3

Dấu bằng ở (1) xảy ra khi A, B, C thẳng hàng (xem hình 3).

Dựng hình vuông $SHBK$, cạnh m . Theo định lý Thales:

$$\frac{m}{SA} + \frac{m}{SC} = \frac{BC}{AC} + \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} = \frac{1}{m},$$

$$\text{mà } m = \frac{b}{\sqrt{2}} \text{ nên } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{b} \geq \frac{4}{a+c}$$

$$\text{hay } \frac{a+c}{b} \geq 2\sqrt{2} \quad (2)$$

Dấu bằng ở (2) xảy ra khi $a = c = b\sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{a+c}{b}$ bằng $2\sqrt{2}$, khi $a = c = b\sqrt{2}$. $\square$

★Thí dụ 3. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . M là điểm bất kì trên đường tròn. Chứng minh hệ thức $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4$.

Lời giải. Ta sẽ giải bài toán bằng cách dùng định lý cosin.

Trên hình 4 gọi cạnh của tam giác ABC là a thì $a = R\sqrt{3}$.

Trên đoạn MA lấy điểm N sao cho $MN = MB$, dễ chứng minh được $NA = MC$, tam giác BMN là tam giác đều và $\widehat{ANB} = 120^\circ$. Suy ra

$$MA = MB + MC \quad (1)$$

Từ (1) ta có

$$MA^2 = MB^2 + MC^2 + 2MB \cdot MC \quad (2)$$

Áp dụng định lý cosin vào tam giác ABN ta có $NA^2 + NB^2 + NA \cdot NB = AB^2$ hay

$$MC^2 + MB^2 + MC \cdot MB = AB^2 \quad (3)$$

Bình phương hai vế của hệ thức (2) ta được $MA^4 = MB^4 + MC^4 + 6MB^2 \cdot MC^2$

$$+ 4MB^3 \cdot MC + 4MC^3 \cdot MB \quad (4)$$

Bình phương hai vế của hệ thức (3), sau đó nhân cả hai vế với 2, ta được

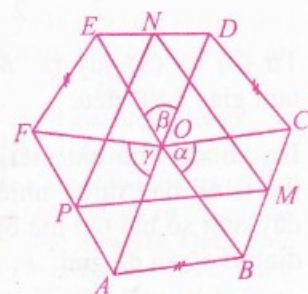
$$2(MB^4 + MC^4 + 3MB^2 \cdot MC^2 + 2MB^3 \cdot MC + 2MC^3 \cdot MB) = 2a^4 = 18R^4 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) có

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4 \text{ (đpcm). } \square$$

★Thí dụ 4. Cho hình lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Biết $AB = CD = EF = R$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, DE, FA . Chứng minh rằng tam giác MNP đều.

Phân tích. Bài này có nhiều cách giải. Có thể xét các hình bằng nhau, dùng phương pháp quay vectơ. Cách giải của bài toán trong các cách trên khá rắc rối đòi hỏi tính sáng tạo cao, hoặc là không thuộc phần kiến thức phổ thông đại trà. Chúng ta hãy chọn cách vận dụng công thức định lý cosin.



Hình 5

Lời giải. Trên hình 5, đặt $\widehat{BOC} = \alpha, \widehat{DOE} = \beta$,

$\widehat{FOA} = \gamma$. Ta có $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

(vì $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = \widehat{EOF} = 60^\circ$).

Áp dụng định lí côsin vào tam giác MON , ta có

$$MN^2 = MO^2 + NO^2 - 2MO \cdot NO \cdot \cos \widehat{MON} \quad (1)$$

Lại có $MO = R \cos \frac{\alpha}{2}$; $NO = R \cos \frac{\beta}{2}$;

$$\begin{aligned} \cos \widehat{MON} &= \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 60^\circ \right) \\ &= \cos \left(150^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) = -\cos \left(30^\circ + \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

Thay vào (1), ta có

$$MN^2 = R^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \left(30^\circ + \frac{\gamma}{2} \right) \right).$$

Tiếp tục biến đổi biểu thức lượng giác này thu được

$$MN^2 = R^2 \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right) \quad (2)$$

Tương tự, tính được

$$PM^2 = NP^2 = R^2 \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right) \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $MN = NP = PM$. Vậy tam giác ABC đều.

Do khuôn khổ bài viết nên chúng tôi không thể trình bày được nhiều thí dụ. Xin đưa ra đây một số bài tập mà bạn đọc có thể sử dụng định lí côsin để giải.

Bài 1. Cho tam giác ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) thỏa mãn

$$\begin{cases} \cos A = \sqrt{2} - \frac{b}{c} \\ \cos B = \sqrt{2} - \frac{a}{c} \end{cases}$$

Hãy xác định dạng của tam giác ABC .

Bài 2. Cho tam giác ABC nhọn và M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{AMC} = 90^\circ$, $\widehat{AMB} = 150^\circ$, $\widehat{BMC} = 120^\circ$. Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMC , AMB , BMC lần lượt là P , Q , R . Chứng minh rằng diện tích tam giác PQR lớn hơn diện tích tam giác ABC .

Bài 3. Các đường chéo của tứ giác lồi $ABCD$ cắt nhau tại O . Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác AOB, BOC, COD, DOA . Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn khi và chỉ khi

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

Bài 4. Cho tam giác ABC có $BC = AC\sqrt{2}$, nội tiếp đường tròn (O). Các đường thẳng l, m kẻ từ C khác với AB, AC cắt đường thẳng AB lần lượt tại L, M và cắt đường tròn (O) lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng nếu $\overline{AL} = \overline{MB}$ thì $AB = NB$.

Bài 5. Cho đường tròn (C) tâm O , có ba đường tròn nhỏ bằng nhau có bán kính là r nằm trong (C) và cùng tiếp xúc trong với đường tròn (C). Biết tâm của ba đường tròn nhỏ cách đều nhau. Lấy một điểm M bất kì trên đường tròn (C). Gọi d_1, d_2, d_3 là các khoảng cách từ M đến tâm của ba đường tròn nhỏ đó. Giả sử $d_1 = \max\{d_1, d_2, d_3\}$. Chứng minh hệ thức

$$\sqrt{d_1^2 - r^2} = \sqrt{d_2^2 - r^2} + \sqrt{d_3^2 - r^2}.$$

Bài 6. Tìm các số dương x, y, z thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} = \sqrt{x^2 + z^2} \\ x + z = 4y \\ xyz = 4. \end{cases}$$

DIỄN ĐÀN**DAY
HỌC
TOÁN****MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢI TOÁN
bằng máy tính cầm tay**

PHAN TẤN VINH

(GV THPT Nguyễn Du, Châu Đức,
Bà Rịa - Vũng Tàu)

Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu một số phương pháp và kỹ thuật đặc biệt về giải toán trên máy tính cầm tay nhằm cung cấp cho học sinh thêm tư liệu học tập và cùng trao đổi với các thầy cô giáo. Nội dung chính của bài viết gồm các vấn đề về phần Số học, Đại số, Giải tích. Phần lớn các thí dụ minh họa và bài tập vận dụng là các đề thi học sinh giỏi giải Toán trên máy tính cầm tay ở các tỉnh, thành phố, khu vực các năm trước.

VẤN ĐỀ 1. Kỹ thuật xử lý tràn màn hình**► Cơ sở khoa học và phương pháp**

Khi tính giá trị biểu thức lớn bị tràn màn hình, ta xử lý như sau:

- Kết hợp tính máy, tính tay và một số kỹ thuật đặc biệt để rút gọn.
- Tính toán, dự đoán và chứng minh dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

► Thí dụ và thuật toán minh họa**★ Thí dụ 1. Tính chính xác số $A = 123456789^2$.**

Hướng dẫn giải. Ta có

$$A = 123456789^2 = (123450000 + 6789)^2 \\ = (12345 \times 10^4)^2 + 2 \times 12345 \times 10^4 \times 6789 + 6789^2.$$

$$\text{Bấm máy ta được } 12345^2 = 152399025 \\ 2 \times 12345 \times 6789 = 167620410 \\ 6789^2 = 46090521$$

Tính trên giấy

$$A = 15239902500000000 + 1676204100000 \\ + 46090521 = 15241578750190521. \quad \square$$

★ Thí dụ 2. Tính chính xác tổng

$$S = 1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + 16 \times 16!$$

Hướng dẫn giải. Vì $n \times n! = (n+1)! - n!$ nên

$$S = 1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + 16 \times 16! \\ = 2! - 1! + 3! - 2! + \dots + 17! - 16! = 17! - 1$$

Nhận thấy

$$17! = 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 = 6227020800 \times 57120$$

Khi đó tính kết hợp tính máy và tính tay, ta được

$$17! = (6227 \times 10^6 + 208 \times 10^2) \times 5712 \times 10 \\ = 35568624 \times 10^7 + 1188096 \times 10^3 \\ = 355687428096000.$$

$$\text{Vậy } S = 1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + 16 \times 16! \\ = 355687428095999. \quad \square$$

★ Thí dụ 3. Tính chính xác $A = 999\,999\,999^3$.

Hướng dẫn giải. Bấm máy $9^3 = 729$;

$$99^3 = 970299; 999^3 = 997002999.$$

Từ đó dự đoán quy luật:

$$\underbrace{99 \dots 9^3}_{n \text{ chữ số } 9} = \underbrace{99 \dots 9}_{n-1 \text{ chữ số } 9} \underbrace{7}_{n-1 \text{ chữ số } 0} \underbrace{00 \dots 0}_{n-1 \text{ chữ số } 0} \underbrace{2}_{n-1 \text{ chữ số } 9} \underbrace{99 \dots 9}_{n-1 \text{ chữ số } 9}.$$

Bằng quy nạp toán học, dễ dàng chứng minh dự đoán trên đúng.

$$\text{Vậy } 999\,999\,999^3 = 999\,999\,997\,000\,000\,002\,999\,999\,999. \quad \square$$

► Bài tập vận dụng

1. Tính chính xác số $A = 1038471^3$.
2. Tính kết quả đúng của các phép tính sau:
 - a) $M = 222255555 \times 222266666$;
 - b) $N = 20032003 \times 20042004$;
 - c) $A = 1,123456789 - 5,02122003$;
 - d) $B = 52906279178,48 : 565,432$.

VẤN ĐỀ 2. Tìm số chữ số của số tự nhiên N **► Cơ sở khoa học và phương pháp**

Gọi k là số chữ số của N thì $10^{k-1} \leq N < 10^k$.

Suy ra $k = [\lg N] + 1$. Bấm máy tính k .

► Thí dụ và thuật toán minh họa**★ Thí dụ 1. Số $N = 2009^{2008}$ có bao nhiêu chữ số?**

Hướng dẫn giải. Dùng máy tính

$$k = [\lg N] + 1 = [2008 \lg 2009] + 1 = 6633.$$

Vậy số $N = 2009^{2008}$ có 6633 chữ số. $\square$

★ **Thí dụ 2.** Số $N = 19^{99}$ có bao nhiêu chữ số?

Hướng dẫn giải. Dùng máy tính

$$k = [\lg N] + 1 = [9^9 \lg 19] + 1 \\ = 495415345 + 1 = 495415346.$$

Vậy số $N = 19^{99}$ có 495415346 chữ số. □

► **Bài tập vận dụng**

Tìm số chữ số (viết trong hệ thập phân) của

- a) $N = 2009^{2009}$; b) $N = 2009^{9999}$;
c) $N = 2009^{2010} + 2009^{9999}$.

VẤN ĐỀ 3. Tìm số ước số của số tự nhiên N

► **Cơ sở khoa học và phương pháp**

Định lí. Giả sử $N(N \in \mathbb{N})$ có phân tích tiêu chuẩn

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k} \quad (p_i \in \mathcal{P}, a_i \in \mathbb{N}, \forall i = \overline{1, k})$$

Khi đó, số các ước số dương của N là

$$\tau(N) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \dots (a_k + 1).$$

► **Thí dụ và thuật toán minh họa**

★ **Thí dụ 1.** Hãy tìm số các ước dương của số $A = 6227020800$.

Hướng dẫn giải. Dùng máy tính để phân tích A ra thừa số nguyên tố

$$A = 6227020800 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Vậy số các ước số dương của A là

$$\tau(A) = 11 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2^3 = 1584. \quad \square$$

★ **Thí dụ 2.** Có bao nhiêu số tự nhiên là ước của số

$$N = 1890 \times 1930 \times 1945 \times 1954 \times 1969 \times 1975 \times 2004?$$

Hướng dẫn giải. Dùng máy tính để phân tích N ra thừa số nguyên tố

$$N = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 79 \cdot 167 \cdot 179 \cdot 193 \cdot 389 \cdot 977$$

Vậy số các ước số dương của N là

$$\tau(N) = 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2^8 = 46080. \quad \square$$

► **Bài tập vận dụng**

Có bao nhiêu số tự nhiên là ước của số

- a) $N = 2004 \times 2005 \times 2006 \times 2007 \times 2008 \times 2009 \times 2010$;
b) $M = 19051890 \times 3021969$?

VẤN ĐỀ 4. Tìm chữ số thứ k sau dấu phẩy ($k \in \mathbb{N}$) trong số thập phân vô hạn tuần hoàn

► **Cơ sở khoa học và phương pháp**

• Đối với số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn: Xác định chu kỳ tuần hoàn n ($n \in \mathbb{N}^*$). Nếu

$k \equiv m \pmod{n}$ thì chữ số thứ k sau dấu phẩy là chữ số thứ m trong chu kỳ.

• Đối với số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp: Xác định phần bất thường r và chu kỳ tuần hoàn n ($r, n \in \mathbb{N}^*$). Nếu $k - r \equiv m \pmod{n}$ thì chữ số thứ k sau dấu phẩy là chữ số thứ m trong chu kỳ.

► **Thí dụ và thuật toán minh họa**

★ **Thí dụ 1.** Chữ số thập phân thứ 2001 sau dấu phẩy là chữ số nào khi ta chia 10 cho 23?

Hướng dẫn giải. Dùng máy tính như sau:

$$\text{Lấy } 10 \text{ chia } 23 \text{ ta được } \frac{10}{23} = 0,434782608 \dots$$

(9 chữ số thập phân đầu tiên là 434782608)

$$\text{Khi đó } 0,434782608 \times 23 - 10 = 0,000000016.$$

$$\text{Lấy } 16 \text{ chia } 23, \text{ ta được } \frac{16}{23} = 0,695652173 \dots$$

(9 chữ số thập phân tiếp theo là 695652173).

$$\text{Khi đó } 0,695652173 \times 23 - 16 = 0,000000021.$$

$$\text{Lấy } 21 \text{ chia } 23, \text{ ta được } \frac{21}{23} = 0,913043478 \dots$$

(9 chữ số thập phân tiếp theo nữa là 913043478).

$$\text{Vậy } \frac{10}{23} = 0,(4347826086956521739130)$$

(tuần hoàn đơn chu kỳ có 22 chữ số).

Ta có $2001 \equiv 21 \pmod{22}$. Vậy chữ số thập phân thứ 2001 là chữ số thứ 21 của chu kỳ tuần hoàn, tức là **chữ số 3**. □

★ **Thí dụ 2.** Tìm chữ số thập phân thứ 2010 của số $N = \frac{1}{42}$.

Hướng dẫn giải. Bấm máy tính ta có

$$\frac{1}{42} = 0,0238095238 = 0,0(238095).$$

Mà $2010 - 1 \equiv 5 \pmod{6}$ nên chữ số thập phân thứ 2010 là **chữ số 9**. □

► **Bài tập vận dụng**

1. Chữ số thập phân thứ 2001 sau dấu phẩy là chữ số nào khi ta chia 1 cho 49?

2. Chữ số thập phân thứ 2001 sau dấu phẩy là chữ số nào khi ta chia 10 cho 51?

3. Tìm chữ số thập phân thứ 13^{2007} sau dấu phẩy trong phép chia 250000 cho 19.

VẤN ĐỀ 5. Giải phương trình $f(x) = 0$ bằng phương pháp lặp

► Cơ sở khoa học và phương pháp

Trong phần này, xin giới thiệu một số kỹ thuật giải phương trình một ẩn bậc cao hoặc một số phương trình (PT) đặc biệt bằng phương pháp lặp.

• **Phương pháp lặp.** Đưa PT $f(x) = 0$ về dạng tương đương $x = g(x)$ sao cho các hàm số $g(x)$, $g'(x)$ liên tục và $|g'(x)| \leq q < 1, \forall x \in [a; b]$ với $(a; b)$ là khoảng có chứa nghiệm của PT. Khi đó dãy lặp (x_n) với $x_{n+1} = g(x_n)$ sẽ hội tụ tại mọi điểm thuộc $(a; b)$. Dùng máy tính tìm nghiệm.

► Thí dụ và thuật toán minh họa

★ **Thí dụ 1.** Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $e^x + x - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(x) = e^x + x - 3$ có $f'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $f(0) = -2 < 0$; $f(1) = e - 2 > 0$ nên PT $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Ta có $e^x + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \ln(3 - x)$.

Đặt $g(x) = \ln(3 - x)$ thì $g'(x) = \frac{-1}{3-x}$ nên $|g'(x)| = \left| \frac{-1}{3-x} \right| < \frac{1}{2}, \forall x \in (0; 1)$.

Do đó, dãy lặp $x_{n+1} = \ln(3 - x_n)$ hội tụ tại mọi điểm trong khoảng $(0; 1)$.

Tính trên máy

Khai báo giá trị đầu $x_0 = \frac{1}{2}$ và bấm phím $\boxed{=}$

Khai báo dãy lặp bởi $\ln(3 - Ans)$

Khi đó bấm phím $\boxed{=}$ liên tục (26 lần), sau đó ta được $x_{26} = x_{27} = x_{28} = x_{29} = 0,792059968$.

Vậy nghiệm gần đúng là $x = 0,792059968$. □

Chú ý. Nếu đưa PT $e^x + x - 3 = 0$ về dạng $x = 3 - e^x$ thì hàm số $g(x) = 3 - e^x$ không thỏa mãn điều kiện hội tụ.

★ **Thí dụ 2.** Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $x^9 + x - 7 = 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(x) = x^9 + x - 7$ có đạo hàm $f'(x) = 9x^8 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(1) = -5 < 0$; $f(2) = 507 > 0$ nên PT $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

Ta có $x^9 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[9]{7 - x}$.

Đặt $g(x) = \sqrt[9]{7 - x}$ thì $g'(x) = \frac{-1}{9\sqrt[8]{(7-x)^8}}$

nên $|g'(x)| = \left| \frac{-1}{9\sqrt[8]{(7-x)^8}} \right| < 1 \forall x \in (1; 2)$.

Do đó, dãy lặp $x_{n+1} = \sqrt[9]{7 - x_n}$ hội tụ tại mọi điểm trong khoảng $(1; 2)$.

Tính trên máy

Khai báo giá trị đầu $x_0 = \frac{3}{2}$ và bấm phím $\boxed{=}$

Khai báo dãy lặp bởi $\sqrt[9]{7 - Ans}$

Khi đó bấm phím $\boxed{=}$ liên tục (6 lần), sau đó ta được $x_6 = x_7 = x_8 = 1,215339304$.

Vậy nghiệm gần đúng là $x = 1,215339304$.

Chú ý. Nếu đưa PT $x^9 + x - 7 = 0$ về dạng $x = 7 - x^9$ thì hàm số $g(x) = 7 - x^9$ không thỏa mãn điều kiện hội tụ. □

► Bài tập vận dụng

Tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^2 + \sin x - 1 = 0$; b) $2x^5 - 2\cos x + 1 = 0$;

c) $x^2 - \tan x - 1 = 0 \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0 \right)$; d) $32x^5 + 32x - 17 = 0$;

e) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$;

g) $x^6 - 15x - 25 = 0$;

h) $x^4 - x^2 + 7x + 2 = 0$;

i) $x - \sqrt[6]{x} - 1 = 0$;

k) $x^9 + x - 7 = 0$;

m) $x^9 + x - 10 = 0$;

n) $x^3 - \cos x = 0$;

o) $x + \sqrt[3]{x} - 2 = 0$;

p) $3x + 2\sqrt[8]{x} - 5 = 0$;

q) $2^x + 3^x + 5^x = 11^x$;

r) $x - \cot x = 0 \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$.

(Kì sau đăng tiếp)

Nhiều cách giải cho một bài toán

VỀ MỘT BÀI TOÁN trong ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A, năm 2010

PHẠM BẮC PHÚ
(GV THPT A Hải Hậu, Nam Định)

Câu II.2 trong đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2010 có bài toán về giải bất phương trình vô tỉ, chứa ẩn ở mẫu như sau:

Giải bất phương trình $\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \geq 1$ (1)

Để giải bài toán đòi hỏi thí sinh phải nắm vững các phương pháp giải bất phương trình vô tỉ, đồng thời cũng đòi hỏi yếu tố tâm lý bình tĩnh và sự kiên trì. Dưới đây chúng tôi xin trình bày một số cách giải khác nhau cho bài toán này nhằm giúp các bạn học sinh thêm phần nắm chắc phương pháp giải và tự tin hơn với dạng toán này.

Cách 1. Biến đổi tương đương

Nhận xét rằng

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} &= 1 - \sqrt{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}} \\ &\leq 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kết hợp với (1) suy ra $x - \sqrt{x} < 0$, hay $0 < x < 1$ (2)

Ta có (1) $\Leftrightarrow x - \sqrt{x} \leq 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \leq \sqrt{x} + 1 - x$ (3)

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) \leq (\sqrt{x} + 1 - x)^2 \quad (\text{do } \sqrt{x} + 1 - x > 0, \forall x \in (0; 1))$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x} - x - 2\sqrt{x} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x} - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 = 0.$$

Tìm được $\sqrt{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (do $\sqrt{x} > 0$).

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \text{ hay } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

★ Bài luyện tập

Giải các bất phương trình sau:

1.1. $\frac{3 - 2\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}} > 1.$

$$\left(\text{ĐS. } x \in (-\infty; -2] \cup \left(\frac{\sqrt{13} - 1}{6}; +\infty\right) \right).$$

1.2. $\frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{1 - x^2})}{x\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x^2 - x^3}} \geq 1.$

$$\left(\text{ĐS. } x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right).$$

Cách 2. Đặt ẩn phụ

Tương tự như cách 1 biến đổi đến BPT (3).

Chia hai vế của BPT (3) cho $\sqrt{x}$ có

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

Đặt $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ thì $x + \frac{1}{x} = y^2 + 2$, ta nhận được

$$\sqrt{2(y^2 + 1)} \leq y + 1 \quad (4)$$

$$\text{BPT (4)} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 \geq 0 \\ 2(y^2 + 1) \leq y^2 + 2y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ (y-1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1.$$

Với $y = 1$ tìm được $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

★ Bài luyện tập

Giải các phương trình sau:

2.1. $x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1$. $\left(DS. x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$.

2.2. $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$. $\left(DS. x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$.

2.3. $\sqrt{1-4x^2} + 2\sqrt{x^2+1} = 8x$. $\left(DS. x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$.

Cách 3. Sử dụng bất đẳng thức

Tương tự như cách 1 biến đổi đến BPT (3).

Áp dụng BDT Bunyakovsky ta có

$$(1 \cdot \sqrt{x} + 1 \cdot (1-x))^2 \leq (1^2 + 1^2)((\sqrt{x})^2 + (1-x)^2)$$

$$\text{hay } \sqrt{x} + 1 - x \leq \sqrt{2(x^2 - x + 1)}$$

$$(\text{do } \sqrt{x} + 1 - x > 0, \forall x \in (0; 1)).$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{1-x}{1}$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 = 0. \text{ Do đó } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy BPT (1) có nghiệm } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

★ Bài luyện tập

Giải các phương trình và bất phương trình sau:

3.1. $x + \sqrt{x-1} \geq 3 + \sqrt{2(x^2-5x+8)}$. (DS. $x = 5$).

3.2. $x + \frac{1}{x} + \sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4$. (DS. $x = 1$).

3.3. $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{3x^2+4x+1}$.

$$\left(DS. x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right).$$

Cách 4. Sử dụng biểu thức liên hợp

Lập luận được $x \in (0; 1)$ như cách 1.

$$\text{BPT (1)} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \leq 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x} - 1) + (\sqrt{2(x^2 - x + 1)} - 2\sqrt{x}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x} - 1) + \frac{2(x^2 - 3x + 1)}{\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + 2\sqrt{x}} \leq 0 \quad (5)$$

Nhận xét rằng

$$x^2 - 3x + 1 = (x-1)^2 - x = (x + \sqrt{x} - 1)(x - \sqrt{x} - 1),$$

nên vế trái của BPT (5) là

$$\begin{aligned} & (x + \sqrt{x} - 1) \left(1 + \frac{2(x - \sqrt{x} - 1)}{\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + 2\sqrt{x}} \right) \\ &= (x + \sqrt{x} - 1) \frac{\sqrt{2(x^2 - x + 1)} - (2 - 2x)}{\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + 2\sqrt{x}} \\ &= (x + \sqrt{x} - 1) \times \\ & \quad \times \frac{-2(x^2 - 3x + 1)}{(\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + 2\sqrt{x})(\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + (2 - 2x))} \\ &= (x + \sqrt{x} - 1)^2 \times \\ & \quad \times \frac{2(\sqrt{x} + 1 - x)}{(\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + 2\sqrt{x})(\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + (2 - 2x))}. \end{aligned}$$

Nhận thấy các nhân tử dưới mẫu và $2(\sqrt{x} + 1 - x)$ luôn dương với mọi $x \in (0; 1)$, nên

$$\text{BPT (1)} \Leftrightarrow (x + \sqrt{x} - 1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

★ Bài luyện tập

Giải các phương trình sau:

4.1. $\sqrt{5x-1} + \sqrt[3]{9-x} = 2x^2 + 3x - 1$.

$$(DS. x = 1).$$

4.2. $2(\sqrt{1-5x} - \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2}) = x - 1$.

$$(DS. x = 3 - 2\sqrt{2}).$$



CÁC LỚP THCS

Bài T1/398. (Lớp 6). Cho số nguyên dương n sao cho 2^n và 5^n có chữ số đầu tiên giống nhau. Chứng tỏ rằng số tạo bởi hai số 2^n và 5^n viết liền nhau có $n + 1$ chữ số, trong đó có ít nhất hai chữ số 3.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/398. (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A . Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{ABD}$. Chứng minh rằng $\widehat{DAE} = \widehat{ECB}$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/398. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x(x+2y)^3 - y(y+2x)^3 = 27.$$

TRƯỜNG QUANG AN
(SV lớp Toán – Tin 32, ĐH Phạm Văn Đồng
Quảng Ngãi)

Bài T4/398. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sqrt{12\sqrt{2}-15} + 2\sqrt{3\sqrt{4}-3}.$$

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Nam Yên Thành, Nghệ An)

Bài T5/398. Cho tam giác ABC với $\widehat{ACB} = 70^\circ$, $\widehat{ABC} = 50^\circ$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của BC và AD . Dựng EF vuông góc với BC (F thuộc BC). M là một điểm trên đoạn EF ; N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các cạnh AC và AB . Biết rằng ba điểm N, E, P thẳng hàng. Hãy tìm số đo góc MAB .

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/398. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = 3\sqrt{1+2x^2} + 2\sqrt{40+9y^2},$$

trong đó x, y là hai số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$.

PHẠM XUÂN THI
(Sĩ quan Lục quân 2, Long Thành, Đồng Nai)

Bài T7/398. Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{\cos A}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\cos B}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} + \frac{\cos C}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \geq 2.$$

NGUYỄN VĂN DŨNG
(Hà Nội)

Bài T8/398. Cho tam giác ABC . Một đường thẳng cắt các đường thẳng BC, CA và AB theo thứ tự tại ba điểm A', B' và C' . Gọi A'', B'' và C'' cũng theo thứ tự là điểm đối xứng của A' qua A , của B' qua B và của C' qua C . Chứng minh rằng diện tích tam giác $A''B''C''$ bằng 6 lần diện tích tam giác ABC .

TRẦN VIỆT HÙNG
(Ủy ban Kiểm tra Tỉnh ủy Sóc Trăng)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/398. Người ta tô màu tất cả các số nguyên dương bằng hai màu trắng và đen. Biết rằng tổng của hai số khác màu là một số được tô màu đen và có vô hạn các số được tô màu trắng. Gọi số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đen là q . Chứng minh rằng q là số nguyên tố.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T10/398. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f^2(m) + 2f^2(n)) = m^2 + 2n^2, \text{ với mọi } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T11/398. Xét dãy số thực (x_n) ($n \geq 1$) được xác định bởi $x_1 = a$ ($a \in \mathbb{R}$) và

$$x_{n+1} = 2x_n^3 - 5x_n^2 + 4x_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn của dãy số (x_n) trong các trường hợp đó.

TRẦN XUÂN ĐĂNG

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

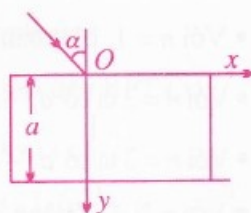
Bài T12/398. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm tập hợp điểm P nằm trong tứ diện sao cho $xd_A + yd_B + zd_C + td_D = c$, với x, y, z, t, c là các hằng số dương cho trước và d_A, d_B, d_C, d_D lần lượt là các khoảng cách từ P đến các mặt BCD, CDA, DAB, ABC tương ứng của tứ diện.

TRẦN QUANG HÙNG

(GV trường THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/398. Một tia sáng chiếu lên bản song song có bề dày $a = 2\text{cm}$. Góc tới $\alpha = 30^\circ$ (hình vẽ). Xác định góc ló và độ dịch chuyển ngang của tia sáng sau khi qua bản mặt nếu



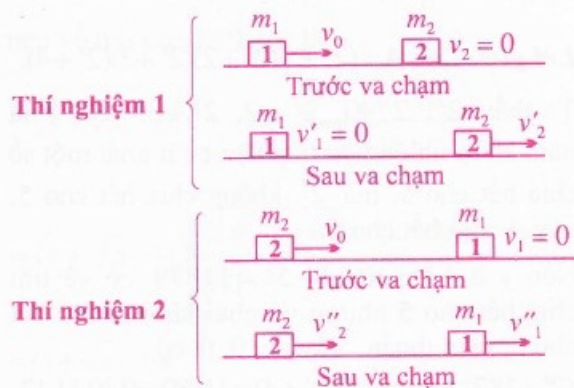
a) Chiết suất của bản mặt không đổi $n = 1,5$.

b) Chiết suất thay đổi theo hướng pháp tuyến theo quy luật $n = 1 + \frac{y}{a}$.

TRẦN KHÁNH HẢI

(Thừa Thiên - Huế)

Bài L2/398. Hình vẽ cho biết kết quả của hai thí nghiệm với hai trái banh của môn khúc côn cầu (hockey). Mặt băng nằm ngang và nhẵn. Các phép đo cho thấy $v'_2 = v''_2$. Hãy tìm tỉ số hai khối lượng.



TÔ GIANG

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/398. (For 6th grade). Let n be a positive integer so that the first digit of 2^n and 5^n are the same. Prove that the number obtained by writing 2^n and 5^n consecutively has $n + 1$ digits, where the digit 3 appears at least twice.

T2/398. (For 7th grade). Let ABC be an isosceles triangle with $AB = AC$. Point E on the median BD is chosen so that $\widehat{DAE} = \widehat{ABD}$. Prove that $\widehat{DAE} = \widehat{ECB}$.

T3/398. Find all positive integer solutions of the equation

$$x(x+2y)^3 - y(y+2x)^3 = 27.$$

T4/398. Find the value of the following expression

$$P = \sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} + 2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3}.$$

Bài T5/398. Let ABC be a triangle with $\widehat{ACB} = 70^\circ$, $\widehat{ABC} = 50^\circ$. Let D, E be respectively the midpoints of BC and AD . Draw EF perpendicular to BC (F is on BC). Let M be a point on EF ; let N, P be respectively the orthogonal projections of M onto AC, AB . Given that the three points N, E, P are colinear, find the measure of angle MAB .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/398. Find the least value of the expression

$$T = 3\sqrt{1+2x^2} + 2\sqrt{40+9y^2},$$

(Xem tiếp trang 29)



★ Bài T1/394. Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng
 $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$.

Lời giải. Đặt $A = (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4)$.

Ta thấy $2^x, 2^x + 1, 2^x + 2, 2^x + 3, 2^x + 4$ là năm số tự nhiên liên tiếp nên có ít nhất một số chia hết cho 5, mà 2^x không chia hết cho 5, vậy A chia hết cho 5.

Nếu $y \geq 1$ thì từ $A - 5^y = 11879$ có vẻ trái chia hết cho 5 nhưng về phải không chia hết cho 5, mâu thuẫn. Vậy $y = 0$, ta có

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) = 11880 = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$$

Từ đó suy ra $2^x + 1 = 9$ nên $2^x = 8$, do đó $x = 3$. Các số tự nhiên $x = 3, y = 0$ thỏa mãn đề bài. □

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn đưa ra cách giải khác:

$$(2^x + 1)(2^x + 4)(2^x + 2)(2^x + 3)$$

$$= (2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 4)(2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 6).$$

$$\text{Đặt } B = 2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 5 \text{ thì } B^2 = (B - 1)(B + 1) + 1$$

nên $(2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 5)^2 = 11880 + 5^y$. Vì 2^{2x} không chia hết cho 5 nên đẳng thức này chỉ xảy ra khi 5^y không chia hết cho 5, lúc đó $5^y = 1, y = 0$. Suy ra

$$(2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 5)^2 = 11881 = 109^2 \Rightarrow 2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 5 = 109$$

$$\Rightarrow 2^x(2^x + 5) = 2^3 \cdot 13 \Rightarrow x = 3.$$

2) Các bạn sau có lời giải gọn:

Phú Thọ: Nguyễn Thanh Quang, 6A4, THCS Giầy Phong Châu, Phú Ninh; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Việt Anh, Nguyễn Tuấn Huy, Đào Thị Hồng, Đỗ Thị Như Quỳnh, Trương Thị Hoài Thu, Kiều Quốc Đạt, 6A, Nguyễn Thị Khánh Huyền, Nguyễn Khánh Huyền, Nguyễn Đức Trung, Nguyễn Hồng Đăng, Bùi Thanh Hậu, 6A1, THCS Yên Lạc, Nguyễn Hồng Ngọc, 6A, THCS Lập Thạch; **Hà Nội:** Nguyễn Thanh Bình, 6H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy; **Nghệ An:** Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, Đậu Hương Giang, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu,

Đặng Quỳnh Chi, 6A, Đặng Thị Mỹ Hạnh, Nguyễn Bá Khánh Hòa, 6B, Hồ Xuân Thắng, Ngô Minh Tân, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** Lê Trung Anh, 6B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Kiều Duyên, 6A, THCS Hành Đức, Tống Thành Nguyên, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/394. Cho n là số nguyên dương và kí hiệu $U(n) = \{d_1; d_2; \dots; d_m\}$ là tập hợp tất cả các ước số nguyên dương của n . Chứng minh rằng

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_m^2 \leq n^2 \sqrt{n}.$$

Lời giải. Trước hết ta có nhận xét: Nếu $d_1, d_2, \dots, d_m$ là các ước của n thì $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \dots, \frac{n}{d_m}$ cũng là các ước của n .

- Với $n = 1$, bài toán hiển nhiên đúng ($d_1^2 = 1$).
- Với $n = 2$ ta có $d_1^2 + d_2^2 = 1^2 + 2^2 < 2^2 \cdot \sqrt{2}$ (đúng).
- Với $n = 3$ ta có $d_1^2 + d_2^2 = 1^2 + 3^2 < 3^2 \cdot \sqrt{3}$ (đúng).
- Với $n \geq 4$. Không giảm tính tổng quát, giả sử $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_m$, ta có $d_1 = 1, d_2 \geq 2, d_3 \geq 3, \dots, d_m \geq m$. Khi đó

$$\begin{aligned} d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_m^2 &= \frac{n^2}{d_1^2} + \frac{n^2}{d_2^2} + \dots + \frac{n^2}{d_m^2} \\ &= n^2 \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \dots + \frac{1}{d_m^2} \right) \\ &\leq n^2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{m^2} \right) \\ &< n^2 \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(m-1)m} \right) \\ &= n^2 \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \right) \\ &= n^2 \left(2 - \frac{1}{m} \right) < n^2 \cdot 2 \leq n^2 \sqrt{n} \text{ (vì } n \geq 4). \end{aligned}$$

Chúng ta BĐT cần chứng minh đúng với mọi số nguyên dương n . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n = 1$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán số học khá hay, để chứng minh BĐT cần sử dụng đến những kết quả quen thuộc về biến đổi và đánh giá biểu thức.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Ninh Bình: Tô Minh Hiền, 7A, THCS Phát Diệm, Kim Sơn; **Nghệ An:** Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; **Quảng Ngãi:** Tống Thành Nguyễn, 6A, THCS Hành Phước, Nguyễn Thị Kiều Duyên, 6A, THCS Hành Đức, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T3/394. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^4(a+b)} + \frac{1}{b^4(b+c)} + \frac{1}{c^4(c+a)} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

trong đó a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$.

Lời giải. Kí hiệu vế trái của BĐT (1) là P .

Cách 1. Từ $a, b, c > 0$ và $abc = 1$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^2}{2(a+b+c)} \\ &\geq \frac{\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)^2}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} \\ &\geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(chú ý: (2) là do BĐT H.A. Schwarz;

(3) là do BĐT quen thuộc $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;

(4) là do BĐT Cauchy).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, thì $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Khi đó

$$P = \frac{x^4}{(x+y)z} + \frac{y^4}{(y+z)x} + \frac{z^4}{(z+x)y}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{(x+y)z} + \frac{(x+y)z}{4} &\geq x^2; \quad \frac{y^4}{(y+z)x} + \frac{(y+z)x}{4} \geq y^2; \\ \frac{z^4}{(z+x)y} + \frac{(z+x)y}{4} &\geq z^2. \end{aligned}$$

Cộng từng vế các BĐT trên và kết hợp với BĐT quen thuộc $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, ta được

$$\begin{aligned} P &\geq x^2 + y^2 + z^2 - \frac{xy + yz + zx}{2} \geq \frac{xy + yz + zx}{2} \\ &\geq \frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

$\Leftrightarrow a = b = c = 1$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán đã cho có thể được tổng quát như sau:

Cho các số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x_1^{2n-2}(x_1+x_2)} + \frac{1}{x_2^{2n-2}(x_2+x_3)} + \dots + \frac{1}{x_n^{2n-2}(x_n+x_1)} \geq \frac{n}{2}.$$

2) Nhiều bạn tham gia giải bài này. Các cách giải khá phong phú và đều đúng. Các bạn có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Phạm Đức Hiền, 8A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Thu, 9A, THCS Lập Thạch, Sông Lô, Văn Ngọc Bích, Nguyễn Thị Thơm, 8A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Lê Minh Phúc, 9A5, THCS Giảng Võ, Khuất Thảo Linh, 9A, THCS Thạch Thát; **Nam Định:** Trịnh Thị Việt Hà, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** Lê Văn Huy, 9C, THCS Vạn Thắng, Nông Công; **Nghệ An:** Ngô Tuấn Tài, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Bình Phước:** Dương Tuấn Anh, 9A9, THCS Tân Xuân, TX. Đồng Xoài; **Ninh Thuận:** Hàng Trầm Minh, 9/5, THCS Lý Tự Trọng, TP. Phan Rang, Tháp Chàm; **Đông Tháp:** Âu Anh Minh, 9A1, THCS Kim Hồng, TP. Cao Lãnh.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T4/394. Giải phương trình

$$3\sqrt{x^3+8} = 2x^2 - 6x + 4 \quad (1)$$

Lời giải. **Cách 1.** Biến đổi PT (1) về dạng

$$2(x^2 - 2x + 4) - 2(x+2) = 3\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}.$$

Điều kiện $x^3 + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Nhận thấy $x = -2$ không là nghiệm của PT(1). Xét $x \neq -2$, chia hai vế của (1) cho $x+2$ ta được

$$\frac{2(x^2 - 2x + 4)}{x+2} - 3\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 4}{x+2}} - 2 = 0 \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 4}{x+2}}$ (với $t \geq 0$), PT (2) trở thành

$$2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \text{ (loại).} \\ t = 2 \text{ (thỏa mãn).} \end{cases}$$

Với $t = 2$ thì $\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2}} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của PT (1) là $\{3 + \sqrt{13}; 3 - \sqrt{13}\}$.

Cách 2. Đặt $\sqrt{x + 2} = u$ ($u \geq 0$),
 $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = v$ ($v > 0$).

Khi đó PT (1) trở thành

$$2(v^2 - u^2) = 3uv \Leftrightarrow (2v + u)(v - 2u) = 0.$$

Do $2v + u > 0$ nên $v - 2u = 0 \Leftrightarrow v = 2u$. Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x + 4} &= 2\sqrt{x + 2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 4 = 4(x + 2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 6x - 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó tìm được nghiệm của PT(1) như trên.

Cách 3. Áp dụng nhận xét $\sqrt{f(x)} = g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}, \text{ ta có}$$

$$\text{PT(1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x + 4 \geq 0 \\ 9(x^3 + 8) = 2x^2 - 6x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \text{ hoặc } x \geq 2 \\ (x^2 - 6x - 4)(4x^2 - 9x + 14) = 0. \end{cases}$$

Từ đó cũng tìm được nghiệm của PT (1) như trên. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này và đều giải theo một trong ba cách trên. Tuy nhiên, một số bạn còn nhầm lẫn khi đặt điều kiện $u > v \geq 0$ và tính toán còn dài dòng, nhầm lẫn.

2) Những bạn sau có lời giải ngắn gọn, chặt chẽ:

Hà Nội: Trần Tuấn Nghĩa, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Thanh Xuân, Khuất Thảo Linh, 9A, THCS Thạch Thất, Lê Minh Phúc, 9A5, THCS Giảng Võ; **Phú Thọ:** Phan Quốc Hưng, 9A1, THCS Lâm Thao, Thù Bảo Ngọc, THCS Sai Nga, Cẩm Khê; **Hà Nam:** Nguyễn Quang Lộc, 7B, THCS Liên Chính, TP. Phủ Lý, Nguyễn Thị Hồng Đức, 9C, THCS Nguyễn Hữu Tiễn; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Đình Lộc, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Thanh Hóa:** Bùi Thanh Tùng, 9B, THCS Hoằng Trung, Hoằng

Hóa, Lê Thị Phương Mai, 9A3, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Lê Văn Huy, 9C, THCS Vạn Thắng; **Nguyễn Hữu, 8A, THCS Xuân Lộc, Hậu Lộc, Trần Ngọc Đức, 8A, THCS TTr. Triệu Sơn; Nam Định:** Nguyễn Ngọc Anh, 9A1, Nguyễn Thùy Linh, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh, Vũ Thị Thu Hiền, 9A, THCS Hải Hậu; **Nghệ An:** Vương Ngọc Anh, 6H, THCS Tam Hợp, Quỳnh Hợp, Trần Mạnh Cường, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Võ Quốc Anh, 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Ngô Tấn Tài, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Trần Trung Hiếu, 9A, THCS Hòa Hiếu II; **Quảng Bình:** Trần Quang Toàn, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ; **An Giang:** Nguyễn Ngọc Lan Chi, 9A2, THCS TTr. Mỹ Lương.

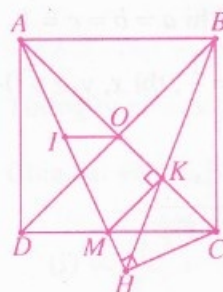
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/394.** Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm trên cạnh CD ($M \neq C, M \neq D$). Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với AM tại H , BH cắt AC tại K . Chứng minh rằng

a) MK luôn song song với một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh CD .

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADMK$ nằm trên một đường thẳng cố định.

Lời giải. a) Vì $\widehat{AHC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ nên tứ giác $AHCB$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AHB} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{ACD} = 45^\circ$ nên $\widehat{AHB} = \widehat{ACD} \Rightarrow$ tứ giác $MHCK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MKC} = 180^\circ - \widehat{MHC} = 90^\circ$. Suy ra $MK \perp AC$ mà $BD \perp AC$ nên $MK \parallel BD$. Vậy MK song song với một đường thẳng cố định.



b) Vì $\widehat{ADM} = \widehat{AKM} = 90^\circ$ nên tứ giác $ADMK$ nội tiếp đường tròn đường kính AM . Gọi I là tâm của đường tròn đó thì I là trung điểm của AM . Do đó theo tính chất đường trung bình trong $\triangle AMC$,

ta có $IO \parallel CD$ (O là tâm hình vuông $ABCD$). Vậy I luôn nằm trên đường thẳng cố định đi qua điểm O và song song với CD . $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Ở câu b), ta có thể đi xa hơn một chút bằng cách chỉ ra quỹ tích điểm I là đoạn thẳng OE (bỏ đi hai điểm O, E) với E là trung điểm của AD .

2) Có rất nhiều bạn tham gia giải và đa số đều giải tốt. Ở đây xin tuyên dương các bạn học sinh lớp 6, 7 đã tham gia giải và có lời giải ngắn gọn, chặt chẽ:

Nghệ An: Phạm Văn Quyền, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Lê Văn Dũng,** 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nam:** Nguyễn Quang Lợi, 7B, THCS Liêm Chính, TP. Phú Lý.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/394.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+2b^3+6}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+2c^3+6}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+2a^3+6}} \leq 1.$$

Lời giải. Đặt về trái BĐT cần chứng minh là A.

• **Cách 1.** Với ba số dương bất kì x, y, z ta có BĐT quen thuộc
$$\frac{9}{x+y+z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Sử dụng BĐT Cauchy và BĐT (1) ta có

$$\begin{aligned} \frac{6}{\sqrt{a^3+2b^3+6}} &\leq \frac{9}{a^3+2b^3+6} + 1 \\ &= \frac{9}{(a^3+2)+(b^3+2)+(b^3+2)} + 1 \leq \frac{1}{a^3+2} + \frac{2}{b^3+2} + 1. \end{aligned}$$

Tương tự với hai số hạng còn lại, suy ra

$$6A \leq \frac{3}{a^3+2} + \frac{3}{b^3+2} + \frac{3}{c^3+2} + 3 \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh
$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \leq 1 \quad (3)$$

Thật vậy, biến đổi BĐT (3) và sử dụng giả thiết $abc = 1$ ta có $(3) \Leftrightarrow a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq 3$ (đúng theo BĐT Cauchy). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Từ (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh.

• **Cách 2.** Sử dụng BĐT quen thuộc
$$x+y+z \leq \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}, \forall x, y, z > 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Ta có

$$A \leq \sqrt{3 \left(\frac{1}{a^3+2b^3+6} + \frac{1}{b^3+2c^3+6} + \frac{1}{c^3+2a^3+6} \right)} \quad (4)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương ta có
$$\begin{aligned} a^3 + 2b^3 + 6 &= (a^3 + b^3 + 1) + (b^3 + 1 + 1) + 3 \\ &\geq 3ab + 3b + 3 = 3(ab + b + 1) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Tương tự } b^3 + 2c^3 + 6 \geq 3(bc + c + 1) \quad (6)$$

$$c^3 + 2a^3 + 6 \geq 3(ca + a + 1) \quad (7)$$

Từ (4), (5), (6), (7) và giả thiết $abc = 1$, suy ra

$$\begin{aligned} A^2 &\leq \frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} \\ &= \frac{1}{ab+b+1} + \frac{ab}{ab(bc+c+1)} + \frac{b}{b(ca+a+1)} = 1. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Dựa vào hai cách chứng minh ở trên, bạn đọc có thể chứng minh được các BĐT tổng quát sau

1.1) (Theo bạn Phan Minh Trí, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hoà, **Phú Yên**). Cho các số dương $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ và các số nguyên không âm $p_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ thỏa mãn $p_1 + p_2$

$+ \dots + p_{n-1} = n$. Kí hiệu $\sum_{cyc}^n$ là tổng các số hạng theo hoán vị vòng quanh. Khi đó

$$\sum_{cyc}^n \frac{1}{\sqrt{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + \dots + p_{n-1} a_{n-1}^n + n(n-1)}} \leq 1.$$

1.2) (Theo bạn Vũ Huy Hoàng, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy, **Thái Bình**). Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ và hai số nguyên dương m, n (với $n \geq 2$). Ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^n + 2b^n + 3(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt[n]{b^n + 2c^n + 3(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt[n]{c^n + 2a^n + 3(n-1)}} \leq \frac{3}{\sqrt[n]{3n}}.$$

1.3) (Theo bạn Lê Văn Trọng, 10A2, THPT Đội Cấn, Vĩnh Phúc). Cho n số thực dương $a_i, i = 1, \dots, n$ thỏa mãn $a_1 \dots a_n = 1$. Coi $a_{n+i} = a_i$, khi đó

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt[n]{a_i^n + 2a_{i+1}^n + \dots + (n-1)a_{i+n-2}^n + \frac{n(n+1)}{2}}} \leq 1.$$

2) Ngoài các bạn Trí, Hoàng và Trọng, các bạn sau cũng có lời giải tốt: **Phú Thọ:** Phan Quốc Hưng, 9A1, THCS Lâm Thao; **Hải Dương:** Nguyễn Ngọc Thiện, Phạm Đức Vương, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Hưng Yên:** Lương Đức Hiếu, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hồ Ngọc Hiệp,** 10A5, THPT Nam Khoái Châu; **Thái Bình:** Vũ Tuấn Anh, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Hà Nam:** Nguyễn Chí Linh, 10A1, THPT chuyên Biên Hoà; **Hà Tĩnh:** Hoàng Đình Phong, 10 Lí, Trần Võ Hoàng, 10 Toán 1, THPT NK Hà Tĩnh; **Nghệ An:** Hoàng Việt Ánh, 11A1, THPT Thanh Chương 3; **Phạm Hùng Vương,** 10A1, THPT Phan Đăng Lưu, Yên Thành; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Huỳnh Thanh Thiên, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T7/394.** Xét các tam giác ABC có $A < B < C \leq \frac{\pi}{2}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2(\cot A - \cot B)(\cot B - \cot C)(\cot C - \cot A).$$

Lời giải. Với mọi tam giác ABC , ta có hệ thức quen thuộc

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1 \quad (1)$$

Do đó

$$M = \frac{1}{2} \left((\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2 \right) + 2(\cot A - \cot B)(\cot B - \cot C)(\cot C - \cot A) + 1$$

Đặt $x = \cot A - \cot B$; $y = \cot B - \cot C$
thì $x + y = \cot A - \cot C$.

Khi đó ta có

$$M = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + (x + y)^2) - 2xy(x + y) + 1 = x^2 + y(x + y) - 2xy(x + y) + 1 \quad (2)$$

Do $A < B < C \leq \frac{\pi}{2}$ và (1), nên

$$\begin{aligned} 0 < y \leq \cot B; \quad 0 < x + y \leq \cot A \\ \Rightarrow 0 < y(x + y) \leq \cot A \cot B \leq 1 \\ \Rightarrow y(x + y) \geq y^2(x + y)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra

$$M \geq x^2 + y^2(x + y)^2 - 2xy(x + y) + 1 = (x - y(x + y))^2 + 1 \geq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = y(x + y) = 1.$$

Vậy $\min M = 1$, đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cot A \cot B = 1 \\ \cot A - \cot B = 1 \\ \cot C = 0 \end{cases}$$

$$\text{hay } \cot A = \frac{\sqrt{5}+1}{2}; \quad \cot B = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad C = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể giải bài toán bằng cách khác:

Đặt $x = \cot A$; $y = \cot B$; $z = \cot C \Rightarrow xy + yz + zx = 1$ và chứng minh rằng

$$M = f(x; y; z) \geq f(x; y; 0) = (x - y - 1)^2 + 1 \geq 1.$$

2) Bạn **Nguyễn Văn Lâm**, 10T2, THPT chuyên **Hà Tĩnh** có nhận xét đúng: "Nếu giả thiết của bài toán là

$A \leq B \leq C \leq \frac{\pi}{2}$ thì M nhận giá trị nhỏ nhất cả trong trường hợp tam giác ABC đều".

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Bình: Vũ Huy Hoàng, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Đức Anh, 10A1, Lê Văn Trọng, Nguyễn Mạnh Tùng, Nguyễn Văn Hiếu, 10A2, Hà Văn Khách, Đàm Văn Tú, 10A3, THPT Đội Cấn; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Lâm, Lê Tuấn Dũng, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên - Huế:** Trần Ngọc Minh Nhật, 10CT, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T8/394.** Cho tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Đường thẳng d đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác cắt các đường thẳng AB , AC , BC lần lượt tại các điểm M , N , P . Chứng minh hệ thức

$$\frac{a}{BP \cdot PC} + \frac{b}{CN \cdot NA} + \frac{c}{AM \cdot MB} = \frac{(a+b+c)^2}{abc}.$$

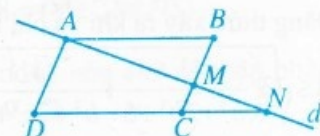
Lời giải. Trước hết ta cần có hai bổ đề.

• **Bổ đề 1.** Nếu đường thẳng d đi qua đỉnh A của hình bình hành $ABCD$ và theo thứ tự cắt các đường thẳng CB , CD tại M , N thì

$$\frac{CB}{CM} + \frac{CD}{CN} = 1.$$

Chú ý. Nếu hai đường thẳng song song cùng được định hướng thì các vectơ định hướng của chúng cùng hướng.

Chứng minh
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ (h.1).



Hình 1

Do $DA \parallel CM$, theo định lý Thales, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CB}}{\overline{CM}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{CN}} &= \frac{\overline{DA}}{\overline{CM}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{CN}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{CN}} \\ &= \frac{\overline{CD} + \overline{DN}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CN}} = 1.\end{aligned}$$

• **Bổ đề 2.** Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và AI cắt BC tại D thì

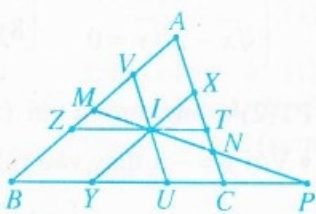
$$\frac{ID}{AD} = \frac{BC}{BC + CA + AB}.$$

Phép chứng minh bổ đề 2 đơn giản, xin dành cho bạn đọc.

Trở lại giải bài toán T8/394.

Định hướng các đường thẳng BC, CA, AB bởi các vector $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$.

Giả sử đường thẳng qua I song song với AB theo thứ tự cắt AC, BC tại X, Y ; đường thẳng qua I song song với BC theo thứ tự cắt BA, CA tại Z, T ; đường thẳng qua I song song với CA theo thứ tự cắt CB, AB tại U, V (h.2).



Hình 2

Vì $IVAX, IYBZ, ITCU$ là các hình bình hành nên, theo Bổ đề 1, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AV}}{\overline{AM}} + \frac{\overline{AX}}{\overline{AN}} &= 1; \quad \frac{\overline{BY}}{\overline{BP}} + \frac{\overline{BZ}}{\overline{BM}} = 1; \\ \frac{\overline{CT}}{\overline{CN}} + \frac{\overline{CU}}{\overline{CP}} &= 1\end{aligned} \quad (1)$$

Vì $\overline{AV} \uparrow\uparrow \overline{AB}; \overline{AX} \uparrow\downarrow \overline{CA}; \overline{BY} \uparrow\uparrow \overline{BC};$

$\overline{BZ} \uparrow\downarrow \overline{AB}; \overline{CT} \uparrow\uparrow \overline{CA}; \overline{CU} \uparrow\downarrow \overline{BC}$ nên

$$\begin{aligned}\overline{AV} &= AV; \overline{AX} = -AX; \overline{BY} = BY; \overline{BZ} = -BZ; \\ \overline{CT} &= CT; \overline{CU} = -CU\end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{AV}{AM} - \frac{AX}{AN} = 1; \quad \frac{BY}{BP} - \frac{BZ}{BM} = 1; \quad \frac{CT}{CN} - \frac{CU}{CP} = 1 \quad (3)$$

Mặt khác, vì AI, BI, CI theo thứ tự là phân giác của các góc $\widehat{VAX}, \widehat{YBZ}, \widehat{TCU}$ nên các hình bình hành $IVAX, IYBZ, ITCU$ là hình thoi.

$$\text{Do đó } AV = AX; BY = BZ; CT = CU \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\begin{aligned}\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} &= \frac{1}{AV}; \quad \frac{1}{BP} - \frac{1}{BM} = \frac{1}{BY}; \\ \frac{1}{CN} - \frac{1}{CP} &= \frac{1}{CT}.\end{aligned}$$

Cộng theo vế của ba đẳng thức trên, chú ý rằng $\overline{CP} = -\overline{PC}; \overline{AN} = -\overline{NA}; \overline{BM} = -\overline{MB}$, ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{BP} + \frac{1}{PC} + \frac{1}{CN} + \frac{1}{NA} + \frac{1}{AM} + \frac{1}{MB} \\ = \frac{1}{BY} + \frac{1}{CT} + \frac{1}{AV}.\end{aligned}$$

Do đó, theo hệ thức Chasles,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BP} \cdot \overline{PC}} + \frac{\overline{CA}}{\overline{CN} \cdot \overline{NA}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{AM} \cdot \overline{MB}} = \frac{1}{BY} + \frac{1}{CT} + \frac{1}{AV} \quad (5)$$

Theo Bổ đề 2 và theo định lý Thales, ta có

$$\begin{aligned}BY &= \frac{ca}{a+b+c}; \quad CT = \frac{ab}{a+b+c}; \\ AY &= \frac{bc}{a+b+c}\end{aligned} \quad (6)$$

Từ (5) và (6), chú ý rằng $\overline{BC} = BC = a; \overline{CA} = CA = b; \overline{AB} = AB = c$, sau một vài biến đổi đơn giản, suy ra

$$\frac{a}{BP \cdot PC} + \frac{b}{CN \cdot NA} + \frac{c}{AM \cdot MB} = \frac{(a+b+c)^2}{abc}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán này cần một chút tinh tế trong việc xử lý các vấn đề liên quan tới khái niệm độ dài đại số.

2) Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tương đối tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Phòng:** Phan Đức Minh, 11A5, THPT Thái Phiên; **Thanh Hoá:** Lê Quang Lâm, 10T, La Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** Trần Võ Hoàng, 10T1, Trần Thị Phương Thảo, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** Phạm Tuấn Anh, 10/1, Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T9/394.** Cho x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn các điều kiện

$$x + 2y + 3z = 5 \text{ và } 2xy + 6yz + 3xz = 8.$$

Chứng minh rằng

$$1 \leq x \leq \frac{7}{3}; \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{7}{6}; \frac{1}{3} \leq z \leq \frac{7}{9}.$$

Lời giải. Đặt $t = 2y, s = 3z$.

Từ giả thiết có $x + t + s = 5$ và $xt + ts + sx = 8$ (1)

Khi đó điều cần chứng minh tương đương với $1 \leq x, t, s \leq \frac{7}{3}$.

Do x, t, s có vai trò như nhau trong điều kiện (1) nên không làm mất tính tổng quát ta chỉ cần chứng minh $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$.

Từ BĐT quen thuộc $2ts \leq t^2 + s^2$ suy ra $4ts \leq (t + s)^2 = (5 - x)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Bởi vậy } 8 = xt + ts + sx &= x(t + s) + ts \\ &\leq x(5 - x) + \frac{(5 - x)^2}{4}. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} 4.8 &\leq 4.x(5 - x) + (5 - x)^2 \\ \Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 &\leq 0 \Rightarrow (x - 1)(3x - 7) \leq 0 \\ \Rightarrow 1 &\leq x \leq \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Khẳng định của bài toán đã được chứng minh. $\square$

◀ **Nhận xét.** Như vậy giả thiết $xyz \neq 0$ là không cần thiết. Đây không phải là bài toán mới lạ, ngoài việc đòi tham số qua t và s . Rất đông các bạn học sinh tham gia giải bài toán này, nhưng chỉ ít bạn giải được gọn gàng như trên. Các bạn học sinh lớp 6, 7, 8 sau có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Trịnh Thị Hồng Liên, 8D, THCS Lập Thạch; **Hải Phòng:** Lương Thế Sơn, 7A1, THCS Hồng Bàng; **Thanh Hóa:** Hoàng Huy Hiệu, 8B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Lê Hồng Đức, Trương Công Phú, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Phạm Văn Quyền, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Lê Đình Tài,** 7A2, THCS Yên Sơn, Đô Lương; **Đỗ Văn Quân,** Nguyễn Hồng Quân, Phan Hoàng Thanh Tùng, Phan Thanh Tùng, 8D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn

Quang Phiệt, Thanh Chương; **Bình Định:** Lê Thị Bảo Ngân, 8A4, THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/394.** Giải hệ phương trình

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3(x + y)} \quad (1)$$

$$4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 15y^4 \quad (2)$$

Lời giải. (Theo bạn Lê Văn Trọng, 10A2, THPT Đội Cấn, Vĩnh Phúc).

Phương trình (1) tương đương với

$$x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 3(x + y)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 0 \\ 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 0 \\ \sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = 8x \\ 8y = x \end{cases}$$

PT(2) tương đương với $(x + 1)^4 = 15y^4 + x^4$ (3)

• Với $y = -x$, thay vào (3) ta được

$$(x + 1)^4 = 16x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2x \\ x + 1 = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

• Với $y = 8x$, thay vào (3) ta được

$$\begin{aligned} (x + 1)^4 &= 61441x^4 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \sqrt[4]{61441}x \\ x + 1 = -\sqrt[4]{61441}x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{a - 1} \\ x = -\frac{1}{a + 1} \end{cases} \end{aligned}$$

ở đó $a = \sqrt[4]{61441}$.

• Với $y = \frac{1}{8}x$, thay vào (3) ta được

$$\begin{aligned} (x + 1)^4 &= \frac{4111}{4096}x^4 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \sqrt[4]{\frac{4111}{4096}}x \\ x + 1 = -\sqrt[4]{\frac{4111}{4096}}x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{b - 1} \\ x = -\frac{1}{b + 1} \end{cases} \end{aligned}$$

ở đó $b = \sqrt[4]{\frac{4111}{4096}}$.

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm $(x; y)$ là $(1; -1)$;

$$\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{a-1}; \frac{8}{a-1}\right); \left(-\frac{1}{a+1}; \frac{8}{a+1}\right);$$

$$\left(\frac{1}{b-1}; \frac{1}{8(b-1)}\right); \left(-\frac{1}{b+1}; -\frac{1}{8(b+1)}\right)$$

ở đó $a = \sqrt[4]{61441}$; $b = \sqrt[4]{\frac{4111}{4096}}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Bài này có rất đông bạn tham gia giải (cả các bạn THCS và THPT). Tất cả các lời giải đều đúng. Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Hà Nội: Phạm Hồng Ngọc, 10 Toán, Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Lâm Đồng:** Vũ Anh, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Vĩnh Long:** Đoàn Huy Hoàng, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Bến Tre:** Lâm Gia Vũ, 11T, THPT Nguyễn Đình Chiểu; **Bình Định:** Nguyễn Quang Hải, 10T, THPT Tăng Bạt Hổ; **Quảng Trị:** Nguyễn Đức Lâm, 11T, THPT chuyên THPT Lê Quý Đôn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T11/394.** Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + xf(y) - xy - x + 1 \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Từ (1), cho $y = 0$ ta được

$$f(f(x)) = f(x) + xf(0) - x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Trong (2) cho $x = 0$ ta được

$$f(f(0)) = f(0) + 1 \quad (3)$$

Tiếp tục, từ (1) thay y bởi $f(y)$ và sử dụng (2), ta thu được

$$\begin{aligned} f(f(x) + f(y)) &= f(x + f(y)) + xf(f(y)) - xf(y) - x + 1 \\ &= (f(x + y) + yf(x) - xy - y + 1) \\ &\quad + x(f(y) + yf(0) - y + 1) - xf(y) - x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{hay } f(f(x) + f(y)) &= f(x + y) + yf(x) + xyf(0) - 2xy - y + 2, \\ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4)$$

Hoán vị vai trò của x và y trong (4), ta thu được

$$\begin{aligned} f(f(x) + f(y)) &= f(x + y) + xf(y) + xyf(0) - 2xy - x + 2, \\ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$yf(x) - y = xf(y) - x, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Trong (6) cho $x = 0, y = 1$ thì $f(0) = 1$. Thay vào (3), ta được $f(f(0)) = 2$.

Từ (6) thay $y = 1$ và sử dụng hệ thức $f(f(0)) = 2$, ta thu được hàm số $f(x) = x + 1$.

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn điều kiện (1).

Kết luận. Hàm số cần tìm là $f(x) = x + 1$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và đều giải đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/394.** Giả sử khối tứ diện $ABCD$ thỏa mãn điều kiện: Tất cả các mặt của nó là các tam giác nhọn và BC vuông góc với AD . Gọi h_a, h_d lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ A, D xuống các mặt đối diện, còn 2α (với $0^\circ < \alpha < 45^\circ$) là số đo nhị diện cạnh BC của tứ diện đó, d là khoảng cách giữa hai cạnh BC, AD . Chứng minh bất đẳng thức

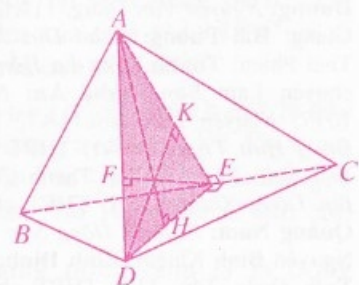
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_d} \leq \frac{1}{d \cdot \sin \alpha}$$

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc).

Kẻ $AE \perp BC$ và gọi AH, DK, EF là các đường cao của $\triangle ADE$. Từ giả thiết $BC \perp AD$, suy ra $BC \perp mp(ADE)$. Do đó $BC \perp DE$

và $\widehat{AED}$ là một góc phẳng nhị diện cạnh BC của tứ diện $ABCD$, nghĩa là $\widehat{AED} = 2\alpha$.

Mặt khác, cũng từ $BC \perp mp(ADE)$ suy ra $BC \perp AH$, kết hợp với $AH \perp DE$, ta được $AH \perp mp(BCD)$, vậy nên $AH = h_a$. Tương tự cũng có $DK \perp mp(ABC)$, nên $DK = h_d$. Dễ thấy EF là đường vuông góc chung của BC và AD , nên $EF = d$. Khi đó



$$\begin{aligned} d \sin \alpha \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_d} \right) &= \sin \alpha \left(\frac{EF}{AH} + \frac{EF}{DK} \right) \\ &= \sin \alpha \left(\frac{DE}{AD} + \frac{AE}{AD} \right) \\ &= \sin \alpha \left(\frac{\sin \widehat{DAE} + \sin \widehat{ADE}}{\sin 2\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} \left(\sin \frac{\widehat{DAE} + \widehat{ADE}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{DAE} - \widehat{ADE}}{2} \right) \\ &= \cos \left(\frac{\widehat{DAE} - \widehat{ADE}}{2} \right) \leq 1. \end{aligned}$$

Do vậy $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_d} \leq \frac{1}{d \sin \alpha}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{DAE} = \widehat{ADE}$
 $\Leftrightarrow EA = ED$, hay $BA = BD$ và $CA = CD$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Kết quả bài toán vẫn đúng với mọi tứ diện $ABCD$ thỏa mãn điều kiện $BC \perp AD$. Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng và tương tự như lời giải trên. Tuy nhiên, nhiều bạn quên chỉ ra khi nào thì đẳng thức xảy ra. Một số bạn sử dụng công thức tính diện tích mặt phẳng phân giác nhị diện cạnh BC của tứ diện $ABCD$ (trong Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ, Quyển 4, trang 161), cũng cho lời giải gọn.

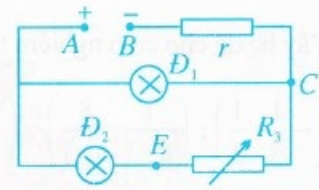
2) Ngoài bạn **Quân**, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Minh Thuận, 11 Toán 1, trường THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Thuận, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Hoàng Vũ Hiệp, 11A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Dũng, 11A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Hải Phòng:** Phan Đức Minh, 11A15, THPT Thái Phiên; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, Nguyễn Duy Hải, 11A7, THPT Đô Lương 1, Đặng Hữu Trọng, 11A1, THPT Quỳnh Hợp 2, Hoàng Viết Ánh, 11A1, THPT Thanh Chương 3; **Đà Nẵng:** Bùi Đăng Khoa, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Bình Định:** Lê Như Ngọc, 10T, Trần Đoàn Tấn, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** Trần Đỗ Hữu Toàn, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Nha Trang; **Phú Yên:** Phan Minh Trí, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa, Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 12A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** Không Hữu Hiệp, 11T, THPT chuyên Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài L1/394.** Cho mạch điện như hình vẽ.
 Điện trở $r = 10\Omega$, các đèn D_1 và D_2 có điện trở

tương ứng là
 $R_1 = 20\Omega$ và
 $R_2 = 5\Omega$, R_3 là
 một biến trở.
 Đặt lên hai đầu
 đoạn mạch AB
 một hiệu điện thế không đổi $U_{AB} = 100V$.



Thay đổi giá trị của R_3 đến một giá trị nào đó thì thấy các đèn D_1 , D_2 sáng bình thường và công suất của đoạn mạch AC đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị của biến trở R_3 khi đó. Tìm công suất lớn nhất của đoạn mạch AC và công suất định mức của đèn D_1 và D_2 .

Lời giải. Cường độ dòng điện mạch chính là

$$I = \frac{U}{r + R_{AC}}$$

Công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AC

$$\begin{aligned} P_{AC} &= I^2 R_{AC} = \left(\frac{U}{r + R_{AC}} \right)^2 R_{AC} \\ &\leq \frac{U^2 R_{AC}}{4r R_{AC}} = \frac{U^2}{4r}. \end{aligned}$$

Suy ra công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AC đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{U^2}{4r} = 250W$, khi

$$R_{AC} = r = 10\Omega. \text{ Do } R_{AC} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = 10\Omega$$

nên ta tìm được $R_3 = 15\Omega$.

Cường độ dòng điện qua đèn D_1 và D_2 lần lượt là

$$I_1 = I \cdot \frac{R_{AC}}{R_1} = 2,5A; \quad I_2 = I \cdot \frac{R_{AC}}{R_2 + R_3} = 2,5A.$$

Do các đèn D_1 và D_2 sáng bình thường nên công suất của chúng lần lượt là

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 125W; \quad P_2 = I_2^2 R_2 = 31,25W. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng:

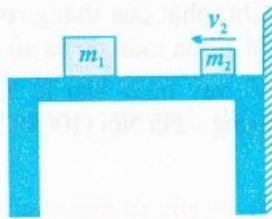
Bắc Ninh: Mẫn Văn Minh, 12A0, THPT Yên Phong I; **Hà Nội:** Bùi Thị Thu Hà, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; Nguyễn Trung Hiếu, 9A7, THCS Giảng Võ, Ba Đình; Lê Thị Minh Huệ, 11A2, THPT Ngô Quyền, Ba Vì; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Mạnh, 11A1, THPT Cẩm Giàng; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Trà My, 11A3, Trần Thị Nụ, 11A2, THPT Đội Cấn, Vĩnh

Tường; **Thái Bình:** Phạm Duy Khánh, 9A5, Phân hiệu CLC THCS Thị Trấn Diêm Điền, Thái Thụy; **Nghệ An:** Nguyễn Thanh Sơn, 10A1, THPT Diên Châu 3; Nguyễn Tiến Dũng, 11A1, THPT Quý Hợp 2; Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ Bài L2/394. Một

vật khối lượng m_1 nằm yên trên một cái bàn không ma sát, một đầu của bàn tựa vào tường. Một vật khác khối lượng m_2 được đặt giữa vật m_1 và tường và được cho chuyển động sang trái, về phía vật m_1 , với tốc độ không đổi v_2 (hình vẽ). Giả sử rằng mọi va chạm đều hoàn toàn đàn hồi và tường có khối lượng vô cùng lớn. Hãy tìm giá trị của m_2 theo m_1 sao cho cả hai vật chuyển động với cùng một tốc độ sau khi vật m_2 va chạm một lần với vật m_1 và một lần với tường.



Lời giải. Gọi v_2 là vận tốc của vật m_2 trước va chạm, v_1 và v_2' là vận tốc của vật m_1 và vật m_2 sau khi hai vật va chạm với nhau. Vì các va chạm là đàn hồi nên tổng động năng của hai vật được bảo toàn. Theo định luật bảo toàn động năng, ta có

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 + 0 = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 \quad (1)$$

Khi vật m_2 va chạm đàn hồi vào tường, do trước và sau va chạm tường vẫn đứng yên nên động năng của vật m_2 không thay đổi, tức là

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

Ở đây v_2' là vận tốc của vật m_2 sau khi va chạm với tường. Do chiều của vận tốc của vật m_2 bị đổi ngược lại sau va chạm nên

$$v_2' = -v_2 \quad (2)$$

Mặt khác, theo định luật bảo toàn động lượng, khi vật m_2 va chạm với vật m_1 , ta có

$$m_2v_2 + 0 = m_2v_2' + m_1v_1 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta suy ra

$$m_2(v_2^2 - v_2'^2) = m_1v_1^2 \quad (4)$$

$$m_2(v_2 - v_2') = m_1v_1 \quad (5)$$

Chia từng vế của (4) cho (5), ta được

$$v_2 + v_2' = v_1 \quad (6)$$

Theo đề bài và theo (2) thì

$$v_1 = -v_2' = v_2 \quad (7)$$

Thay (7) vào (6), ta có

$$v_2 = 2v_1 = -2v_2' \quad (8)$$

Từ (8) và (3) ta tìm được

$$m_2v_2 = -m_2\frac{v_2}{2} + m_1\frac{v_2}{2}$$

$$\text{Vậy } 2m_2 = -m_2 + m_1 \text{ hay } m_2 = \frac{m_1}{3}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Nguyễn Thị Trang, 10 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Dương:** Vũ Toàn Thắng, 11A1, THPT Phả Lại, Chí Linh, Nguyễn Văn Dũng, 11A, THPT Kê Sặt, Bình Giang; **Thái Bình:** Vũ Huy Hoàng, Bùi Thanh Tùng, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** Hồ Sỹ Trung, 11A7, Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I, Nguyễn Thanh Sơn, 10A1, THPT Diên Châu 3; **Bình Định:** Nguyễn Quang Khải, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cà Mau:** Nguyễn Anh Tài, 11T2, THPT chuyên Lê Ngọc Hiến; **Bến Tre:** Liêu Khắc Vũ, 10 Lí, THPT chuyên Bến Tre; **Cần Thơ:** Nguyễn Long Phước Đường, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **TP Hồ Chí Minh:** Lê Minh Hoàng, 10A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Quảng Ngãi:** Phạm Quốc Đô, 11B1, Bùi Đức Khánh, Ngô Tân Bình, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Các bạn học sinh gửi lời giải cho mục Đề ra kì này lưu ý:

- Lời giải của mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng và ghi đầy đủ họ tên, lớp, trường, huyện, tỉnh. Không viết lời giải của nhiều bài trên cùng một tờ giấy.

- Các bạn THCS có thể giải các bài dành cho THPT. Các bạn THPT giải bài dành cho THCS sẽ không được tính điểm.

THTT

Cuộc thi

MỪNG THĂNG LONG - HÀ NỘI TRÒN 1000 TUỔI

ĐÁP ÁN ĐỀ ĐỢT 1

Bài 1. XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ

Tổng số chữ cái được dùng để viết 1000 lần cụm từ THĂNG LONG là $9 \times 1000 = 9000$ và chữ G cuối cùng ở vị trí thứ 9000.

Nhận thấy, vòng ngoài cùng (vòng thứ nhất) có số ô là $100 \times 4 - 4 = 396$.

Số ô ở mỗi vòng trong kém số ô ở vòng ngoài liền trước nó 8 ô nên số ô ở vòng thứ n ($n \leq 50$) là $396 - (n - 1) \times 8 = 404 - 8n$.

Giả sử chữ cái thứ 9000 nằm ở trên vòng thứ n thì tổng số các ô của n vòng (tính từ ngoài vào) không nhỏ hơn 9000 và bằng

$$\frac{(396 + 404 - 8n)n}{2} = (400 - 4n)n.$$

Ta có $(400 - 4n)n \geq 9000$. Giải bất phương trình này, tìm được $50 - 5\sqrt{10} \leq n \leq 50 + 5\sqrt{10}$. Ta chọn số tự nhiên nhỏ nhất $n = 35$.

Tổng số ô của 34 vòng đầu là

$$(400 - 4 \times 34) \times 34 = 8976.$$

Số chữ cái còn xếp ở vòng 35 là $9000 - 8976 = 24$.

Ở vòng thứ 35 là hình vuông mỗi cạnh có $100 - 2 \times 34 = 32$ ô (> 24 ô). Suy ra chữ cái thứ 9000 phải nằm ở dòng 35 và cột thứ $34 + 24 = 58$. Vậy chữ G cuối cùng nằm ở dòng 35 và cột 58.

BẠCH NGỌC

Bài 2. NGÀY NÀO TRONG TUẦN LỄ?

Nếu có một ngày Chủ nhật được ghi bởi số nguyên tố chẵn thì đó là ngày mừng 2. Khi đó các ngày Chủ nhật của tháng sẽ là 2, 9, 16, 23, 30 chỉ có hai số nguyên tố. Vậy tháng 10 có ba ngày Chủ nhật được ghi bởi ba số nguyên tố lẻ.

Gọi ngày Chủ nhật đầu tiên được ghi bởi số nguyên tố lẻ là x . Vì 1 tuần có 7 ngày, nên hai ngày Chủ nhật sau được ghi bởi số lẻ là $x + 14$ và $x + 28$. Ta có $x + 28 \leq 31$ suy ra $x \leq 3$. Mà x là số nguyên tố lẻ nên $x = 3$. Suy ra các ngày

Chủ nhật của tháng rơi vào ngày 3, 10, 17, 24, 31 (thỏa mãn có ba số nguyên tố là 3, 17, 31).

Vì vậy ngày Đại lễ Kỷ niệm 1000 năm Thăng Long - Hà Nội (10/10/2010) sẽ là ngày Chủ nhật.

THANH LOAN

Bài 3. NHỮNG TÊN GỌI CỦA HÀ NỘI

L				D	O	N	G	K	I	N	H
A				O							
T	H	A	N	G	L	O	N	G			L
H				G		O					O
A				D	O	N	G	Q	U	A	N
N				O		G					G
H						T					D
	B	A	C	T	H	A	N	H			O
						A					
						T	O	N	G	B	I
						H					
D	A	I	L	A			H	A	N	O	I

1. LONG ĐỒ: (rõn rỗng): Làng Long Đồ có đền ở Núi Nùng (Bách Thảo) thời Thành hoàng từ Thế kỉ VII - VIII;
2. TỔNG BÌNH: Huyện lập từ năm 454 - 456 thời nhà Tống (Trung Quốc);
3. LA THÀNH: Thành đắp khoảng năm 808, thời nhà Đường (Trung Quốc);
4. ĐẠI LA: Thành do Cao Biền nhà Đường, đắp khoảng năm 866, rộng hơn La Thành;
5. THĂNG LONG: Từ năm 1010 thời Vua Lý Thái Tổ;
6. LONG THÀNH: Tên gọi thành Thăng Long;
7. ĐÔNG ĐÔ: Từ năm 1397 thời nhà Trần và Hồ Quý Ly;
8. ĐÔNG QUAN: Từ năm 1407 thời nhà Minh (Trung Quốc);
9. ĐÔNG KINH: Từ năm 1428 thời Vua Lê Thái Tổ;

Bài toán CON RÙA chạy trên đường băng bằng cao su

Một Con Rùa chạy trên đường băng bằng cao su dài 100 mét. Mỗi ngày nó chạy được 10 mét, rồi đem nghỉ. Nhưng về ban đêm đường băng lại dần ra thêm 100 mét. Do đó sau đêm đầu nó đi được 20 mét. Nhưng còn cách đích 180 mét.

Cuối ngày thứ hai Rùa đi được 30 mét tính từ điểm xuất phát, vậy nó còn cách đích 170 mét. Nhưng đêm đến thì đường băng lại dần ra, dài đến 300 mét, và như thế xem như Rùa đã đi được 45 mét, nhưng cách đích 255 mét... Cứ như thế, cuộc đua diễn ra.

Vậy chú Rùa có về đến đích được không?

PHAN THANH QUANG
(TP. Hồ Chí Minh)

10. BẮC THÀNH: Thời Tây Sơn (1788–1802);

11. HÀ NỘI: Từ năm 1831 thời Vua Minh Mạng.

Có thể thay La Thành bởi Hà Thành và Long Đỗ bởi Kinh Kỳ.

VÂN KHANH

Nhận xét. Cuộc thi đã được nhiều bạn ở bìa miền tham gia hào hứng. Ở Đợt I các bạn đều giải đủ cả ba bài. Tuyền dương các bạn sau đây có lời giải gọn, lập luận chặt chẽ:

Hà Nội: Đinh Quang Danh, 10TN2, THPT Tăng Bạt Hổ; **Hưng Yên:** Hồ Ngọc Hiệp, 10A5, THPT Nam Khoái Châu; **Hà Tĩnh:** Phạm Tiến Dũng, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Gia Lai:** Nguyễn Anh Phúc, 10T2, THPT chuyên Hùng Vương; **Bến Tre:** Cao Thành Chương, Võ Minh Trí, Võ Duy Thức, 11T, THPT chuyên Bến Tre.

Mời các bạn tiếp tục gửi bài cho đợt II, III nhé!

THTT

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

where x, y are non-negative real numbers such that $x + y = 1$.

T7/398. Let ABC be an acute triangle. Prove that

$$\frac{\cos A}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\cos B}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} + \frac{\cos C}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \geq 2.$$

T8/398. Let ABC be a triangle. A straight line cut the lines BC, CA and AB at A', B' and C' respectively. Let A'', B'' and C'' be the points reflection of A', B' and C' with centers at A, B and C respectively. Prove that the area of the triangle $A''B''C''$ is 6 times the area of triangle ABC .

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/398. The positive integers are colored with either black or white such that the sum of two numbers with different color is painted black, and there are infinitely many numbers with white color. Let q ($q > 1$) be the smallest positive integer with black color. Prove that q is prime.

T10/398. Find all functions $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ such that

$$f(f^2(m) + 2f^2(n)) = m^2 + 2n^2, \text{ for all } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

T11/398. The sequence (x_n) ($n \geq 1$) of real numbers is defined inductively as follows: $x_1 = a$ ($a \in \mathbb{R}$) and $x_{n+1} = 2x_n^3 - 5x_n^2 + 4x_n$ for all $n \geq 1$. Find all possible values of a such that the sequence (x_n) has finite limit. Determine the limit of (x_n) with respect to each such value of a .

T12/398. Let $ABCD$ be a tetrahedron. Find all points P inside the tetrahedron such that $xd_A + yd_B + zd_C + td_D = c$ where x, y, z, t, c are given positive constants and d_A, d_B, d_C, d_D are respectively the distances from P to the four faces BCD, CDA, DAB, ABC of the tetrahedron.

Translated by LE MINH HA



Giải đáp bài Thật tuyệt vời!

(Đề đăng trên THPT số 390, tháng 12 năm 2009)

Bạn Nam đã giải quyết được điều kiện cần của bài toán. Tuy nhiên ở điều kiện đủ bạn đó đã phạm phải sai lầm khi lập luận: Nếu hệ (**) có nghiệm thì hệ (*) có nghiệm. Lưu ý rằng, với $m \leq 2$ thì mọi nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 3y^2 = 6 \\ x^2 + xy - 2y^2 = 2 \end{cases} \quad (**)$$

cũng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 3y^2 \leq 6 \\ x^2 + xy - 2y^2 \geq m \end{cases} \quad (***)$$

Vì hệ (***) là hệ quả của hệ (*) dưới đây

$$\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 3y^2 \leq 6 \\ x^2 + xy - 2y^2 = m \end{cases} \quad (*)$$

nên mọi nghiệm của hệ (***) chưa chắc đã là nghiệm của hệ (*).

Một lời giải đúng cho bài toán này (theo bạn Đinh Thị Nho, 11 Toán, THPT chuyên Thái Bình). Nhận thấy

$$4x^2 - 3xy + 3y^2 = \left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 + 3x^2 + \frac{3}{4}y^2.$$

Với $x = y = 0$ thì từ hệ (*) có $m = 0$.

Với $4x^2 - 3xy + 3y^2 > 0$, đặt $a = 4x^2 - 3xy + 3y^2$ ($0 < a \leq 6$). Khi đó

$$\frac{m}{a} = \frac{x^2 + xy - 2y^2}{4x^2 - 3xy + 3y^2}$$

Nếu $y = 0$ thì $\frac{m}{a} = \frac{1}{4}$. Từ hệ (*) suy ra $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Nếu $y \neq 0$ thì $\frac{m}{a} = \frac{t^2 + t - 2}{4t^2 - 3t + 3}$ (với $t = \frac{x}{y}$) (1)

Hệ (*) có nghiệm khi và chỉ khi PT (1) có nghiệm với $0 < a \leq 6$, hay PT

$$\left(\frac{4m}{a} - 1\right)t^2 - \left(\frac{3m}{a} + 1\right)t + \left(\frac{3m}{a} + 2\right) = 0$$

có nghiệm với $0 < a \leq 6$.

$$\Leftrightarrow \Delta = \left(\frac{3m}{a} + 1\right)^2 - 4\left(\frac{4m}{a} - 1\right)\left(\frac{3m}{a} + 2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 39\left(\frac{m}{a}\right)^2 + 14\left(\frac{m}{a}\right) - 9 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{13} \leq \frac{m}{a} \leq \frac{1}{3}.$$

Kết hợp với $0 < a \leq 6$, ta được $-\frac{54}{13} \leq m \leq 2$.

Tóm lại: $-\frac{54}{13} \leq m \leq 2$ là các giá trị cần tìm.

Nhận xét. Có ít bạn tham gia bình luận giải của bạn Nam. Ngoài bạn Nho, các bạn sau cũng có đáp án tương đối tốt: Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I, Nghệ An; Lê Văn Trọng, 10A2, Đàm Văn Tú, 10A3, THPT Đội Cấn, Vĩnh Phúc.

NGỌC HIỂN

Đã đúng chưa?

Một học sinh nêu lời giải cho bài toán hình học như ở dưới đây. Bạn hãy kiểm tra xem cách giải của bạn học sinh đó đã đúng chưa nhé!

Bài toán. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CB} \cdot \overline{CD} + \overline{DC} \cdot \overline{DA} = 0.$$

Lời giải. Ta có

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CB} \cdot \overline{CD} + \overline{DC} \cdot \overline{DA} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AB} \cdot \overline{AD} - \overline{AB} \cdot \overline{BC}) + (-\overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{CD} \cdot \overline{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}(\overline{AD} - \overline{BC}) + \overline{CD}(\overline{AD} - \overline{BC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AD} - \overline{BC}) \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AD} - \overline{BC}) \cdot (\overline{AB} - \overline{DC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AD} - \overline{BC} = 0 \\ \overline{AB} - \overline{DC} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \overline{AB} = \overline{DC} \end{cases} \quad (2)$$

(1) $\Leftrightarrow \overline{AD} = \overline{BC} \Leftrightarrow$ Tứ giác ABCD là hình bình hành.

(2) $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow$ Tứ giác ABCD là hình bình hành.

THÂN VĂN DỰ

(GV THPT Sơn Động số 3, Bắc Giang)



CÁC SẢN PHẨM CỦA TẬP SÁCH TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ VÀ TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Sách đang phát hành



● TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ,

Quyển 1 - Tập thể tác giả, 300 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 47.500 đồng

Quyển 2 - Tập thể tác giả, 252 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 30.000 đồng

Quyển 3 - Tập thể tác giả, 252 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 34.000 đồng

Quyển 4 - Tập thể tác giả, 200 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 38.500 đồng

Quyển 5 - Tập thể tác giả, 240 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 42.500 đồng

● SẢN SAU ĐỊNH LÍ PTOLÊMÊ

Tác giả : Lê Quốc Hán, 164 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 21.500 đồng

● CÁC BÀI THI OLYMPIC TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VIỆT NAM

Tập thể tác giả, 284 trang, khổ 17 x 24cm. Giá bìa : 39.500 đồng

● 45 ĐỀ THI TOÁN CHỌN LỌC CẤP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Tập thể tác giả, 180 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 29.500 đồng

● CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tập thể tác giả, 300 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 48.500 đồng

● TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ TRỌN BỘ NĂM 2009. Giá bìa : 88.000 đồng

Sách sắp phát hành

● TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Tập 1: Đại số, Lượng giác, Giải tích.

Tập 2: Hình học, Tổ hợp - Xác suất, Số phức

Sách sẽ được phát hành vào đầu năm học mới.



Các bạn có thể mua các ấn phẩm trên tại Tòa soạn, các cơ sở Bưu điện, các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương, các cửa hàng sách của NXBGD Việt Nam. Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ: TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI
Để biết thêm chi tiết xin liên hệ với Tòa soạn: ĐT - FAX : 04.35121606. Email : tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 398 (8.2010)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THÚY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Thái Nhật Phương – Phương pháp chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác.
- 3 *Hà Huy Khoái* – Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 51 – năm 2010.
- 5 Đề thi vào lớp 10 Khối THPT chuyên Đại học Vinh năm học 2010-2011.
- 6 Lời giải Đề thi học sinh giỏi lớp 9 thành phố Hồ Chí Minh năm 2010.
- 8 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Hoàng Ngọc Cảnh – Vài ứng dụng của định lý cosin trong tam giác.
- 11 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Phan Tấn Vinh – Một số kĩ thuật giải toán bằng máy tính cầm tay.
- 14 **Nhiều cách giải cho một bài toán**
Phạm Bắc Phú – Về một bài toán trong Đề thi tuyển sinh đại học khối A, năm 2010.
- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/398, ..., T12/398, L1/398, L2/398.
- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 394.
- 28 **Cuộc thi Mừng Thăng Long – Hà Nội tròn 1000 tuổi. Đáp án Đề Đợt 1.**
- 29 *Phan Thanh Quang* – Bài toán Con Rùa chạy trên đường băng bằng cao su.
- 30 **Sai lầm ở đâu – Where's Mistake?**
Ảnh bìa 1: Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo Trần Quang Quý đón Đoàn cán bộ và học sinh tham dự Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 51 thắng lợi trở về.

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH

Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mỹ thuật : MINH THO

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Q. Đống Đa, Hà Nội

Tel: (04) 39947746; 35122068 - Fax: (04) 35123278

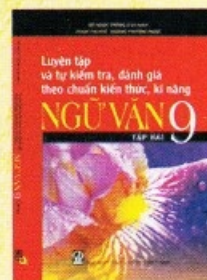
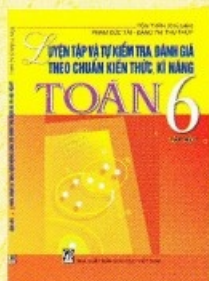
GIỚI THIỆU BỘ SÁCH

LUYỆN TẬP VÀ TỰ KIỂM TRA, ĐÁNH GIÁ THEO CHUẨN KIẾN THỨC, KỸ NĂNG CẤP THCS & THPT

Năm 2010, Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tổ chức biên soạn, biên tập Bộ sách *Luyện tập và tự kiểm tra, đánh giá theo chuẩn kiến thức, kỹ năng theo môn học ở cấp THCS và cấp THPT*. Bộ sách được đầu tư biên soạn rất công phu, do một đội ngũ tác giả giỏi về chuyên môn, có kinh nghiệm giảng dạy, kinh nghiệm viết SGK, STK và hầu hết có học hàm PGS, GS và học vị ThS, TS. biên soạn. Với mục đích giúp giáo viên có tài liệu tham khảo để giảng dạy, học sinh có tài liệu để luyện tập, củng cố, nắm chắc kiến thức, kỹ năng, mỗi cuốn sách được các tác giả biên soạn chất lọc những kiến thức cơ bản nhất theo thứ tự từng chương, bài học, tiết học trong chương trình và nội dung SGK, cập nhật với bộ tài liệu *Hướng dẫn thực hiện Chuẩn kiến thức, kỹ năng* của Bộ GD & ĐT mới ban hành cuối năm 2009. Ngoài ra, sách còn giới thiệu một số đề kiểm tra giúp học sinh tự đánh giá kết quả học tập của mình theo chuẩn kiến thức, kỹ năng của chương trình, phần đầu đạt kết quả tốt trong kiểm tra, đánh giá định kì, kể cả các kì thi cuối cấp, thi vào các trường Đại học và Cao đẳng.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trân trọng giới thiệu Bộ sách *Luyện tập và tự kiểm tra đánh giá theo chuẩn kiến thức, kỹ năng* gồm:

- Bộ sách *Luyện tập và tự kiểm tra đánh giá theo chuẩn kiến thức, kỹ năng* cấp THCS (42 cuốn).
- Bộ sách *Luyện tập và tự kiểm tra đánh giá theo chuẩn kiến thức, kỹ năng* cấp THPT (36 cuốn).



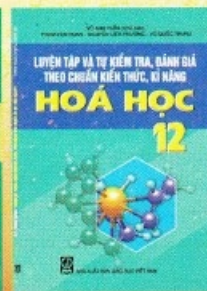
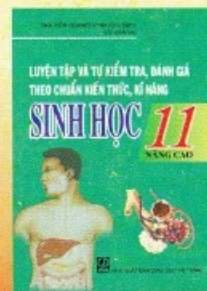
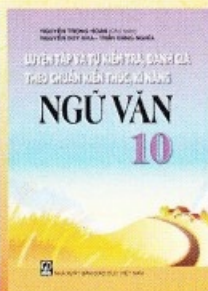
Mọi chi tiết xin vui lòng liên hệ:

Phòng Kế hoạch - Kinh doanh

Công ty CP Sách Giáo dục tại TP. Đà Nẵng

78 Pasteur, Q. Hải Châu, TP. Đà Nẵng

Tel: (0511)38323557 - Fax: (0511)38307141



TRƯỜNG THCS TRẦN ĐĂNG NINH TP. NAM ĐỊNH

50 năm xây dựng và trưởng thành



Tập thể - Hội đồng giáo viên - cán bộ công nhân viên nhà trường.

NHỮNG PHẦN THƯỞNG CAO QUÝ

- * 50 năm liên tục là trường tiên tiến xuất sắc cấp Thành phố và cấp Tỉnh.
- * Năm 1962 được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba.
- * Năm 1976 được Bộ GD&ĐT tặng Cờ "Đơn vị Xuất sắc".
- * Năm 1978 được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng Nhì.
- * Năm 1982 được Chủ tịch Hội đồng Bộ trưởng tặng Cờ Thi đua.
- * Năm 1991 được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng Nhì (Lần 2).
- * Năm 1996 được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng Nhất.
- * Năm 1999 được Chính phủ tặng Cờ "Đơn vị dẫn đầu phong trào thi đua trong năm 1999".
- * Năm 2000 được Công đoàn Giáo dục Việt Nam tặng Cờ "Đơn vị xuất sắc trong công tác Công đoàn năm 2000".
- * Năm học 2001-2002 được UBND Tỉnh Nam Định tặng Cờ "Đơn vị thi đua xuất sắc ngành Giáo dục - Đào tạo".
- * Năm học 2002-2003 được UBND Tỉnh tặng Bằng khen. Công đoàn nhà trường được Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen.
- * Năm học 2004-2005 được Chủ tịch nước tặng Huân chương Độc lập hạng Ba.
- * Năm học 2007-2008 được Tổng LĐLĐ Việt Nam tặng Bằng khen "Đơn vị thi đua xuất sắc".
- * Năm học 2008-2009 được Thủ tướng Chính phủ tặng "Cờ thi đua của Chính phủ". Công đoàn Giáo dục tặng bằng khen "Tập thể nữ cán bộ giáo viên Giỏi việc trường - Đảm việc nhà".
- * Nhà trường liên tục được UBND Tỉnh tặng Bằng khen. UBND thành phố tặng Giấy khen về công tác bồi dưỡng học sinh giỏi.
- * Chi bộ Đảng liên tục nhận danh hiệu chi bộ Đảng trong sạch vững mạnh.
- * Công đoàn liên tục nhận danh hiệu Công đoàn cơ sở vững mạnh Xuất sắc, Công đoàn tiên tiến xuất sắc, được nhận bằng khen và cờ thưởng của Liên đoàn Lao động tỉnh.
- * Liên đội TNTP nhà trường 5 lần được nhận Bằng khen và Cờ mang chân dung Bác do TWĐTNCS Hồ Chí Minh trao tặng.
- * Hai giáo viên được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba.
- * 7 giáo viên được Nhà nước phong tặng danh hiệu "Nhà giáo ưu tú".
- * 3 giáo viên được tặng danh hiệu "Chiến sĩ thi đua cấp Quốc gia".
- * 1 giáo viên đoạt danh hiệu Giáo viên giỏi cấp Quốc gia.
- * 17 giáo viên được Bộ GD&ĐT và Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen.
- * 5 giáo viên được Tổng LĐLĐ Việt Nam tặng Bằng "Lao động sáng tạo".
- * 4 giáo viên được TWĐTNCS Hồ Chí Minh tặng "Huy chương vì thế hệ trẻ" và "Huy chương vinh dự".
- * 39 giáo viên được UBND Thành phố tặng danh hiệu "Giáo viên ưu tú Thành Nam".

Ngoài ra trường còn được nhận hàng trăm Giấy khen, Bằng khen, cờ thưởng về các hoạt động giáo dục toàn diện.

* Hàng năm nhà trường có từ 50% đến 90% cán bộ giáo viên được công nhận là Giáo viên giỏi, Chiến sĩ thi đua các cấp.

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT08M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2010

Giá : 8000 đồng

Tám nghìn đồng