



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

6 2010
Số 396

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 47

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



Đội tuyển VIỆT NAM
tham dự kì thi IMO 2010





SOBEE

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH - TBGD MIỀN NAM

SOUTH EDUCATIONAL EQUIPMENT AND BOOK JOINT STOCK COMPANY
(SOBEE JSC)



Ông Ngô Trần Ái - TGD NXBGDVN (thứ ba từ trái sang)

Tặng hoa, logo chúc mừng HĐQT Công ty CP Sách - TBGD Miền Nam nhân Lễ khai trương Công ty.

- **NGÀY THÀNH LẬP** : 22/4/2010
- **TRỤ SỞ CHÍNH** : 231 Nguyễn Văn Cừ - P4 - Quận 5 TP. Hồ Chí Minh
- **DIỆN THOẠI (MV 08)** : 38300312 - 38358423, FAX : 38351488 - 38390727
- **CHỦ TỊCH HĐQT** : Ông Vũ Bá Hoà
- **TỔNG GIÁM ĐỐC** : Ông Phạm Văn Hồng
- **PHÓ TỔNG GIÁM ĐỐC** : Bà Nguyễn Thị Thu
- **KẾ TOÁN TRƯỞNG** : Bà Nguyễn Mai Hoa

**CÔNG TY CP SÁCH - TBGD MIỀN NAM LÀ ĐƠN VỊ THÀNH VIÊN CỦA
NXBGD VIỆT NAM, HOẠT ĐỘNG THEO MÔ HÌNH CÔNG TY MẸ - CÔNG TY CON**

**LĨNH
VỰC
KINH
DOANH**

- Bán buôn, bán lẻ sách, báo, tạp chí, văn phòng phẩm.
- Bán lẻ băng đĩa âm thanh, hình ảnh.
- Sản xuất trò chơi, đồ chơi.
- Sản xuất máy móc và thiết bị văn phòng, đồ dùng dạy học, trang thiết bị trường học.
- Sản xuất giường tủ, bàn ghế, đồ dùng nội thất.
- Đại lí môi giới. Đấu giá.
- Hoàn thiện công trình xây dựng, xây dựng nhà các loại.
- Dịch vụ hỗ trợ giáo dục.



Trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 304 (10/2002) và số 305 (11/2002) các tác giả Nguyễn Anh Thuận và Nguyễn Phước đã phân tích cách giải một số dạng đặc biệt của phương trình bậc bốn. Trong quá trình tìm hiểu, tôi cũng phát hiện ra được một hướng giải các phương trình dạng này, đồng thời xây dựng hướng giải cho một số dạng mới của phương trình bậc bốn. Đó chính là nội dung của bài viết dưới đây.

Một hướng giải PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN DẠNG ĐẶC BIỆT

CAO NGỌC TOÀN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

★ DẠNG 1. Phương trình bậc bốn dạng

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0, (a \neq 0)$$

Đây là phương trình bậc bốn có hệ số đối xứng và đối xứng lệch.

Hướng giải. Để giải PT dạng trên ta thực hiện như sau:

Đặt ẩn phụ $t = x^2 \pm 1$, suy ra $t^2 = x^4 \pm 2x^2 + 1$.

Lúc đó

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x^4 \pm 2x^2 + 1) + bx(x^2 \pm 1) + (c \pm 2a)x^2 = 0.$$

$$\text{Do đó } at^2 + bxt + (c \pm 2a)x^2 = 0 \quad (1)$$

PT(1) (ẩn t) có nghiệm khi $b^2 - 4ac \mp 8a^2 \geq 0$.

Thay nghiệm t (phụ thuộc x) vào biểu thức $x^2 - t \pm 1 = 0$ và giải PT này ta tìm được x .

★ Thí dụ 1. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 10x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{b) } 3x^4 - 8x^3 - 34x^2 + 8x + 3 = 0 \quad (2)$$

Lời giải. a) Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow t^2 = x^4 + 2x^2 + 1$.

Lúc đó, biến đổi PT (1) thành

$$(x^4 + 2x^2 + 1) - 10x(x^2 + 1) + 21x^2 = 0,$$

$$\text{hay là } t^2 - 10xt + 21x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 7x)(t - 3x) = 0 \Leftrightarrow t = 7x \text{ hoặc } t = 3x.$$

$$\bullet \text{ Với } t = 7x \text{ ta có } x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

$$\bullet \text{ Với } t = 3x \text{ ta có } x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

b) Đặt $t = x^2 - 1 \Rightarrow t^2 = x^4 - 2x^2 + 1$. Lúc đó biến đổi PT (2) thành

$$3(x^4 - 2x^2 + 1) - 8x(x^2 - 1) - 28x^2 = 0, \text{ hay là}$$

$$3t^2 - 8xt - 28x^2 = 0 \Leftrightarrow (t + 2x)\left(t - \frac{14}{3}x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -2x \text{ hoặc } t = \frac{14}{3}x.$$

$$\bullet \text{ Với } t = -2x \text{ ta có } x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$$\bullet \text{ Với } t = \frac{14}{3}x \text{ ta có}$$

$$3x^2 - 14x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{58}}{3}.$$

Vậy PT đã cho có bốn nghiệm là

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}; \quad x_{3,4} = \frac{7 \pm \sqrt{58}}{3}. \quad \square$$

★ DẠNG 2. Phương trình bậc bốn dạng

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + \frac{c^2}{a^2} = 0, (a \neq 0)$$

Hướng giải. Đặt ẩn phụ $t = x^2 + \frac{c}{a}$, suy ra

$$t^2 = x^4 + \frac{2c}{a}x^2 + \frac{c^2}{a^2}.$$

Lúc đó ta có $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + \frac{c^2}{a^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^4 + \frac{2c}{a}x^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) + ax\left(x^2 + \frac{c}{a}\right) + \left(b - \frac{2c}{a}\right)x^2 = 0,$$

$$\text{tức là } t^2 + axt + \left(b - \frac{2c}{a}\right)x^2 = 0 \quad (1)$$

PT (1) (ẩn t) có nghiệm khi $\frac{a^3 - 4ab + 8c}{a} \geq 0$.

Thay nghiệm t (phụ thuộc x) tìm được vào biểu thức $x^2 - t + \frac{c}{a} = 0$ và giải PT này ta tìm được x .

★ Thí dụ 2. Giải phương trình

$$x^4 + 2x^3 - 20x^2 + 4x + 4 = 0$$

Lời giải. Ta có $a = 2, b = -20, c = 4, \frac{c^2}{a^2} = 4$
nên $\frac{a^3 - 4ab + 8c}{a} = 100 > 0$.

Đặt $t = x^2 + 2 \Rightarrow t^2 = x^4 + 4x^2 + 4$. Biến đổi PT đã cho thành

$$(x^4 + 4x^2 + 4) + 2x(x^2 + 2) - 24x^2 = 0, \text{ hay là } t^2 + 2xt - 24x^2 = 0 \Leftrightarrow (t - 4x)(t + 6x) = 0 \\ \Leftrightarrow t = 4x \text{ hoặc } t = -6x.$$

$$\bullet \text{ Với } t = 4x \text{ ta có } x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}.$$

$$\bullet \text{ Với } t = -6x \text{ ta có } x^2 + 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{7}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}; x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{7}. \quad \square$$

★ DẠNG 3. Phương trình bậc bốn dạng

$$ax^4 + 2abx^3 + (\pm a + b^2)x^2 \pm bx + c = 0, (a \neq 0)$$

Hướng giải. Đặt ẩn phụ $t = ax^2 + bx$.

Lúc đó ta có

$$a^2x^4 + 2abx^3 + (\pm a + b^2)x^2 \pm bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (ax^2 + bx)^2 \pm (ax^2 + bx) + c = 0, \text{ tức là}$$

$$t^2 \pm t + c = 0 \quad (1)$$

Giải PT (1) để tìm t , sau đó thay vào biểu thức $ax^2 + bx - t = 0$ và giải PT này ta tìm được x .

★ Thí dụ 3. Giải phương trình

$$4x^4 + 52x^3 + 171x^2 + 13x - 30 = 0.$$

Lời giải. Ta có $a^2 = 4, 2ab = 52, b = 13, c = -30$, suy ra $a = 2$.

Đặt $t = 2x^2 + 13x$, biến đổi PT đã cho thành

$$(2x^2 + 13x)^2 + 2(2x^2 + 13x) - 30 = 0, \text{ hay là } t^2 + t - 30 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \text{ hoặc } t = -6.$$

• Với $t = 5$ ta có

$$2x^2 + 13x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{209}}{4}.$$

• Với $t = -6$ ta có

$$2x^2 + 13x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}.$$

Vậy PT đã cho có bốn nghiệm là

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{209}}{4}; x_3 = -\frac{1}{2}; x_4 = -6. \quad \square$$

* * *

Để kết thúc bài báo, mời các bạn hãy giải các bài tập tương tự, cùng loại sau:

1. Giải các phương trình

a) $x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1 = 0$;

b) $x^4 + 2x^3 - 17x^2 - 2x + 1 = 0$;

c) $x^4 - 9x^3 + 16x^2 + 18x + 4 = 0$.

2. Xét phương trình

$$25x^4 + 206x^3 + 671x^2 - 26x + m = 0.$$

a) Tìm m để phương trình trên có nghiệm.

b) Giải phương trình khi $m = -42$.

Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên toán TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG, BÌNH PHƯỚC

NĂM HỌC 2009 - 2010

(Đề thi đã đăng trên THPT số 395, tháng 5 năm 2010)

Bài 1. 1) Từ PT đã cho suy ra

$$\frac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4} = (8 - x^2)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = \left(x^4 - \frac{65}{4}x^2 + 64\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}(2x+5)(2x-5)(4x^2-41)(x^2-8)^2 = 0.$$

Thử lại ta có PT đã cho có nghiệm $x = \pm \frac{5}{2}$.

2) Biến đổi HPT đã cho thành $\begin{cases} (x+y)+xy=71 \\ (x+y)xy=880. \end{cases}$

Vậy $x+y$ và xy là hai nghiệm của PT $X^2 - 71X + 880 = 0 \Leftrightarrow X = 55$ hoặc $X = 16$.

• Với $x+y = 55$ và $xy = 16$, ta có x và y là nghiệm của PT $T^2 - 55T + 16 = 0$. PT này không có nghiệm nguyên (loại).

• Với $x+y = 16$ và $xy = 55$, có hai giá trị $(x; y)$ thoả mãn là $(11; 5)$ và $(5; 11)$. Khi đó ta có $B = 146$.

Bài 2. 1) Gọi vận tốc của gió là x (km/h).

Thời gian bay từ A đến B là $\frac{960}{280-x}$ (h), thời

gian bay từ B đến A là $\frac{960}{280+x}$ (h). Theo giả

thiết $\frac{960}{280-x} - 1 = \frac{960}{280+x} \Leftrightarrow x = -1960$ (loại) hoặc $x = 40$.

Vậy vận tốc của gió là 40 km/h.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) là

$$-\frac{x^2}{4} = m(x-1) - 2 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 4(m+2) = 0 \quad (1)$$

Vì $\Delta' = 4m^2 + 4(m+2) = (2m+1)^2 + 7 > 0$ với mọi m nên PT (1) luôn có hai nghiệm phân biệt. Vậy (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Theo định lý Viète ta có

$$x_A^2 x_B + x_A x_B^2 = x_A x_B (x_A + x_B) = -4(m+2)(-4m) = 16(m^2 + 2m) = 16(m+1)^2 - 16 \geq -16.$$

Vậy $\min(x_A^2 x_B + x_A x_B^2) = -16$ đạt được khi và chỉ khi $m = -1$.

Bài 3. 1) Vì $y \geq 0 \Rightarrow x^2 = y^2 + \sqrt{y+1} > y^2 \quad (1)$

Lại vì $y \geq 0$ nên $y+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{y+1} \leq y+1$.

Suy ra $x^2 = y^2 + \sqrt{y+1} \leq y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x^2 = (y+1)^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y+1} = 2y+1 \Leftrightarrow y(4y+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ (do } y \geq 0).$$

Từ đó tìm được duy nhất cặp $(x; y) = (1; 0)$ thoả mãn bài toán.

2) Biến đổi về trái (VT) BDT cần chứng minh và áp dụng BDT Cauchy cho các số dương ta có

$$VT = (x-y) + \frac{y+1}{2} + \frac{y+1}{2} + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} - 1$$

$$\geq 4 \sqrt{(x-y) \cdot \frac{(y+1)^2}{4} \cdot \frac{4}{(x-y)(y+1)^2}} - 1 = 3.$$

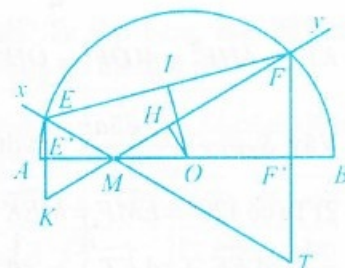
Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$ và $y = 1$.

Bài 4. (h. 1)

1) Gọi K và T lần lượt là giao điểm thứ hai của Mx , My với đường tròn đường kính AB. Khi đó các tam giác MEK và MFT đều. Ta có

$$S_{EE'FF'} = \frac{1}{2}(EE' + FF') \cdot E'F'$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MK + \frac{1}{2}MF \right) \cdot (ME' + MF')$$



Hình 1

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2009 - 2010
(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

Bài 2. (2 điểm)

Cho ba số phân biệt m, n, p . Chứng minh rằng phương trình sau luôn có hai nghiệm phân biệt

$$\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-p} = 0.$$

Bài 3. (2 điểm)

Với số tự nhiên $n, n \geq 3$, đặt

$$S_n = \frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}.$$

Chứng minh rằng $S_n < \frac{1}{2}$.

Bài 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O có độ dài các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$. Điểm E nằm trên cung BC không chứa điểm A sao cho cung EB bằng cung EC . Đoạn thẳng AE cắt cạnh BC tại D .

a) Chứng minh rằng $AD^2 = AB.AC - DB.DC$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng AD theo a, b, c .

Bài 5. (1,5 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương

$$m, n \text{ ta luôn có } \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}.$$

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định) giới thiệu

$$= \frac{1}{4} KF \cdot \left(MK \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + MF \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{8} KF^2.$$

Kẻ $OH \perp My$ thì H là trung điểm của KF , ta

có $OH = OM \sin 30^\circ = \frac{a}{4}$, suy ra

$$KF^2 = 4HF^2 = 4(OF^2 - OH^2) = \frac{15a^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } S_{EE'F'E} = \frac{15\sqrt{3}a^2}{32} \text{ (đvdt).}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ta có } 120^\circ = \widehat{EMF} &= \widehat{MEK} + \widehat{MKE} \\ &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{EF} + \text{sđ } \widehat{KT}) = \text{sđ } \widehat{EF} = \widehat{EOF}. \end{aligned}$$

Kẻ $OI \perp EF$ thì $OI = OF \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$ (không đổi).

Vì $EF \perp OI$ suy ra EF luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính OI (không đổi).

Bài 5. (h. 2) Ta có

$$\frac{AN}{NE} = \frac{S_{AIN}}{S_{EIN}} = \frac{AI \cdot NI \cdot \sin \widehat{AIN}}{EI \cdot NI \cdot \sin \widehat{EIN}} = \frac{AI \cdot \sin \widehat{BIM}}{EI \cdot \sin \widehat{FIM}} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{S_{BIM}}{S_{FIM}} = 1 \Rightarrow \frac{BI \cdot MI \cdot \sin \widehat{BIM}}{FI \cdot MI \cdot \sin \widehat{FIM}} = 1$$

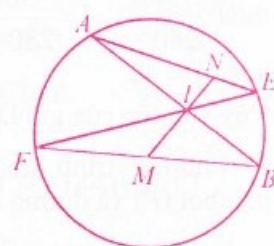
$$\Rightarrow \frac{\sin \widehat{BIM}}{\sin \widehat{FIM}} = \frac{FI}{BI} \quad (2)$$

Lại có $\Delta AIE \sim \Delta FIB$,

$$\text{suy ra } \frac{FI}{BI} = \frac{AI}{EI} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{AN}{NE} = \frac{AI^2}{EI^2} \text{ (đpcm).}$$



Hình 2

TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước) giới thiệu



**Chuẩn bị
cho kì thi
tốt nghiệp THPT
và thi vào
Đại học**

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ SỐ PHỨC

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Số phức là một vấn đề còn mới ở chương trình toán lớp 12. Do vậy mà các bạn học sinh không thể tránh khỏi lúng túng khi gặp các bài toán về số phức. Bài viết này giới thiệu một số dạng toán về số phức nhằm giúp các bạn ôn thi vào Đại học và Cao đẳng tốt hơn. Do khuôn khổ của bài viết nên tác giả chỉ nêu ra một số dạng toán liên quan đến dạng đại số của số phức.

DẠNG 1. Bài toán liên quan đến các phép biến đổi số phức

★**Thí dụ 1.** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$.

Tính $|z_1|^2 + |z_2|^2$; $|z_1|^4 + |z_2|^4$.

Lời giải. Giải PT trên tìm ra hai nghiệm là $z_1 = 1 - 3i$; $z_2 = 1 + 3i$, suy ra $|z_1| = |z_2| = \sqrt{10}$.

Do đó $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 20$ và $|z_1|^4 + |z_2|^4 = 200$. □

★**Thí dụ 2:** Cho hai số phức z_1 và z_2 thoả mãn $|z_1| = |z_2| = 1$; $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

Lời giải. Đặt $z_1 = a_1 + b_1i$; $z_2 = a_2 + b_2i$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 3. \end{cases}$

Suy ra $2(a_1b_1 + a_2b_2) = 1$

$\Rightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1 \Rightarrow |z_1 - z_2| = 1$. □

Bài tập tương tự. Cho hai số phức z_1 và z_2 thoả mãn $|z_1| = 3$; $|z_2| = 4$; $|z_1 - z_2| = \sqrt{37}$.

Tìm số phức $z = \frac{z_1}{z_2}$.

DẠNG 2. Bài toán liên quan đến phương trình nghiệm phức

★**Thí dụ 3.** Giải phương trình nghiệm phức $z^2 - 8(1-i)z + 63 - 16i = 0$.

Lời giải. Ta có

$$\Delta' = 16(1-i)^2 - (63 - 16i) = -63 - 16i = (1-8i)^2.$$

Từ đó tìm được hai nghiệm $z_1 = 5 - 12i$;

$z_2 = 3 + 4i$. □

★**Thí dụ 4.** Tìm hai số thực x, y thoả mãn $x(3+5i) + y(1-2i)^3 = 9 + 14i$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} x(3+5i) + y(1-2i)^3 &= x(3+5i) + y(-11+2i) \\ &= (3x-11y) + (5x+2y)i. \end{aligned}$$

Do đó x và y thoả mãn hệ $\begin{cases} 3x-11y=9 \\ 5x+2y=14. \end{cases}$

Giải hệ này ta được $x = \frac{172}{61}$ và $y = -\frac{3}{61}$. □

★**Thí dụ 5.** Giải phương trình

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0,$$

biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

Lời giải. Gọi nghiệm thuần ảo là $z = bi$ ($b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$(bi)^3 - 2(1+i)(bi)^2 + 4(1+i)(bi) - 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 - 4b = 0 \\ -b^3 + 2b^2 + 4b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 2.$$

PT đã cho tương đương với

$$(z-2i)(z^2-2z+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=2i \\ z^2-2z+4=0. \end{cases}$$

Từ đó tìm ra ba nghiệm của PT là

$$z_1 = 2i; z_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 6:** Giải phương trình nghiệm phức

$$z^2 = \bar{z}.$$

Lời giải. Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có

$$z^2 = \bar{z} \Leftrightarrow (a + bi)^2 = a - bi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b. \end{cases}$$

Giải hệ trên tìm được

$$(a; b) \in \left\{ (0; 0); (1; 0); \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}.$$

Vậy PT trên có 4 nghiệm là

$$0; 1; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad \square$$

★ **Thí dụ 7.** Tìm các số nguyên x, y sao cho số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$.

Lời giải. Ta có

$$(x + yi)^3 = 18 + 26i \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 18(3x^2y - y^3) = 26(3xy^2).$$

Giải PT bằng cách đặt $y = tx$ ($x \neq 0$) ta được

$$t = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3, y = 1. \text{ Vậy } z = 3 + i. \quad \square$$

Trong một số trường hợp, dùng công cụ số phức có thể giải được các hệ PT khó, ta xét thí dụ sau đây.

★ **Thí dụ 8.** Giải hệ trên phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Từ hệ suy ra

$$x + yi + \frac{(3x - y) - (x + 3y)i}{x^2 + y^2} = 3$$

$$\Rightarrow x + yi + \frac{3(x - yi)}{x^2 + y^2} - \frac{i(x - yi)}{x^2 + y^2} = 3.$$

Đặt $z = x + yi$, ta được PT ẩn $z \in \mathbb{C}$:

$$z + \frac{(3 - i)\bar{z}}{|z|^2} = 3 \Leftrightarrow z + \frac{(3 - i)}{z} = 3$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 - i = 0.$$

Giải PT bậc hai tìm được $z = 2 + i$ và $z = 1 - i$. Từ đó tìm ra hai nghiệm $(x; y)$ của hệ là $(2; 1); (1; -1)$. $\square$

DẠNG 3. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

★ **Thí dụ 9.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức các số phức z thỏa mãn

$$a) |z| = |\bar{z} - 3 + 4i|; \quad b) \left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 1.$$

Lời giải. a) Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có

$$|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x - 3)^2 + (4 - y)^2 \Leftrightarrow 6x + 8y = 25.$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là đường thẳng có PT $6x + 8y = 25$.

b) Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có

$$\left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z - i| = |z + i|$$

$$\Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |x + (y + 1)i|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = x^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow y = 0.$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là trục thực Ox . $\square$

★ **Thí dụ 10.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức số phức $\omega = (1 + i\sqrt{3})z + 2$, biết rằng số phức z thỏa mãn $|z - 1| \leq 2$.

Lời giải. Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $\omega = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |z - 1| \leq 2 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 \leq 4 \quad (1)$$

Từ $\omega = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ suy ra

$$x + yi = (1 + i\sqrt{3})(a + bi) + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b\sqrt{3} + 2 \\ y = \sqrt{3}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = a - 1 + b\sqrt{3} \\ y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(a - 1) + b \end{cases}$$

Từ đó $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 4((a-1)^2 + b^2) \leq 16$ (do (1)).

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 16$, tâm $I(3; \sqrt{3})$, bán kính $R = 4$. $\square$

DẠNG 4. Số phức và bất đẳng thức

★ **Thí dụ 11.** Chứng minh rằng với mỗi số phức z , có ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau xảy ra:

$$|z+1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ hoặc } |z^2+1| \geq 1.$$

Lời giải. Giả sử có đồng thời $|z+1| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $|z^2+1| < 1$. Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } \begin{cases} (1+a)^2 + b^2 < \frac{1}{2} \\ (1+a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(a^2+b^2) + 4a + 1 < 0 & (1) \\ (a^2+b^2)^2 + 2(a^2-b^2) < 0 & (2) \end{cases}$$

Cộng theo vế (1) với (2) ta được $(a^2+b^2)^2 + (2a+1)^2 < 0$ (vô lí). Suy ra đpcm. $\square$

★ **Thí dụ 12.** Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\left| z^3 + \frac{1}{z^3} \right| \leq 2$. Chứng minh rằng $\left| z + \frac{1}{z} \right| \leq 2$.

Lời giải. Với hai số phức z_1, z_2 ta có $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Từ $\left(z + \frac{1}{z} \right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z} \right)$, suy ra

$$\left| z + \frac{1}{z} \right|^3 \leq \left| z^3 + \frac{1}{z^3} \right| + 3\left| z + \frac{1}{z} \right| \leq 2 + 3\left| z + \frac{1}{z} \right|$$

Đặt $a = \left| z + \frac{1}{z} \right|$ ta được $a^3 - 3a - 2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a+1)^2 \leq 0 \Rightarrow a \leq 2 \quad (\text{đpcm}). \quad \square$$

★ **Thí dụ 13.** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Lời giải. Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có $|z-2+2i|=1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 7 = 4(a-b)$.

Đặt $t = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ta có

$$|a-b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} = \sqrt{2}t. \text{ Suy ra}$$

$$t^2 + 7 \leq 4\sqrt{2}t \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 1 \leq t \leq 2\sqrt{2} + 1.$$

$$\bullet t = 2\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b > 0 \\ a = -b \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{4+\sqrt{2}}{2}; b = -\frac{4+\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } z = \frac{4+\sqrt{2}}{2} - \frac{4+\sqrt{2}}{2}i.$$

$$\bullet t = 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b > 0 \\ a = -b \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{4-\sqrt{2}}{2}; b = -\frac{4-\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } z = \frac{4-\sqrt{2}}{2} - \frac{4-\sqrt{2}}{2}i.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ bằng $2\sqrt{2} + 1$ và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng $2\sqrt{2} - 1$. $\square$

Bài tập tương tự. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1+2i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

DẠNG 5. Tính toán các biểu thức tổ hợp

★ **Thí dụ 14.** Tính giá trị của

$$A = C_{2010}^0 - C_{2010}^2 + C_{2010}^4 - \dots + C_{2010}^{2008} - C_{2010}^{2010}.$$

Lời giải. Xét khai triển

$$\begin{aligned} (1+i)^{2010} &= \sum_{k=0}^{2010} C_{2010}^k i^k \\ &= (C_{2010}^0 - C_{2010}^2 + C_{2010}^4 - \dots + C_{2010}^{2008} - C_{2010}^{2010}) \\ &\quad + (C_{2010}^1 - C_{2010}^3 + C_{2010}^5 - \dots + C_{2010}^{2009})i. \end{aligned} \quad (1)$$

(Xem tiếp trang 10)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I. (2 điểm)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số
 $y = x^3 - 4x^2$ (C)

2) Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C) với parabol (P) có phương trình
 $y = x^2 - 8x + 4$.

Câu II (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+1)^3 = y^3 + 3xy^2 \\ (y-1)^3 = x^3 + 3x^2y \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$8\cos 4x \cdot \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0.$$

Câu III. (1 điểm)

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số

$$y = |x^2 - 4|; \quad y = \frac{x^2}{2} + 4.$$

Câu IV. (1 điểm)

Cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm M khác A. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và K là trực tâm của tam giác BCM.

- a) Chứng minh rằng $MC \perp (BHK); HK \perp (BMC)$.
b) Khi M thay đổi trên d, tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện KABC.

Câu V. (1 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x^2}{x+y^2} + \frac{y^2}{y+z^2} + \frac{z^2}{z+x^2}.$$

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a. (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(0;2) và đường thẳng (d): $x - 2y + 2 = 0$. Tìm trên đường thẳng (d) hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và $AB = 2BC$.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes Oxyz, cho điểm A(1; 2; -1), đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (P): $2x + y - z + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, cắt (d) và song song với (P).

Câu VII.a (1 điểm) Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b. (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M(0; 2) và cắt (C) theo một dây cung có độ dài bằng 4.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes Oxyz, cho ba điểm A(1; -1; 2), B(-1; 0; 3), C(0; 2; 1). Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tính diện tích tam giác ABC và độ dài đường cao AH của tam giác ABC.

Câu VII.b. (1 điểm)

Tìm số nguyên dương n biết rằng

$$\frac{C_n^1}{2} - \frac{2C_n^2}{2^2} + \frac{3C_n^3}{2^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{nC_n^n}{2^n} = \frac{1}{32}.$$

NGUYỄN VĂN THÔNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

Câu I. 1) Bạn đọc tự làm.

2) Tiếp tuyến với (C) tại M có hoành độ $a \neq -2$, thuộc (C) có dạng

$$(\Delta): y = \frac{4}{(a+2)^2}(x-a) + \frac{2a}{a+2}.$$

Đồ thị có tâm đối xứng $I(-2; 2)$ và

$$d(I; \Delta) = \frac{8|a+2|}{\sqrt{16+(a+2)^4}} \leq \frac{8|a+2|}{\sqrt{2.4(a+2)^2}} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn điều kiện đề bài là $y = x$ và $y = x + 8$.

Câu II. 1) PT đã cho có dạng

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{4\cos^2 2x}{\tan x - \cot x} \Leftrightarrow \frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} = \frac{4}{1 + \tan^2 2x} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{\tan 2x} &= \frac{4}{1 + \tan^2 2x} \Leftrightarrow (\tan 2x - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Giải PT này rồi đối chiếu với ĐK đặt ra ở đầu bài để PT có nghĩa, ta thấy PT đã cho vô nghiệm.

2) ĐK $x \neq 0, y \neq 0, x^2 + y^2 - 1 \neq 0$.

Đặt $u = x^2 + y^2 - 1$ và $v = \frac{x}{y}$.

Đưa hệ về dạng
$$\begin{cases} \frac{3}{u} + \frac{2}{v} = 1 & (1) \\ u = 21 - 4v & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) tìm được $v = 3$ hoặc $v = \frac{7}{2}$.

• Với $v = 3$ thì $u = 9$, tìm được $x = \pm 3$ và $y = \pm 1$.

• Với $v = \frac{7}{2}$ thì $u = 7$, tìm được

$$x = \pm 14\sqrt{\frac{2}{53}} \text{ và } y = \pm 4\sqrt{\frac{2}{53}}.$$

Kết luận. Hệ đã cho có 4 nghiệm $(x; y)$ là

$$(3; 1), (-3; -1), \left(14\sqrt{\frac{2}{53}}; 4\sqrt{\frac{2}{53}}\right),$$

$$\left(-14\sqrt{\frac{2}{53}}; -4\sqrt{\frac{2}{53}}\right),$$

Câu III. Đặt $u = \ln x, dv = \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \left(2\sqrt{x+1} \cdot \ln x\right) \Big|_3^8 - 2 \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx \\ &= 6\ln 8 - 4\ln 3 - 2J. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x+1}$, ta có

$$\begin{aligned} J &= \int_2^3 \left(\frac{t}{t^2-1} 2t dt\right) = \int_2^3 \left(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= 2 + \ln 3 - \ln 2. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = 20\ln 2 - 6\ln 3 - 4.$$

Câu IV. Gọi $O = AC \cap BD$; I, J lần lượt là trung điểm AB, CD ; G là trọng tâm tam giác SAC , $K = IG \cap SJ$. Tìm được

$$S_{ABMN} = \frac{1}{2}(AB + MN) \cdot IK = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8}.$$

Chứng minh được $SK \perp mp(ABMN)$, từ đó

$$V_{S.ABMN} = \frac{1}{3}S_{ABMN} \cdot SK = \frac{a^3\sqrt{3}}{16} \text{ (đvtt)}.$$

Câu V. Từ $(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq a+b-ab$

$$\Rightarrow \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1. \text{ Từ đó}$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3. \text{ Vậy}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{abc}\right)(a+b+c) &= a+b+c + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \\ &\geq a+b+c + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3 \end{aligned}$$

$$\geq 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3$$

$$\geq 6 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 = 3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Câu VIa. 1) Đáp số $B(1; -2), C(6; 3)$ hoặc $B(6; 3), C(1; -2)$.

2) • Mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) cắt nhau.

• PT mặt cầu (S) là $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Câu VII.a. • *Đội tuyển có Vũ Mạnh Cường, không có Ngô Thu Thủy.*

Số cách chọn 3 nam còn lại là C_6^3 . Số cách chọn 3 nữ không có Ngô Thu Thủy là C_3^3 .

Số cách chọn trong trường hợp này là $C_6^3 \cdot C_3^3 = 1680$ (cách).

• *Đội tuyển có Ngô Thu Thủy, không có Vũ Mạnh Cường*

Số cách chọn 4 nam không có Vũ Mạnh Cường là C_6^4 . Số cách chọn 2 nữ còn lại là C_2^2 .

Số cách chọn trong trường hợp này là $C_6^4 \cdot C_2^2 = 540$ (cách).

Số cách chọn cần tìm là: $1680 + 540 = 2220$ (cách).

Câu VIIb

1) *Đáp số.* $A\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $B(-4; 1)$, $C\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

2) Gọi (Δ) là đường thẳng qua C và song song với AB , (S) là mặt cầu tâm A , bán kính $R = 3$. Điểm D cần tìm là giao điểm của (Δ) và (S).

Đáp số. $D\left(\frac{164}{49}; -\frac{51}{49}; \frac{48}{49}\right)$.

Câu VIIb. PT thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x(3x+y-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x=0 \text{ hoặc } y=1-3x. \end{cases}$$

• Với $x = 0$, thay vào PT thứ nhất của hệ, tìm được $y = \log_2 \frac{8}{11}$.

• Với $y = 1 - 3x$, thay vào PT thứ nhất của hệ được $2^{3x+1} + 2^{-3x-1} = 3.2$. Đặt $t = 2^{3x+1} \left(t \geq -\frac{1}{4} \right)$

được PT $t + \frac{1}{t} = 6$. Tìm được $t = 3 + 2\sqrt{2}$.

Đáp số. Hệ có hai nghiệm là $(x; y)$ là

$$\left(0; \log_2 \frac{8}{11}\right) \text{ và } \left(\frac{1}{3} \left(\log_2(3+2\sqrt{2}) - 1\right); 2 - \log_2(3+2\sqrt{2})\right).$$

HUYỀN TẤN CHÂU

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

MỘT SỐ DẠNG TOÁN... (Tiếp trang 7)

Mặt khác

$$(1+i)^{2010} = ((1+i)^2)^{1005} = (2i)^{1005} = 2^{1005}i \quad (2)$$

So sánh phần thực của $(1+i)^{2010}$ ở (1) và (2) ta được $A = 0$. $\square$

Nhận xét. + Từ trên cũng suy ra kết quả

$$B = C_{2010}^1 - C_{2010}^3 + C_{2010}^5 - \dots + C_{2010}^{2009} = 2^{1005}.$$

$$+ \text{ Xét khai triển } (1+x)^{2010} = \sum_{k=0}^{2010} C_{2010}^k \cdot x^k \quad (*)$$

Từ (*) lần lượt thay $x = 1$ và $x = -1$ ta được

$$\begin{cases} C_{2010}^0 + C_{2010}^1 + C_{2010}^2 + \dots + C_{2010}^{2009} + C_{2010}^{2010} = 2^{2010} \\ C_{2010}^0 - C_{2010}^1 + C_{2010}^2 - \dots - C_{2010}^{2009} + C_{2010}^{2010} = 0. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} C = C_{2010}^0 + C_{2010}^2 + C_{2010}^4 + \dots + C_{2010}^{2008} + C_{2010}^{2010} = 2^{2009} \\ D = C_{2010}^1 + C_{2010}^3 + C_{2010}^5 + \dots + C_{2010}^{2007} + C_{2010}^{2009} = 2^{2009}. \end{cases}$$

+ Từ kết quả của A và C suy ra

$$P = C_{2010}^0 + C_{2010}^4 + C_{2010}^8 + \dots + C_{2010}^{2004} + C_{2010}^{2008} = 2^{2008}.$$

+ Từ kết quả của B và D suy ra

$$\begin{aligned} Q &= C_{2010}^1 + C_{2010}^5 + C_{2010}^9 + \dots + C_{2010}^{2005} + C_{2010}^{2009} \\ &= 2^{1004} + 2^{2008}. \end{aligned}$$

Cuối cùng là một số bài tập cho các bạn luyện tập.

1. Giải các phương trình sau trên tập số phức

1) $z^3 = \bar{z}$; 2) $|z| + z = 3 + 4i$;

3) $(1+i)z^2 + 2 + 11i = 0$.

2. Tìm số phức z sao cho $A = (z-2)(\bar{z}+i)$ là một số thực.

3. Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z| = 5$ và $\frac{z+7i}{z+1}$ là số thực.

4. Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng $1C_{8n}^1 - 3C_{8n}^3 + \dots - (8n-1)C_{8n}^{8n-1} = 4n \cdot 2^{4n}$.

5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$



Một số tính chất CỦA LỤC GIÁC CÂN XOAY TRÒN

NGUYỄN ANH TUYẾN
(HS lớp 11 Toán, THPT chuyên Thái Bình)

Nếu dựng ra bên ngoài một tam giác cho trước các tam giác cân có đáy là các cạnh của tam giác ban đầu, ta được một lục giác có các cạnh liên tiếp đôi một bằng nhau, tạm gọi là *lục giác cân xoay tròn*. Quanh lục giác này có khá nhiều tính chất thú vị. Chúng tôi xin nói về điều đó trong bài viết này thông qua các bài toán sau.

✪ **Bài toán 1.** Cho lục giác $AZBXC Y$ có $XB = XC$, $YC = YA$, $ZA = ZB$. Chứng minh rằng

$$\frac{XB}{XA} + \frac{YC}{YB} + \frac{ZA}{ZC} \geq \frac{3}{2}$$

(Đề nghị IMO, 1997, Singapore TST, 1997-1998)

Lời giải. (h. 1)

Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Sử dụng BĐT Ptolemy cho tứ giác $ABXC$, ta có

$$XB \cdot CA + XC \cdot AB \geq XA \cdot BC$$

$$\Leftrightarrow XB(AB + CA) \geq XA \cdot BC$$

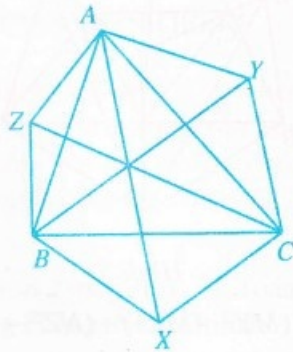
$$\Leftrightarrow \frac{XB}{XA} \geq \frac{BC}{AB + CA} = \frac{a}{b + c}$$

Tương tự $\frac{YC}{YB} \geq \frac{b}{c + a}$; $\frac{ZA}{ZC} \geq \frac{c}{a + b}$. Suy ra

$$\frac{XB}{XA} + \frac{YC}{YB} + \frac{ZA}{ZC} \geq \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi lục giác $AZBXC Y$ đều. $\square$

Từ bài toán trên ta có bài toán hệ quả sau:



Hình 1

✪ **Bài toán 2.** Chứng minh rằng

1) Nếu mỗi cạnh của một lục giác lồi có độ dài lớn hơn 1 thì luôn tìm được một đường chéo có độ dài lớn hơn 2.

2) Nếu độ dài của các đường chéo chính trong một lục giác lồi đều lớn hơn 2 thì luôn tìm được một cạnh của lục giác có độ dài lớn hơn 1.

Sử dụng định lý Ptolemy và tính chất của đường phân giác, ta có kết quả bài toán sau.

✪ **Bài toán 3.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tại A_1 , cắt đường tròn (O) tại A_2 . Các điểm $B_1, B_2; C_1, C_2$ được định nghĩa tương tự như A_1, A_2 . Chứng minh rằng

$$\frac{A_1 A_2}{BA_2 + CA_2} + \frac{B_1 B_2}{AB_2 + CB_2} + \frac{CC_1}{AC_2 + BC_2} \geq \frac{3}{4}$$

(Olympic Toán học Belarusia, 1999)

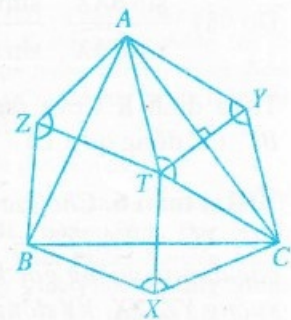
✪ **Bài toán 4.** Cho tam giác ABC . Dựng các tam giác cân BCX, CAY, ABZ với các đỉnh X, Y, Z theo thứ tự và đồng dạng với nhau bên ngoài tam giác ABC . Gọi T là điểm đối xứng với Y qua CA . Chứng minh rằng tứ giác $TXBZ$ là hình bình hành.

Lời giải. (h. 2) Ta thấy $\triangle AZB \sim \triangle ATC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AZ}{AT}, \text{ do đó}$$

$$\triangle ZAT \sim \triangle BAC.$$

Tương tự, $\triangle XTC \sim \triangle BAC$. Suy ra $\triangle XTC \sim \triangle ZAT$. Mà tỉ số đồng dạng của chúng



Hình 2

bằng $\frac{TC}{AT} = 1$ nên $\Delta XTC = \Delta ZAT \Rightarrow XT = ZA = ZB$.

Tương tự, $ZT = XB$. Suy ra tứ giác $TXBZ$ là hình bình hành. $\square$

Bài toán 5. Cho tam giác ABC . Dựng các tam giác cân BCX , CAY , ABZ với các đỉnh X , Y , Z theo thứ tự và đồng dạng với nhau bên ngoài tam giác ABC . Chứng minh rằng ba đường thẳng AX , BY , CZ đồng quy.

(Chọn đội tuyển IMO Hồng Kông lần I, 1998)

Lời giải. (h. 3). Đặt $\widehat{XBC} = \widehat{XCB} = \widehat{YCA} = \widehat{YAC} = \widehat{ZAB} = \widehat{ZBA} = \alpha$.

Sử dụng định lý sin cho tam giác ABX , ta có

$$\frac{BX}{\sin \widehat{BAX}} = \frac{AX}{\sin \widehat{ABX}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \widehat{BAX} = \frac{BX}{AX} \cdot \sin \widehat{ABX}$$

Tương tự, $\sin \widehat{CAX} = \frac{CX}{AX} \cdot \sin \widehat{ACX}$. Suy ra

$$\frac{\sin \widehat{BAX}}{\sin \widehat{CAX}} = \frac{\sin \widehat{ABX}}{\sin \widehat{ACX}} = \frac{\sin(B + \alpha)}{\sin(C + \alpha)}$$

Tương tự

$$\frac{\sin \widehat{CBY}}{\sin \widehat{ABY}} = \frac{\sin(C + \alpha)}{\sin(A + \alpha)}; \frac{\sin \widehat{ACZ}}{\sin \widehat{BCZ}} = \frac{\sin(A + \alpha)}{\sin(B + \alpha)}$$

$$\text{Do vậy } \frac{\sin \widehat{BAX}}{\sin \widehat{CAX}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBY}}{\sin \widehat{ABY}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACZ}}{\sin \widehat{BCZ}} = 1.$$

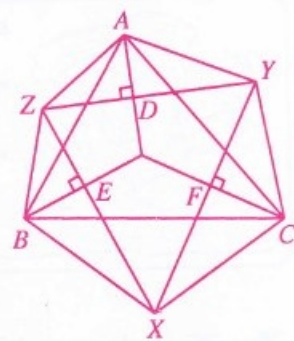
Theo định lý Ceva dạng lượng giác thì AX , BY , CZ đồng quy. $\square$

Bài toán 6. Cho lục giác $AZBXC_Y$ có $XB = XC$, $YC = YA$, $ZA = ZB$. Chứng minh rằng các đường vuông góc kẻ từ A , B , C tương ứng xuống YZ , ZX , XY đồng quy.

(USAMO)

Lời giải. Gọi (O_1) là đường tròn tâm X , bán kính XB ; (O_2) là đường tròn tâm Y , bán kính YC và (O_3) là đường tròn tâm Z , bán kính ZA (h. 4).

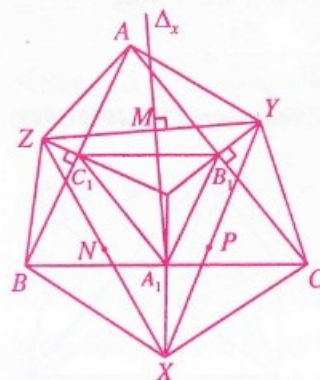
Gọi D , E , F lần lượt là chân đường cao hạ từ A xuống YZ , B xuống ZX , C xuống XY . Dễ thấy có AD , BE , CF lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O_2) , (O_3) ; (O_3) , (O_1) ; (O_1) , (O_2) . Do đó AD , BE , CF đồng quy. $\square$



Hình 4

Bài toán 7. Cho lục giác $AZBXC_Y$ có $XB = XC$, $YC = YA$, $ZA = ZB$. Gọi A_1 , B_1 , C_1 lần lượt là trung điểm của BC , CA , AB ; Δ_x , Δ_y , Δ_z là các đường thẳng qua A_1 , B_1 , C_1

tương ứng vuông góc với YZ , ZX , XY . Chứng minh rằng ba đường thẳng Δ_x , Δ_y , Δ_z đồng quy.



Hình 5

Lời giải. (h. 5).

Giả sử Δ_x , Δ_y , Δ_z cắt YZ , ZX , XY lần lượt tại M , N , P . Ta có

$$\begin{aligned} & (MY^2 - MZ^2) + (NZ^2 - NX^2) + (PX^2 - PY^2) \\ &= (A_1Y^2 - A_1Z^2) + (B_1Z^2 - B_1X^2) + (C_1X^2 - C_1Y^2) \\ &= (XC_1^2 - XB_1^2) + (YA_1^2 - YC_1^2) + (ZB_1^2 - ZA_1^2) \\ &= (A_1C_1^2 - A_1B_1^2) + (B_1A_1^2 - B_1C_1^2) + (C_1B_1^2 - C_1A_1^2) \\ &= 0 \quad (\text{Do } XA_1 \perp B_1C_1, YB_1 \perp C_1A_1, ZC_1 \perp A_1B_1) = 0 \end{aligned}$$

Theo định lý Carnot ta có ba đường thẳng Δ_x , Δ_y , Δ_z đồng quy. $\square$

Bài toán 8. Cho tam giác ABC . Dựng các tam giác đều BCX , CAY , ABZ bên ngoài tam giác ABC . Chứng minh rằng tâm của các tam giác đó tạo thành một tam giác đều.

(Định lý Napoleon)

TIN TỨC**Hội thảo khoa học CÁC CHUYÊN ĐỀ OLYMPIC TOÁN**

Để thông báo các kết quả mới của Giải tích hiện đại trong tính toán khoa học, nghiên cứu môi trường, đồng thời tổng kết các chuyên đề bồi dưỡng giáo viên và công tác đào tạo học sinh giỏi toán tham dự các kì thi Olympic Toán Quốc gia, Khu vực và Quốc tế, trường ĐHKHTN, ĐHQGHN, Hội Toán học Hà Nội và trường Đại học Tổng hợp Polostk (Belarutx) đồng tổ chức workshop "*Phương pháp Giải tích hiện đại trong ứng dụng*" tại trường ĐHKHTN Hà Nội vào ngày 20-21.5.2010 và Hội thảo khoa học "*Các chuyên đề Olympic toán*" tại Ba Vì vào ngày 22-23.5.2010 do GS.TSKH. NGND Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội đồng Khoa học trường ĐHKHTN, ĐHQGHN kiêm Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội chủ trì. Hội thảo khoa học lần này hân hạnh được đón tiếp nhiều nhà khoa học, các chuyên gia toán học hàng đầu đến từ Belarutx và Việt Nam tham gia trực tiếp giảng dạy, báo cáo tại các phiên toàn thể. Đồng thời các nhà giáo dục, các giáo viên đang trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi môn Toán báo cáo tại các buổi thảo luận chuyên đề. Các đại biểu tham dự thật sự xúc động về bài phát biểu "Hai mươi năm tôi đi dự Semina" của PGS.TS Trần Huy Hồ. Thay mặt Semina, GS Nguyễn Văn Mậu đã chúc



mừng và tặng quà cho 9 thành viên đã được nghỉ công tác. TS. Phạm Thị Bạch Ngọc thay mặt cho Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ cũng chúc mừng và tặng quà kỉ niệm của Tạp chí cho 9 thầy giáo trên.

Nhân dịp này, Hội nghị đã tổ chức cho đại biểu giao lưu văn nghệ với ĐHQGHN, tổ chức thăm quan khu K9 và một vài danh thắng của Ba Vì. Hội nghị diễn ra trong không khí đầm ấm tình đồng nghiệp và tình thầy trò giữa các thế hệ học và dạy Toán, Hội nghị thành công tốt đẹp và đã để lại ấn tượng sâu sắc cho các đại biểu tham dự.

PV

Lời giải. Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là tâm của các tam giác BCX, CAY, ABZ . Dễ thấy rằng $A_0BC; B_0CA; C_0AB$ là các tam giác cân đồng dạng có góc ở đáy 30° .

Xét các phép đồng dạng thuận

$$Z_1 = Z(C, 30^\circ, \sqrt{3}),$$

$$Z_2 = Z\left(B, 30^\circ, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ta có $Z_1: A_0 \mapsto X, B_0 \mapsto A$

và $Z_2: X \mapsto A_0, A \mapsto C_0$.

Suy ra $Z_2 \circ Z_1: B_0 \mapsto C_0, A_0 \mapsto A_0$.

Mặt khác, $k_1 k_2 = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$ và

$\varphi_1 + \varphi_2 = 60^\circ$ nên $Z_2 \circ Z_1$ là một phép dời hình, cụ thể là phép quay góc 60° , tâm A_0 biến B_0 thành C_0 . Vậy tam giác $A_0 B_0 C_0$ là tam giác đều. Bài toán đã được chứng minh. $\square$

Sau đây là một bài toán nhỏ xin dành cho bạn đọc.

✪ **Bài toán 9.** Cho tam giác ABC . Dựng các tam giác đều BCX, CAY, ABZ bên ngoài tam giác ABC . Chứng minh rằng $S_{XYZ} \geq S_{ABC}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

KÌ THI CHỌN HỌC SINH VÀO ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA

dự thi IMO 2010

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD – Bộ GD&ĐT)

Kì thi chọn học sinh vào đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 51 năm 2010 (IMO 2010) đã được tổ chức tại Hà Nội, trong hai ngày 17 và 18/4/2010.

Căn cứ Quy chế thi hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập 42 học sinh có điểm thi cao nhất trong Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm 2010 tham dự kỳ thi tuyển chọn nói trên. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh được đề nghị giải ba bài toán trong thời gian 240 phút. Điểm tối đa của mỗi ngày thi là 20 điểm.

1. ĐỀ THI

NGÀY THI THỨ NHẤT, 17/4/2010

Bài 1. (6 điểm). Cho tam giác ABC không vuông tại A. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xét một điểm D di động trên đường thẳng AM sao cho D không trùng với M. Ký hiệu (O_1) là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với BC tại B; (O_2) là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với BC tại C. Đường thẳng AB cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai P và đường thẳng AC cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai Q. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của (O_1) và tiếp tuyến tại Q của (O_2) cắt nhau và giao điểm của chúng luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

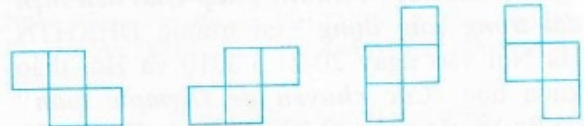
Bài 2. (6 điểm). Với mỗi số nguyên dương n, xét tập hợp

$$T_n = \{11(h+k) + 10(n^h + n^k) \mid h, k \in \mathbb{N} \text{ và } 1 \leq h \leq k \leq 10\}.$$

Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tập hợp T_n có tính chất: Với mọi a, b thuộc T_n mà $a \neq b$, ta luôn có $a - b$ không chia hết cho 110.

($\mathbb{N}$ ký hiệu tập hợp các số tự nhiên).

Bài 3. (8 điểm). Gọi mỗi hình chữ nhật kích thước 1×2 (hoặc 2×1) là một hình chữ nhật đơn. Gọi mỗi hình chữ nhật kích thước 2×3 (hoặc 3×2) bị khuyết hai ô vuông 1×1 ở hai góc đối nhau là một hình chữ nhật khuyết (xem hình minh họa dưới đây).



Biết rằng người ta có thể ghép khít một số hình chữ nhật đơn và một số hình chữ nhật khuyết với nhau để tạo thành một hình chữ nhật kích thước 2008×2010 . Hỏi để ghép được như vậy, cần phải dùng ít nhất bao nhiêu hình chữ nhật đơn?

NGÀY THI THỨ HAI, 18/4/2010

Bài 4. (6 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 16(a+b+c).$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2(a+c)})^3} + \frac{1}{(b+c+\sqrt{2(b+a)})^3} + \frac{1}{(c+a+\sqrt{2(c+b)})^3} \leq \frac{8}{9}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 5. (7 điểm). Có n nước cử đại biểu tham dự một Festival Quốc tế, mỗi nước cử k đại biểu (n và k là các số nguyên thỏa mãn $n > k > 1$). Ban tổ chức Festival phân chia tất cả nk đại biểu thành n nhóm sinh hoạt, mỗi nhóm gồm k đại biểu và trong mỗi nhóm không có 2 đại biểu nào của cùng một nước. Chứng minh

rằng có thể chọn ra n đại biểu sao cho mỗi nhóm có một đại biểu được chọn, đồng thời mỗi nước đều có một đại biểu được chọn.

Bài 6. (7 điểm). Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n là tổng bình phương các hệ số trong khai triển thành đa thức của biểu thức $(1+x)^n$.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , $S_{2n} + 1$ không chia hết cho 3.

2. CHẤM THI VÀ KẾT QUẢ

Việc chấm thi được bắt đầu vào sáng ngày 22/4/2010 và kết thúc vào tối ngày 25/4/2010. Tất cả các thành viên của tổ chấm thi đã làm việc hết sức khẩn trương, khách quan và nghiêm túc nhằm đảm bảo đánh giá một cách công bằng và chính xác bài làm của các thí sinh, trên cơ sở biểu điểm đã được lãnh đạo Ban chấm thi phê duyệt.

a) Đôi nét về tình hình làm bài của các thí sinh

Bảng số liệu dưới đây sẽ giúp độc giả hình dung khái quát về tình hình làm bài của các thí sinh:

Bài	1	2	3	4	5	6
Tổng điểm	200	76,80	0	148,25	13,50	40
Số thí sinh giải hoàn chỉnh (hoặc gần như hoàn chỉnh)	25	6	0	23	1	3

b) Kết quả. Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế thi hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định chọn 6 học sinh có điểm thi cao nhất (có tên dưới đây) vào Đội tuyển Quốc gia dự thi IMO 2010 (xem ảnh ở Bìa 1).

1. **Vũ Đình Long**, học sinh lớp 11 Khối THPT chuyên Toán - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội (Hàng ngồi, thứ ba từ trái sang);
2. **Nguyễn Ngọc Trung**, học sinh lớp 12 trường THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh Phú Thọ (Hàng đứng, thứ nhất từ trái sang);

3. **Trần Thái Hưng**, học sinh lớp 11 trường Thực hành Sư phạm - ĐHSP TP. Hồ Chí Minh (Hàng ngồi, thứ hai từ trái sang);

4. **Nguyễn Kiều Hiếu**, học sinh lớp 12 trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng (Hàng ngồi, thứ nhất từ trái sang);

5. **Phạm Việt Cường**, học sinh lớp 12 trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng (Hàng đứng, thứ hai từ trái sang);

6. **Nguyễn Minh Hiếu**, học sinh lớp 12 Khối THPT chuyên Toán - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội (Hàng đứng, thứ ba từ trái sang).

Điểm thi của sáu học sinh nêu trên như sau:

Họ và tên	Điểm thi						Tổng
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
Vũ Đình Long	4,5	5	0	5,5	2	7	24
Nguyễn Ngọc Trung	4,5	6	0	5,75	0	7	23,25
Trần Thái Hưng	5,5	4,5	0	0	7	3	20
Nguyễn Kiều Hiếu	6	5	0	0	1	7	19
Phạm Việt Cường	6	5,5	0	6	0	0,5	18
Nguyễn Minh Hiếu	5,5	4	0	6	2	0,5	18

Ngày 09/5/2010, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập sáu học sinh của Đội tuyển về Hà Nội tham dự lớp tập huấn chuyên môn chuẩn bị cho IMO 2010. Viện Toán học - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam được Bộ Giáo dục và Đào tạo ủy quyền chủ trì công tác tập huấn đội tuyển, dưới sự giám sát của Bộ.

Đầu tháng 7/2010, Đoàn cán bộ, học sinh Việt Nam sẽ lên đường tham dự IMO 2010 tổ chức tại Astana - Cộng hòa Kazakhstan từ ngày 02/7 đến ngày 14/7/2010.

LTS. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ nhiệt liệt chúc mừng sáu học sinh đã được tuyển chọn vào Đội tuyển Quốc gia môn Toán và chúc các em giữ gìn sức khỏe thật tốt, nỗ lực học tập và trau dồi chuyên môn để chuẩn bị tốt nhất cho Kỳ thi IMO 2010.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/396. (Lớp 6). Viết các số chính phương liên tiếp $1^2, 2^2, \dots, 2010^2$ liên nhau ta được số $A = 14916...4040100$. Nếu đặt dấu "+" vào giữa hai chữ số nào đó của số A thì được tổng của hai số B và C . Hỏi $B + C$ có chia hết cho 9 không? Vì sao?

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi,
Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T2/396. Cho tam giác ABC , đường cao AH thỏa mãn $BC = AH\sqrt{2}$. Tính số đo góc $\widehat{ACB}$ biết rằng $\widehat{ABC} = 67^\circ 30'$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/396. Cho $n_1, n_2, \dots, n_m$ là các số tự nhiên thỏa mãn $n_1 > n_2 > \dots > n_m$.

Với n là số tự nhiên, ta đặt

$$P_n = 2(3^n + 3^{n_1} + 3^{n_2} + \dots + 3^{n_m}).$$

Có tồn tại hay không số tự nhiên n với $n > n_1$ để P_n là một số chính phương?

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT Nguyễn Bình Khiêm,
Hoài Ân, Bình Định)

Bài T4/396. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x \geq 2, y \geq 9, z \geq 1945 \\ x + y + z = 2010. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của tích xyz .

NGUYỄN VĂN TIẾN
(GV THCS Lâm Thao, Phú Thọ)

Bài T5/396. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi M, N, P lần lượt là các

tiếp điểm của đường tròn (I) trên các cạnh AB, AC, BC và MD, NE, PF là các đường cao của tam giác MNP .

Chứng minh rằng $DA.FB.EC = EA.DB.FC$.

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/396. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2(1+9abc-a-b-c)}.$$

NGUYỄN NGỌC HÂN
(GV THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Bài T7/396. Cho $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (\cos\alpha + 1)\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right) + (\sin\alpha + 1)\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

NGÔ VĂN SINH
(SV K4, Toán Tin, CĐSP Vĩnh Phúc)

Bài T8/396. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Tính thể tích của hình chóp $S.ABC$ theo a, b, c và α .

NGUYỄN VĂN THOAN
(Trung tâm GDTX Bình Lục, Hà Nam)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/396. Cho số nguyên dương n . Kí hiệu $p(n)$ là tích các chữ số khác 0 của số đó. (Nếu n có một chữ số thì $p(n) = n$). Xét biểu thức $S = p(1) + p(2) + \dots + p(999)$.

Hỏi ước số nguyên tố lớn nhất của S là bao nhiêu?

TRẦN BÁ DUY LINH
(GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T10/396. Dãy số (u_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2008}{-u_n + 2010}, (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

a) Chứng minh dãy (u_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) có giới hạn hữu hạn và tính $\lim u_n$.

b) Đặt $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k - 2008}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n+2009}$.

LÊ XUÂN TRƯỜNG

(GV THPT Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/396. Giải phương trình

$$4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2 + 8.$$

HÀN NGỌC ĐỨC

(Trung tâm CNTT EVNIT, Hà Nội)

Bài T12/396. Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Gọi R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\max \left\{ \frac{HB}{HC} + \frac{HC}{HB}, \frac{HC}{HA} + \frac{HA}{HC}, \frac{HA}{HB} + \frac{HB}{HA} \right\} \geq \frac{2R}{r} - 2.$$

TRẦN QUANG HÙNG (Hà Nội)

VÕ QUỐC BÁ CẦN (Cần Thơ)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/396. Một đĩa tròn ném một hòn đá dưới góc



α so với phương ngang (hình vẽ). Bỏ qua sức cản của không khí. Hỏi với những góc α có giá trị nằm trong khoảng nào thì hòn đá sẽ luôn luôn bay ra xa đĩa tròn?

TÔ GIANG

(Hà Nội) sưu tầm

Bài L2/396. Một vật sáng AB đặt vuông góc với trục chính của một thấu kính hội tụ có tiêu cự f (điểm A nằm trên trục chính), cách thấu kính một khoảng d (với $d > f$).

1) Bằng phương pháp hình học, chứng minh rằng khoảng cách d' từ thấu kính đến ảnh A_1B_1 của AB tạo bởi thấu kính được tính theo

$$d \text{ và } f \text{ là } d' = \frac{df}{d-f}.$$

2) Từ vị trí đã cho, nếu dịch chuyển vật AB lại gần thấu kính thêm một đoạn bằng 10 cm sao cho nó vẫn vuông góc với trục chính thì ảnh của vật qua thấu kính là ảnh thật A_2B_2 cách A_1B_1 một khoảng là 20cm và cao gấp 2 lần A_1B_1 . Tính tiêu cự của thấu kính.

NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/396. (For 6th grade). Let $A = 14916...4040100$ be the number obtained by writing the perfect squares $1^2, 2^2, \dots, 2010^2$ consecutively. Let $B + C$ be the sum obtained by putting the sign "+" in between certain two digits of A . Is $B + C$ divisible by 9? Explain your reasoning?

T2/396. (For 7th grade). Let ABC be a triangle with the altitude AH satisfying $BC = AH\sqrt{2}$. Compute the measure of the angle $\widehat{ACB}$, given that $\widehat{ABC} = 67^\circ 30'$.

T3/396. Let $n_1, n_2, \dots, n_m$ be a sequence of strictly decreasing natural numbers.

For each natural number n , put

$$P_n = 2(3^n + 3^{n_1} + 3^{n_2} + \dots + 3^{n_m}).$$

Does there exist an n with $n > n_1$ such that P_n is a perfect square?

T4/396. Let x, y, z be real numbers satisfying

$$\begin{cases} x \geq 2, y \geq 9, z \geq 1945 \\ x + y + z = 2010 \end{cases}$$

Find the greatest value of the product xyz .

T5/396. Let ABC be a triangle. Let M, N, P be the points of contact of its incircle (I) with the sides AB, AC, BC respectively and let MD, NE, PF be the altitudes of the triangle MNP .

Prove that $DA.FB.EC = EA.DB.FC$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/396. Let a, b, c be positive real numbers satisfying $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

(Xem tiếp trang 27)

TOÁN HỌC

Số 396 (6-2010)

17 Tuổi trẻ



★ Bài T1/392. Có tồn tại hay không các số nguyên x, y sao cho

$$x^3 - y^3 = 10 \times 10 \times 2010?$$

Lời giải. Ta thấy 2010 chia hết cho 3 nên $x^3 - y^3 = 10 \times 10 \times 2010$ phải chia hết cho 3.

Đặt $x = 3k + r$ với $k \in \mathbb{Z}$; r bằng 0, 1, 2 thì $x^3 = (3k + r)^3 = 9m + r^3$ với $m \in \mathbb{Z}$.

Đặt $y = 3h + s$ với $h \in \mathbb{Z}$, s bằng 0, 1, 2 thì $y^3 = (3h + s)^3 = 9n + s^3$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Từ đó, nếu $x^3 - y^3 = 9(m - n) + r^3 - s^3$ chia hết cho 3 thì $r^3 - s^3$ phải chia hết cho 3, điều này xảy ra chỉ khi $r = s$; lúc đó $x^3 - y^3 = 9(m - n)$ chia hết cho 9 trong khi $10 \times 10 \times 2010$ không chia hết cho 9. Vậy không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đề bài. □

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn dựa vào hằng đẳng thức $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$ để xét việc chia hết cho 3 và chia hết cho 9 cũng dẫn đến kết quả.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Phan Văn Nhiệm, Cao Vũ Trường Sơn, 6A, THCS Yên Lạc, Phạm Thu Hiền, Nguyễn Thị Lan, Nguyễn Khánh Linh, 6A, Nguyễn Thị Quỳnh, 6B, THCS Lập Thạch, Vương Thùy Trang, Trần Thị Hồng Nhung, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Kiều Duyên, 6A, THCS Hành Đức, Tống Thành Nguyên, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/392. Cho số tự nhiên n lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1+n}{1+n^{n+1}} > \left(\frac{1+n^n}{1+n^{n+1}} \right)^n$$

Lời giải. • **Nhận xét.** Với $n, k \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, ta luôn có

$$\frac{1+n^k}{1+n^{k+1}} > \frac{1+n^{k+1}}{1+n^{k+2}} \quad (1)$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (1+n^k)(1+n^{k+2}) > (1+n^{k+1})(1+n^{k+1}) \\ &\Leftrightarrow 1+n^k+n^{2k+2} > 1+n^{k+1}+n^{k+1}+n^{2k+2} \\ &\Leftrightarrow n^{k+2}+n^k-n^{k+1}-n^{k+1} > 0 \\ &\Leftrightarrow (n-1)(n^{k+1}-n^k) > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Vì $n, k \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$ nên BĐT (2) đúng, vậy BĐT (1) đúng.

• Thay k lần lượt bằng 1, 2, ..., $n-1$ vào (1), ta được

$$\frac{1+n}{1+n^2} > \frac{1+n^2}{1+n^3} > \frac{1+n^3}{1+n^4} > \dots > \frac{1+n^n}{1+n^{n+1}}.$$

Suy ra

$$\frac{1+n}{1+n^2} \cdot \frac{1+n^2}{1+n^3} \cdot \frac{1+n^3}{1+n^4} \dots \frac{1+n^n}{1+n^{n+1}} > \left(\frac{1+n^n}{1+n^{n+1}} \right)^n$$

$$\text{hay } \frac{1+n}{1+n^{n+1}} > \left(\frac{1+n^n}{1+n^{n+1}} \right)^n. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Quảng Ngãi: Phạm Đình Thuyền, 9A, THCS Hành Phước, Nguyễn Thị Kiều Duyên, 6A, THCS Hành Đức, Nghĩa Hành.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T3/392. Cho a, b, c, x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2010 \\ ax^3 = by^3 = cz^3. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x+y+z \geq \frac{3}{670}$.

Lời giải. • Trước tiên ta chứng minh kết quả sau:

Với x, y, z là các số dương thì ta luôn có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \quad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Thật vậy $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) = \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{y} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x}\right) + 3.$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Tương tự có $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$; $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2.$

Do đó $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) \geq 9$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z} \text{ (đpcm).}$$

• Áp dụng BĐT (*) và giả thiết $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2010$ ta có

$$2010 \geq \frac{9}{x + y + z} \Rightarrow x + y + z \geq \frac{9}{2010} = \frac{3}{670}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y = z \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2010 \\ ax^3 = by^3 = cz^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \frac{1}{670} \\ a = b = c. \square \end{cases}$$

◀ **Nhận xét.** 1) Mấu chốt của bài toán này là chứng minh được BĐT (*). Đa số các bạn chứng minh BĐT (*) bằng cách sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương (điều này vượt quá kiến thức cấp THCS).

Một số bạn đưa ra nhận xét là giả thiết thứ hai $ax^3 = by^3 = cz^3$ cho là thừa, đồng thời chỉ ra đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{670}$ là chưa đúng. Ở đây, với giả thiết đã cho

thì đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ và $x = y = z = \frac{1}{670}.$

Các bạn đã nêu bài toán tổng quát:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_k, x_1, x_2, \dots, x_k$ là các số dương thỏa mãn

$$\text{điều kiện } \begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = n \\ a_1 x_1^m = a_2 x_2^m = \dots = a_n x_n^m \end{cases}$$

($n, m \in \mathbb{N}^*$ cho trước).

Chứng minh rằng $x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq \frac{k^2}{n}.$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Trần Hiếu Nam, 9A, THCS Vĩnh Lại, Phạm Quốc Hưng, 9A1, THCS Lâm Thao; **Hải Phòng:** Lê Đức Tiến, 9A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiến An; **Nghệ An:** Lê Hồng Đức, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Hoàng Thị Thu, 9E, THCS Đồng Hợp, Quỳnh Hợp; Hoàng Thị Thương, 9I, THCS Đô Thành, Yên Thành; **Quảng Ngãi:** Phạm Viết Hoàng, 9B, THCS Lê Hồng Phong, Cao Thị Ánh Nguyệt, Phạm Đình Thuyền, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T4/392.** Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh thỏa mãn hệ thức

$$BC^2 + AB \cdot AC - AB^2 = 0.$$

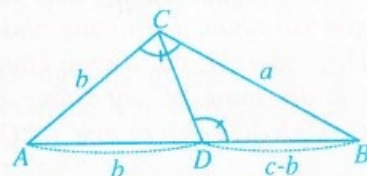
Tính tổng $\hat{A} + \frac{2}{3}\hat{B}.$

Lời giải. Từ điều kiện bài toán $a^2 + bc - c^2 = 0$ suy ra

$$a^2 = c(c - b) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c - b}{a},$$

đồng thời có $c > b.$



Trên cạnh đáy AB lấy điểm D sao cho $AD = b$, khi đó $BD = c - b.$

Ta có $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ (c.g.c), suy ra

$$\widehat{ACB} = \widehat{CDB} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \widehat{CDB} = \hat{A} + \widehat{ACD} \quad (2)$$

$$\widehat{ACD} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\widehat{ACB} = \hat{A} + \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{\hat{A} + 180^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow 2\hat{C} = \hat{A} + 180^\circ \Rightarrow 2(180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})) = \hat{A} + 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3\hat{A} + 2\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \frac{2}{3}\hat{B} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ.$$

$$\text{Vậy } \hat{A} + \frac{2}{3}\hat{B} = 60^\circ. \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều tìm ra kết quả đúng. Một số bạn quên không nêu điều kiện $c > b$ khi lấy điểm D trên AB sao cho $AD = AC = b$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Phạm Lan Hương, 8A, Đỗ Xuân Việt, 9A, THCS Lập Thạch; Phan Văn Tín, Nguyễn Văn Hậu, Nguyễn Thế Tùng, 9A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Ngô Thị Thanh Nga, 9B, THCS Từ Sơn; **Hà Nội:** Lưu Nhật Nam, 9A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Thanh Hóa:** Lê Thị Phương Mai, 9A3, THCS Nguyễn Văn Trỗi, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** Vương Nhật Quân, 9C, THCS Nghi Thái, Nghi Lộc, Nguyễn Viết Mạnh, Nguyễn Thế Tiến, Ngô Sĩ Thanh, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; Phan Thanh Tùng, 8D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** Bùi Thị Hàn Ný, 8A, Phạm Đình Thuyền, 9A, THCS Hành Phước; Phạm Viết Hoàng, 9B, THCS Lê Hồng Phong, TP. Quảng Ngãi; **Bình Định:** Nguyễn Tuấn Tú, 8A1, THCS TTr. Phù Mỹ; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Hoàng Minh, 9/11, THCS Hà Huy Tập, Q. Bình Thạnh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T5/392.** Trên đường tròn tâm O bán kính R vẽ hai đường kính AE và BF vuông góc với nhau. Trên cung nhỏ EF lấy điểm C . Dây cung AC cắt đường kính BF tại điểm P , còn dây cung BC cắt đường kính AE tại điểm Q . Tính diện tích tứ giác $APQB$ theo R .

Lời giải. Vì tứ giác $APQB$ có $AQ \perp BP$ nên

$$S_{APQB} = \frac{1}{2} AQ \cdot BP.$$

Xét hai tam giác ABQ và BPA . Ta có

$$\widehat{BAQ} = \widehat{ABP} = 45^\circ,$$

$$\widehat{AQB} = \widehat{BAP}.$$

Do đó $\triangle ABQ \sim \triangle BPA$ (g.g), suy ra

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{BP} \Rightarrow AQ \cdot BP = AB^2 = 2R^2.$$

Vậy $S_{APQB} = R^2$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Hầu hết các bạn gửi bài đều cho lời giải đúng. Ngoài cách giải trên, các bạn còn đưa ra những cách giải khác như: Sử dụng tính chất tam giác đồng dạng để chứng minh $S_{BPQ} = S_{APF}$; Lấy giao điểm H của FE và AC rồi chứng minh $HQ \parallel BF$, từ đó

$$S_{APQB} = S_{ABH} = \frac{1}{2} S_{ABEF}.$$

Đặt $OP = x$, $OQ = y$ và từ một số tính toán khá đơn giản để đi đến kết quả... Tuy nhiên, cách giải trên là ngắn gọn nhất.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả:

Phú Thọ: Đinh Anh Hoàng, 9A3, THCS Lâm Thao; Trần Hiếu Nam, 9A, THCS Vĩnh Lại, Lâm Thao. **Bắc Ninh:** Ngô Thị Thanh Nga, 9B, THCS Từ Sơn; **Vĩnh Phúc:** Phạm Quang Liêm, Nguyễn Thị Kim Anh, 8A1, Tạ Thị Mai Hạnh, Nguyễn Thế Tùng, Nguyễn Văn Hậu, 9A1, THCS Yên Lạc; **Đỗ Xuân Việt**, 9A, THCS Lập Thạch; **Nguyễn Đình Lộc**, 9C, THCS Vĩnh Tường. **Hà Nội:** Lê Minh Phúc, 9A9, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Hải Dương:** Phạm Đức Minh Vương, 8A, THCS Đoàn Tùng, Thanh Miện. **Thanh Hóa:** Bùi Thanh Tùng, THCS Hoằng Trung, Hoằng Hóa. **Nghệ An:** Nguyễn Thế Tiến, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Quảng Ngãi:** Phạm Viết Hoàng, 9B, THCS Lê Hồng Phong; Phạm Đình Thuyền, Cao Thị Ánh Nguyệt, 9A, THCS Hành Phước.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/392. Giải hệ**

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 8x + 9} - \sqrt{xy + 12 - 6x} \leq 1 & (1) \\ \sqrt{2(x-y)^2 + 10x - 6y + 12} - \sqrt{y} = \sqrt{x+2} & (2) \end{cases}$$

$$\sqrt{2(x-y)^2 + 10x - 6y + 12} - \sqrt{y} = \sqrt{x+2} \quad (2)$$

Lời giải. ĐK $y \geq 0$, $x \geq -2$, $y^2 - 8x + 9 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } 2(x-y)^2 + 10x - 6y + 12 \\ = 2(x-y+2)^2 + 2(x+y+2) \geq 0. \end{aligned}$$

PT (2) tương đương với

$$2(x-y+2)^2 + 2(x+y+2) = x+y+2 + 2\sqrt{y(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-y+2)^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{x+2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y+2=0 \text{ và } \sqrt{y} - \sqrt{x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow y = x+2.$$

Thay vào BPT (1)

$$\sqrt{y^2 - 8y + 25} \leq 1 + \sqrt{y^2 - 8y + 24} \quad (3)$$

Đặt $\sqrt{y^2 - 8y + 24} = t$, ($t \geq 2$).

Khi đó BPT (3) trở thành

$$\sqrt{t^3} = 1+t \Leftrightarrow t^3 = (1+t)^2 \Leftrightarrow t(t+1)(t-2) \leq 0 \quad (4)$$

Kết hợp (4) với điều kiện $t \geq 2$ suy ra $t = 2$.

Vậy $t^3 = y^2 - 8y + 24 = 8 \Leftrightarrow y = 4$. Do đó $x = 2$.

Thử lại, ta thấy hệ đã cho có một nghiệm $(x; y) = (2; 4)$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán và hầu hết cho lời giải đúng. Nhiều bạn sử dụng BDT Bunyakovsky để đánh giá PT thứ hai của hệ đã cho cũng suy ra $y = x + 2$.

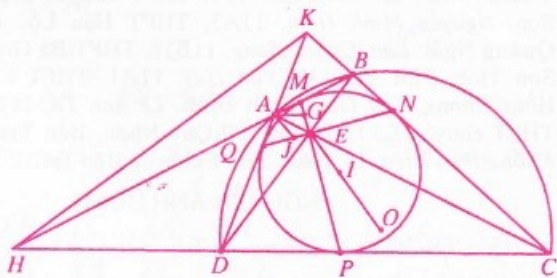
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả.

Vĩnh Phúc: Phùng Thị Tâm, 11A2, THPT Đội Cấn, Vĩnh Tường; **Phan Xuân Trường,** 10A, THPT Nguyễn Viết Xuân, Vĩnh Tường; **Phú Thọ:** Đinh Anh Hoàng, 9A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** Nguyễn Thanh Long, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Vương Ngọc Anh,** 11A1, THPT Quỳnh Hợp II; **Phạm Văn Quân,** 10A3, THPT Quỳnh Lưu I; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Cẩm Nhung, Trần Thị Khánh Liên, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đặng Văn Trỗi,** 10B2, THPT Nguyễn Văn Trỗi, Can Lộc; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Thái Bình:** Chu Khánh Dư, 11A1, THPT Nguyễn Du, Kiến Xương; **Vũ Thị Ngọc Huyền,** 11A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Nguyễn Công Trường,** 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Nam Định:** Phạm Đức Thương, 10A0, Trần Quang Huy, 10A1, THPT A Hải Hậu; **Hà Nam:** Nguyễn Thị Hạnh, 11Tin, THPT chuyên Hà Nam; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Quý, 11A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Phạm Đức Minh Vương, 8A, THCS Đoàn Tùng, Thanh Miện; **Yên Bái:** Lê Minh Tuấn, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T7/392.** Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I và nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Chứng minh rằng ba điểm E, I, O thẳng hàng.

Lời giải. (Theo bạn Trần Trọng Huy, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định).



• Nếu tứ giác $ABCD$ có một cặp cạnh đối song song với nhau, chẳng hạn $AB \parallel CD$ thì ta thấy ba điểm E, O, I đều thuộc đường trung trực của AB và CD .

• Giả sử tứ giác $ABCD$ không có cặp cạnh đối nào song song với nhau. Gọi K là giao điểm của AD và BC , H là giao điểm của AB và CD , còn M, N, P, Q theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AB, BC, CD, DA . Trước tiên ta sẽ chứng minh MP, NQ, AC, BD đồng quy tại điểm E . Thật vậy, kí hiệu $E' = MP \cap AC$; $E'' = NQ \cap AC$. Kẻ $AG \parallel CD, AJ \parallel BC$ ($G \in MP$; $J \in NQ$). Sử dụng định lý Thales, ta có

$$\frac{E'A}{E'C} = \frac{AG}{PC} = \frac{AM}{PC} = \frac{AQ}{NC} = \frac{AJ}{NC} = \frac{E''A}{E''C}$$

suy ra $E' \equiv E''$. Tương tự, sẽ chứng minh được rằng MP, NQ, AC, BD đồng quy (tại E).

Tiếp theo, xét cực – đối cực đối với đường tròn (I) . Ta thấy QN là đường đối cực của điểm K , nó đi qua E , nên đường đối cực của E đi qua K . Tương tự, đường đối cực của E đi qua H . Từ đó HK là đường đối cực của E đối với đường tròn (I) , dẫn đến $IE \perp HK$ (1).

Mặt khác, HK là đường đối cực của điểm E đối với đường tròn (O) nên $OE \perp HK$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E, I, O thẳng hàng (đpcm). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều lời giải gửi về Tòa soạn đều chứng minh kết quả (2) bằng cách sử dụng định lý Brokard được phát biểu dưới dạng: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi $H = AB \cap CD$; $K = AD \cap BC$; $E = AC \cap BD$. Khi đó điểm O là trực tâm của tam giác HKE .

2) Để chứng minh MP, NQ, AC, BD đồng quy tại E , một số bạn đã sử dụng định lý Brianchon (một định lý nổi tiếng trong Hình học Xạ ảnh). Tuy nhiên các bạn đều không chứng minh lại định lý này.

3) Ngoài cách giải trên, chúng ta có thể xét phép nghịch đảo cực I , phương tích $k = r^2$ (r là bán kính đường tròn (I)), kết hợp với nhận xét: Nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại E , thì đường thẳng OE đi qua trung điểm của các đoạn thẳng nối hai trung điểm của các cạnh đối tứ giác $ABCD$, để suy ra kết luận bài toán.

4) Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Nguyễn Ngọc Sơn, 11 Toán 1, trường THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Hải Phòng:** Phan Đức Minh, 11A15, THPT Thái Phiên; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Quảng Ninh:** Nguyễn Huy Hùng, 11 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Nghệ An:** Phạm Nhật Anh, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT

chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Đà Nẵng:** Bùi Đăng Khoa, Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** Trần Đỗ Hữu Toàn, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T8/392.** Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = 5$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ với mọi $n \geq 1$. Tìm

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n}$;

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$.

Lời giải. Chọn a là nghiệm lớn của phương trình bậc hai $x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} > 1$.

Ta có $a^2 - 5a + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = a + \frac{1}{a} = 5$; khi

đó $x_2 = x_1^2 - 2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$.

Giả sử $x_k = a^{2^{k-1}} + \frac{1}{a^{2^{k-1}}}$ thế thì

$x_{k+1} = x_k^2 - 2 = a^{2^k} + \frac{1}{a^{2^k}}$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta được

$x_n = a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}}$ với mọi n nguyên dương.

Lưu ý rằng

$\left(a^{2^k} - \frac{1}{a^{2^k}}\right) \left(a^{2^k} + \frac{1}{a^{2^k}}\right) = a^{2^{k+1}} - \frac{1}{a^{2^{k+1}}}$,

ta có $\frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{\left(a - \frac{1}{a}\right) x_{n+1}}{\left(a - \frac{1}{a}\right) x_1 x_2 \dots x_n}$

$= \frac{\left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}\right)}{a^{2^n} - \frac{1}{a^{2^n}}} = \frac{1 + \frac{1}{a^{2^{n+1}}}}{1 - \frac{1}{a^{2^{n+1}}}} \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right)$.

Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{a^{2^{n+1}}}}{1 - \frac{1}{a^{2^{n+1}}}} \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right)$

$= a - \frac{1}{a} = \sqrt{21}$.

2) Với $k \in \mathbb{N}^*$, ta có

$\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_k} = \frac{x_k^2 - x_{k+1}}{2 x_1 x_2 \dots x_k}$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{x_k}{x_1 x_2 \dots x_{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{x_1 x_2 \dots x_k} \right)$.

Thay k lần lượt bằng $1; 2; \dots; n$ và rút gọn, ta được

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$.

Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$

$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể giải phần 1) của bài toán theo các bước sau: Chứng minh dãy (x_n) tăng và

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$; $\left(\frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^2 = 21 + \frac{4}{(x_1 x_2 \dots x_n)^2}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^2 = 21$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hải Dương: Vũ Đăng Minh, Nguyễn Văn Dũng, 11A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thế Nam Huy, 11A0, THPT Yên Phong I; **Vĩnh Phúc:** Phùng Thị Tám, 11A2, THPT Đội Cấn, Vĩnh Tường; **Thanh Hóa:** Lê Văn Tuấn, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Nguyễn Minh Hiếu, 11A3, THPT Hậu Lộc I; **Quảng Ngãi:** Lâm Quang Sang, 11B14, THPT Ba Gia, Sơn Tịnh; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hoà; **Bình Định:** Lê Anh Tú, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn; **Bến Tre:** Khổng Hữu Hiệp, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T9/392.** Chứng minh rằng phương trình $P(x) = 2^x$, trong đó $P(x)$ là đa thức bậc n có không quá $n + 1$ nghiệm.

Lời giải. Ta chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo $n = 0, 1, 2, \dots$

• Với $n = 0$, tức là $P(x)$ đồng nhất bằng a , PT $2^x = a$ có duy nhất một nghiệm nếu $a > 0$ ($x = \log_2 a$), không có nghiệm nếu $a \leq 0$.

• Giả sử khẳng định đã đúng với $n = k$, $k \in \mathbb{N}$. Ta chứng minh khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, nếu $P(x)$ là đa thức bậc $(k + 1)$, đặt $f(x) = P(x) - 2^x$, theo Định lí Rolle giữa hai nghiệm bất kì của PT $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm của PT $f'(x) = 0$.

Chú ý $f'(x) = P'(x) - 2^x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow Q(x) = 2^x$, trong đó $Q(x) = \frac{P'(x)}{\ln 2}$ là đa thức bậc k .

Theo giả thiết quy nạp PT $Q(x) = 2^x$ có không quá $(k + 1)$ nghiệm. Do đó ta suy ra PT $f(x) = 0$ có không quá $(k + 2)$ nghiệm. Khẳng định của bài toán đã được chứng minh. $\square$

◀ **Nhận xét.** Bài toán trên là bài toán dạng cơ bản và cũng đã quen thuộc với nhiều bạn. Nhiều bạn làm đúng nhưng cách trình bày, diễn đạt còn dài dòng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Lê Vũ Khôi, 11A1, THPT Đại Từ; **Hà Nam:** Đỗ Minh Tiếp, 11T, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý; **Hà Nội:** Nguyễn Ngọc Sơn, 11T1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Phan Minh Trí, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Bình Định:** Trần Đoàn Tấn, Lê Anh Tú, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Cần Thơ; **Lê Đại Thành,** 12A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **TP. Cà Mau:** Nguyễn Phạm Tuấn Anh, 12T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **TP. Bến Tre:** Khổng Hữu Hiệp, 11T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/392.** Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(2010x - f(y)) = f(2009x) - f(y) + x, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Thay $(x; y) = (0; 0)$ vào (1), ta được $f(-f(0)) = 0$. Tiếp tục thay $(x; y) = (t; -f(0))$ vào (1) và sử dụng đẳng thức $f(-f(0)) = 0$, ta được

$$f(2010t) = f(2009t) + t, \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1')$$

$$\text{hay } g(2010t) = g(2009t), \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

với $g(t) = f(t) - t$.

Viết lại (2) dưới dạng

$$g(x) = g\left(\frac{2009}{2010}x\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$g(x) = g\left(\left(\frac{2009}{2010}\right)^n x\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Theo giả thiết, hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g(x)$ cũng là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (3) ta thu được

$$g(x) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2009}{2010}\right)^n x\right) = f(0), \forall x \in \mathbb{R},$$

hay $g(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$, tức là $f(x) = x + c$, với hằng số c tùy ý.

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = x + c$, với hằng số c tùy ý, thỏa mãn điều kiện bài toán. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bạn Lưu Hữu Phúc, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương nhận xét rằng có thể phát biểu bài toán tổng quát sau theo cùng cách giải đã trình bày ở trên.

Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(ax - bf(y)) = bf(cx) - bf(y) + dx, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

trong đó các số a, b, c, d ràng buộc với nhau bởi đẳng thức $a - d = bc$.

2) Một số bạn (Lê Trung Trực, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; Đắc Lắc; Phan Minh Trí, 11T THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên) chỉ ra cách giải bài toán không cần đến giả thiết về tính liên tục của hàm cần tìm như sau:

Từ (1) và (1') suy ra

$$f(2010t) - f(y) = f(2010t - f(y)), \forall t, y \in \mathbb{R},$$

$$\text{hay } f(x) - f(y) = f(x - f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $x - f(y) = u$, ta thu được

$$f(x) - (x - u) = f(u), \forall x, u \in \mathbb{R},$$

$$\text{hay } f(x) - x = f(u) - u, \forall x, u \in \mathbb{R},$$

$$\text{tức là } f(x) - x \equiv c.$$

3) Đây là đề toán quen biết về PT hàm trong lớp hàm liên tục nên có nhiều bạn giải được và đa số các bạn đều giải đúng, tương tự như cách đã trình bày ở trên. Ngoài các bạn Phúc, Trực, Trí. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hà Nội: Nguyễn Văn Quý, 11A1 Toán, THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nguyễn Ngọc Sơn,** 11T1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Thừa Thiên - Huế:** Trần

Ngọc Minh Nhật, 10CT, THPT Quốc Học Huế; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** Nguyễn Đình Luận, 10T THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Nha Trang; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Kiên Giang:** Mao Tuấn Lộc, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Tiền Giang:** Đỗ Quang Bình, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 12A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bình Định:** Lê Anh Tú, Trần Đoàn Tấn, 11T THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T11/392.** Cho dãy số (a_n) với $a_1 = a_2 = 1$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \geq 1$. Tìm tất cả các số nguyên dương a và b với $a < b$ thỏa mãn điều kiện $a_n - 2n^a$ chia hết cho b với mọi $n \geq 1$.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Mạnh Quân, 11A, THPT chuyên Vĩnh Phúc).

Ta có $a_3 = 2$. Do $a_n \equiv 2n^a \pmod{b}$ nên

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_1 \equiv 2a \pmod{b} \\ a_3 \equiv 6a^3 \pmod{b} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2a \equiv 1 \pmod{b} \\ 6a^3 \equiv 2 \pmod{b} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2a \equiv 1 \pmod{b} \\ 3(2a)^3 \equiv 8 \pmod{b} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2a \equiv 1 \pmod{b} \\ 5 \equiv 0 \pmod{b} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2a \equiv 1 \pmod{5} \\ b = 5. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Tiếp theo ta chứng minh cặp $(a; b) = (3; 5)$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Đặt $b_n = a_n - 2n^3$. Do $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ nên

$$b_{n+2} = b_{n+1} + b_n - 10 \cdot 3^n (n+3), \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow b_{n+2} \equiv b_{n+1} + b_n \pmod{5}, \forall n \geq 1$$

$$\text{mà } b_1 = -5 \equiv 0 \pmod{5}, b_2 = -35 \equiv 0 \pmod{5}$$

nên từ hệ thức trên suy ra $b_n \equiv 0 \pmod{5}, \forall n \geq 1$,

tức là $a_n - 2n^3 \equiv 0 \pmod{5}, \forall n \geq 1$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Bài này có khá đông bạn tham gia giải và đều giải đúng. Lời giải nói trên của bạn Quân là ngắn gọn và đẹp nhất do đã biết vận dụng triệt để công cụ đồng dư. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt:

Hà Nam: Phạm Thái Hà, 10T, THPT chuyên Hà Nam; **Thái Bình:** Đinh Thị Nho, 10T, THPT chuyên Thái Bình; **Hưng Yên:** Đào Công Chương, 10T, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Lê Văn Tuấn, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Văn

Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương; **Thái Nguyên:** Ngọc Việt Tiến, 11A2, THPT Chu Văn An; **Phú Yên:** Phan Minh Trí, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Khánh Hòa:** Trần Đỗ Hữu Toàn, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Võ Văn Tiên, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T12/392.** Gọi I và R lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . IA, IB, IC cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_1, B_1, C_1 tương ứng. Chứng minh bất đẳng thức

$$2R + \frac{IA+IB+IC}{3} \leq IA_1 + IB_1 + IC_1 \leq \frac{5}{2}R + \frac{IA+IB+IC}{6}.$$

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I, **Nghệ An;** Nguyễn Văn Quý, 11A1, THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội).

Để cho đơn giản, ta dùng các kí hiệu sau

$$\sum \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}; \dots$$

$$\sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2};$$

$$\sum \cos A = \cos A + \cos B + \cos C;$$

$$\sum \left(-2\sin^2 \frac{A}{2} + 1 \right)$$

$$= \left(-2\sin^2 \frac{A}{2} + 1 \right) + \left(-2\sin^2 \frac{B}{2} + 1 \right) + \left(-2\sin^2 \frac{C}{2} + 1 \right);$$

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2};$$

$$\prod \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2};$$

Theo định lí sin, ta thấy

$$\begin{cases} IA = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}; IB = 4R \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}; \\ IC = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\ IA_1 = 2R \sin \frac{A}{2}; IB_1 = 2R \sin \frac{B}{2}; IC_1 = 2R \sin \frac{C}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

1) Ta có $1 < \sum \sin \frac{A}{2} \leq \frac{3}{2}$ (2) (bạn đọc tự kiểm tra).

$$\text{Suy ra } \left(\sum \sin \frac{A}{2} - 1 \right) \left(\sum \sin \frac{A}{2} - \frac{3}{2} \right) \leq 0.$$

$$\text{Do đó } \left(\sum \sin \frac{A}{2} \right)^2 - \frac{5}{2} \sum \sin \frac{A}{2} + \frac{3}{2} \leq 0.$$

Từ đó, chú ý rằng $\sum \cos A \leq \sum \sin \frac{A}{2}$ (bạn đọc tự kiểm tra), suy ra

$$\left(\sum \sin \frac{A}{2} \right)^2 - 3 \sum \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \sum \cos A + \frac{3}{2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum \sin \frac{A}{2} \right)^2 - 3 \sum \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \sum \left(-2 \sin^2 \frac{A}{2} + 1 \right) + \frac{3}{2} \leq 0.$$

$$\Rightarrow 3 + 2 \sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq 3 \sum \sin \frac{A}{2} \quad (3)$$

Từ (1) và (3), sau một vài biến đổi được

$$2R + \frac{IA + IB + IC}{3} \leq IA_1 + IB_1 + IC_1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

2) Trong ba số A, B, C hoặc có hai số cùng không nhỏ hơn $\frac{\pi}{3}$, hoặc có hai số cùng không

lớn hơn $\frac{\pi}{3}$. Do đó trong ba số

$\sin \frac{A}{2}, \sin \frac{B}{2}, \sin \frac{C}{2}$ hoặc có hai số cùng không

nhỏ hơn $\frac{1}{2}$, hoặc có hai số cùng không lớn

hơn $\frac{1}{2}$. Không mất tính tổng quát, giả sử hai

số đó là $\sin \frac{B}{2}, \sin \frac{C}{2}$. Ta có

$$\sin \frac{A}{2} \left(2 \sin \frac{B}{2} - 1 \right) \left(2 \sin \frac{C}{2} - 1 \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow 4 \prod \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \geq 2 \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \quad (4)$$

Mặt khác, ta có

$$1 - \sin \frac{A}{2} - 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1 - \cos \frac{B-C}{2} \geq 0 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$1 + 4 \prod \sin \frac{A}{2} \geq 2 \sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$\text{Từ đó, chú ý rằng } \sum \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \prod \sin \frac{A}{2} = 1 \quad (6)$$

(bạn đọc tự kiểm tra), suy ra

$$2 + 2 \prod \sin \frac{A}{2} \geq \left(\sum \sin \frac{A}{2} \right)^2 \quad (7)$$

Từ (6), (7) và (1), chú ý rằng $\prod \sin \frac{A}{2} \leq \frac{1}{8}$ (bạn đọc tự kiểm tra), suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{15}{4} + \sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 3 \sum \sin \frac{A}{2} \\ &= \frac{15}{4} + \frac{1}{2} \left(\sum \sin \frac{A}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - 2 \prod \sin \frac{A}{2} \right) - 3 \sum \sin \frac{A}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{13}{4} + \left(\sum \sin \frac{A}{2} - \sqrt{2 + 2 \prod \sin \frac{A}{2}} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} \sum \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \prod \sin \frac{A}{2}} - 3 \right)$$

$$+ \prod \sin \frac{A}{2} + \sqrt{2 + 2 \prod \sin \frac{A}{2}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \prod \sin \frac{A}{2}} - 3 \right)$$

$$\geq \frac{13}{4} + \prod \sin \frac{A}{2}$$

$$+ \sqrt{2 + 2 \prod \sin \frac{A}{2}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \prod \sin \frac{A}{2}} - 3 \right)$$

$$= \frac{17}{4} + 2 \prod \sin \frac{A}{2} - 3 \sqrt{2 + 2 \prod \sin \frac{A}{2}}$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2 + 2 \prod \sin \frac{A}{2}} \right)^2 \geq 0.$$

$$\text{Suy ra } \frac{15}{4} + \sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq 3 \sum \sin \frac{A}{2} \quad (8)$$

Từ (1) và (8), sau một vài biến đổi được

$$IA_1 + IB_1 + IC_1 \leq \frac{5}{2}R + \frac{IA + IB + IC}{6}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. Tóm lại bài toán đã được chứng minh. $\square$

◀ **Nhận xét.** Đây là bài toán khó. Cùng với bạn Hoàng và bạn Quý, các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt: Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11T, Trần Khánh Hưng, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng; Lê Duy Hoàng, 10T3, THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/392.** Một người quan sát một tàu hoả bắt đầu chuyển động. Người này nhìn thấy toa tàu thứ nhất đi ngang qua sau thời gian t . Hỏi toa tàu thứ n sẽ đi ngang qua sau thời gian bao lâu, nếu gia tốc a của tàu thay đổi theo thời gian theo quy luật $a = kt$?

Lời giải. Chọn gốc tọa độ tại vị trí người đứng; gốc thời gian là lúc tàu bắt đầu chuyển động; chiều dương là chiều chuyển động của

tàu. Ta có $a = \frac{dv}{dt} = kt$, suy ra $dv = kt \cdot dt$ (1)

Tích phân (1) hai vế ta được $v = \frac{kt^2}{2} + C$ trong đó C là hằng số tích phân. Khi $t = 0$ thì $v = 0$ nên $C = 0$. Vậy $v = \frac{kt^2}{2}$ (2)

Mặt khác, thì $v = \frac{ds}{dt}$ (3) Từ (2) và (3) suy ra

$$\frac{ds}{dt} = \frac{kt^2}{2} \text{ hay } ds = \frac{kt^2}{2} dt \quad (4)$$

Tích phân (4) hai vế ta được $s = \frac{kt^3}{6} + D$ trong đó D là hằng số tích phân. Khi $t = 0$ thì $s = 0$ nên $D = 0$. Do đó $s = \frac{kt^3}{6}$ (5)

Gọi l là chiều dài của mỗi toa tàu. Theo giả thiết thì toa tàu thứ nhất đi ngang qua người

quan sát sau khoảng thời gian t . Ở đây để thuận tiện cho cách viết về sau, ta đặt khoảng thời gian này là $t = t_1$.

Như vậy, khi $s = l$ thì $t = t_1$, nên từ (5) ta có

$$l = \frac{kt_1^3}{6} \Rightarrow k = \frac{6l}{t_1^3} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $s = \frac{l}{t_1^3} t^3$ (7)

Mỗi toa tàu có chiều dài l nên n toa tàu thì có chiều dài là $n.l$. Gọi t_n là khoảng thời gian để n toa tàu đi ngang qua người quan sát. Theo

(7) ta có $n.l = \frac{l}{t_1^3} t_n^3 \Rightarrow t_n = t_1 \cdot \sqrt[3]{n}$ (8)

Tương tự, gọi t_{n-1} là khoảng thời gian để $(n-1)$ toa đầu đi ngang qua người quan sát, ta có $t_{n-1} = t_1 \cdot \sqrt[3]{n-1}$ (9)

Vậy khoảng thời gian để toa tàu thứ n đi ngang qua người quan sát là

$$\Delta t = t_n - t_{n-1} = t_1 (\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}). \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Vũ Quang Minh, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Bắc Ninh:** Nghiêm Thị Trang, 10 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, 10 Lí, THPT chuyên Hà Nam; **Nam Định:** Lê Quang Trung, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Lê Hữu Hùng, 11A1, THPT Triệu Sơn 4; **Hà Tĩnh:** Lê Thị Thu Anh, 10A1, THPT Kỳ Anh; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Đông, 12 Lí, Nguyễn Thị Lệ Quyên, 12 Sinh, Phạm Quốc Đô, 11B1, THPT chuyên Lê Khiết. **Cần Thơ:** Nguyễn Long Phước Đường, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** Liêu Khắc Vũ, 10 Lí, THPT chuyên Bến Tre.

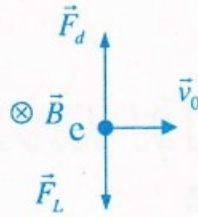
NGUYỄN VĂN THUẬN

★ **Bài L2/392.** Một electron có động năng 2,5 keV, chuyển động ngang vào một miền có điện trường hướng xuống dưới và cường độ 10 kV/m.

1) Xác định chiều và độ lớn (nhỏ nhất) của từ trường làm cho electron tiếp tục chuyển động ngang. Bỏ qua lực hấp dẫn vì nó quá nhỏ.

2) Có khi nào một proton đi vào một tổ hợp trường như vậy mà không bị lệch? Nếu có thì trong điều kiện nào?

Lời giải. a) Gọi v_0 là vận tốc của electron. Để electron chuyển động ngang thì hợp lực tác dụng lên nó phải bằng không, tức là lực Lorentz hướng phương thẳng đứng xuống. Theo quy tắc bàn tay trái thì cảm ứng từ có hướng vào trong như hình vẽ.



Ta có $F_d = F_L \Leftrightarrow eE = ev_0 B \Rightarrow B = \frac{E}{v_0}$.

Mà $K = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ nên $B = \frac{E\sqrt{m}}{\sqrt{2K}}$ (1).

Thay số vào ta tính được $B \approx 3,37 \cdot 10^{-4} T$.

Chú ý: Ở đây chỉ có một giá trị của B thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

b) Do proton có điện tích bằng và trái dấu với điện tích của electron nên cả lực từ và lực điện đều đổi chiều, do đó chuyển động của proton sẽ không bị lệch thì

$$B = \frac{E\sqrt{m_p}}{\sqrt{2K_p}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta rút ra $\frac{m}{K} = \frac{m_p}{K_p}$, hay

$$K_p = \frac{m_p}{m} K = \frac{1,67 \cdot 10^{-27}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot 2,5 = 4,58 \cdot 10^3 \text{ (keV)} = 4,58 \text{ (MeV)}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nam Định: Lê Quang Trung, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Đông, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Cần Thơ:** Nguyễn Phước Long Đường, 11 A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

Prove the inequality

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2(1+9abc-a-b-c)}.$$

T7/396. Let $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Find the minimum value of the expression

$$P = (\cos \alpha + 1) \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) + (\sin \alpha + 1) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right).$$

T8/396. Let $S.ABC$ be a pyramid with $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ and $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Compute its volume in term of a , b , c and α .

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/396. Let n be a positive integer. Let $p(n)$ be the product of its nonzero digits. (If n has a single digit then $p(n) = n$). Consider the expression $S = p(1) + p(2) + \dots + p(999)$.

What is the greatest prime divisor of S ?

T10/396. Let (u_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) be the sequence given by

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2008}{-u_n + 2010}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

a) Prove that the sequence (u_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) converges and find $\lim u_n$.

b) Put $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k - 2008}$. Find $\lim \frac{T_n}{n + 2009}$.

T11/396. Solve the equation

$$4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2 + 8.$$

T12/396. Let ABC be an acute triangle with orthocenter H . Let R , r be its the circumradius and inradius respectively. Prove that

$$\max \left\{ \frac{HB}{HC} + \frac{HC}{HB}, \frac{HC}{HA} + \frac{HA}{HC}, \frac{HA}{HB} + \frac{HB}{HA} \right\} \geq \frac{2R}{r} - 2.$$

Translated by LE MINH HA

THÔNG BÁO TẶNG GIÁ TẠP CHÍ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin kính báo với toàn thể bạn đọc: Từ tháng 7 năm 2010, giá bìa của Tạp chí sẽ được điều chỉnh thành 8.000 đồng / cuốn.

Mời các bạn tiếp tục đặt mua Tạp chí cho quý III năm 2010 tại các cơ sở bưu điện gần nhất. Xin chân thành cảm ơn.

THTT

Số 396 (6-2010)

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ 27

Cuộc thi

NÙNG THĂNG LONG - HÀ NỘI TRÒN 1000 TUỔI

ĐỢT 2

(Thời hạn cuối cùng nhận bài giải Đợt 2 là 15.8.2010 theo dấu Bưu điện)

Bài 4. NHÂN VẬT NÀO?

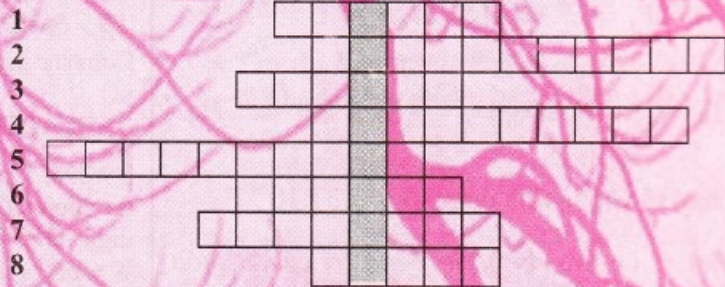
Bạn hãy điền tên các nhân vật, địa danh, di tích văn hóa của Hà Nội theo hàng ngang với những gợi ý dưới đây để phát hiện xem cột sẫm màu ghi tên nhân vật nào?

1. Tên một con sông chảy giữa hai Quận Ba Đình, Cầu Giấy và qua các Quận Huyện: Thanh Xuân, Hoàng Mai, Thanh Trì của Hà Nội rồi đổ vào sông Nhuệ.

2. Tên vị Vua thứ ba của nhà Lý, là người đặt Quốc hiệu là Đại Việt vào năm 1054.

3. Tên một thị xã thuộc Hà Nội, có nhiều danh lam thắng cảnh nổi tiếng như: Hồ Đồng Mô, thành cổ, Làng Việt cổ đá ong Đường Lâm, Chùa Mía, Đền Và.

4. Văn bản do Vua Lý Công Uẩn viết về việc chuyển kinh đô từ Hoa Lư đến thành Đại La.



5. Trường Quốc học Cao cấp đầu tiên của Việt Nam thành lập năm 1076.

6. Tên một làng bán quất nổi tiếng của Hà Nội.

7. Tên một ngôi chùa cách Hà Nội khoảng 20km về phía Tây Nam, ở núi Sài Sơn, Quốc Oai, Hà Nội.

8. Tên kinh đô của nhà nước Âu Lạc dưới thời An Dương Vương và của nhà nước Vạn Xuân dưới thời Ngô Quyền.

PHẠM THÁI HÀ

(Lớp 7A15, THCS Giảng Võ, Hà Nội)

Bài 5. ĐOÁN NGÀY LỄ HỘI

Bạn hãy cho biết Lễ hội Hoa Ki niệm 1000 năm Thăng Long - Hà Nội đã được khai mạc trọng thể tại vườn hoa Lý Thái Tổ, Hà Nội vào ngày tháng năm nào? Biết rằng khi nhân ngày Lễ hội với 12 và nhân tháng Lễ hội với 31 thì tổng của hai tích này là 732.

GIA LINH (Hải Dương)

Bài 6. SỐ HIỆU CỦA ĐÈN RỒNG

Để chuẩn bị cho Lễ hội 1000 năm Thăng Long - Hà Nội, người ta làm 1000 đèn rồng (đèn có hình con rồng) được đánh số hiệu từ 1 đến 1000, trong đó có một đèn rồng lớn nhất. Ban đầu, cả 1000 đèn rồng ở trạng thái tắt.

Các nhân viên phụ trách đèn lần lượt thực hiện công việc như sau:

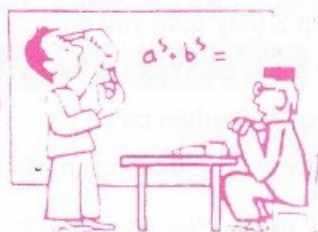
- Lần đầu tiên bật đèn cho toàn bộ 1000 đèn rồng.
- Lần thứ hai tắt hết đèn rồng mang số hiệu chẵn.
- Lần thứ ba thay đổi trạng thái (tắt - bật) cho đèn rồng có số hiệu chia hết cho 3.
- Cứ như vậy, lần thứ n thay đổi trạng thái (tắt - bật) các đèn rồng có số hiệu chia hết cho n ($n \leq 1000$).

Kết quả là, sau 1000 lần, trong số các đèn rồng được bật thì đèn rồng lớn nhất có số hiệu lớn nhất. Hỏi đèn rồng lớn nhất được ghi số hiệu là bao nhiêu?

HỒNG NGỌC (Hà Nội)

DIỄN ĐÀN

**DAY
HOC
TOÁN**



MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẾM



HÀ VĂN THẮNG

(Giáo viên THPT Yên Dũng số 1, Bắc Giang)

Các bài toán về phép đếm trong phần Tổ hợp thường làm học sinh bối rối khi tìm lời giải. Từ đó dẫn đến tâm lý sợ các bài tập dạng này. Trong bài viết này tác giả sẽ trình bày một số dạng toán và cách giải chúng nhằm giúp các bạn học sinh tự tin hơn khi gặp các bài toán đếm.

DẠNG 1. Sắp xếp các đối tượng vào các vị trí

Cho A là tập gồm m phần tử và B là tập gồm n vị trí khác nhau. Yêu cầu bài toán là sắp xếp các phần tử của tập hợp A vào các vị trí trong tập hợp B theo một điều kiện nào đó.

Cách giải. Ta xem trong hai tập A và B tập nào ít phần tử hơn thì phần tử của tập đó được chọn phần tử của tập còn lại.

★ **Thí dụ 1.** Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Từ tập A lập được bao nhiêu số:

a) Có 6 chữ số sao cho trong mỗi số đó số 1 xuất hiện hai lần, còn các số khác xuất hiện đúng một lần?

b) Có 7 chữ số sao cho trong mỗi số đó số 1 xuất hiện hai lần, số 2 xuất hiện ba lần còn các số khác xuất hiện không quá một lần?

Lời giải. a) Tập B gồm 6 vị trí (ô)

--	--	--	--	--	--

Ta thấy tập A có 5 phần tử, còn số cần lập có 6 chữ số (6 vị trí như hình vẽ trên). Như vậy các phần tử của A sẽ chọn các vị trí. Thực hiện các bước liên tiếp:

- + Đặt số 5 vào 1 trong 6 ô trên: Có 6 cách.
- + Đặt số 4 vào 1 trong 5 ô còn lại: Có 5 cách.
- + Đặt số 3 vào 1 trong 4 ô còn lại: Có 4 cách.
- + Đặt số 2 vào 1 trong 3 ô còn lại: Có 3 cách.
- + Cuối cùng số 1 phải đặt vào 2 ô cuối cùng, tức là có 1 cách đặt.

Theo quy tắc nhân có $6.5.4.3 = 360$ (số).

b) Tập B gồm 7 vị trí (ô)

--	--	--	--	--	--	--

Ta thực hiện các bước liên tiếp:

- + Đặt số 1: Chọn 2 ô trong 7 ô có C_7^2 cách.
- + Đặt số 2: Chọn 3 ô trong 5 ô còn lại có C_5^3 cách. Khi đó còn lại 2 ô và 3 số 3, 4, 5.
- + Ô còn lại thứ nhất có 3 cách chọn số.
- + Ô còn lại thứ 2 có 2 cách chọn số.

Theo quy tắc nhân có $C_7^2.C_5^3.3.2 = 1260$ (số). □

DẠNG 2. Phương pháp lập bảng

★ **Thí dụ 2.** Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B, 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho mỗi lớp có ít nhất 1 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Hướng dẫn giải. Ta lập bảng sau để phân chia các trường hợp có thể xảy ra:

Trường hợp	Lớp A (5 hs)	Lớp B (4 hs)	Lớp C (3 hs)	Số cách chọn
1	1	1	2	$C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60$
2	1	2	1	$C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$
3	2	1	1	$C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120$
Kết quả				270

★ **Thí dụ 3.** Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30

câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải đủ ba loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Hướng dẫn giải. Ta cũng lập bảng sau để phân chia các trường hợp:

Trường hợp	Khó (5)	TB (10)	Dễ (15)	Số cách chọn
1	1	2	2	$C_5^1 \cdot C_{10}^2 \cdot C_{15}^2 = 23625$
2	2	1	2	$C_5^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{15}^2 = 10500$
3	1	1	3	$C_5^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{15}^3 = 22750$
Kết quả				56875

★ **Thí dụ 4.** Một hộp đựng 11 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 11. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 6 thẻ để tổng số ghi trên 6 thẻ đó là một số lẻ?

Hướng dẫn giải. Để cho tiện ta gọi thẻ ghi số lẻ là thẻ lẻ, thẻ ghi số chẵn là thẻ chẵn.

Muốn tổng số ghi trên 6 thẻ lấy ra là số lẻ thì số thẻ lẻ phải là lẻ. Vì vậy ta cũng có bảng phân chia các trường hợp như sau:

Trường hợp	Số thẻ lẻ được lấy ra (6)	Số thẻ chẵn được lấy ra (5)	Số cách lấy
1	1	5	$C_6^1 \cdot C_5^5 = 6$
2	3	3	$C_6^3 \cdot C_5^3 = 200$
3	5	1	$C_6^5 \cdot C_5^1 = 30$
Kết quả			236

DẠNG 3. Phương pháp tạo “vách ngăn”

Khi bài toán yêu cầu xếp hai hoặc nhiều các phần tử không đứng cạnh nhau. Chúng ta có thể tạo ra các “vách ngăn” các phần tử này trước khi xếp chúng.

★ **Thí dụ 5.** Có 6 học sinh và 2 thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho 2 thầy giáo không đứng cạnh nhau?

Lời giải. Trước hết, xếp 6 học sinh thành một hàng: Có $6!$ cách. Khi đó mỗi học sinh đóng

vai trò là một vách ngăn và tạo nên 7 vị trí có thể xếp 2 thầy giáo vào đó.

+ Xếp 2 thầy giáo vào 2 trong 7 vị trí: Có A_7^2 cách.

Theo quy tắc nhân có tất cả

$$6! \cdot A_7^2 = 30240 \text{ cách sắp xếp. } \square$$

★ **Thí dụ 6.** Cho tập $A = \{2; 5\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số sao cho không có hai chữ số 2 nào đứng cạnh nhau?

Lời giải.

Trường hợp 1. Số có 10 chữ số 5: Chỉ có 1 số duy nhất.

Trường hợp 2. Số có 9 chữ số 5 và 1 chữ số 2. Xếp 9 số 5 thành hàng: Có 1 cách. Khi đó tạo nên 10 vị trí để xếp số 2. Xếp số 2: Có C_{10}^1 cách. Như vậy trường hợp 2 có C_{10}^1 số.

Trường hợp 3. Số có 8 chữ số 5 và 2 chữ số 2. Xếp 8 số 5 thành hàng: Có 1 cách. Khi đó tạo nên 9 vị trí để xếp số 2. Xếp số 2: Có C_9^2 cách. Như vậy trường hợp 3 có C_9^2 số.

Trường hợp 4. Số có 7 chữ số 5 và 3 chữ số 2: Xếp 7 số 5 thành hàng: Có 1 cách. Khi đó tạo nên 8 vị trí để xếp số 2. Xếp số 2: Có C_8^3 cách. Như vậy trường hợp 4 có C_8^3 số.

Trường hợp 5. Số có 6 chữ số 5 và 4 chữ số 2: Xếp 6 số 5 thành hàng: Có 1 cách. Khi đó tạo nên 7 vị trí để xếp số 2. Xếp số 2: Có C_7^4 cách. Như vậy trường hợp 5 có C_7^4 số.

Trường hợp 6. Số có 5 chữ số 5 và 5 chữ số 2. Xếp 5 số 5 thành hàng: Có 1 cách. Khi đó tạo nên 6 vị trí để xếp số 2. Xếp số 2: Có C_6^5 cách. Như vậy trường hợp 6 có C_6^5 số.

Kết quả có

$$1 + C_{10}^1 + C_9^2 + C_8^3 + C_7^4 + C_6^5 = 144 \text{ (số). } \square$$

DẠNG 4. Phương pháp “buộc” các phần tử

Đối ngẫu với phương pháp tạo “vách ngăn” là phương pháp “buộc” các phần tử. Các bài tập dạng này yêu cầu xếp hai hoặc nhiều phần tử đứng cạnh nhau. Vì vậy ta “buộc”

các phần tử này thành một nhóm và coi như một phần tử.

★ **Thí dụ 7.** Một nhóm học sinh gồm 4 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B, 5 học sinh lớp C. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các học sinh trên thành một hàng ngang sao cho 4 học sinh lớp A đứng cạnh nhau, 3 học sinh lớp B đứng cạnh nhau?

Hướng dẫn giải. Ta “buộc” 4 học sinh lớp A lại và coi như một phần tử A, “buộc” 3 học sinh lớp B lại coi như phần tử B. Khi đó xếp 7 học sinh (gồm 5 học sinh lớp C và 2 phần tử A, B) thành một hàng có $7!$ cách.

Sau đó xếp thứ tự trong nhóm A có $4!$ cách; xếp thứ tự nhóm B có $3!$ cách. Tóm lại, có cả thảy là $7! \cdot 4! \cdot 3! = 725760$ cách sắp xếp. □

DẠNG 5. Phương pháp tìm gián tiếp: Xét bài toán đối

Khi giải bài toán bằng cách giải trực tiếp gặp khó khăn do xảy ra quá nhiều trường hợp, chúng ta tìm gián tiếp bằng cách xét bài toán đối.

★ **Thí dụ 8.** Trong hộp có 20 quả cầu kích thước giống nhau gồm 10 quả cầu xanh; 10 quả cầu vàng. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 9 quả cầu sao cho 9 quả lấy ra đó có đủ cả hai màu?

Lời giải. Lấy ra 9 quả cầu trong 20 quả cầu: Có C_{20}^9 cách.

Xét bài toán đối: Lấy ra 9 quả cầu không đủ cả 2 loại xanh, vàng. Tức là 9 quả lấy ra hoàn toàn là màu xanh hoặc hoàn toàn là màu vàng: Có $C_{10}^9 + C_{10}^9$ cách.

Như vậy có $C_{20}^9 - 2 \cdot C_{10}^9 = 167940$ cách lấy ra 9 quả cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Cuối cùng là một số bài tập xin dành cho bạn đọc tự giải

1. Cho $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Từ tập A lập được bao nhiêu số có 7 chữ số sao cho trong mỗi số

đó chữ số 4 xuất hiện 3 lần, còn các số khác xuất hiện đúng 1 lần?

2. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng một lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần còn các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?

3. Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Từ tập A lập được bao nhiêu số có 6 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau nhỏ hơn số đứng ngay trước nó?

4. Trên sân ga có đoàn tàu gồm 5 toa tàu và có 15 vị khách.

a) Có bao nhiêu cách xếp các vị khách lên tàu sao cho mỗi toa có đúng 1 vị khách?

b) Có bao nhiêu cách xếp 15 vị khách lên tàu sao cho mỗi toa có đúng 3 người?

c) Có bao nhiêu cách xếp 15 vị khách lên tàu sao cho toa 1 và toa 2 có 4 vị khách; toa 2 và toa 3 mỗi toa có 1 vị khách, toa 4 có 5 vị khách và toa 5 không có vị khách nào?

d) Có bao nhiêu cách xếp 15 vị khách lên tàu sao cho: một toa có 5 vị khách, một toa có 4 vị khách, một toa có 3 vị khách, một toa có 2 vị khách, một toa có 1 vị khách?

5. Một đội thanh niên tình nguyện gồm 15 người với 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

6. Cho các số 1, 2, 5, 7, 8. Có bao nhiêu cách lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ 5 số trên sao cho số đó nhỏ hơn 278?

7. Cho bao nhiêu số có 7 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số chẵn?

8. Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách?

9. Một nhóm học sinh gồm 7 nam và 6 nữ. Thầy giáo cần chọn ra 5 em tham dự lễ mít tinh tại trường với yêu cầu có cả nam và nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 396 (6.2010)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1** **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Cao Ngọc Toán – Một hướng giải phương trình bậc bốn dạng đặc biệt.
- 3** **Lời giải Đề thi vào lớp 10 chuyên toán Trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước, năm học 2009 – 2010.**
- 4** **Đề thi vào lớp 10 chuyên toán Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, năm học 2009 – 2010.**
- 5** **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Lê Xuân Đại – Một số dạng toán về số phức.
- 8** **Thử sức trước kì thi**
- Đề số 2
- 9** **- Hướng dẫn giải Đề số 1**
- 11** **Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contributions**
Nguyễn Anh Tuyến – Một số tính chất của lục giác cân xoay tròn.
- 13** **Hội thảo khoa học các chuyên đề Olympic Toán.**
- 14** **Nguyễn Khắc Minh – Kì thi chọn học sinh vào đội tuyển quốc gia dự thi IMO 2010.**
- 16** **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/396, ..., T12/396, L1/396, L2/396.
- 18** **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 392.
- 28** **Cuộc thi Mừng Thăng Long – Hà Nội tròn 1000 tuổi. Đợt 2.**
- 29** **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Hà Văn Thắng – Một số bài toán đếm.

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mỹ thuật : MINH THO
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

XIN TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU CÙNG BẠN ĐỌC



❁ PHIÊN BẢN *Chiêu đời đô* CỦA VUA LÝ CÔNG UẨN

Đây là ấn phẩm chào mừng Đại lễ Kỷ niệm 1000 năm Thăng Long - Hà Nội của NXBGD Việt Nam. Phiên bản được trình bày bằng ba thứ tiếng trên chất liệu giấy dó kích thước 21 x 100 cm. Nguyên bản tiếng Hán được thể hiện bởi nét bút tài hoa của nhà thư pháp Nguyễn Văn Bách. Mặt còn lại là bản dịch Tiếng Việt và Tiếng Anh. Bản Chiêu sử dụng hoa văn lá đề và hoa văn rồng thời Lý. Phiên bản được thiết kế, trình bày đẹp, có hộp đựng rất trang trọng.

Giá loại có hộp đựng là 200 000 đồng, loại có túi đựng là 136 000 đồng.



❁ TẬP BẢN ĐỒ LỊCH SỬ - TRUNG HỌC CƠ SỞ

Đồng chủ biên: **Phan Ngọc Liên, Trịnh Đình Tùng, Nguyễn Thế Hiệp, Nguyễn Quý Thao, Nguyễn Thị Hồng Loan.**

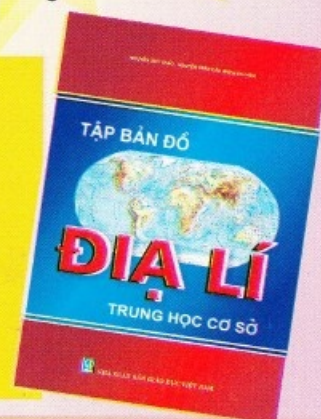
Sách gồm 80 trang, khổ 42 x 59 cm, giá 600 000 đồng.

❁ TẬP BẢN ĐỒ ĐỊA LÍ - TRUNG HỌC CƠ SỞ

Đồng chủ biên: **Nguyễn Quý Thao, Nguyễn Trần Cầu.**

Sách gồm 80 trang, khổ 42 x 59 cm, giá 550 000 đồng.

Đây là hai ấn phẩm chất lượng cao được xuất bản chào mừng Kỷ niệm 20 năm thành lập Công ty CP Bản đồ và Tranh ảnh Giáo dục của NXBGD Việt Nam. Với tập thể tác giả có kinh nghiệm và tâm huyết, hai tập bản đồ được biên soạn công phu, bố cục và sắp xếp bám sát chương trình và sách giáo khoa hiện hành, được trình bày khoa học, hấp dẫn, sinh động trên giấy couché 200g/m² kích thước 42 x 59cm; giúp các thầy cô giáo, học sinh, sinh viên vừa nắm được một cách hệ thống kiến thức Lịch sử, Địa lí, vừa giúp việc khai thác bản đồ trong giảng dạy và học tập được thuận lợi và hiệu quả.



Các thầy cô giáo, các em học sinh và bạn đọc cả nước có thể tìm mua các ấn phẩm trên tại các nhà sách của NXBGD Việt Nam (<http://www.nxbgd.vn>) và Công ty CP Bản đồ và Tranh ảnh Giáo dục (<http://www.bandotranhanh.vn>).



CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH - TBGD CỬU LONG

CUU LONG BOOK & EDUCATIONAL EQUIPMENT JOINT STOCK COMPANY

(CUBEE JSC)



Ông Ngô Trần Ái - TGD NXBGDVN (Thứ ba từ phải sang)

Tặng hoa chúc mừng HĐQT Công ty CP Sách - TBGD Cửu Long nhân Lễ khai trương Công ty

- NGÀY THÀNH LẬP: 15/4/2010
- TRỤ SỞ CHÍNH : 5/5 Đường 30/4, P. Xuân Khánh, Q. Ninh Kiều - TP. Cần Thơ
- ĐIỆN THOẠI/ FAX : 0710.3744778
- CHỦ TỊCH HĐQT : Ông Vũ Bá Hoà
- TỔNG GIÁM ĐỐC : Ông Du Xiếu Huệi
- KẾ TOÁN TRƯỞNG: Ông Mai Bá Lưu

CÔNG TY CP SÁCH - TBGD CỬU LONG LÀ ĐƠN VỊ THÀNH VIÊN CỦA NXBGD VIỆT NAM, HOẠT ĐỘNG THEO MÔ HÌNH CÔNG TY MẸ - CÔNG TY CON

**LĨNH
VỰC
KINH
DOANH**

- In ấn và các hoạt động liên quan đến in.
- Bán buôn, bán lẻ sách, báo, tạp chí, văn phòng phẩm.
- Bán buôn, bán lẻ đồ chơi, trò chơi, băng đĩa âm thanh, hình ảnh, giường tủ, bàn ghế, đồ dùng nội thất và các hàng hoá khác.
- Bán buôn tổng hợp : vật tư, thiết bị, đồ dùng dạy học, trang thiết bị nội, ngoại thất học đường.
- Đại lí mua bán, kí gửi hàng hoá, môi giới thương mại, đấu giá.
- Xây dựng nhà các loại, hoàn thiện công trình xây dựng.
- Dịch vụ hỗ trợ giáo dục.

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT06M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010

In tại Công ty CP In Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2010

Giá : 6000 đồng

Sáu nghìn đồng