



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

7 2010
Số 397

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 47

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trì sư: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

**GẶP MẶT CỘNG TÁC VIÊN
NHÂN NGÀY BÁO CHÍ CÁCH MẠNG VIỆT NAM**

Hà Nội, ngày 18 tháng 6 năm 2010



Cuộc thi

Mừng Thăng Long - Hà Nội tròn 1000 tuổi

Bình luận Đề thi tuyển sinh đại học khối A năm 2010



ĐỂ MỌI HỌC SINH ĐỀU CÓ ĐỦ SÁCH GIÁO KHOA ĐẾN TRƯỜNG

Cứ vào dịp kết thúc năm học, nhiều trường học trên cả nước lại tổ chức hoạt động quyên góp, tặng sách giáo khoa cũ. Đây là một phong trào do Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tham mưu phát động từ nhiều năm nay nhằm giúp học sinh vùng sâu, vùng xa, học sinh có hoàn cảnh khó khăn có đủ sách giáo khoa (SGK) để học tập. Không chỉ là những lời động viên cổ gắng phấn đấu vươn lên trong học tập gửi tới các bạn nhỏ khó khăn, thiết thời, phong trào còn mang ý nghĩa giáo dục sâu sắc, dạy cho các em học sinh biết sẻ chia, quan tâm đến người khác và rèn luyện đức tính tiết kiệm.

Tại trường THPT Chu Văn An, Hà Nội, Lễ bế giảng năm học 2009-2010 cũng là dịp nhà trường phát động học sinh quyên góp, tặng lại SGK cũ. Bạn Ngọc Ánh học sinh lớp 10 của trường cho biết: *Không chỉ riêng em mà nhiều bạn khác nhận thấy phong trào quyên góp SGK cũ này có rất nhiều ý nghĩa. Phong trào không chỉ thắp sáng thêm ước mơ của những bạn học sinh vùng sâu vùng xa, những học sinh có hoàn cảnh khó khăn mà còn giúp chúng em có thêm tình yêu thương, sự quan tâm, chia sẻ đến những bạn có hoàn cảnh còn khó khăn xung quanh mình.*



Các em học sinh trường THPT Chu Văn An, Tây Hồ, Hà Nội và trường Tiểu học Kim Thư, Thanh Oai, Hà Nội trong buổi lễ quyên góp SGK nhân dịp kết thúc năm học 2009-2010

Một số trường tiếp nhận SGK cũ để chuyển tới những trường còn khó khăn, nhưng ở nhiều nơi thì việc tặng lại SGK được thực hiện ngay trong trường: Các anh chị lớp trên tặng các em lớp dưới hoặc tặng thư viện nhà trường để cho các bạn khác mượn. Thầy Phạm Vũ Phương, Hiệu phó trường Tiểu học Kim Thư, Thanh Oai, Hà Nội nhận xét: *Việc làm này là hoạt động giúp đỡ lẫn nhau rất thiết thực, thể hiện tinh thần tương thân tương ái và cũng là một trong những hoạt động nhằm xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực.*

Theo Nhà giáo ưu tú Ngô Trần Ái, Tổng Giám đốc NXBGDVN thì hiện nay tỉ lệ học sinh dùng lại SGK cũ là 51% trong đó 10% SGK là các em mượn từ thư viện nhà trường. Với phong trào này, lượng phát hành SGK của NXBGDVN giảm rất rõ nhưng vẫn đảm bảo mục tiêu tất cả HS đều có đủ SGK khi đến trường.

Việc quyên góp, mua-bán, chuyển tặng SGK cũ phục vụ năm học 2010 - 2011 do Bộ Giáo dục và Đào tạo chỉ đạo bắt đầu được thực hiện từ 1/6/2010 và kết thúc vào 15/9/2010.

LAN CHI

TÒA SOẠN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

KỈ NIỆM 85 NĂM NGÀY BÁO CHÍ CÁCH MẠNG VIỆT NAM

Sáng ngày 18.6.2010 tại 187B Giảng Võ, TP. Hà Nội, Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (THTT) tổ chức Lễ kỉ niệm 85 năm ngày Báo chí Cách mạng Việt Nam và họp mặt các Ủy viên Hội đồng biên tập tạp chí. Đến dự buổi lễ có GS. TSKH Nguyễn Cảnh Toàn, Nguyên Tổng biên tập Tạp chí THTT; GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội; TS Trần Đình Châu, Giám đốc Dự án THCS II, Bộ Giáo dục và Đào tạo. Về phía NXBGD Việt Nam có Ông Nguyễn Minh Khang, Phó Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam kiêm Giám đốc NXBGD tại TP. Hà Nội; Ông Lê Trí Tú, Chánh Văn phòng NXBGD Việt Nam; PGS. TS Phan Doãn Thoại, Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam, Viện trưởng Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu Giáo dục, Nguyên Tổng biên tập Tạp chí THTT; Ông Phan Kế Thái, Giám đốc Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội, Các Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam: TS Lê Hữu Tinh, TS Nguyễn Văn Tư, Ông Phạm Ngọc Tới; Lãnh đạo Công ty CP In Diên Hồng; Lãnh đạo Công ty CP In SGK tại TP. Hà Nội; Lãnh đạo Xí nghiệp In Bản đồ I, Bộ Quốc phòng; Lãnh đạo Tạp chí Toán Tuổi trẻ; Lãnh đạo Tạp chí Văn học và Tuổi trẻ; các Ủy viên Hội đồng biên tập, các cộng tác viên thân thiết và toàn thể cán bộ của Tòa soạn. Sau lời phát biểu đề dẫn, nêu ý nghĩa ngày Báo chí Cách mạng Việt Nam, TS Phạm Thị Bạch Ngọc, Tổng biên tập Tạp chí THTT báo cáo kết quả hoạt động của Tòa soạn trong 6 tháng đầu năm 2010 và định hướng công tác trong thời gian tới. Tiếp theo là lời phát biểu chào mừng của Ông Nguyễn Minh Khang, Phó Tổng Giám



*Phó Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
Nguyễn Minh Khang tặng hoa chúc mừng Tạp chí.*

đốc NXBGD Việt Nam kiêm Giám đốc NXBGD tại TP. Hà Nội và các ý kiến phát biểu thảo luận của các Ủy viên Hội đồng biên tập về việc cải tiến nội dung và hình thức tạp chí, góp phần khích lệ niềm đam mê, sức sáng tạo của các thầy cô giáo, các bạn trẻ yêu toán trên toàn quốc.

Nhân dịp này, Tạp chí THTT xin chân thành cảm ơn NGƯT Ngô Trần Ái, Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam; NXBGD Việt Nam; Ban Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam; NXBGD tại TP. Hà Nội; NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh; Công ty CP In SGK tại TP. Hà Nội; Công ty CP In Diên Hồng; Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội; Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục tại Hà Nội; Xí nghiệp In Bản đồ I, Bộ Quốc phòng; Công ty Phát hành Báo chí Trung ương; Bưu điện Giảng Võ đã tặng quà, Lẵng hoa và Thiếp chúc mừng đến Tạp chí.

LÊ MAI



Chứng minh bất đẳng thức (BĐT) là dạng toán khó, thường gặp trong các kì thi vào lớp 10 THPT chuyên. Có nhiều bài chứng minh bất đẳng thức mà các biến tham gia có vai trò như nhau. Khi đó ta có thể dựa vào vai trò như nhau của chúng mà sắp xếp chúng theo một thứ tự. Việc sắp xếp này tuy là rất đơn giản nhưng đôi khi lại giúp ta giải quyết được nhiều bài toán khó. Sau đây là một vài thí dụ ứng dụng phương pháp trên.

SỬ DỤNG VAI TRÒ NHU NHAU CỦA CÁC BIẾN ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

CAO VĂN DŨNG

(GV THPT Quang Trung, Đống Đa, Hà Nội)

★ **Thí dụ 1. (BĐT Schur).** Cho các số thực a, b, c không âm. Chứng minh rằng $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$.

Lời giải. Do vai trò của a, b, c là như nhau nên có thể giả sử $a \geq b \geq c$.

• Nếu có hai trong ba số a, b, c bằng nhau thì BĐT hiển nhiên đúng.

• Nếu $a > b > c$, chia hai vế BĐT cần chứng minh cho $(a-b)(b-c)(a-c)$ ta được BĐT tương đương $\frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} + \frac{c}{a-b} \geq 0$.

Bất đẳng thức trên luôn đúng do

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ 0 < b-c < a-c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b-c} > \frac{b}{a-c} \text{ và } \frac{c}{a-b} > 0. \quad \square$$

★ **Thí dụ 2.** Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thuộc đoạn $[0; 2]$. Chứng minh rằng $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{9}{4}$.

Lời giải. Sử dụng BĐT Cauchy với $x > 0, y > 0$ ta có

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) (x+y)^2 \geq 2 \frac{1}{xy} \cdot 4xy = 8.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{8}{(x+y)^2} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Do vai trò của a, b, c là như nhau nên có thể giả sử $a > b > c$. Áp dụng BĐT (1) cho cặp số dương $a-b$ và $b-c$, ta có

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} \geq \frac{8}{(a-b+b-c)^2} = \frac{8}{(a-c)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a-b=b-c$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \\ \geq \frac{8}{(a-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \frac{9}{(a-c)^2}. \end{aligned}$$

Mặt khác, do $a, c \in [0; 2]$ và $a > c$ nên

$0 < a-c \leq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2$ và $c=0$.

$$\text{Do đó } \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{9}{(a-c)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $(a; b; c) = (2; 1; 0)$ và các hoán vị. $\square$

★ **Thí dụ 3.** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c+abc=4$. Chứng minh rằng $a+b+c \geq ab+bc+ca$.

Lời giải. Do vai trò của a, b, c là như nhau nên ta giả sử $a \geq b \geq c$. Từ giả thiết ta có

$$3c + c^3 \leq 4 = a + b + c + abc \leq 3a + a^3.$$

Suy ra $a \geq 1$ và $c \leq 1$.

• Nếu $a \geq b \geq 1 \geq c$, ta có $4 \geq a + b \geq 2\sqrt{ab}$, suy ra $ab \leq 4$. Do đó

$$\begin{aligned} (a+b-2)^2 &\geq 4(a-1)(b-1) \geq ab(a-1)(b-1) \\ \Leftrightarrow (a+b-ab)(ab+1) &\geq (4-a-b)(a+b-1) \\ \Leftrightarrow a+b-ab &\geq \frac{4-a-b}{ab+1}(a+b-1) \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác, từ giả thiết suy ra $c = \frac{4-a-b}{ab+1}$.

Kết hợp với (1) ta có

$$\begin{aligned} a+b-ab &\geq c(a+b-1) \\ \Leftrightarrow a+b+c &\geq ab+bc+ca \text{ (đpcm)}. \end{aligned}$$

• Nếu $a \geq 1 \geq b \geq c$, ta có

$$\begin{aligned} (a-1)(b-1)(c-1) &\geq 0 \\ \Rightarrow a+b+c &\geq ab+bc+ca+1-abc \end{aligned} \quad (2)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương ta có

$$4 = a + b + c + abc \geq 4\sqrt[4]{abcbac}. \text{ Suy ra } abc \leq 1.$$

Kết hợp với (2) ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

★Thí dụ 4. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải. Vì vai trò của a, b, c là như nhau nên có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Do $abc = 1$ nên $bc \leq 1$ và $a \geq 1$. Ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^2 &\leq 2 \left(\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \right) \\ &= 2 \left(1 + \frac{1-b^2c^2}{(1+b^2)(1+c^2)} \right) \leq 2 \left(1 + \frac{1-b^2c^2}{(1+bc)^2} \right) \\ &= \frac{4}{1+bc} = \frac{4a}{1+a}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq 2\sqrt{\frac{a}{1+a}} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, ta có } \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{1+a} \quad (2)$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } 2\sqrt{\frac{a}{1+a}} + \frac{\sqrt{2}}{1+a} \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Thật vậy, BĐT (3) tương đương với

$$\begin{aligned} 1+3a-2\sqrt{2a(1+a)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2a}-\sqrt{1+a})^2 &\geq 0 \text{ (luôn đúng)}. \end{aligned}$$

Vậy BĐT (3) được chứng minh. Từ (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

★Thí dụ 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4.$$

Lời giải. Do vai trò của a, b, c là như nhau nên ta giả sử $a \geq b \geq c$. Suy ra $c \leq 1$, ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + abc &= 9 - 2(ab + bc + ca) + abc \\ &= 9 + ab(c-2) - 2c(3-c). \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \left(\frac{3-c}{2} \right)^2 \text{ và } c-2 < 0 \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + abc &\geq 9 + (c-2) \left(\frac{3-c}{2} \right)^2 - 2c(3-c) \end{aligned} \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh

$$9 + (c-2) \left(\frac{3-c}{2} \right)^2 - 2c(3-c) \geq 4 \quad (2)$$

Thật vậy, (2) $\Leftrightarrow (c-1)^2(c+2) \geq 0$ (luôn đúng).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

★Thí dụ 6. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq 2 + abc.$$

(Xem tiếp trang 9)

Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên Toán

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2009 – 2010

(Đề thi đã đăng trên THPT số 366, tháng 6 năm 2010)

Bài 1. Theo BĐT tam giác, ta có

$$0 < a < b + c \Rightarrow a(a + b + c) < 2a(b + c)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}; \quad \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên, ta được

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Mặt khác, từ BĐT quen thuộc

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9, \text{ với } x > 0, y > 0, z > 0,$$

$$\text{ta có } 2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} > 1.$$

Bài 2. Điều kiện $x \neq m, x \neq n, x \neq p$. Khi đó PT đã cho tương đương với

$$(x-n)(x-p) + (x-m)(x-p) + (x-m)(x-n) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x(m+n+p) + mn + np + mp = 0 \quad (1)$$

Coi (1) là PT ẩn x , ta có

$$\Delta = 4(m+n+p)^2 - 12(mn + np + mp)$$

$$= 2((m-n)^2 + (n-p)^2 + (p-m)^2) > 0$$

(vì m, n, p phân biệt).

Vậy PT (1) luôn có hai nghiệm phân biệt (dễ thấy các nghiệm đó khác m, n, p). Do đó PT đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3. Từ BĐT Cauchy cho các số dương, ta có $2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n+1$. Suy ra

$$\frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} < \frac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1-n)\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \quad (1)$$

Áp dụng (1) cho từng số hạng của S_n , suy ra

$$S_n < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < \frac{1}{2} \quad (\text{đpcm}).$$

Bài 4. a) Từ giả thiết ta có $\widehat{BAE} = \widehat{EAC}$.

Suy ra $\triangle ABD \sim \triangle AEC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$$

$$\Leftrightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AC.$$

$$\text{Mặt khác, từ } \triangle ABD \sim \triangle CED \Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{DA}{DC}$$

$$\Leftrightarrow BD \cdot DC = DA \cdot DE.$$

$$\text{Từ đó } AB \cdot AC - BD \cdot DC = AD \cdot AE - DA \cdot DE = AD(AE - DE) = AD^2.$$

$$\text{Vậy } AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC.$$

b) Theo tính chất đường phân giác, ta có

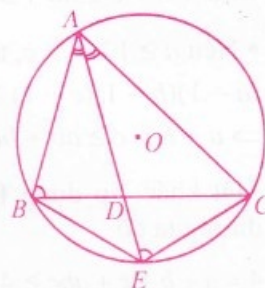
$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow \frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB+DC}{c+b} = \frac{BC}{c+b} = \frac{a}{c+b}.$$

$$\text{Suy ra } DB \cdot DC = \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \cdot bc.$$

Theo câu a) ta có

$$AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC = bc - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \cdot bc$$

$$= bc \left(1 - \frac{a}{b+c} \right) \left(1 + \frac{a}{b+c} \right) = bc \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2}$$



ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

NĂM 2010

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (4 điểm)

Thu gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$

b) $B = \left(\frac{a\sqrt{a}-3}{a-2\sqrt{a}-3} - \frac{2(\sqrt{a}-3)}{\sqrt{a}+1} + \frac{\sqrt{a}+3}{3-\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{a+8}{a-1} \right),$

với $a \geq 0; a \neq 9.$

Câu 2. (4 điểm)

Cho phương trình

$$(m+3)x^2 - 3(m+2)x + (m+2)(m+4) = 0.$$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

Câu 3. (3 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2};$

b) $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1.$

Câu 4. (2 điểm)

a) Chứng minh rằng không có các số nguyên x, y, z nào thỏa mãn $4x^2 + 4x = 8y^3 - 2z^2 + 4.$

b) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

Câu 5. (4 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Vẽ đường tròn tâm A , bán kính R với R nhỏ hơn AH . Từ B vẽ tiếp tuyến BM với đường tròn $(A; R)$ với M là tiếp điểm. Đường thẳng HM cắt đường tròn $(A; R)$ tại điểm thứ hai là N .

a) Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MAN đồng dạng với nhau.

b) Chứng minh rằng đường thẳng CN là tiếp tuyến của đường tròn $(A; R)$.

Câu 6. (3 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn và có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I . Gọi E, F, G, H lần lượt là hình chiếu của I trên AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng tứ giác $EFGH$ ngoại tiếp một đường tròn.

NGUYỄN ĐỨC TẤN, NGUYỄN ANH HOÀNG
(TP. Hồ Chí Minh) giới thiệu

Vậy $AD = \frac{\sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}.$ □

Bài 5. Vì $m, n \in \mathbb{N}^*$ nên $m \neq n\sqrt{2}$, hay $m^2 \neq 2n^2 \Rightarrow |m^2 - 2n^2| \geq 1.$

$$\text{Suy ra } \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| = \frac{|m - n\sqrt{2}|}{n} = \frac{|m^2 - 2n^2|}{n(m+n\sqrt{2})} \geq \frac{1}{n(m+n\sqrt{2})} \quad (1)$$

Giả sử tồn tại $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{n^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \quad (2)$$

$$\text{Khi đó } \frac{m}{n} - \sqrt{2} \leq \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| < \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{n^2}.$$

$$\text{Suy ra } mn - n^2\sqrt{2} < \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

$$\text{Hay } mn + n^2\sqrt{2} < 2n^2\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } n(m+n\sqrt{2}) < n^2(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + (n^2-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \leq n^2(\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{n(m+n\sqrt{2})} > \frac{1}{n^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| > \frac{1}{n^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$, mâu thuẫn với (2).

Vậy không tồn tại $m, n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn (2). Suy ra điều phải chứng minh.

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định) giới thiệu

Số 397 (7-2010)

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ 5



**Chuẩn bị
cho kì thi
tốt nghiệp THPT
và thi vào
Đại học**

LTS. Đề thi tuyển sinh khối A năm nay sát với chương trình phổ thông và Cấu trúc đề thi tuyển sinh của Bộ GD&ĐT đã ban hành. Các câu trong đề có một số ý mang tính phân loại học sinh. Dưới đây là phần hướng dẫn và nhận xét một số câu tương đối khó của đề thi của thầy giáo Nguyễn Anh Dũng (Hà Nội).

Bình luận về ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A, năm 2010

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

CÂU I. Cho hàm số
 $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ (1)
 m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

Hướng dẫn. 1) Bạn đọc tự giải.

2) PT hoành độ giao điểm của (1) với trục hoành có dạng

$$x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - m) = 0.$$

Điều kiện bài toán được thỏa mãn khi PT $x^2 - x - m = 0$ (2) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác 1 sao cho

$$x_1^2 + x_2^2 < 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 3.$$

$$\text{Điều kiện là } \begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \\ 1 + 2m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 1 \text{ và } m \neq 0.$$

◀ **Nhận xét.** Đây là bài tập cơ bản về ứng dụng định lý Viète đối với PT bậc hai. Tuy nhiên thí sinh dễ thiếu điều kiện $m \neq 0$ (để các nghiệm của PT (2) khác 1).

★ **Bài luyện tập.** Cho hàm số

$$y = x^3 + (2m + 1)x^2 + (3m - 2)x + m - 2.$$

Tìm m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 3$.

CÂU II.1) Giải phương trình

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x.$$

Hướng dẫn. ĐK $\cos x \neq 0$; $\tan x \neq -1$.

Thay $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$; $1 + \tan x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$,
rồi rút gọn, ta được PT

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}; \sin x = 1 \text{ (loại)}$$

$$\text{Đáp số. } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

◀ **Nhận xét.** Thí sinh dễ bị mất điểm vì không loại nghiệm $\sin x = 1$.

★ **Bài luyện tập.** Giải phương trình

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \right).$$

CÂU II.2) Giải bất phương trình

$$\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1.$$

Hướng dẫn. ĐK $x \geq 0$. Để ý rằng

$$2(x^2 - x + 1) > 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} < 0 \quad (3)$$

BPT đã cho tương đương với

$$x - \sqrt{x} \leq 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \quad (4)$$

Nhận thấy BPT không thoả mãn với $x = 0$.

Với $x > 0$, chia cả hai vế của BPT (4) cho $\sqrt{x}$, và

biến đổi, ta được $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 - \sqrt{2\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)}$.

Đặt $t = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, lúc đó $x + \frac{1}{x} = t^2 + 2$.

BPT (4) trở thành

$$\sqrt{2(t^2+1)} \leq 1-t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ 2(t^2+1) \leq t^2-2t+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ (t+1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1. \text{ Ta được } \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = -1.$$

Giải PT này, ta được nghiệm $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán tương đối khó. Trước hết thí sinh phải nhận ra BPT (3) để chuyển về BPT (4).

Sau đó là phép chia hai vế cho $\sqrt{x}$ và phép đặt ẩn phụ $t = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; biến đổi thành $(t+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t = -1$.

2) Để giải lớp các bài toán dạng này, khi x dương, ta đặt $t = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ thì $t \in \mathbb{R}$ và $x + \frac{1}{x} = t^2 + 2$; còn

nếu đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ thì $t \geq 2$ và $x + \frac{1}{x} = t^2 - 2$.

★ **Bài luyện tập.** Giải bất phương trình

$$x^2 + x + 1 > 3\sqrt{x}(x+1).$$

CÂU III. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx.$$

Hướng dẫn. Ta có

$$I = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{e^x}{1+2e^x} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+2e^x)}{1+2e^x}$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln(1+2e^x) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}.$$

◀ **Nhận xét.** Đây là bài toán cơ bản. Đối với tích phân thứ hai có thể sử dụng phép đổi biến số $t = 1 + 2e^x$.

Tổng quát, với tích phân $I = \int \frac{f(e^x)}{a \cdot e^x + b} dx$, ta có thể giải bằng cách đặt $t = a \cdot e^x + b$.

★ **Bài luyện tập.** Tính $I = \int_0^1 \frac{e^{2x} + 3e^x + 4}{e^x + 1} dx$.

CÂU V. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Hướng dẫn. ĐK $x \leq \frac{3}{4}$; $y \leq \frac{5}{2}$.

Đặt $a = 2x$; $b = \sqrt{5-2y} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$; $y = \frac{5-b^2}{2}$.

Thay vào PT thứ nhất trong hệ, ta được

$$\frac{a(a^2+1)}{2} - \frac{b(b^2+1)}{2} = 0 \Rightarrow a^3 - b^3 + a - b = 0.$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \quad (5)$$

Ta có $a^2 + ab + b^2 + 1 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 1 > 0$ nên từ (5) suy ra $a = b$.

Do đó $2x = \sqrt{5-2y} \Rightarrow x \geq 0$; $y = \frac{5-4x^2}{2}$.

Thay vào PT thứ hai trong hệ và rút gọn, ta được $4x^4 - 6x^2 + 2\sqrt{3-4x} = \frac{3}{4}$ (6)

Xét hàm số $f(x) = 4x^4 - 6x^2 + 2\sqrt{3-4x}$.

Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ và

$$f'(x) = 4x(4x^2-3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{3}{4}\right).$$

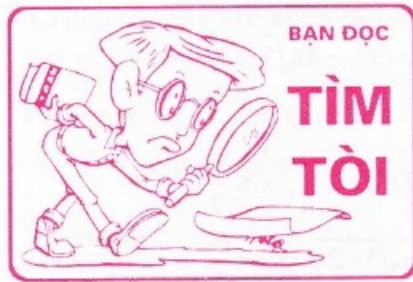
Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục, nghịch biến trong $\left(0; \frac{3}{4}\right)$. PT (6) có nghiệm duy nhất

$x = \frac{1}{2}$. Do đó $y = 2$. **Đáp số.** Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

◀ **Nhận xét.** Đây là bài toán khó. Thí sinh phải nhận xét được PT thứ nhất của hệ có dạng $a^3 - b^3 + a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$. Sau khi thế vào PT thứ hai ta được $f(x) = 0$, với $f(x)$ là một hàm số liên tục, đơn điệu trong tập xác định.

★ **Bài luyện tập.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \\ 2\sqrt{2-x} - \sqrt{(2y-1)^3} = 1. \end{cases}$$



Trong THPT số 385, tháng 7/2009 bài T10/THCS (Cuộc thi giải toán Ki niệm 45 năm tạp chí THPT) có nội dung như sau:

Bài T10/THCS. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho $BX = CY = AZ$. Chứng minh rằng tam giác XYZ đều khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

VỀ MỘT BÀI TOÁN THI

TRẦN NGỌC THẮNG
(GV THPT Đoàn Thị Điểm, Hà Nội)

Trong THPT số 389, tháng 11/2009 Thầy giáo Nguyễn Minh Hà đã đưa ra một lời giải khá đẹp, chỉ cần sử dụng các kiến thức hình học lớp 7. Trong quá trình tìm lời giải khác của bài toán trên, chúng tôi đã sử dụng các kiến thức của hình học lớp 9 và từ cách giải này có thể mở rộng được các lớp bài toán dạng này cho tam giác và tứ giác. Trước tiên, xin trình bày lời giải bài toán trên.

Lời giải. Trước hết ta phát biểu các bổ đề đã biết về tam giác và tứ giác.

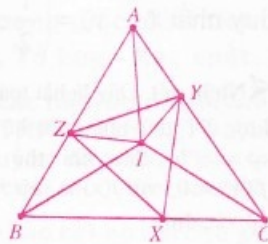
Bổ đề 1. (Bất đẳng thức Ptolemy). Cho tứ giác $ABCD$. Khi đó ta có bất đẳng thức $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Bổ đề 2. (Công thức Leibnitz). Với mọi điểm M trong mặt phẳng chứa tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Bổ đề 3. Cho tam giác ABC , trong đó $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và G là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Việc chứng minh ba bổ đề trên xin nhường cho các bạn đọc.



Trở lại lời giải bài toán.

• Từ tam giác ABC đều dễ dàng suy ra tam giác XYZ đều.

• Giả sử tam giác XYZ đều và đường tròn ngoại tiếp tam

giác XYZ có tâm I , bán kính R (hình vẽ). Khi đó $XY = YZ = ZX = R\sqrt{3}$.

Áp dụng bổ đề 1 vào tứ giác $IYAZ$ ta có $IA \cdot YZ \leq IY \cdot AZ + IZ \cdot AY = R \cdot b$.

Từ đó suy ra $IA \leq \frac{b}{\sqrt{3}}$. Tương tự, thu được

$$IB \leq \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad IC \leq \frac{a}{\sqrt{3}}. \quad \text{Do đó} \quad IA^2 + IB^2 + IC^2 \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1)$$

Sử dụng bổ đề 2 và bổ đề 3 ta có

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = 3IG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} I \equiv G \\ IA = \frac{b}{\sqrt{3}}, IB = \frac{c}{\sqrt{3}}, IC = \frac{a}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = b = c$, hay tam giác ABC đều.

Dựa theo lời giải của bài toán trên ta có thể mở rộng ra các lớp bài toán sau đây.

✪ **Bài toán 1.** Cho tam giác ABC các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho $AY + AZ = b$, $BX + BZ = c$, $CX + CY = a$. Khi đó, tam giác XYZ đều khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

✪ **Bài toán 2.** Cho tam giác ABC các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho

$$AY + AZ = \frac{b+c}{2}; \quad BX + BZ = \frac{c+a}{2};$$

$$CX + CY = \frac{a+b}{2}.$$

Khi đó, tam giác XYZ đều khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

✪ **Bài toán 3.** Cho tam giác ABC các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho

$$AY + AZ = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}; \quad BX + BZ = \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}};$$

$$CX + CY = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Khi đó, tam giác XYZ đều khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

✪ **Bài toán 4.** Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm X, Y, Z, T sao cho $AX = BY = CZ = DT$. Chứng minh rằng hình bình hành ABCD trở thành hình vuông khi và chỉ khi tứ giác XYZT là hình vuông.

Phản lời giải của bốn bài toán trên xin dành cho các bạn đọc.

THÔNG BÁO TẶNG GIÁ TẠP CHÍ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin kính báo với toàn thể bạn đọc: từ tháng 7 năm 2010, giá bìa của Tạp chí được điều chỉnh thành 8.000 đồng / cuốn.

Rất mong tiếp tục nhận được sự ủng hộ của các bạn.

Trân trọng cảm ơn.

THTT

SỬ DỤNG VAI TRÒ... (Tiếp trang 3)

Lời giải. Do vai trò a, b, c là hoán vị vòng quanh nên có thể giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Xét hai khả năng

• Với $a \geq b \geq c \geq 0$. Khi đó

$$a(b-a)(b-c) \leq 0 \Leftrightarrow a^2b + abc \geq ab^2 + ca^2$$

$$\Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq a^2b + bc^2 + abc \quad (1)$$

$$\text{mà } a^2b + bc^2 - 2 = b(3-b^2) - 2$$

$$= -(b-1)^2(b+2) \leq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

• Với $a \geq c \geq b \geq 0$. Khi đó

$$b(c-a)(c-b) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq ca^2 + cb^2 + abc \quad (3)$$

$$\text{Lại có } ca^2 + cb^2 - 2 = c(3-c^2) - 2$$

$$= -(c-1)^2(c+2) \leq 0 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$(a; b; c) = (1; 1; 1), (\sqrt{2}; 0; 1), (0; 1; \sqrt{2}),$$

$$(1; \sqrt{2}; 0). \square$$

Cuối cùng, mời các bạn cùng luyện tập thông qua các bài toán sau.

1. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca - 3abc \geq \frac{1}{4}.$$

2. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$abc + 2 \geq ab + bc + ca \geq abc.$$

3. Cho ba số thực a, b, c thuộc đoạn $[-1; 1]$. Chứng minh rằng

$$|(a-b)(b-c)| + |(b-c)(c-a)| + |(c-a)(a-b)|$$

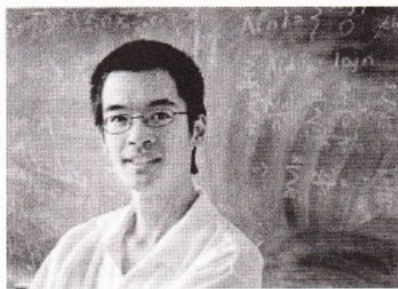
$$\geq \frac{5}{2} |(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

4. Chứng minh rằng với ba số thực a, b, c bất kỳ thuộc đoạn $[1; 2]$ ta có bất đẳng thức

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 10.$$

5. Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 1]$. Chứng minh rằng

$$a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) \leq 1.$$



Thần đồng Toán học Terence Tao [2]

Kể chuyện về các nhà toán học

THẦN ĐỒNG TOÁN HỌC

TERENCE TAO

TRẦN VĂN NHUNG

(Tổng Thư kí Hội đồng Chức danh Giáo sư Nhà nước)

Mục đích chính của bài báo này là viết về thần đồng Toán học, Giáo sư Terence Tao, người giành được Giải thưởng Fields năm 31 tuổi. Nhưng tác giả cũng kết hợp nói thêm về Giáo sư Ngô Bảo Châu, người Việt Nam đầu tiên là ứng viên giành Giải thưởng Field; và về Giáo sư Vũ Hà Văn, một người bạn có nhiều công trình khoa học chung với Tao.

Theo Thông báo của Hội Toán học Hoa Kỳ [1] số tháng 5 năm 2010, Terence Tao (người Australia gốc Hoa) và Enrico Bombieri (người Italia) cùng được trao giải thưởng năm 2010 của Quỹ Vua Faisal với số tiền thưởng chung xấp xỉ 200.000 USD. Giải thưởng khoa học này luân phiên dành cho các lĩnh vực toán học, hóa học, vật lý và sinh học. Cả hai nhà toán học này trước đó đều đã được trao Giải thưởng Fields, giải thưởng cao quý nhất trên thế giới dành cho các nhà toán học đặc biệt xuất sắc chưa quá tuổi 40 (tương đương giải Nobel dành cho các ngành khoa học khác).

Terence Tao đã bộc lộ năng lực toán học rất đặc biệt của mình từ khi còn nhỏ và vì thế người ta gọi anh là thần đồng toán học, còn Giáo sư John Garnett của Trường Đại học Los Angeles, California (UCLA, Hoa Kỳ) thì gọi anh là "Mozart của toán học". Anh sinh ngày 17.7.1975 tại Adelaide (Australia). Bố mẹ anh đều là người Hoa, nhập cư từ Hong Kong vào Australia. Bố anh là bác sĩ nhi khoa, mẹ anh nhận bằng Cử nhân tại Trường Đại học Hong Kong và từng là giáo viên toán bậc THPT tại Hong Kong. Bố anh kể lại rằng trong một cuộc gặp mặt gia đình, khi mới 2 tuổi anh đã dạy Toán và tiếng Anh cho một cậu bé 5 tuổi. Khi được hỏi: Tại sao Tao biết số và chữ ?, bố anh trả lời : Anh học được từ chương trình truyền hình Sesame Street.

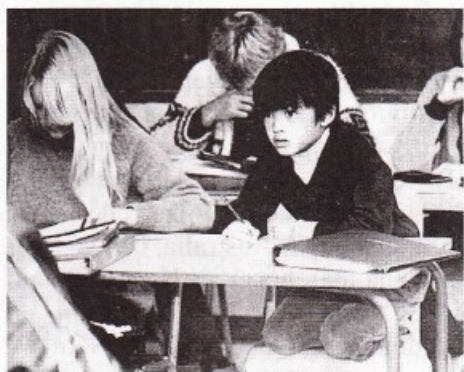
Nữ Giáo sư Miraca Gross, một chuyên gia nghiên cứu về giáo dục tài năng tại Trường

Đại học New South Wales (Australia), đã viết hẳn một bản luận văn về Tao và tài liệu này đã được xuất bản bởi Prufrock Press. Trong đó bà nhắc lại một kỉ niệm đáng nhớ về khả năng đặc biệt của Tao khi anh chưa đầy 4 tuổi: "Cậu bé làm nhầm trong đầu phép tính nhân các số có hai chữ số, trong khi tôi, một người đến để phỏng vấn cậu ấy, lại cần đến bút và giấy để kiểm tra lại kết quả."

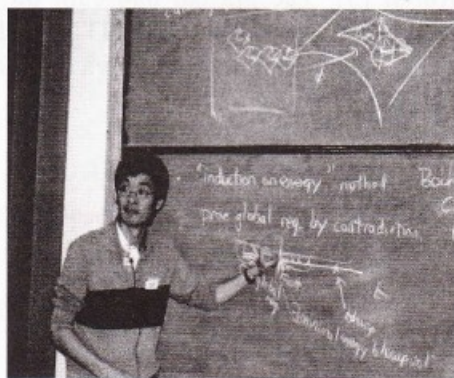
Đề định hướng cho con mình, Billy Tao (bố của Terence Tao) đã tham khảo ý kiến của những chuyên gia về giáo dục cho những đứa trẻ thiên tài. Ông nghĩ: "Để lấy được một tấm bằng ở độ tuổi còn trẻ, hay để trở thành người phá kỉ lục, thì chẳng có nghĩa lí gì. Tôi có một mô hình kim tự tháp tri thức, với một cái nền rộng và sau đó kim tự tháp có thể lên cao hơn. Nếu bạn chỉ nhanh chóng đi lên như một cái cột, thì chắc chắn bạn sẽ dễ bị lung lay ở trên đỉnh và rồi đổ sụp xuống". Và Billy Tao đã sắp xếp cho các giáo sư toán học làm thầy dạy con mình. Nhờ đó mà Terence Tao đã có một sự nghiệp tuyệt vời.

Người viết bài báo này (TVN) cho rằng suy nghĩ trên của Billy Tao không chỉ đúng trong lĩnh vực toán học và các khoa học mà còn đúng theo cả nghĩa rộng hơn cho bất cứ ai muốn trở thành một con người thành đạt, hài hòa và hạnh phúc : Dù là một thần đồng hay một học sinh, sinh viên bình thường, ngoài việc học tập, nghiên cứu chuyên môn (đương nhiên với tốc độ và kết quả có thể rất khác nhau), ai cũng cần phải trau dồi thêm nền kiến thức văn hóa đủ chắc, đủ rộng, để đặt

chuyên môn của mình trên đó. Và cuối cùng thì cần phải rèn luyện để có sức khỏe và sự dẻo dai làm nền tảng cho tất cả những điều vừa nói ở trên, cho sự nghiệp và cho việc làm người. *Vauvenargues* đã nói : "*Ta phải chăm sóc sức khỏe mạnh của thân thể để giữ gìn sự khỏe mạnh của trí tuệ*". Đối với ai cũng vậy, đời người là một cuộc chạy Marathone chứ không phải chỉ chạy cự li ngắn. Qua các bức ảnh tôi thấy *Terence Tao* rất khỏe mạnh, vui tươi và còn rất đẹp trai, có một gia đình hạnh phúc, không giống như một vài thần đồng khác. Thì ra để vun trồng được một thần đồng, một tài năng đặc biệt cũng cần có những ông bố, bà mẹ, thầy cô giáo và môi trường xuất sắc.



Thần đồng 7 tuổi *Terence Tao* đang làm bài thi toán cùng với 10 sinh viên trong năm 1983 [3].



Giáo sư *Terence Tao* đang giảng bài [2].

Khi lên 8 tuổi *Tao* đã đạt 760 (trên 800) điểm môn Toán khi thi SAT và là một trong hai đứa trẻ duy nhất đạt trên 700 điểm trong lịch sử của chương trình nghiên cứu tài năng đặc biệt của *Johns Hopkins*. Từ năm lên 9 tuổi

anh đã theo học các bài giảng toán học ở bậc đại học. Năm 1986, khi mới 11 tuổi, anh đã tham dự Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) dành cho học sinh THPT và liên tục trong ba năm 1986-1988 anh đều tham gia và lần lượt đoạt Huy chương Đồng, Bạc và Vàng. Anh là người trẻ nhất cho đến nay giành Huy chương Vàng trong lịch sử IMO (bắt đầu từ IMO đầu tiên năm 1959 được tổ chức tại Rumani). *Tao* tốt nghiệp đại học, nhận Bằng Thạc sĩ tại Trường Đại học Flinders (Australia) năm 17 tuổi. Năm 1992, anh giành được học bổng Fulbright để làm nghiên cứu sinh tại Trường Đại học Princeton (Hoa Kỳ) dưới sự hướng dẫn của Giáo sư *Elias Stein* và nhận Bằng Tiến sĩ khi mới 20 tuổi. Năm 24 tuổi anh được phong Giáo sư thực thụ (full professor) của UCLA và là giáo sư trẻ nhất trong lịch sử của trường đại học này cho đến nay.

Tạp chí *NewScientist* (22.8.2006) viết: "*Terence Tao* là nhà toán học trẻ nổi tiếng đến mức mà nhiều nhà toán học trên thế giới đều muốn lời cuốn anh về bài toán của mình và anh trở thành một trong những Ông Thợ giải toán hợp tác đặc lực với các đồng nghiệp trên thế giới". Giáo sư *C. L. Fefferman*, người được nhận Giải thưởng Fields, nói : "*Nếu bạn bị bế tắc trong một bài toán, một trong những cách giải quyết là tìm cách lời cuốn Terence Tao*". *Tao* nghiên cứu nhiều lĩnh vực của toán học như giải tích điều hòa, phương trình vi phân đạo hàm riêng, tổ hợp, lý thuyết số, xử lý tín hiệu. Năm 2004, *Ben Green* và *Terence Tao* công bố một tiên án phẩm chứng minh sự tồn tại của cấp số cộng có độ dài bất kỳ của các số nguyên tố và nhờ đó anh được trao Huy chương của Hội Toán học Australia. Giáo sư *John Garnett* (UCLA) còn nói : "*Tao* viết 56 bài báo khoa học trong vòng hai năm và tất cả những bài này đều có chất lượng cao. Còn tôi năm nào may mắn thì được ba bài".

Năm 2006, khi mới 31 tuổi, tại Đại hội Toán học Quốc tế lần thứ 25 ở Madrid, anh là một trong những người trẻ nhất, người Australia đầu tiên và là giáo sư đầu tiên của UCLA giành được Giải thưởng Fields vì những đóng góp to lớn của anh cho lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, tổ hợp, giải tích điều hòa và lý thuyết số cộng tính. (Năm 1954, nhà toán học

người Pháp Jean-Pierre Serre trở thành người trẻ nhất trong lịch sử giành được Giải thưởng Fields, ở tuổi 28 và cho đến nay vẫn là người giữ kỷ lục này). Ngoài ra anh còn giành được nhiều giải thưởng toán học cao quý khác và được mời tham gia ban biên tập của nhiều tạp chí toán học nổi tiếng thế giới. Anh là Viện sĩ của Viện Hàn lâm Khoa học Hoàng gia Anh, Viện Hàn lâm Khoa học Australia, Viện Hàn lâm Khoa học và Nghệ thuật Hoa Kỳ, ... Hiện nay Terence Tao đang sống cùng với vợ và con trai tại Los Angeles (Hoa Kỳ).

Ở Việt Nam chúng ta cũng có nhiều nhà toán học trẻ xuất sắc thể hiện tài năng rất sớm. Tôi muốn nói đến những học sinh đã từng đoạt giải cao nhất trong các Kỳ thi học sinh giỏi toán toàn miền Bắc từ đầu những năm sáu mươi của thế kỷ trước, Kỳ thi học sinh giỏi toán Quốc gia từ khi đất nước thống nhất và Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế từ năm 1974 cho đến nay ở [6, 7].



Vũ Hà Văn và người bạn thân thiết Terence Tao (áo trắng) trong một bữa ăn tại gia đình anh [2].

Giáo sư Ngô Bảo Châu, nguyên là học sinh chuyên Toán, Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội (nay là ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội), là một gương mặt điển hình của sự thành đạt. Anh sinh năm 1972 tại Hà Nội và là con trai của GS. TSKH Ngô Huy Cận (nhà Cơ học) và PGS. TS Trần Lưu Vân Hiến (Bác sĩ). Anh được trao giải thưởng danh giá Clay cùng với Giáo sư Gerard Laumon năm 2004, được phong Giáo sư của Trường Đại học Paris 11 năm 2004 khi anh 32 tuổi, được phong đặc cách Giáo sư Việt Nam vào năm 2005 và cho đến nay anh là người trẻ nhất được phong Giáo sư ở Việt Nam. Tạp chí "The Time" bình

chọn kết quả của anh về chứng minh Bổ đề Cơ bản Langlands là một trong 10 phát minh khoa học tiêu biểu của năm 2009. Anh là một trong 20 nhà toán học xuất sắc được mời đọc báo cáo toàn thể dài một giờ tại Đại hội Toán học thế giới sắp được tổ chức tại Ấn Độ trong năm 2010 và là ứng viên sáng giá nhận Giải thưởng Fields lần này.

Giáo sư Vũ Hà Văn, nguyên là học sinh chuyên Toán Trường THPT Chu Văn An - Hà Nội, là một người bạn thân của Terence Tao. Hai người đã cùng công bố 15 bài báo khoa học và cuốn sách chuyên khảo *Additive Combinatorics* (Tổ hợp cộng tính) được giới toán học đánh giá cao. Giáo sư Vũ Hà Văn sinh năm 1970 tại Hà Nội và là con của nhà thơ Vũ Quần Phương, người đồng hương Hải Hậu của tôi. Vũ Hà Văn được phong Giáo sư của Trường Đại học Rutgers (Hoa Kỳ), được trao giải thưởng cao quý Polya của Hội Toán học Công nghiệp và Ứng dụng Hoa Kỳ (SIAM) và được phong Giáo sư Việt Nam năm 2009. Điều khác nhau là ở chỗ: Terence Tao mang Quốc tịch Australia, còn gần như tất cả những nhà toán học Việt Nam trẻ thành đạt mà tôi biết, trong đó có Ngô Bảo Châu, Vũ Hà Văn, ..., đều mang Quốc tịch Việt Nam.

Bạn đọc nào muốn tìm hiểu thêm về những nhà toán học được nhận Giải thưởng Fields có thể tìm đọc cuốn sách của GS. TSKH Hà Huy Khoái [5]. Tác giả bài báo cảm ơn GS. TSKH Nguyễn Duy Tiến (ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội) đã đọc bản thảo bài báo và cho nhiều góp ý bổ ích.

Tài liệu tham khảo

- [1] Notices of the Americal Mathematical Society, May 2010.
- [2]- <http://www.mathvn.com/2008/12/thn-ng-ton-he-terence-tao-ngi-tr-nht-c.html>
- <http://www.mathvn.com/2010/02/vu-ha-van-mot-trong-hai-giao-su-toan.html>
- [3] <http://www.smh.com.au/news/national/mozart-of-maths/2006/08/25/1156012745894.html>
- [4] http://vi.wikipedia.org/wiki/Terence_Tao
- [5] Hà Huy Khoái: Các nhà toán học được giải thưởng Fields (1936-2006), Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.
- [6] http://www.dientantoanhoc.net/vmf/index.php?option=com_ccboard&view=postlist&forum=12&topic=45&Itemid=474#ccbp45
- [7] <http://www.khoia0.com/Details.aspx?action=Thanhlich>



Số siêu việt e và các bất đẳng thức cổ điển

LÊ QUỐC HÁN

(GV Khoa Toán - Trường Đại học Vinh)

1. Các bất đẳng thức cổ điển

• **Bất đẳng thức Cauchy**, mang tên nhà toán học Pháp Agustin Louis Cauchy (1789–1857):

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \text{với } a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

thật ra đã được biết từ thời thượng cổ. Trong các kim tự tháp ở Ai Cập (năm 2900–1167 trước Công nguyên), người ta đã tìm thấy các hình vẽ được khắc trên đá liên quan đến bất đẳng thức này, với $n = 2$. Tuy nhiên, A. L. Cauchy được xem là người đầu tiên chứng minh bất đẳng thức đó trong trường hợp tổng quát một cách chặt chẽ và đã sử dụng nó một cách có hiệu quả trong các công trình nghiên cứu toán học của mình.

Ngày nay đã có hàng chục cách chứng minh BĐT Cauchy, dựa trên các phương pháp chính như: *Biến đổi đồng nhất*; *Quy nạp toán học*; *Sử dụng tính chất hàm lồi*; *Phương pháp phản chứng*; Trong đó, phương pháp chứng minh quy nạp theo hai chiều thuận nghịch theo tôi là độc đáo hơn cả. Nội dung phương pháp đó như sau:

Bước 1. Chứng minh BĐT Cauchy cho trường hợp $n = 2^m$ bằng quy nạp theo m (quy nạp tiến).

Bước 2. Giả sử BĐT Cauchy đúng với $n + 1$, chứng minh BĐT đó đúng với n bằng cách đặt

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (\text{quy nạp lùi}).$$

• **Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz**

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

cũng có nhiều ứng dụng trong toán học. Để chứng minh bất đẳng thức này, có thể dùng đồng nhất thức Cauchy–Lagrange nổi tiếng:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 + \sum_{i>j} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

hoặc sử dụng nhận xét: Tam thức bậc hai $f(t) = At^2 + 2Bt + C \geq 0, \forall t$ thì $\Delta' \leq 0$ hay

$$B^2 \leq AC, \quad \text{với } A = \sum_{i=1}^n a_i^2, B = \sum_{i=1}^n a_i b_i, C = \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz còn được gọi là bất đẳng thức Bunyakovsky.

• **Bất đẳng thức Bernoulli**, mang tên nhà toán học Thụy sĩ Jacob Bernoulli I (1654–1705):

Với mọi số thực a thoả mãn $a > -1$ và với số nguyên dương n tùy ý ta luôn có $(1+a)^n \geq 1+na$.

Bất đẳng thức Bernoulli có nhiều ứng dụng trong toán học. Để chứng minh BĐT này, có thể dùng phương pháp quy nạp theo n hoặc sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n$.

Ngoài ba bất đẳng thức quen thuộc trên, danh sách “các bất đẳng thức cổ điển” còn có một số bất đẳng thức kinh điển khác.

• **Bất đẳng thức Hölder**, mang tên nhà toán học Đức Hölder (1859–1937):

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

trong đó p, q là hai số dương thoả mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bất đẳng thức Bunyakovsky là trường hợp riêng của BĐT Hölder khi $p = q = 2$.

- Bất đẳng thức Minkowski, mang tên nhà toán học Đức H. Minkowski (1864–1909):

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

trong đó a_i, b_i là những số dương và $p \geq 1$.

- Bất đẳng thức Tchebychev, mang tên nhà toán học Nga P. L. Tchebychev (1821–1894):

Nếu $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n, b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ (hoặc $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$) thì

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}.$$

2. Số e và phép tính lôgarit

Vào giữa thế kỉ XVII, các nhà toán học quan tâm đến dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ với n là số

nguyên dương. Dùng BĐT Bernoulli ta thấy ngay $u_n > 2$. Sử dụng BĐT Cauchy, có thể chứng minh được $u_n < 3$. Như vậy $2 < u_n < 3$. Hơn nữa, $u_{n+1} > u_n$. Như vậy, khi $n \rightarrow +\infty, u_n$ sẽ tiến tới một giới hạn hữu hạn nào đó. Giới hạn này không phải là số hữu tỉ hay “số vô tỉ quen thuộc” (các số chứa căn thức), mà là một số “vô tỉ không quen thuộc”: số vô tỉ siêu việt (!). Các nhà toán học gọi số đó là số e và nói rằng dãy (u_n) hội tụ về e. Điều bất ngờ nhất là họ đã chứng minh được rằng

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots, \text{ trong đó } n! = 1.2 \dots n.$$

Để tiếp tục câu chuyện, chắc chắn các bạn đã biết phép trừ là phép toán ngược của phép cộng, phép chia là phép toán ngược của phép nhân. Một câu hỏi đặt ra hết sức tự nhiên: Vậy phép toán ngược của phép nâng lên lũy thừa là phép toán nào? Ngoài phép khai căn còn có phép toán lấy lôgarit.

Cho a là một số dương khác 1, b là một số dương và n là số thỏa mãn $a^n = b$. Khi đó phép toán tìm n khi biết a và b được gọi là *phép toán lấy lôgarit* (cơ số a của b), kí hiệu $n = \log_a b$.

Hai trường hợp được các nhà toán học quan tâm:

- Khi $a = 10$ thì ta nói rằng n là *lôgarit thập phân* của b và viết $n = \lg b$ hoặc $n = \log n$.

- Khi $a = e$ thì ta nói n là *lôgarit tự nhiên* hay *lôgarit Neper* của b và viết $n = \ln b$. Cách gọi thứ hai này để tưởng nhớ nhà toán học Anh J. Neper (1550–1617), người đã phát minh ra phép toán lôgarit. Thật đáng ngạc nhiên khi các nhà toán học đầu tiên tìm thấy kết quả

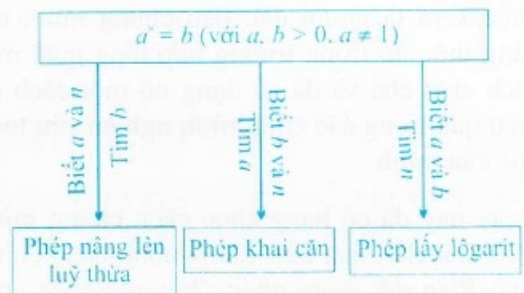
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \ln 2. \quad (!)$$

Các số siêu việt π và e được liên hệ với nhau bởi hệ thức $e^{i\pi} = -1$ (Công thức Euler), trong đó $i^2 = -1$. Hệ thức này nhận được từ công thức Moivre, mang tên nhà toán học Pháp Abraham De Moivre (1667–1754):

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

hay $(e^{i\varphi})^n = e^{ni\varphi}$.

Cuối cùng, xin nêu lên sơ đồ liên hệ giữa ba phép toán: phép nâng lên lũy thừa, phép khai căn và phép lấy lôgarit.



Để kết thúc, mời các bạn hãy giải các bài tập sau.

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức Cauchy, Bunyakovsky, Bernoulli.

Bài 2. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Bài 3. Giả sử $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ trong đó n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$a) \quad 2 < u_n < 3; \quad b) \quad u_{n+1} > u_n.$$



Giải đáp: **THẾ CỜ 3** Trắng đi trước chiếu hết sau 3 nước (THTT số 388 tháng 10.2009)

1. ♔g7 ♕e7 2. ♔b2 ♕d6 3. ♔g2#

Nhận xét. Bạn Vũ Hoàng Minh, 7A10, THCS Giảng Võ, Hà Nội, giải tốt và được nhận tặng phẩm.

LÊ THANH TÚ
(Đại Kiện tương Quốc tế)

Giải đáp:



(Đề đăng trên THTT số 388 tháng 10.2009)

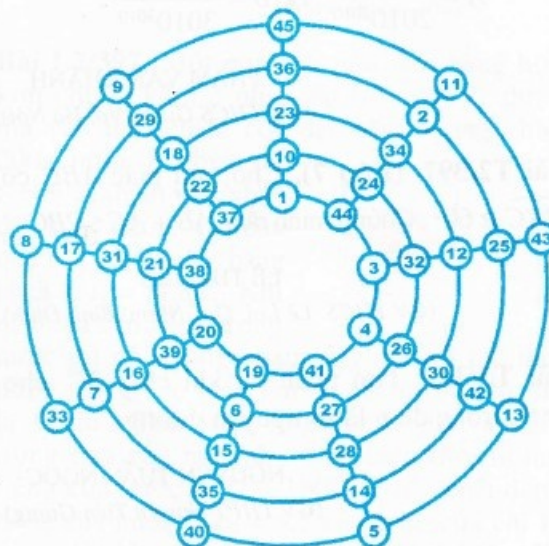
Ta thấy $1 + 2 + 3 + \dots + 45 = 45 \times 23 = 5 \times 207 = 9 \times 115$. Dưới đây trình bày một cách xếp số dễ thực hiện. Ta xếp 45 số trong một bảng hình chữ nhật gồm 5 hàng ngang và 9 hàng dọc sao cho tổng 5 số ở mỗi hàng dọc bằng 115; có thể chọn sao cho trong mỗi hàng dọc tổng hai số đầu tiên bằng 46 và tổng ba số còn lại bằng 67 như ở bảng sau:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	44	43	42	41	40	39	38	37
10	11	12	13	14	15	16	17	18
23	24	25	26	27	19	20	21	22
36	34	32	30	28	35	33	31	29

Tiếp đó ở mỗi hàng dọc chọn một số để được 9 số (không trùng với các số đã chọn) sao cho tổng của 9 số đó bằng 207. Một cách chọn như thế cho đáp án như ở hình vẽ.

Chú ý. Bài toán có nhiều đáp án, chẳng hạn từ hình vẽ bên có thể:

- Đòi 5 số trên đường thẳng hướng tâm này sang đường thẳng hướng tâm khác mà vẫn theo thứ tự vòng tròn;
- Đòi 9 số ở vòng tròn này sang vòng tròn khác mà vẫn giữ thứ tự đường thẳng hướng tâm;



- Đòi cặp hai số đầu tiên (hoặc bộ ba số cuối) trong ba vòng tròn nằm giữa sang cặp hai số đầu tiên (hoặc bộ ba số cuối) khác, nhưng vẫn giữ thứ tự vòng tròn (chẳng hạn đổi 10, 23, 36 cho 27, 28, 14).

Các bạn sau có lời giải tốt, được nhận tặng phẩm:

- 1) Phan Đức Minh, 11A15, THPT Thái Phiên, Hải Phòng;
- 2) Ngô Ngọc Đông, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định;
- 3) Trịnh Thị Hải Yến, 12B1, THPT Triệu Sơn III, Thanh Hóa;
- 4) Nguyễn Văn Tiến, 12T5, THPT Lục Ngạn III, Bắc Giang;
- 5) Nguyễn Văn Hải, 28 Tân Trụ, P.15, Q. Tân Bình, TP. Hồ Chí Minh.

ĐAN QUỲNH

Số 397 (7-2010)

TOÁN HỌC
Tuổi trẻ 15



CÁC LỚP THCS

Bài T1/397. (Lớp 6). So sánh hai phân số

$$A = \frac{1010^{1010}}{2010^{2010}} \text{ và } B = \frac{2010^{2010}}{3010^{3010}}.$$

PHẠM VĂN KHÁNH
(GV THCS Giảng Võ, Hà Nội)

Bài T2/397. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} \geq 60^\circ$. Chứng minh rằng $AB + AC \leq 2BC$.

LÊ THỊ LIỄU
(GV THCS Lê Lợi, Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T3/397. Tìm phần dư khi chia 3^{2^n} cho 2^{n+3} , trong đó n là số nguyên dương.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T4/397. Cho tam giác ABC . Dựng hình bình hành $AMPN$ sao cho các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC ; điểm P nằm bên trong tam giác ABC . Gọi Q là giao điểm của đường thẳng AP và cạnh BC . Chứng minh rằng

$$\frac{AM \cdot AN \cdot PQ}{AB \cdot AC \cdot AQ} \leq \frac{1}{27}.$$

Hãy xác định vị trí điểm P để đẳng thức xảy ra.

DƯƠNG VĂN SƠN
(Học viên Cao học, ĐH Vinh)

Bài T5/397. Giải phương trình

$$\left(x + \frac{5-x}{\sqrt{x}+1}\right)^2 = \frac{-192(\sqrt{x}+1)}{5\sqrt{x}-x\sqrt{x}}.$$

PHAN THẾ HẢI
(GV CDSP Bà Rịa, Vũng Tàu)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/397. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm K và L sao cho các điểm O_1 và O_2 ở về cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa đoạn thẳng KL . Tiếp tuyến tại K của đường tròn (O_1) cắt đường tròn (O_2) tại A . Tiếp tuyến tại K của đường tròn (O_2) cắt đường tròn (O_1) tại B . Tính diện tích tam giác AKB , biết rằng $AL = 3$, $BL = 6$ và $\tan \widehat{AKB} = -\frac{1}{2}$.

NGUYỄN ĐỀ
(Hải Phòng)

Bài T7/397. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + 5 \geq (a+b)(b+c)(c+a).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

VŨ THANH TÚ
(SV K54CC, Khoa CNTT, ĐH Công nghệ, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/397. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 3z^3 + 2z^2 \\ y = 3x^3 + 2x^2 \\ z = 3y^3 + 2y^2. \end{cases}$$

HOÀNG THẾ NGHĨA
(GV THPT Ngọc Hà, Hà Giang)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/397. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh và h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao tương ứng. Ký hiệu r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng

$$\frac{9R}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{h_a + \sqrt{h_b h_c}} + \frac{1}{h_b + \sqrt{h_c h_a}} + \frac{1}{h_c + \sqrt{h_a h_b}} \leq \frac{1}{2r}.$$

TRẦN HỒNG SƠN
(Sở GD-ĐT Thái Bình)

Bài T10/397. Với mỗi tập A gồm n điểm phân biệt trong mặt phẳng ($n \geq 2$), kí hiệu $T(A)$ là tập các vectơ có điểm đầu và điểm cuối đều thuộc A . Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|T(A)|$.

(Kí hiệu $|T(A)|$ là số phần tử của tập $T(A)$).

ĐINH VĂN KHÂM

(GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Bài T11/397. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hai điều kiện

$$\begin{cases} f(2012) = 2011 \\ f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Kí hiệu $f_n(x) = \underbrace{f(f \dots f(x))}_{n \text{ lần } f}$. Hãy tính $f(2010)$.

HUỖNH TẤN CHÂU

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T12/397. Cho dãy số (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định bởi $x_1 = 2,1$ và

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 2 + \sqrt{x_n^2 + 8x_n - 4}}{2}.$$

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i+1}^2 - 4}$.

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

NGUYỄN HOÀNG NAM

(GV THPT Tây Sơn, Bình Định)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/397. Một hạt có khối lượng m chuyển động trên mặt phẳng ngang, nhận, dưới tác dụng của một lực có độ lớn không đổi F và có phương quay trong mặt phẳng này với vận tốc góc không đổi ω . Giả sử lúc $t = 0$ hạt đứng yên, hãy tính

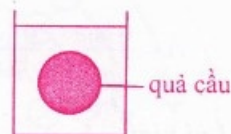
a Vận tốc của hạt theo thời gian.

b) Quãng đường hạt đi được giữa hai lần dừng liên tiếp và vận tốc trung bình của hạt trong thời gian đó.

TRẦN KHÁNH HẢI

(Thừa Thiên - Huế)

Bài L2/397. Một quả cầu nhỏ làm bằng hợp kim chì và kẽm ở nhiệt độ $t_1 = 140^\circ\text{C}$, được thả vào một chiếc cốc đặt nằm ngang chứa 200g nước ở nhiệt độ $t_2 = 30^\circ\text{C}$ (hình vẽ). Nhiệt độ của nước và của quả cầu khi có cân bằng nhiệt là $t_3 = 31,8^\circ\text{C}$. Khi quả cầu cân bằng trong nước thì nó không chạm đáy cốc và thể tích nước trong cốc tăng lên so với trước khi thả là 50cm^3 . Tìm khối lượng của chì và kẽm trong quả cầu nói trên. Cho biết khối lượng riêng của nước là $D = 1000\text{kg/m}^3$; nhiệt dung riêng của nước là $c_0 = 4,2 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$, của chì là $c_1 = 0,13 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$, của kẽm là $c_2 = 0,38 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$. Bỏ qua sự trao đổi nhiệt với cốc và môi trường.



NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/397. (For 6th grade). Compare the following two fractions

$$A = \frac{1010^{1010}}{2010^{2010}} \text{ and } B = \frac{2010^{2010}}{3010^{3010}}.$$

T2/397. (For 7th grade). Let ABC be a triangle with $\widehat{BAC} \geq 60^\circ$. Prove that $AB + AC \leq 2BC$.

T3/397. Find the remainder when dividing 3^{2^n} by 2^{n+3} , where n is a positive integer.

T4/397. Let ABC be a triangle. Construct a parallelogram $AMPN$ so that the points M, N

are in AB, AC respectively; P lies inside the triangle ABC . Let Q be the intersection of the line AP and BC . Prove that

$$\frac{AM \cdot AN \cdot PQ}{AB \cdot AC \cdot AQ} \leq \frac{1}{27}.$$

Find the position of P when the equality occurs.

T5/397. Solve the equation

$$\left(x + \frac{5-x}{\sqrt{x}+1}\right)^2 = \frac{-192(\sqrt{x}+1)}{5\sqrt{x}-x\sqrt{x}}.$$

(Xem tiếp trang 29)



★ Bài T1/393. Cho 2010 số tự nhiên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2010}$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a_1^{11}} + \frac{1}{a_2^{11}} + \frac{1}{a_3^{11}} + \dots + \frac{1}{a_{2010}^{11}} = \frac{1005}{1024}.$$

Hãy tính

$$A = \frac{a_{2010}^6}{a_1^5} + \frac{a_{2009}^6}{a_2^5} + \frac{a_{2008}^6}{a_3^5} + \dots + \frac{a_6^6}{a_{2010}^5}.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{a_1^{11}} + \frac{1}{a_2^{11}} + \frac{1}{a_3^{11}} + \dots + \frac{1}{a_{2010}^{11}}.$$

• Nếu có ít nhất một số tự nhiên a_i nào đó mà $a_i = 1$ thì $\frac{1}{a_i^{11}} = 1$, suy ra $B > 1$ mà $\frac{1005}{1024} < 1$, trái giả thiết. Vậy tất cả các số $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$ đều lớn hơn 1.

• Nếu tất cả các số $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$ đều bằng 2 thì $B = \frac{1}{2^{11}} \times 2010 = \frac{1005}{1024}$, thỏa mãn giả thiết.

• Nếu có ít nhất một số $a_i > 2$ thì $\frac{1}{a_i^{11}} < \frac{1}{2^{11}}$ nên $B < \frac{1}{2^{11}} \times 2010 = \frac{1005}{1024}$, trái giả thiết.

Vậy $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{2010} = 2$.

Thay vào biểu thức A, ta được

$$A = 2 \times 2010 = 4020. \quad \square$$

◀ Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng:

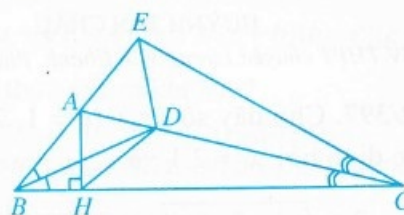
Phú Thọ: Nguyễn Thanh Quang, 6A4, THCS Giầy Phong Châu, Phú Ninh; Vĩnh Phúc: Không Trọng Quang, 6A, THCS Đông Quế, Sông Lô, Lê Văn

Quang, Nguyễn Thị Lan, Nguyễn Hồng Ngọc, 6A, THCS Lập Thạch; Hà Nam: Đỗ Đăng Dương, 6A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; Hải Phòng: Nguyễn Khánh Hưng, 6A1, THCS Hồng Bàng, Ngô Quyền; Nghệ An: Đậu Hương Giang, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; Hà Tĩnh: Phạm Huyền Trang, Trần Thị Minh Hằng, 6B, Võ Trà My, Nguyễn Thị Thương, Trần Phương Thảo, Nguyễn Bảo Quang, Nguyễn Lê Tuấn Anh, 6C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; TP. Hồ Chí Minh: Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 6A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/393. Cho tam giác ABC có góc B và góc C nhọn. Vẽ đường phân giác BD và đường cao AH của tam giác đó. Biết rằng $\widehat{ADB} = \widehat{AHD} = \alpha$. Tính số đo góc α .

Lời giải



Từ giả thiết ta có

$$\alpha = \widehat{ADB} = \widehat{DBC} + \widehat{BCA} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \widehat{BCA}$$

$\Rightarrow \widehat{ABC} + 2\widehat{BCA} = 2\alpha$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $\widehat{ACE} = \widehat{ACB}$. Khi đó tam giác EBC có D là giao điểm ba đường phân giác và $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = 2\alpha$, hay

$$\widehat{BEC} = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \widehat{DEC} = \frac{\widehat{BEC}}{2} = 90^\circ - \alpha$$

$= \widehat{DHC}$ (do $\widehat{AHD} = \alpha$). Suy ra $\triangle DEC = \triangle DHC$ (g.c.g) $\Rightarrow CE = CH$. Từ đó, lại có $\triangle CEA = \triangle CHA$ (c.g.c) nên $\widehat{CEA} = \widehat{CHA} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{AHD} = \widehat{AED}$.

$$\text{Vậy } \alpha = \widehat{AHD} = \widehat{AED} = \frac{\widehat{AEC}}{2} = 45^\circ. \quad \square$$

◀ Nhận xét. Bài toán không quá khó, mấu chốt là dự đoán được số đo của góc α để có hướng giải đúng. Ngoài lời giải trên đây, một số bạn còn dùng phương pháp phản chứng, loại trừ các trường hợp $\alpha > 45^\circ$, $\alpha < 45^\circ$ để kết luận $\alpha = 45^\circ$. Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt:

Hải Phòng: Lương Thế Sơn, 7A1, THCS Hồng Bàng;
Hà Tĩnh: Thân Ngọc Phương Chi, Nguyễn Thị Hương Giang, Trần Thực Viên, 7A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc;
Quảng Ngãi: Tống Thành Nguyễn, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/393.** *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$y^3 = x^6 + 2x^4 - 1000.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Với $|x| \geq 5$ ta có $2x^4 > 1000$

$$\Rightarrow y^3 = x^6 + 2x^4 - 1000 > x^6 \Rightarrow y > x^2.$$

Mặt khác $(x^2 + 1)^3 - y^3$

$$= (x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) - (x^6 + 2x^4 - 1000)$$

$$= x^4 + 3x^2 + 1001 > 0 \text{ với } \forall x, \text{ nên } x^2 + 1 > y.$$

Vậy ta có $x^2 < y < x^2 + 1$. Điều này không thể xảy ra với x, y nguyên.

Suy ra $|x| \leq 4$ hay $x \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\}$.

Kiểm tra trực tiếp ta thấy $x = 0, y = -10$ là nghiệm của phương trình đã cho. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn tham gia đều giải đúng bài này. Các bạn có lời giải gọn là:

Vĩnh Phúc: Đỗ Xuân Việt, 9A, THCS Lập Thạch; **Phú Thọ:** Đinh Anh Hoàng, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hải Phòng:** Lê Đức Tiến, 9A1, THCS Lê Khánh Thiện, Kiên An; **Thanh Hóa:** Nguyễn Hiếu, 8A, THCS Xuân Lộc, Hậu Lộc; **Quảng Bình:** Lê Như Nguyễn, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Ngãi:** Phạm Viết Hoàng, 9B, THCS Lê Hồng Phong, TP. Quảng Ngãi.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/393.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{a}{b+c+d-a} + \frac{b}{c+d+a-b} + \frac{c}{d+a+b-c} + \frac{d}{a+b+c-d}$$

trong đó a, b, c, d là độ dài các cạnh của một tứ giác lồi.

Lời giải. Đặt $x = b + c + d - a; y = c + d + a - b; z = d + a + b - c; t = a + b + c - d$, suy ra

$$a = \frac{y+z+t-x}{4}; b = \frac{z+t+x-y}{4};$$

$$c = \frac{t+x+y-z}{4}; d = \frac{x+y+z-t}{4}.$$

Vì a, b, c, d là độ dài các cạnh của một tứ giác lồi nên x, y, z, t là các số dương. Do đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4} \left(\frac{y+z+t-x}{x} + \frac{z+t+x-y}{y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t+x+y-z}{z} + \frac{x+y+z-t}{t} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{t}{x} + \frac{x}{t} \right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{t}{y} + \frac{y}{t} \right) + \left(\frac{t}{z} + \frac{z}{t} \right) - 4 \right). \end{aligned}$$

Áp dụng kết quả: Với $m > 0; n > 0$ luôn có $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$, đẳng thức xảy ra khi $m = n$, ta có

$$P \geq \frac{1}{4} (2+2+2+2+2+2-4) \Leftrightarrow P \geq 2.$$

Vậy $P_{\min} = 2$, đạt được khi và chỉ khi tứ giác đã cho là hình thoi. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Đa số các bạn giải theo cách trên. Có bạn áp dụng BĐT $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ với x, y là các

số dương, hoặc BĐT Bunyakovsky cũng cho kết quả như trên. Một số bạn đã nêu và chứng minh bài toán tổng quát (bằng cách áp dụng BĐT Cauchy cho n số dương) như sau:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là độ dài các cạnh của một đa giác n cạnh ($n \geq 3$). Đặt $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Khi đó ta có

$$\frac{a_1}{S-2a_1} + \frac{a_2}{S-2a_2} + \dots + \frac{a_n}{S-2a_n} \geq \frac{n}{n-2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, tức là đa giác n cạnh có tất cả các cạnh bằng nhau.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Phương Linh, 9A8, THCS Nguyễn Trường Tộ; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Minh Thu, 9A, THCS Tân Lập, Vũ Thư; **Nam Định:** Bùi Trọng Dũng, 9A, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Hà Nam:** Đỗ Đăng Dương, 6A, THCS Đình Công Tráng; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Hà Phương, 9B, THCS Vĩnh Yên, Nguyễn Văn Hậu, 9A1, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** Hoàng Huy Liệu, 8B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Lê Thị Phương Mai, 9A3, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Lê Văn Huy, 9C, THCS Vạn

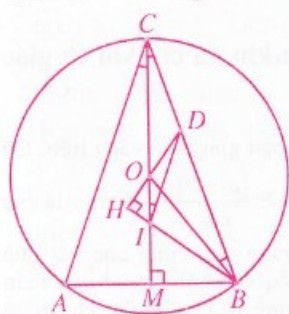
Thắng, Nguyễn Hiếu, 8A, THCS Xuân Lộc, Hậu Lộc;
Nghệ An: Cao Minh Sơn, Cao Văn Kiên, 9D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Đỗ Hồng Quân, Phan Thanh Tùng, 8D, Trần Trung Hiếu, 9A, THCS Hòa Hiếu II, TX. Thái Hòa; **Phú Thọ:** Đình Anh Hoàng, 9A3, Nguyễn Thị Mai Anh, 8A1, Trần Ngọc Hiếu, 9A3, THCS Lâm Thao; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Bảo Trâm, Bùi Thị Hàn Ný, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Bến Tre:** Lê Thị Minh Thảo, 9⁸, THCS TP. Bến Tre; **Ninh Thuận:** Hoàng Trần Minh, 9⁵, THCS Lý Tự Trọng, TP. Phan Rang.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/393.** Cho tam giác ABC cân tại C. Gọi O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC, D là điểm thuộc cạnh BC sao cho DO vuông góc với BI. Chứng minh rằng DI song song với AC.

Lời giải. Do tam giác ACB cân tại C nên C, I, O, M thẳng hàng và $CM \perp AB$, trong đó M là trung điểm của AB.

Ta chứng minh cho trường hợp $\widehat{ACB} < 60^\circ$, tức O nằm giữa I và C. Trường hợp



$\widehat{ACB} > 60^\circ$ chứng minh tương tự, còn trường hợp đặc biệt $\widehat{ACB} = 60^\circ$ thì $O \equiv I$ và DI, AC cùng vuông góc với BI nên $ID \parallel CA$.

Gọi H là giao điểm của DO và BI, ta có

$$\widehat{HOI} = \widehat{IBM} \text{ (vì cùng phụ với } \widehat{BIM} = \widehat{HIO}) \\ = \widehat{IBD} \text{ (do IB là phân giác của } \widehat{ABC})$$

suy ra $\widehat{IOD} + \widehat{IBD} = 180^\circ$.

Dẫn đến OIBD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OID} = \widehat{OBD}$ mà $\widehat{OBD} = \widehat{OCD}$ (do $OB = OC$) nên $\widehat{OID} = \widehat{OCB} \Rightarrow \widehat{OID} = \widehat{OCA}$. Do đó $ID \parallel CA$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Các bạn gửi bài đều cho lời giải đúng, nhưng chỉ có ít bạn phân chia trường hợp để chứng minh, một số bạn chia nhầm thành ba trường hợp: $\widehat{ACB}$ nhọn, vuông hoặc tù. Đa số các bạn giải tương tự như trên. Một số bạn đưa ra cách giải khác như chứng $\triangle CDI \sim \triangle COA$ hoặc lấy thêm K là điểm chính giữa cung nhỏ AC, nhưng cách giải như trên là gọn hơn cả.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn: **Hải Dương:** Phạm Quý Cường, 9A¹, THCS Vũ Hữu, Bình Giang. **Nam Định:** Trịnh Thị Việt Hà, 9A⁴, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Khánh Hòa:** Vũ Ngọc Cường, 9⁶, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/393.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1 \quad (1)$$

Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Áp dụng BĐT Bunyakovsky cho hai bộ ba số dương ta có

$$(a+b+1)(a+b+c^2) \geq (a+b+c)^2; \\ (b+c+1)(b+c+a^2) \geq (a+b+c)^2; \\ (c+a+1)(c+a+b^2) \geq (a+b+c)^2.$$

Kết hợp với (1) suy ra

$$\frac{2(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2} \geq \\ \geq \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1.$$

Vậy $2(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 \geq (a+b+c)^2$
 $\Leftrightarrow a + b + c \geq ab + bc + ca$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán trên, hầu hết đều cho kết quả đúng. Bài toán trên có thể tổng quát như sau:

Hướng 1. (Theo bạn Trần Đức Khôi, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh) Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $xz < 3$ và

$$\frac{1}{y(a+b)+z} + \frac{1}{y(b+c)+z} + \frac{1}{y(c+a)+z} \geq x.$$

Chứng minh rằng

$$z(a+b+c) \geq (xz-1)(a^2+b^2+c^2)y + (xz+1)(ab+bc+ca)y.$$

Hướng 2. (Theo bạn Khổng Hữu Hiệp, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre) Cho các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$

và số k với $0 < k \leq n$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^n \frac{1}{s-a_i+1} \geq k$,

trong đó $s = \sum_{i=1}^n a_i$.

Chứng minh rằng $(n-k)s \geq 2k \sum_{i,j=1}^n a_i a_j$.

Chứng minh hai bài toán tổng quát trên tương tự như chứng minh bài toán ban đầu. Ngoài ra, dựa theo hướng tổng quát thứ nhất, có thể tổng quát bài toán của hướng 2 hơn nữa, xin dành cho bạn đọc.

2) Ngoài bạn *Khôi* và bạn *Hiệp*, ba bạn sau cũng có lời giải tốt và nêu được bài toán tổng quát: *Lê Văn Trọng*, 10A2, THPT Đội Cấn; *Vĩnh Phúc*; *Nguyễn Văn Dũng*, Vũ Đăng Minh, 11A1, THPT Kê Sặt, Bình Giang; *Hải Dương*.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T7/393.** Cho ngũ giác nội tiếp $ABCDE$ với $AC \parallel DE$ và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC}$, trong đó M là trung điểm của đoạn BD . Chứng minh rằng đường thẳng BE đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

Lời giải. Chọn điểm F trên đường tròn ngoại tiếp ngũ giác $ABCDE$ sao cho $CF \parallel BD$. Khi đó, ta thấy $\triangle BCM = \triangle DFM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{DMF}$.

Kết hợp với giả thiết $\widehat{BMC} = \widehat{AMB}$, ta được $\widehat{AMB} = \widehat{DMF}$, suy ra ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Vì $AC \parallel DE$, nên $AE = CD$ và $CE = AD$.

Từ đó $CB \cdot CE = CB \cdot AD = DA \cdot DF$ (1)

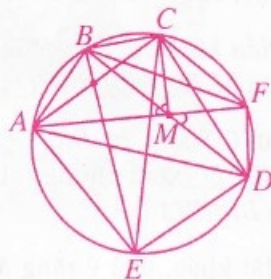
$AB \cdot AE = AB \cdot CD = BA \cdot BF$ (2)

Mặt khác, do AF đi qua trung điểm M của BD , nên $S_{ABF} = S_{ADF}$, dẫn đến $BA \cdot BF = DA \cdot DF$

(lưu ý $\sin \widehat{ABF} = \sin \widehat{ADF}$) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $CB \cdot CE = AB \cdot AE$, kết hợp với $\sin \widehat{BCE} = \sin \widehat{BAE}$, ta được $S_{BCE} = S_{ABE}$. Do đó BE đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC . $\square$

◀ **Nhận xét.** Một số bạn sử dụng tính chất của tứ giác điều hòa, hàng điểm điều hòa và chùm điều hòa cũng đi đến kết quả bài toán. Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Xin nêu tên những bạn có lời giải gọn hơn cả.



Hà Nội: *Lê Minh Phúc*, 9A5, THCS Giảng Võ; *Nguyễn Phương Linh*, 9A8, THCS Nguyễn Trường Tộ; *Nguyễn Ngọc Sơn*, 11 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hải Phòng:** *Phan Đức Minh*, 11A5, THPT Thái Phiên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Đinh Anh Hoàng*, *Trần Ngọc Hiếu*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hải Dương:** *Đỗ Xuân Bách*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Trần Trọng Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Lê Đình Tài*, 7A2, THCS Văn Yên; *Nguyễn Văn Hoàng*, 10T7, THPT Đô Lương 1; **Hà Tĩnh:** *Trần Võ Hoàng*, 10 Toán 1, *Trần Thị Phương Thảo*, 10 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Hữu Minh Tuấn*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hồng Sơn*, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Phú Yên:** *Phan Minh Trí*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; *Võ Văn Huy*, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Bến Tre:** *Khổng Hữu Hiệp*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Ngọc Quang*, 10SN1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T8/393.** Cho tứ diện $OABC$ có góc tam diện đỉnh O vuông. Chứng minh rằng

$\cot AB \cdot \cot BC + \cot BC \cdot \cot CA + \cot CA \cdot \cot AB \leq \frac{3}{2}$ trong đó $\cot AB$ là kí hiệu cotang của góc nhị diện cạnh AB .

Lời giải. Đặt $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$. Ta có $OA \perp mp(OBC)$.

Kẻ OM vuông góc với BC , theo định lí ba đường vuông góc thì $AM \perp BC$ và $OA \perp OM$ nên

$\cot BC = \cot \widehat{OMA} = \frac{OM}{OA}$.

Trong tam giác vuông OBC có

$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow OM = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

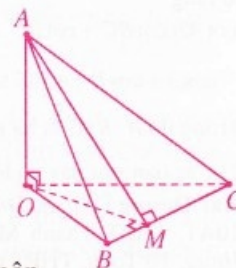
Ta được $\cot BC = \frac{OM}{OA} = \frac{bc}{a\sqrt{b^2 + c^2}}$.

Tương tự, có

$\cot CA = \frac{ca}{b\sqrt{c^2 + a^2}}$; $\cot AB = \frac{ab}{c\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Do đó

$\cot AB \cdot \cot BC + \cot BC \cdot \cot CA + \cot CA \cdot \cot AB$



$$= \frac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} + \frac{a^2}{\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có

$$\frac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{a^2}{\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} \right) \quad (4)$$

Cộng theo vế của (2), (3), (4) và kết hợp với (1), ta được

$$\cot AB \cdot \cot BC + \cot BC \cdot \cot CA + \cot CA \cdot \cot AB \leq \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $OA=OB=OC$. $\square$

Nhận xét. 1) Có thể giải bài toán bằng cách chứng tỏ rằng

$$\cot AB \cdot \cot BC + \cot BC \cdot \cot CA + \cot CA \cdot \cot AB = \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Trong đó A, B, C là ba góc của tam giác ABC .

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hải Dương: Phạm Đức Vương, Nguyễn Ngọc Thiện, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Phú Thọ:** Nguyễn Quốc Hùng, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I; **Quảng Trị:** Nguyễn Trường Sinh, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Lê Quang Đức, 11A1, THPT Hải Lăng; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Huỳnh Bảo Anh, 11T, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Nguyễn Danh Nhân, 10A1, THPT Phù Cát II; **Bến Tre:** Khổng Hữu Hiệp, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Tiền Giang:** Đỗ Quang Bình, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Vĩnh Long:** Dương Thanh Hùng, 11 T2, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T9/393.** Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BK và CL cắt nhau tại H . Một đường thẳng đi qua H cắt AB, AC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng $HP = HQ$ khi và chỉ khi $MP = MQ$, với M là trung điểm của cạnh BC .

Lời giải. Cách 1. (Theo bạn Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Quảng Nam) (h.1).

Gọi I là trực tâm của tam giác BHP , I thuộc CH và $PI \perp BH$;

$$BI \perp PH \quad (1)$$

Điều kiện cần. Từ (1), chú ý rằng $QC \perp PH$, suy ra $PI \parallel CQ$. Do đó $\Delta HIP = \Delta HCQ$

(g.c.g). Suy ra $HI = HC$. Từ đó, chú ý rằng $MB = MC$, suy ra $HM \parallel IB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HM \perp PQ$.

Vậy, chú ý rằng $HP = HQ$, ta có $MP = MQ$.

Điều kiện đủ. Gọi R là điểm đối xứng của Q qua M . Ta thấy $BRCQ$ là hình bình hành (3).

Từ (3) suy ra $BR \parallel CQ$. Từ đó, chú ý rằng $PI \parallel CQ$ (xem chứng minh điều kiện cần), suy ra $BR \parallel PI$ (4).

Mặt khác, chú ý rằng $MP = MQ = MR$, ta có $RP \perp PQ$. Kết hợp với (1), suy ra $RP \parallel BI$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra $BRPI$ là hình bình hành (6).

Từ (3) và (6) suy ra $CQIP$ là hình bình hành.

Do đó $HP = HQ$.

Cách 2. (Theo bạn Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc).

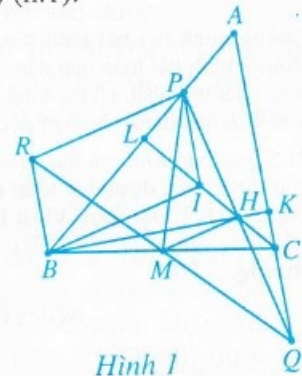
Gọi (M) là đường tròn đường kính BC (h.2).

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác APQ với các cát tuyến BHK, CHL , ta có

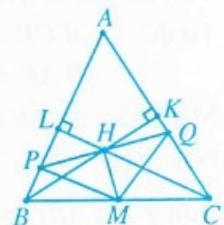
$$\frac{BA}{BP} \cdot \frac{HP}{HQ} \cdot \frac{KQ}{KA} = 1 = \frac{CA}{CQ} \cdot \frac{HQ}{HP} \cdot \frac{LP}{LA}$$

Từ đó, chú ý rằng

$$\overline{BA} \cdot \overline{LA} = \mathcal{P}_{A(M)} = \overline{CA} \cdot \overline{KA}; \quad \overline{BP} \cdot \overline{LP} = \mathcal{P}_{P(M)};$$



Hình 1



Hình 2

$\overline{CQ.KQ} = \mathcal{P}_{Q(M)}$, ta có

$$\left(\frac{HP}{HQ}\right)^2 = \frac{\overline{CA.KA} \cdot \overline{BP.LP}}{\overline{BA.LA} \cdot \overline{CQ.KQ}} = \frac{\mathcal{P}_{P(M)}}{\mathcal{P}_{Q(M)}}.$$

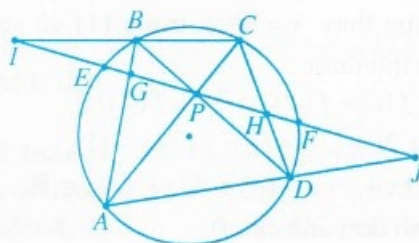
Vậy $HP = HQ \Leftrightarrow \mathcal{P}_{P(M)} = \mathcal{P}_{Q(M)} \Leftrightarrow MP = MQ$. $\square$

Nhận xét. 1) Khá nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên nhiều lời giải dài, nhiều lời không chính xác (đặc biệt là các lời giải sử dụng định lý Con Bướm).

2) Để có một lời giải chính xác bằng định lý Con Bướm, định lý này cần được phát biểu trong dạng tổng quát hơn như sau:

Định lý Con Bướm tổng quát. Từ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . $P = AC \cap BD$. Một đường thẳng qua P , cắt (O) tại E, F ; cắt AB, CD theo thứ tự tại G, H ; cắt CB, AD theo thứ tự tại I, J . Khi đó

$$\frac{1}{PE} - \frac{1}{PF} = \frac{1}{PG} - \frac{1}{PH} = \frac{1}{PI} - \frac{1}{PJ} \quad (h. 3)$$



Hình 3

Sử dụng khái niệm cực và đối cực, ta sẽ có một phép chứng minh ngắn gọn cho định lý Con Bướm hoàn chỉnh.

3) Bài toán vẫn đúng khi tam giác ABC tù.

4) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt.

Hà Nội: Nguyễn Văn Quý, 11A1, THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Nguyễn Ngọc Thiện, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Bến Tre:** Nguyễn Thị Tường Lam, 10T, THPT chuyên Bến Tre; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hoà. **Quảng Nam:** Nguyễn Thị Dạ Thảo, 10/3, THPT Trần Văn Dư; **Bình Định:** Nguyễn Danh Nhân, 10A1, THPT Phù Cát II; **TP Hồ Chí Minh:** Trần Anh Vũ, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T10/393.** Tìm tất cả các số thực k và m sao cho

$$k(x^3 + y^3 + z^3) + mxyz \geq (x + y + z)^3$$

với mọi x, y, z không âm.

Lời giải. (Theo bạn Đặng Hữu Trọng, 11A1, THPT Quỳnh Hợp 2, Nghệ An).

• **Điều kiện cần.** Cho $x = y = z > 0$ ta được $3k + m \geq 27$. Cho $x = y > 0, z = 0$ ta được $k \geq 4$.

• **Điều kiện đủ.** Giả sử $k \geq 4, 3k + m \geq 27$. Khi đó $k(x^3 + y^3 + z^3) + mxyz$

$$\geq k(x^3 + y^3 + z^3) + (27 - 3k)xyz$$

$$= 4(x^3 + y^3 + z^3) + 15xyz + (k - 4)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

$$\geq 4(x^3 + y^3 + z^3) + 15xyz, \text{ do } k \geq 4 \text{ và}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz \quad (\text{BĐT trung bình cộng - trung bình nhân}).$$

Bài toán được giải, nếu ta chứng minh được

$$4(x^3 + y^3 + z^3) + 15xyz \geq (x + y + z)^3 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$$

$$\geq xy(x + y) + xz(x + z) + yz(y + z)$$

$$\Leftrightarrow x(x - y)(x - z) + y(y - z)(y - x) + z(z - x)(z - y) \geq 0 \quad (2)$$

Để chứng minh (2), không giảm tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó (2) tương đương với

$$x(x - y)(x - y + y - z) + y(y - z)(y - x)$$

$$+ z(x - y + y - z)(y - z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - y)^2 + x(x - y)(y - z) - y(x - y)(y - z)$$

$$+ z(x - y)(y - z) + z(y - z)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - y)^2 + z(y - z)^2 + (x - y)(y - z)(x - y + z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - y)^2 + z(y - z)^2 + (x - y)(y - z)(x - y + z) \geq 0 \quad (3)$$

Vì $x \geq y \geq z$ nên bất đẳng thức (3) đúng. Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. $\square$

Nhận xét. 1) Đa số các bạn khi dẫn đến bất đẳng thức (1) đều nói đó là *Bất đẳng thức Schur* và kết thúc chứng minh ở đây.

Bất đẳng thức Schur được phát biểu dưới dạng: Với ba số thực không âm x, y, z và số nguyên không âm n ta có bất đẳng thức:

$$x^n(x - y)(x - z) + y^n(y - z)(y - x) + z^n(z - x)(z - y) \geq 0.$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Đàm Văn Tú, 10A3, THPT Đội Cấn; **Phú Thọ:** Nguyễn Quốc Hùng, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Nam Định:** Trần Quang Huy, 10A1, THPT Hải Hậu A; **Hải Dương:** Đồng Xuân Bách, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thái Bình:** Đinh Thị Nho, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** Phan Nguyễn Thanh Sơn, 10A1, THPT Diễn Châu 3; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Lương Khánh Lộc, 10 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Cà Mau:** Nguyễn Phạm

Tuấn Anh, 12T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Bến Tre:** Không Hữu Hiệp, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T11/393.** Cho dãy số thực (x_n) với $n = 1, 2, \dots$ thỏa mãn $\ln(1+x_n^2) + nx_n = 1$ với mọi số nguyên dương n .

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1-nx_n)}{x_n}$.

Lời giải. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ ta đặt $f_n(x) = \ln(1+x^2) + nx - 1, x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'_n(x) = \frac{2x}{1+x^2} + n = \frac{(x+1)^2}{1+x^2} + n - 1 \geq 0$,

$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow n = 1, x = -1$. Do đó $f_n(x)$ là hàm số tăng thực sự. Chú ý $f_n(0) = -1 < 0$,

$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) > 0$, suy ra có duy nhất một số $x_n \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $f_n(x_n) = 0$ và

$0 < x_n < \frac{1}{n}$. Bởi vậy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1-nx_n)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot \ln(1+x_n^2)}{x_n} \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(nx_n \cdot \ln(1+x_n^2) \cdot \frac{1}{x_n^2} \right) = 1.$$

Do $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x^2) \cdot \frac{1}{x^2} = 1$

và $nx_n = 1 - \ln(1+x_n^2) \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow +\infty$,
vì $x_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Chú ý $\frac{n(1+nx_n)}{x_n} = \frac{n}{x_n} + n^2 \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ □

◀ **Nhận xét.** 1) Do sơ suất đề toán đã bị in nhầm thành $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1+nx_n)}{x_n}$, tòa soạn thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

2) Đây là bài toán giới hạn dạng cơ bản, không quá khó. Có một bạn học sinh đã viết được cả hai giới hạn trên là Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T12/393.** Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+f(y)) = 2y+f(x), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Lời giải (Theo đa số các bạn).

Nhận xét rằng f là một đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(y_1) = f(y_2)$ thì ứng với mỗi x ta có $f(x+f(y_1)) = f(x+f(y_2))$

hay $2y_1 + f(x) = 2y_2 + f(x)$, tức $y_1 = y_2$. Tiếp theo, từ điều kiện (1) của bài ra, ta có tập giá trị của hàm f (nếu tồn tại) là $\mathbb{R}$, nên tồn tại $a \in \mathbb{R}$ để $f(a) = 0$.

Từ (1), ứng với $y = a$, ta thu được

$$f(x+f(a)) = 2a+f(x) \text{ hay } f(x) = 2a+f(x), \text{ tức } a=0 \text{ và } f(0)=0.$$

Từ (1), ứng với $x = 0$, ta thu được

$$f(f(y)) = 2y+f(0) = 2y, \text{ hay } f(f(y)) = 2y, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Tiếp tục thay $x = f(t)$ trong (1) và sử dụng (2), ta thu được

$$f(f(t)+f(y)) = 2y+f(f(t)) \\ = 2y+2t = 2(y+t) = f(f(y+t)), \\ \text{hay } f(x+y) = f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

(do tính đơn ánh của f).

Từ đó (3) là phương trình hàm Cauchy (cộng tính và liên tục) nên có nghiệm $f(x) = bx$. Thế vào (1), ta thu được $b^2x = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $b = \pm\sqrt{2}$.

Thử lại, ta thấy hai hàm số $f(x) = \pm\sqrt{2}x$ thỏa mãn bài ra. □

◀ **Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải trên, một số bạn còn sử dụng (2) để đưa trực tiếp về phương trình hàm Cauchy dạng $f(x+2y) = f(x) + 2f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ cũng có thể chuyển đổi về dạng (3) được.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng:

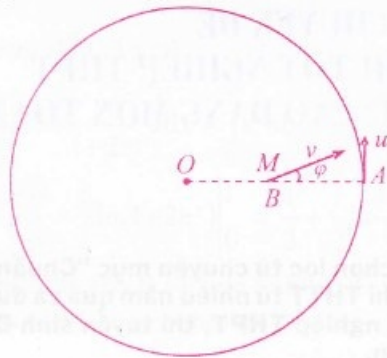
Thái Nguyên: Lưu Sỹ Tùng, 11A1, THPT Đại Từ; **Phú Thọ:** Tạ Hải Nam, 11T1, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Giang:** Vũ Thành Đạt, 10T, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nam:** Đặng Duy Hiền, Nguyễn Văn Tính, 10CT, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Quý, 11A1, Khối chuyên ĐHKHTN Hà Nội, Nguyễn Ngọc Sơn, 11T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hưng Yên:** Lương Đức Hiếu, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** Đinh Thị Nho, 10T, THPT chuyên Thái Bình, Vũ Huy Hoàng, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Nguyễn Thị Minh Hương, 11A THPT Lý Bôn; **Hải Dương:** Phạm Đức Vượng, 10A1, THPT Thanh

Miễn, Lưu Hữu Phúc, Nguyễn Viết An, Đồng Xuân Bách, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** Phan Đức Minh, 11A15, THPT Thái Phiên; **Nam Định:** Ngô Thị Thu Hà, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Trịnh Đông Sơn, La Hồng Quân, 11T, Lê Văn Tuấn, 10T, Đào Quang Hòa, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương 1, Chế Hoàng Thông, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Thừa Thiên – Huế:** Lê Văn Phú Cường, 10CT, THPT chuyên ĐHKH Huế; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** Nguyễn Thị Dạ Thảo, 10A3, THPT Trần Văn Dư, Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Ngãi:** Phạm Viết Nhã, 11T1, Nguyễn Đoàn Ngọc Tú, 10T1, Nguyễn Huỳnh Bảo Anh, 11T, Phạm Thành Công, Trương Đình Sách, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** Phan Minh Trí, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Kon Tum:** Trần Thị Ánh Nhung, 11A1, THPT chuyên Kon Tum; **Khánh Hòa:** Nguyễn Đình Luân, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 12A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài L1/393.** Học sinh A chạy theo đường tròn bán kính $R = 30\text{m}$ với tốc độ không đổi $u = 3,14\text{ m/s}$. Học sinh B chạy đuổi theo học sinh A xuất phát từ tâm đường tròn đó. Trong khi đuổi, học sinh B luôn chạy trên bán kính nối tâm với học sinh A với tốc độ không đổi $v = 2u$. Hỏi sau bao lâu thì học sinh B đuổi kịp học sinh A?

Lời giải. Vận tốc góc của học sinh A là $\omega = \frac{u}{R}$. Khi học sinh B đến điểm M ($OM = r$) thì vector vận tốc của B hợp với $\overline{OM}$ một góc φ .



Vì hai học sinh luôn đứng trên một bán kính nên r cũng quay quanh tâm với vận tốc góc ω , hay $\omega = \frac{v \cdot \sin \varphi}{r}$. Do đó $\sin \varphi = \frac{r}{2R}$.

Vì $0 \leq r \leq R$, nên trong quá trình đuổi bắt, góc φ thay đổi từ 0 đến $\frac{\pi}{6}$.

Xét trong khoảng thời gian rất nhỏ Δt , góc φ tăng thêm $\Delta \varphi$, r tăng thêm Δr , ta có

$$\begin{aligned} \Delta r &= 2R\Delta(\sin \varphi) = 2R(\sin(\varphi + \Delta \varphi) - \sin \varphi) \\ &= 2R \cdot 2\cos\left(\varphi + \frac{\Delta \varphi}{2}\right) \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \\ &\approx 2R \cdot 2\cos \varphi \cdot \frac{\Delta \varphi}{2} = 2R\Delta \varphi \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Do vận tốc theo phương bán kính là $v \cdot \cos \varphi$

$$\text{nên} \quad \Delta t = \frac{\Delta r}{2\omega R \cos \varphi} = \frac{\Delta \varphi}{\omega}.$$

Vậy thời gian học sinh B đuổi kịp học sinh A là

$$t = \sum \Delta t = \frac{\sum \Delta \varphi}{\omega} = \frac{\pi R}{6u} = 5(\text{s}). \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng:

Yên Bái: Nguyễn Nam Minh, 10 Lí, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Phú Thọ:** Nguyễn Thị Thu Hiền, 10 Lí, THPT chuyên Hùng Vương; **Thái Bình:** Tạ Bá Trung, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Vũ Huy Hoàng 10A1, THPT Tây Thái Thụy; **Nguyễn Thị Huyền Trang,** 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** Nguyễn Tiến Dũng, A1 K12, THPT Quỳnh Hợp 2; **Nguyễn Thanh Sơn,** 10A1, THPT Diên Châu 3; **Quảng Ngãi:** Ngô Thế Bình, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Trần Minh Bảo, 10 TL, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** Liêu Khắc Vũ, 10 Lí, THPT chuyên Bến Tre; **Cần Thơ:** Nguyễn Phước Long Đường, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/393.** Một hạt có khối lượng m chuyển động dưới tác động của một lực $F = -\alpha m \vec{r}$, trong đó α là một hằng số dương, $\vec{r}$ là bán kính vector của hạt đối với gốc tọa độ. Tìm quỹ đạo chuyển động của hạt, nếu tại thời điểm ban đầu hạt có tọa độ $\vec{r} = r_0 \vec{i}$ và vận tốc $\vec{v} = v_0 \vec{j}$, trong đó $\vec{i}, \vec{j}$ lần lượt là các vector đơn vị của các trục Ox, Oy .

Lời giải. Trước hết ta tìm các phương trình chuyển động thành phần của hạt theo các trục tọa độ.

• Theo phương Ox , ta có $F_x = ma_x = mx''$,
suy ra $-\alpha mx = mx''$ hay $x'' + \alpha x = 0$ (1)

Phương trình (1) có nghiệm

$$x = A_x \sin(\sqrt{\alpha}t + \varphi_1) \quad (2)$$

Từ điều kiện ban đầu $t = 0, x = r_0$, suy ra

$$r_0 = A_x \sin \varphi_1 \quad (3)$$

Mặt khác, $v_x = x' = A_x \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}t + \varphi_1)$.

Khi $t = 0, v_x = 0$, suy ra

$$0 = A_x \sqrt{\alpha} \cos \varphi_1 \quad (4)$$

Giải hệ hai PT (3) và (4) ta được $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, A_x = r_0$.

$$\text{Vậy } x = r_0 \sin\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ hay } x = r_0 \cos(\sqrt{\alpha}t) \quad (5)$$

• Theo phương Oy , ta có $F_y = ma_y = my''$,
suy ra $-\alpha my = my''$ hay $y'' + \alpha y = 0$ (6)

Phương trình (6) có nghiệm

$$y = A_y \sin(\sqrt{\alpha}t + \varphi_2) \quad (7)$$

Từ điều kiện ban đầu $t = 0, y = 0$, suy ra

$$0 = A_y \sin \varphi_2 \quad (8)$$

Ta cũng có $v_y = y' = A_y \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}t + \varphi_2)$

Khi $t = 0$ thì $v_y = v_0$, suy ra

$$v_0 = A_y \sqrt{\alpha} \cos \varphi_2 \quad (9)$$

Giải hệ (8) và (9) ta được $\varphi_2 = 0, A_y = \frac{v_0}{\sqrt{\alpha}}$

$$\text{Vậy } y = \frac{v_0}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha}t) \quad (10)$$

Từ (5) và (10) suy ra $\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\alpha}y}{v_0}\right)^2 = 1$.

Từ đó quỹ đạo của hạt là một đường elip. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Thái Nguyên: Vũ Quang Minh, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Nam Định:** Lê Quang Trung, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, 10 Lí, THPT chuyên Hà Nam, **Cần Thơ:** Nguyễn Long Phước Đường, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Đọc lại cho đúng.

Do sơ suất, đề bài T12/396 (trang 17 số báo 396) đã in nhầm HB' và HC' . Đề nghị sửa lại là HB và HC . Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT



Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ trân trọng giới thiệu bộ sách

**TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ
CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT
VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN**

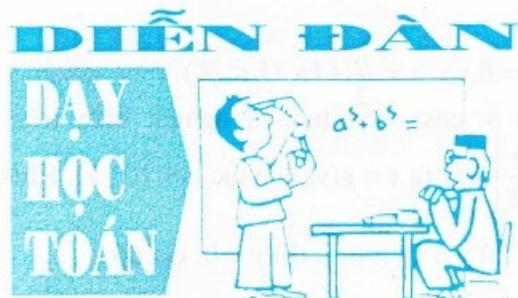
Bộ sách gồm 2 tập:

- ◆ Tập 1: Đại số, Lượng giác, Giải tích
- ◆ Tập 2: Hình học, Tổ hợp - Xác suất, Số phức

Cuốn sách bao gồm các bài viết của nhiều tác giả được chọn lọc từ chuyên mục "Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học" trên Tạp chí THTT từ nhiều năm qua và được sắp xếp theo các chuyên đề trong "Cấu trúc Đề thi Tốt nghiệp THPT, thi tuyển sinh ĐH-CĐ" của Bộ GD&ĐT, cuối mỗi cuốn sách là các đề tự luyện.

Đây là tài liệu tham khảo rất bổ ích cho giáo viên Toán và học sinh THPT, giúp cho các học sinh cuối cấp THPT ôn tập tốt cho các kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng, đồng thời có thể dùng để bồi dưỡng học sinh giỏi.

Sách sẽ được phát hành vào đầu năm học mới.



THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

TÔN NỮ THANH THỦY

(GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Một số học sinh thường gặp khó khăn khi phải tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay một hình phẳng quanh trục tung trong điều kiện không rút được x theo y dễ dàng. Bài viết này sẽ giúp các em giải quyết vướng mắc trên.

I. LÝ THUYẾT

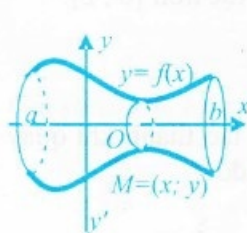
1) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi hình phẳng quay quanh trục hoành

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi bốn đường

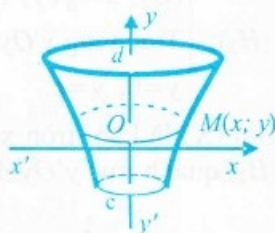
$$\begin{cases} (C): y = f(x) \text{ liên tục trên } [a; b] \\ \text{Trục hoành } x'Ox \\ (d_1): x = a; (d_2): x = b \end{cases}$$

Khi đó thể tích khối tròn xoay (K) (h. 1) tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành một vòng là

$$V_{(K)} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$



Hình 1



Hình 2

2) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi hình phẳng quay quanh trục tung

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi bốn đường

$$\begin{cases} (C): y = f(x) \text{ liên tục trên } [a; b] \\ \text{Trục tung } y'Oy \\ (d_1): y = c; (d_2): y = d \text{ với } c = \min\{f(a), f(b)\}, \\ d = \max\{f(a), f(b)\}. \end{cases}$$

a) Trường hợp 1. Từ $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b] \Leftrightarrow x = g(y)$ liên tục trên $[c; d]$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay (T) (h.2) tạo thành khi quay (H) quanh trục tung một vòng là

$$V_{(T)} = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

b) Trường hợp 2. Không rút được x theo y dễ dàng, ta làm như sau:

+ Chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục và đơn điệu trên $[a; b]$, lúc đó tồn tại hàm số ngược $x = g(y)$ liên tục và đơn điệu trên $[c; d]$.

$$+ \text{ Để tính } V_{(T)} = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy;$$

Ta đổi biến $g(y) = x$ và $dy = f'(x)dx$. Khi đó

$$V_{(T)} = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy = \pi \int_a^b x^2 f'(x) dx.$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

✪ Bài toán 1. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đồ thị $(C): y = xe^x$; $(\Delta): y = x$; $(d): x = 1$.

a) Tính thể tích khối tròn xoay (K) tạo thành khi cho hình phẳng (H) quay một vòng quanh trục hoành.

b) Tính thể tích khối tròn xoay (T) tạo thành khi cho hình phẳng (H) quay một vòng quanh trục tung.

Lời giải. a) Thể tích khối tròn xoay (K) là

$$V_{(K)} = \pi \left(\int_0^1 (xe^x)^2 dx - \int_0^1 x^2 dx \right)$$

Tính $I = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$ bằng cách tích phân từng phần hai lần thu được $I = \frac{1}{4} (e^2 - 1)$.

$$\text{Vậy } V_{(K)} = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}(3e^2 - 7) \text{ (đvtt)}.$$

b) + Gọi (T_1) là khối trụ có chiều cao $h = e$, bán kính đáy $R = 1$ thì $V_{(T_1)} = \pi R^2 h = \pi e$ (đvtt).

+ Gọi (T_2) là khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục tung hình phẳng (H_2) giới hạn bởi trục tung; (C) và (d) : $y = e$.

Trong đó (C) : $y = f(x) = xe^x$ liên tục, tăng trên $[0; 1] \Leftrightarrow x = g(y)$ liên tục, tăng trên $[0; e]$.

$$\text{Khi đó } V_{(T_2)} = \pi \int_0^e g(y)^2 dy.$$

* Đổi biến $x = g(y)$ với $y = xe^x \Rightarrow dy = (e^x + xe^x)dx$.

* Đổi cận $y = 0 \Rightarrow x = 0$ và $y = e \Rightarrow x = 1$.

$$\begin{aligned} V_{(T_2)} &= \pi \int_0^1 x^2 (e^x + xe^x) dx = \pi \int_0^1 (x^3 + x^2) e^x dx \\ &= \pi(4 - e) \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

+ Gọi (T_3) là khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục tung hình phẳng (H_3) giới hạn bởi (Δ) , trục hoành và $x = 1$. Khi đó $V_{(T_3)} = V_{\text{HTru}} - V_{\text{Hnón}}$ với khối trụ có chiều cao $h = 1$ và bán kính đáy $R = 1$; khối nón có chiều cao $h = 1$ và bán kính đáy $R = 1$ thì

$$V_{(T_3)} = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 - \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{2}{3} \pi \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{Vậy } V_{(T)} = V_{(T_1)} - V_{(T_2)} - V_{(T_3)}$$

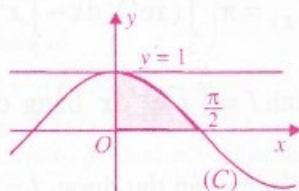
$$= \pi e - \pi(4 - e) - \frac{2}{3} \pi = \pi \left(2e - \frac{14}{3} \right) \text{ (đvtt)}. \quad \square$$

★ Bài toán 2. Tính thể tích của khối tròn xoay

$\mathcal{H}$ tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng (H) giới hạn bởi ba đường (C) : $y = \cos x$

với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, trục tung và trục hoành (h. 3).

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành có dạng



Hình 3

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Từ $y = \cos x$ liên tục và nghịch biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ suy ra $x = g(y)$ liên tục trên $[0; 1]$. Khi

$x = 0$ thì $y = 1$; $x = \frac{\pi}{2}$ thì $y = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{H}} &= \pi \int_0^1 (g(y))^2 dy \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^1 x^2 (-\sin x) dx = \pi(\pi - 2) \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

(Bằng cách tích phân từng phần hai lần với cách đặt u là đa thức, phần còn lại là dv). $\square$

★ Bài toán 3.

Quay hình phẳng

(H) giới hạn bởi

các đường (C) :

$y = x \ln x$, Trục

hoành và (d) :

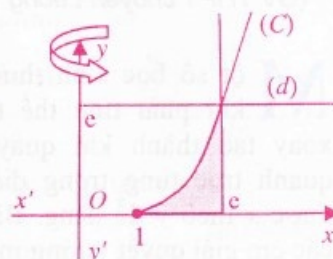
$x = e$ (h. 4).

một vòng quanh

trục tung. Tính thể

tích khối tròn xoay

$\mathcal{H}$ tạo thành.



Hình 4

Lời giải. + Gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi (d) : $x = e$; trục tung và 2 đường thẳng: $y = e$; $y = 0$. Gọi $\mathcal{T}$ là khối tròn xoay sinh ra khi cho (H_1) quay một vòng quanh $y'Oy$, thì $\mathcal{T}$ là khối trụ tròn xoay có bán kính đáy $R = e$ và chiều cao $h = e$. Do đó $V_{\mathcal{T}} = \pi e^2 \cdot e = \pi e^3$ (đvtt).

+ Gọi (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi 4 đồ thị: (C) : $y = x \ln x$; trục $y'Oy$; $y = 0$, $y = e$. Khi đó

$$(H_2): \begin{cases} (C): x = g(y) \text{ liên tục trên } [0; e] \\ \text{Trục tung } y'Oy \\ y = 0, y = e. \end{cases}$$

Gọi (K) là khối tròn xoay tạo thành khi quay (H_2) quanh trục $y'Oy$. Khi đó

$$V_{(K)} = \pi \int_0^e (g(y))^2 dy = \pi \int_0^e x^2 dy.$$

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/397. Two circles (O_1) and (O_2) meet at points K and L such that their centers O_1 and O_2 lie on the same side of the line KL . The tangent line to (O_1) at K meets (O_2) at A . The tangent line to (O_2) at K meets (O_1) at B . Find the area of the triangle AKB , given that $AL = 3$, $BL = 6$ and $\tan \widehat{AKB} = -\frac{1}{2}$.

T7/397. Let a, b, c be positive real numbers satisfying $a + b + c = 3$. Prove the following inequality

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + 5 \geq (a+b)(b+c)(c+a).$$

When does equality occur?

T8/397. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x = 3z^3 + 2z^2 \\ y = 3x^3 + 2x^2 \\ z = 3y^3 + 2y^2. \end{cases}$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/397. Let ABC be an acute triangle. Let a, b, c be the side lengths of the triangle and h_a, h_b, h_c be the length of the corresponding altitudes. Let r, R be respectively the inradius and circumradius of this triangle. Prove the inequality

$$\frac{9R}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{h_a + \sqrt{h_b h_c}} + \frac{1}{h_b + \sqrt{h_c h_a}} + \frac{1}{h_c + \sqrt{h_a h_b}} \leq \frac{1}{2r}.$$

T10/397. Let A be the set of n distinct points on the plane ($n \geq 2$), and $T(A)$ be the set of vectors whose endpoints are in A . Find the maximum and minimum value of $|T(A)|$.

(where $|T(A)|$ denotes the cardinality of $T(A)$).

T11/397. Let f be a continuous function on $\mathbb{R}$ satisfying the following two conditions

$$\begin{cases} f(2012) = 2011 \\ f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Denote $f_n(x) = \underbrace{f(f \dots f(x))}_{n \text{ times } f}$. Find $f(2010)$.

T12/397. Let (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) be a sequence given by $x_1 = 2, 1$ and

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 2 + \sqrt{x_n^2 + 8x_n - 4}}{2}.$$

For each positive integer n , let $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i+1}^2 - 4}$.

Find $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

Translated by LE MINH HA

* Đổi biến $g(y) = x$ với $y = x \ln x$

$$\Rightarrow dy = (\ln x + 1)dx.$$

* Đổi cận : $y = 0 \Rightarrow x = 1; y = e \Rightarrow x = e$.

$$\text{Lúc đó } V_{(K)} = \pi \int_1^e x^2 (\ln x + 1) dx,$$

$$= \pi \left(\frac{2e^3 + 1}{9} \right) + \frac{\pi}{3} (e^3 - 1) = \frac{\pi}{9} (5e^3 - 2) \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{Vậy } V_H = V_{\mathcal{H}} - V_{(K)} = \frac{4\pi e^3 + 2\pi}{9} \text{ (đvtt)}. \square$$

III. LUYỆN TẬP

1. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = x^3$, trục $x'Ox$ và đường $x = 1$. Tính

thể tích khối tròn xoay (K) tạo thành khi quay (H) một vòng quanh trục tung.

$$\text{(ĐS: } \frac{2\pi}{5} \text{ (đvtt))}.$$

2. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đường

$$(C): y = |x^2 - 2x|;$$

$$(\Delta): y = x + 4.$$

a) Tính thể tích khối tròn xoay (K) tạo thành khi quay (H) một vòng quanh trục hoành. (ĐS: 125π (đvtt)).

b) Tính thể tích khối tròn xoay (T) tạo thành khi quay hình (H) một vòng quanh trục tung

$$\text{(ĐS: } \frac{176\pi}{3} \text{ (đvtt))}.$$

Cuộc thi

MỪNG THĂNG LONG - HÀ NỘI TRÒN 1000 TUỔI

ĐỢT 3

(Thời hạn cuối cùng nhận bài giải Đợt 3 là 15.9.2010 theo dấu Bưu điện)

Bài 7. CHUYẾN DU LỊCH MIỀN PHÍ

Một Công ty Du lịch tổ chức một chuyến tham quan miễn phí cho 1000 du khách may mắn nhân Kỷ niệm 1000 năm Thăng Long – Hà Nội. Mỗi người cầm một vé lên tàu có ghi số ghế của mình. Đoàn tàu có đúng 1000 chỗ ngồi. Tuy nhiên, người hành khách lên tàu đầu tiên lại mất vé, nên anh ta chọn một ghế bất kì. Người khách thứ hai khi lên tàu sẽ ngồi ghế của mình (nếu ghế chưa có ai ngồi) hoặc chọn một ghế bất kì, nếu số ghế của anh ta đã có người ngồi. Quá trình cứ tiếp tục như vậy. Hỏi người hành khách cuối cùng lên tàu có thể ngồi ở ghế nào?

THANH HỒNG

Bài 8. ĐI THĂM HÀ NỘI

Hai con sông lớn chảy qua Hà Nội là sông Hồng và sông Đuống với các cầu Thăng Long, Long Biên, Chương Dương, Vĩnh Tuy, Thanh Trì (qua sông Hồng), và cầu Đuống, Đông Trù, Phù Đổng (qua sông Đuống) (hình 1). Bạn Du định đi thăm một số di tích lịch sử, văn hóa và làng nghề truyền thống ở Hà Nội, nhưng muốn đi qua tất cả các cây cầu (bằng ô tô hoặc xe máy), mỗi cầu một lần sao cho qua mỗi cầu thì dừng lại thăm một hoặc hai địa điểm, biết rằng trước khi qua chiếc cầu đầu tiên bạn Du đến thăm chỉ một điểm. Hỏi số địa điểm bạn Du đi được nhiều nhất là bao nhiêu? Bạn hãy thử lập một đường đi như thế.

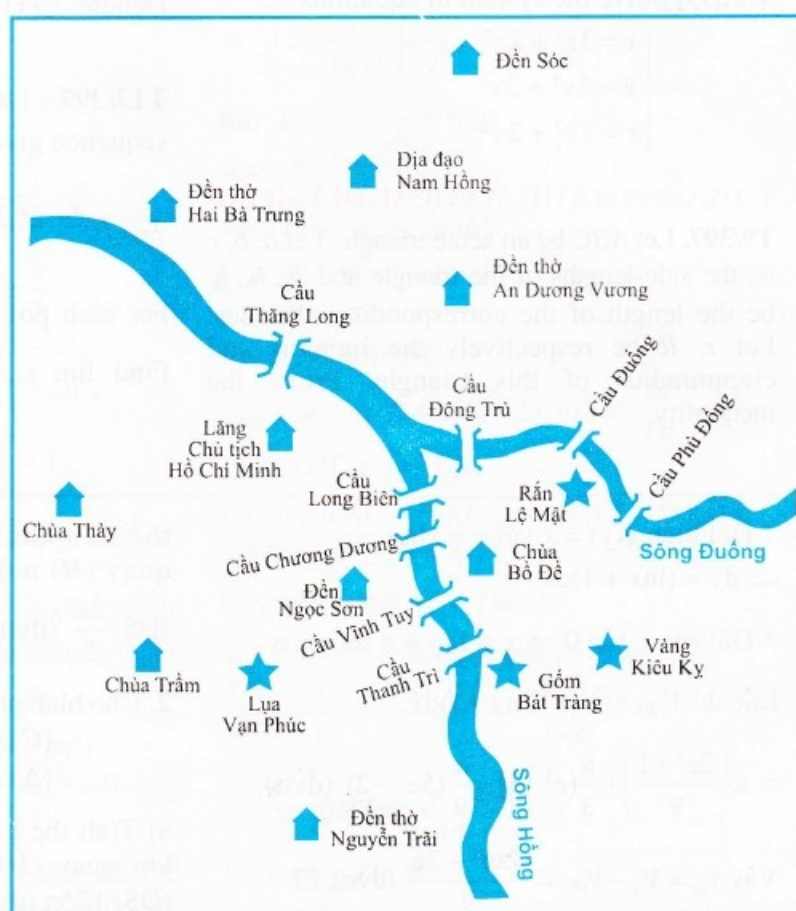
HOÀNG NGUYỄN

Bài 9. ĐẶT CHẬU HOA

Nhân Kỷ niệm 1000 năm Thăng Long – Hà Nội, hai bạn tham gia trò chơi thay phiên nhau đặt các chậu hoa vào các hình tròn (mỗi chậu vào một hình tròn) để tạo thành các số 1010 – 2010 như ở hình 2.

Mỗi người, đến lượt mình, được chọn một trong tám chữ số và đặt một số chậu hoa tùy ý (ít nhất là một chậu) vào các hình tròn chưa có hoa ở chữ số đã chọn. Ai đặt chậu hoa cuối cùng, hoàn thiện công việc, là thắng. Bạn hãy trình bày phương án để giành thắng lợi.

AN MINH



Hình 1



Hình 2

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO – CÔNG ĐOÀN GIÁO DỤC VIỆT NAM
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM – VỤ PHÁP CHẾ
VỤ GIÁO DỤC TIỂU HỌC – VỤ GIÁO DỤC TRUNG HỌC

THỂ LỆ
CUỘC THI VIẾT CÂU CHUYỆN TÌNH HUỐNG
ĐẠO ĐỨC VÀ PHÁP LUẬT

I. MỤC ĐÍCH

- Tạo sự chuyển biến tích cực trong nhận thức và hành động của đội ngũ giáo viên, cán bộ quản lý giáo dục đối với công tác giáo dục đạo đức và giáo dục pháp luật trong nhà trường, qua đó nâng cao chất lượng giáo dục đạo đức và pháp luật cho học sinh bậc tiểu học, trung học cơ sở và trung học phổ thông.
- Làm phong phú thêm những câu chuyện tình huống đạo đức và tình huống pháp luật giúp cho giáo viên và học sinh có thêm tài liệu để dạy tốt, học tốt môn Đạo đức ở tiểu học và môn Giáo dục công dân ở trung học cơ sở, trung học phổ thông.

II. NỘI DUNG

Dựa trên cơ sở các chủ đề về đạo đức và pháp luật trọng chương trình và sách giáo khoa hiện hành môn Đạo đức ở tiểu học, môn Giáo dục công dân ở bậc THCS, THPT và các vấn đề về đạo đức và pháp luật trong đời sống xã hội để viết *những câu chuyện về tình huống đạo đức, tình huống pháp luật* thể hiện trong các mối quan hệ với bản thân, gia đình, nhà trường và xã hội trong việc thực hiện các chuẩn mực đạo đức và pháp luật của người công dân. Cụ thể như sau:

1. Các giá trị và chuẩn mực đạo đức

- *Đối với bản thân*: Sống giản dị, trung thực, tiết kiệm, tự lập,...
- *Đối với người khác*: Yêu thương con người, đoàn kết, tương trợ, khoan dung, lễ độ, biết ơn,...
- *Đối với công việc*: Siêng năng, kiên trì, tôn trọng kỉ luật, năng động, sáng tạo,...
- *Đối với cộng đồng, đất nước, nhân loại*: Yêu quê hương đất nước; tích cực tham gia các hoạt động tập thể, hoạt động xã hội; tôn trọng và học hỏi các giá trị tốt đẹp, tinh hoa của các dân tộc khác; vun đắp tình hữu nghị và sự hợp tác với các nước, bảo vệ hòa bình,...
- *Đối với môi trường tự nhiên*: Yêu thiên nhiên, sống hòa hợp với thiên nhiên, có ý thức bảo vệ môi trường tự nhiên,...

2. Các vấn đề pháp luật

- Quyền trẻ em được bảo vệ, chăm sóc và giáo dục; Quyền và nghĩa vụ của công dân trong hôn nhân và gia đình,...
- Thực hiện trật tự, an toàn giao thông; Phòng chống tệ nạn xã hội; Phòng chống nhiễm HIV/AIDS; Bảo vệ môi trường và tài nguyên thiên nhiên,...
- Quyền học tập, sáng tạo và phát triển của công dân; Bảo vệ di sản văn hóa; Quyền sở hữu tài sản của công dân và nghĩa vụ tôn trọng tài sản của người khác; Nghĩa vụ tôn trọng, bảo vệ tài sản nhà nước và lợi ích công cộng,...
- Quyền được pháp luật bảo hộ về tính mạng, thân thể, sức khỏe, danh dự và nhân phẩm; Quyền tự do tín ngưỡng và tôn giáo; Quyền bầu cử, ứng cử; Quyền khiếu nại, tố cáo; Quyền tham gia quản lý nhà nước và xã hội,...
- Thực hiện pháp luật; Công dân bình đẳng trước pháp luật; Vi phạm pháp luật và trách nhiệm pháp lý,...

III. THỂ LOẠI, BÀN THẢO

Thể loại

Câu chuyện (có nhân vật, có cốt truyện,...) gắn với tình huống và cách xử lý tình huống.

Bàn thảo

- Độ dài bài viết không quá 700 chữ (2 trang khổ A4).
- Bài dự thi được viết hoặc đánh máy rõ ràng, sạch trên khổ giấy A4. Bài dự thi chưa đăng tải trên sách báo, chưa sử dụng trên các phương tiện thông tin đại chúng khác.
- Tác giả ghi rõ họ tên, địa chỉ, số điện thoại (nếu có) vào cuối bài dự thi.

IV. ĐỐI TƯỢNG DỰ THI

- Tất cả người Việt Nam ở trong nước và nước ngoài quan tâm tới việc giáo dục đạo đức và giáo dục pháp luật trong nhà trường đều có thể dự thi.
- Đặc biệt khuyến khích, động viên các nhà quản lý giáo dục; các thầy giáo, cô giáo đang đứng lớp giảng dạy hoặc đã nghỉ hưu, nhất là những giáo viên dạy môn Đạo đức ở tiểu học và môn Giáo dục công dân ở trung học cơ sở, trung học phổ thông; các em học sinh, sinh viên tham gia.
- Mỗi tác giả có thể gửi từ 1 đến 10 câu chuyện tình huống dự thi.

V. THỜI GIAN NHẬN TÁC PHẨM DỰ THI

Đợt 1: Từ 8 tháng 6 đến 31 tháng 12 năm 2010 (theo dấu bưu điện). Sơ kết vào dịp đầu năm 2011.

Đợt 2: Kết thúc nhận bài vào tháng 9 năm 2011, tổng kết và trao giải vào dịp kỷ niệm Ngày Nhà giáo Việt Nam (20/11/2011).

VI. QUYỀN LỢI VÀ GIẢI THƯỞNG

- Bài dự thi có chất lượng sẽ được Ban tổ chức giới thiệu đăng tải trên báo Giáo dục Thời đại và một số báo, tạp chí của ngành Giáo dục, sẽ được xuất bản thành sách để phục vụ việc dạy – học môn Đạo đức, môn Giáo dục công dân và giới thiệu tới bạn đọc trong cả nước (Người viết được hưởng nhuận bút theo quy định).
- **Cơ cấu giải thưởng:**

- + **Giải Nhất** : 10.000.000 đồng
- + **Giải Nhì** : 7.000.000 đồng
- + **Giải Ba** : 5.000.000 đồng
- + **Giải Khuyến khích** : 2.000.000 đồng

Số lượng mỗi giải sẽ do Ban chỉ đạo Cuộc thi quyết định. Ngoài ra, Ban Chỉ đạo Cuộc thi và Công đoàn Giáo dục Việt Nam có hình thức khen thưởng thích đáng dành cho các Sở Giáo dục – Đào tạo, các cơ sở giáo dục có nhiều người tham gia dự thi có kết quả. Ban Giám khảo chấm các bài dự thi gồm các thành viên là nhà khoa học, nhà sư phạm có uy tín thực hiện.

Bài dự thi gửi theo địa chỉ :

Ban tổ chức

Cuộc thi viết Câu chuyện tình huống đạo đức và pháp luật

81 Trần Hưng Đạo – Quận Hoàn Kiếm – Hà Nội

ĐT : 04.38222 393 - ĐTDD : 0913 219 551



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ **Mathematics and Youth Magazine**

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 397 (7.2010)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HẢI, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1** Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ Kỷ niệm 85 năm ngày Báo chí Cách mạng Việt Nam.
- 2** **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Cao Văn Dũng – Sử dụng vai trò như nhau của các biến để chứng minh bất đẳng thức.
- 4** Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, năm học 2009 – 2010.
- 5** Đề thi học sinh giỏi lớp 9 thành phố Hồ Chí Minh năm 2010.
- 6** **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Nguyễn Anh Dũng – Bình luận về đề thi tuyển sinh đại học khối A, năm 2010.
- 8** **Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contributions**
Trần Ngọc Thắng – Về một bài toán thi.
- 10** **Kể chuyện về các nhà toán học**
Trần Văn Nhung – Thần đồng toán học Terence Tao.
- 13** **Từ kho tàng toán học – From Math Treasure**
Lê Quốc Hán – Số siêu việc e và các bất đẳng thức cổ điển.
- 15** **Giải trí toán học – Math Recreation**
- 16** **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/397, ..., T12/397, L1/397, L2/397.
- 18** **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 393.
- 27** **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Tôn Nữ Thanh Thủy – Thể tích khối tròn xoay.
- 30** **Cuộc thi Mừng Thăng Long – Hà Nội tròn 1000 tuổi. Đợt 3.**
- 31** Thể lệ cuộc thi viết câu chuyện tình huống đạo đức và pháp luật.

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG

Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THU

Mỹ thuật : MINH THO

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Q. Đống Đa, Hà Nội

Tel: (04) 39947746; 35122068 - Fax: (04) 35123278

GIỚI THIỆU BỘ SÁCH

BÀI TẬP BIÊN SOẠN MỚI CẤP THCS & THPT

Năm 2010, Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tổ chức biên soạn, biên tập **Bộ sách Bài tập mới** theo môn học ở cấp THCS và cấp THPT. Nội dung mỗi cuốn Bài tập được biên soạn bám sát với Chương trình, SGK và *Hướng dẫn thực hiện chuẩn kiến thức, kỹ năng*, theo tinh thần đổi mới dạy - học và kiểm tra, đánh giá các môn học ở trường phổ thông. Những câu hỏi và những dạng bài tập trong sách rất phong phú theo hai hình thức trắc nghiệm và tự luận giúp học sinh tự kiểm tra về mức độ nắm kiến thức cũng như rèn luyện kỹ năng làm bài để đạt kết quả tốt trong kiểm tra, đánh giá định kì, kể cả các kì thi cuối cấp, thi vào các trường Đại học và Cao đẳng. Bộ sách được biên soạn công phu do tập thể tác giả có uy tín và tâm huyết (hầu hết đã biên soạn SGK, giáo viên giỏi,...) và đội ngũ biên tập viên có trình độ chuyên môn cao, giàu kinh nghiệm làm sách.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trân trọng giới thiệu Bộ sách Bài tập biên soạn mới gồm:

- Bộ sách Bài tập mới cấp THCS (42 cuốn)
- Bộ sách Bài tập mới cấp THPT (54 cuốn, dành cho hai ban: cơ bản và nâng cao).



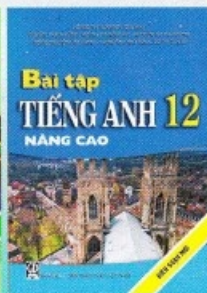
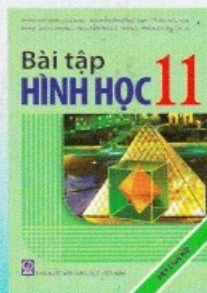
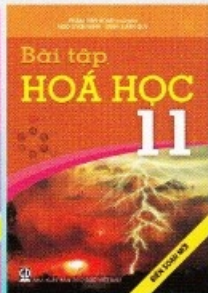
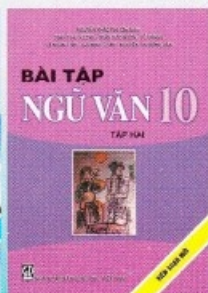
Mọi chi tiết xin vui lòng liên hệ:

Phòng Kế hoạch - Kinh doanh

Công ty CP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc

187 B Giảng Võ, Q. Đống Đa, Hà Nội.

Tel: (04)38562011 - Fax: (04)38562493





TRƯỜNG PHỔ THÔNG NEWTON

NEWTON GRAMMAR SCHOOL

TUYỂN SINH NĂM HỌC 2010-2011

HỆ SONG NGỮ QUỐC TẾ HỆ BÁN QUỐC TẾ TỪ LỚP 1 ĐẾN LỚP 12

***Hoạt động ngoại khóa:**

- CLB: bóng đá, bóng rổ, aerobic, ngoại ngữ, kỹ năng sống, dã ngoại...
- CLB: Bơi (2 bể bơi nằm trong khuôn viên trường)



*** Môi trường học tập lý tưởng:**

- 20 học sinh/lớp, trang bị hiện đại: điều hòa, máy chiếu, camera,...
- Chương trình tiếng Anh chuyên sâu, giáo viên tiếng Anh bản ngữ

**ĐỊA CHỈ: CUNG THỂ THAO DƯỚI NƯỚC KHU LIÊN HỢP
THỂ THAO QUỐC GIA. MỸ ĐÌNH, TỪ LIÊM, HÀ NỘI**
WEBSITE: www.ngs.edu.vn



***Mục tiêu của nhà trường:**

- Mô hình du học tại chỗ;
- Hội nhập quốc tế



*GS. TSKH. Trần Văn Nhung
Chủ tịch HĐQT nhà trường (bên phải)*



*HS Phạm Minh Thành đoạt giải Ba
Kì thi Olympic Toán học bằng tiếng Anh*

TEL: 04. 37857002/04. 37857003

EMAIL: info@ngs.edu.vn

HOTLINE: 0903.277.662

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT07M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2010

Giá : 8000 đồng

Tám nghìn đồng