



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
5 2010
Số 395

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 47

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

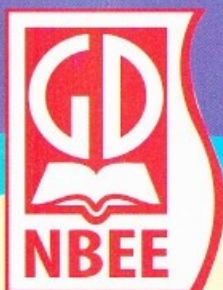
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



Cuộc thi
Mừng THẮNG LONG - HÀ NỘI
tròn 1000 tuổi



CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH VÀ THIẾT BỊ GIÁO DỤC MIỀN BẮC

NORTH BOOKS AND EDUCATIONAL EQUIPMENT JOINT STOCK COMPANY



Hội đồng Quản trị công ty

Tên viết tắt : NBEE, JSC
Ngày thành lập : 10/4/2010
Trụ sở chính : 187B Giảng Võ, P. Cát Linh,
Q. Đống Đa, TP. Hà Nội
Điện thoại : 04.35121933
Fax : 04.35123581
Chủ tịch HĐQT : NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc : Ông ĐINH KHẮC CAO
Phó TGD : Bà NGUYỄN THỊ MƠ
Kế toán trưởng : Bà HOÀNG THỊ THANH TÂM

**CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH VÀ THIẾT BỊ
GIÁO DỤC MIỀN BẮC LÀ ĐƠN VỊ THÀNH
VIÊN CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
VIỆT NAM, HOẠT ĐỘNG THEO MÔ HÌNH
CÔNG TY MẸ - CÔNG TY CON**

LĨNH VỰC KINH DOANH

- In ấn ;
- Dịch vụ liên quan đến in ;
- Sao chép bản ghi các loại (Trừ loại Nhà nước cấm) ;
- Bán buôn sách, báo, tạp chí được phép lưu hành, văn phòng phẩm ;
- Bán buôn thiết bị trường học, thiết bị phục vụ giảng dạy các cấp ;
- Bán lẻ sách, báo, tạp chí được phép lưu hành, văn phòng phẩm trong các cửa hàng chuyên doanh ;
- Xuất, nhập khẩu sách báo ;
- Bán lẻ thiết bị trường học, thiết bị phục vụ giảng dạy các cấp ;
- Tổng đại lý sách, TBGD và các sản phẩm giáo dục khác ;
- Xây dựng nhà các loại (chỉ hoạt động xây dựng công trình khi đáp ứng đủ điều kiện năng lực theo quy định của pháp luật) ;
- Bán lẻ cặp, túi, ví, hàng da và giả da khác trong các cửa hàng chuyên doanh ;
- Sản xuất giường, tủ, bàn, ghế bằng gỗ ;
- Sản xuất đồ đạc cho nhà thờ, trường học, nhà hàng.



HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA THAM SỐ

CAO QUỐC CƯỜNG
(GV THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Khi gặp những bài toán tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình (HPT) có nghiệm duy nhất, vô nghiệm, vô số nghiệm, học sinh thường mắc nhiều sai sót. Trong bài viết này sẽ hệ thống lại một số cách làm cơ bản và những sai lầm thường gặp, giúp các em tránh sai lầm khi gặp các bài tập dạng này.

❖ **Bài toán 1.** Cho hệ phương trình (m là tham số):

$$\begin{cases} mx+4y=20 & (1) \\ x+my=10 & (2) \end{cases}$$

Với giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho:

- a) Vô nghiệm;
b) Có nghiệm duy nhất;
c) Vô số nghiệm.

Lời giải. Cách 1. Từ PT(2) $\Rightarrow x = 10 - my$, thế vào PT(1) ta có $y(4 - m^2) = 20 - 10m$ (3)

Để thấy số nghiệm của HPT đã cho chính là số nghiệm của PT(3).

a) HPT đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow$ PT(3) vô nghiệm
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m^2=0 \\ 20-10m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$

b) HPT đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ PT(3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 4 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2.$

c) HPT có vô số nghiệm thì PT(3) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m^2=0 \\ 20-10m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2. \square$

Sai lầm thường gặp. Khi xét trường hợp PT(3) vô nghiệm nhiều bạn quên điều kiện $20 - 10m \neq 0$. Vì vậy dẫn tới kết luận sai: HPT vô nghiệm $\Leftrightarrow m = \pm 2.$

Cách 2

• Nếu $m = 0$, HPT đã cho trở thành $\begin{cases} x=10 \\ y=5. \end{cases}$

Hệ PT có nghiệm duy nhất.

• Nếu $m \neq 0$, HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = \frac{-m}{4}x + 5 & (a) \\ y = \frac{-1}{m}x + \frac{10}{m} & (b) \end{cases}$$

Để thấy số nghiệm của HPT đã cho chính là số giao điểm của hai đường thẳng (a) và (b).

a) HPT đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow (a) \parallel (b)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-m}{4} = \frac{-1}{m} \\ 5 \neq \frac{10}{m} \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

b) HPT đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (a)$ cắt (b)

$$\Leftrightarrow \frac{-m}{4} \neq \frac{-1}{m} \Leftrightarrow m \neq \pm 2.$$

c) HPT đã cho có vô số nghiệm $\Leftrightarrow (a) \equiv (b)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-m}{4} = \frac{-1}{m} \\ 5 = \frac{10}{m} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2. \square$$

Sai lầm thường gặp. Khi xét trường hợp

(a) $\parallel$ (b) nhiều bạn chỉ xét điều kiện $\frac{-m}{4} = \frac{-1}{m}$

mà quên điều kiện $5 \neq \frac{10}{m}$ nên dẫn tới kết luận

sai: HPT vô nghiệm $\Leftrightarrow m = \pm 2.$

❖ Bài toán 2. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} mx - y - n = 0 \\ (x + y - 2)(x - 2y + 1) = 0 \end{cases}$$

(m, n là tham số). Tìm các giá trị của m, n để hệ phương trình vô nghiệm.

Lời giải. HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} mx - y - n = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} mx - y - n = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - n \text{ (a)} \\ y = -x + 2 \text{ (b)} \end{cases} \text{ (I) hoặc } \begin{cases} y = mx - n \text{ (c)} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ (d)} \end{cases} \text{ (II)}$$

Ta có HPT đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow$ cả HPT (I) và

$$\text{HPT (II) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a // b \\ c // d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1; n \neq -2 \\ m = \frac{1}{2}; n \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy không tồn tại m, n để HPT đã cho vô nghiệm. $\square$

❖ Bài toán 3. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $y^2 = x$.

Lời giải. Rút y từ PT thứ nhất của hệ rồi thế vào PT thứ hai của hệ ta có $(1 - m)x = 1 - m$ (1)

Ta có HPT đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ PT(1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq 1$ (*)

Khi đó HPT có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -m - 1 \end{cases}$.

$$\text{Mặt khác, } y^2 = x \Leftrightarrow (-m - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$$

(thỏa mãn ĐK (*)).

Vậy có hai giá trị của m là $m = 0$ hoặc $m = -2$. $\square$

❖ Bài toán 4. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + my = 3m \text{ (1)} \\ mx - y = m^2 - 2 \text{ (2)} \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x^2 - 2x - y > 0$.

Lời giải. Từ PT(1) ta có $x = 3m - my$ (*), thế vào PT(2) ta có

$$m(3m - my) - y = m^2 - 2 \Leftrightarrow y(m^2 + 1) = 2m^2 + 2 \Leftrightarrow y = 2, \text{ thay vào PT(*) ta có } x = m.$$

Vậy HPT luôn có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = m \\ y = 2 \end{cases}$.

$$\text{Để } x^2 - 2x - y > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 + \sqrt{3} \\ m < 1 - \sqrt{3} \end{cases} \quad \square$$

❖ Bài toán 5. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (m - 1)x + y = 3m - 4 \text{ (1)} \\ x + (m - 1)y = m \text{ (2)} \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x + y = 2$.

Lời giải. Từ PT(2) $\Rightarrow x = m - (m - 1)y$, thế vào PT(1) ta có $y(m^2 - 2m) = m^2 - 4m + 4$ (3)

Vậy, HPT đã cho có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \text{PT(3) có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \text{ và } m \neq 2 \text{ (*)}.$$

$$\text{Khi đó nghiệm của HPT đã cho là } \begin{cases} x = \frac{3m - 2}{m} \\ y = \frac{m - 2}{m} \end{cases}$$

$$\text{Để } x + y = 2 \text{ ta có } \frac{3m - 2}{m} + \frac{m - 2}{m} = 2 \Leftrightarrow m = 2$$

(không thỏa mãn ĐK (*)). Vậy không tìm được giá trị của m để HPT đã cho có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x + y = 2$. $\square$

❖ Bài toán 6. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax + y = b \text{ (1)} \\ x^2 - 4y^2 = 1 \text{ (2)} \end{cases} \quad (a, b \text{ là tham số})$$

Tìm các giá trị của a để hệ phương trình trên có nghiệm với mọi b .

Lời giải. Từ PT(1) $\Rightarrow y = b - ax$, thế vào PT(2) ta có $x^2 - 4(b - ax)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (1 - 4a^2)x^2 + 8abx - 4b^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

(Xem tiếp trang 15)

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG, BÌNH PHƯỚC

NĂM HỌC 2009 - 2010

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1. (2 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{\frac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} = 8 - x^2$.

2) Cho x, y là hai số nguyên dương thỏa mãn

$$\begin{cases} xy + x + y = 71 \\ x^2 y + xy^2 = 880. \end{cases}$$

Tính giá trị biểu thức $B = x^2 + y^2$.

Bài 2. (3 điểm)

1) Một máy bay trực thăng bay từ A đến B , cách nhau 960km với vận tốc 280km/h. Khi bay từ A tới B do bị gió cản nên thời gian bay phải nhiều hơn một giờ so với thời gian bay từ B đến A (do được gió đẩy). Tìm vận tốc của gió.

2) Cho Parabol (P) : $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng

(d) : $y = m(x - 1) - 2$. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi m thay đổi. Gọi x_A, x_B lần lượt là hoành độ của A và B . Xác định m để $x_A^2 x_B + x_B^2 x_A$ đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất này.

Bài 3. (2 điểm)

1) Tìm các số nguyên không âm x, y thỏa mãn đẳng thức $x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}$.

2) Cho $x > y \geq 0$. Chứng minh rằng

$$x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 4. (2 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2a$. Trên đoạn AB lấy điểm M . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn ta kẻ hai tia Mx, My sao cho $\widehat{AMx} = \widehat{BMy} = 30^\circ$. Tia Mx cắt nửa đường tròn tại điểm E , tia My cắt nửa đường tròn tại điểm F . Kẻ EE' và FF' vuông góc với AB lần lượt tại E' và F' .

1) Cho $AM = \frac{a}{2}$. Tính diện tích hình thang vuông $EE'F'F$ theo a .

2) Khi điểm M di động trên AB . Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 5. (1 điểm)

Cho đường tròn (C) . Vẽ hai dây cung AB, EF cắt nhau tại điểm I (I nằm trong đường tròn). Gọi M là trung điểm của BF . MI kéo dài cắt AE tại điểm N . Chứng minh rằng $\frac{AN}{NE} = \frac{AI^2}{EI^2}$.

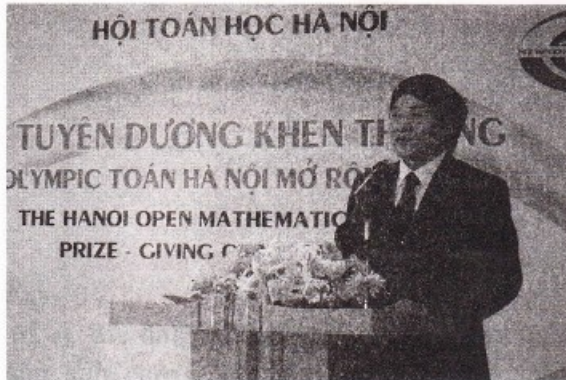
TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước) giới thiệu



LỄ TUYÊN DƯƠNG KHEN THƯỞNG CUỘC THI OLYMPIC TOÁN HÀ NỘI MỞ RỘNG 2010

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC
(*Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*)



GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch
Hội Toán học Hà Nội phát biểu Tổng kết cuộc thi.

Ngày 25/4/2010 vừa qua, tại trường phổ thông Newton, Cung Thể thao dưới nước, khu Liên hợp Thể thao Quốc gia, Mỹ Đình, Hà Nội, Hội Toán học Hà Nội đã tổ chức Lễ tuyên dương khen thưởng cho học sinh đoạt giải cuộc thi Olympic Toán Hà Nội mở rộng (HOMO) lần thứ V. Đến dự buổi lễ có GS. TSKH Trần Văn Nhung, nguyên Thứ trưởng Bộ GD&ĐT, Chủ tịch HĐQT trường phổ thông Newton; GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, các Ủy viên ban chấp hành Hội, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Tạp chí Toán Tuổi thơ, lãnh đạo các Sở giáo dục, Phòng Giáo dục, các giáo viên và học sinh đoạt giải của 13 tỉnh, thành phố: Hà Nội, Bắc Giang, Hà Giang, Hải Dương, Hoà Bình, Lạng Sơn, Lào Cai, Phú Thọ, Quảng Ninh, Thái Bình, Thái Nguyên, Vĩnh Phúc và Yên Bái. Sau phần văn nghệ chào mừng của giáo viên và học sinh trường phổ thông Newton với những tiết mục đặc sắc bằng Tiếng Anh, GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu đã tổng kết cuộc thi. Nét nổi bật của Hà Nội năm nay là có nhiều học sinh của các huyện ngoại thành như Ba Vì, Phúc Thọ, Phú Xuyên, Quốc Oai tham dự, các trường ngoài

công lập và các trường có yếu tố nước ngoài như Marie – Curi, Dream House, Newton, trường Quốc tế Liên hiệp quốc đều có học sinh tham dự. Ban tổ chức đã trao 72 giải cho học sinh ở độ tuổi Junior (sinh sau ngày 01/01/1996) với 8 giải Nhất, 12 giải Nhì, 27 giải Ba, và 25 giải Khuyến khích; 63 giải ở độ tuổi Senior (sinh sau ngày 01/01/1994) với 7 giải Nhất, 14 giải Nhì, 25 giải Ba và 17 giải Khuyến khích. Các em đều được tặng Giấy khen và nhận quà của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Tạp chí Toán Tuổi thơ, Công ty Văn phòng phẩm Hồng Hà và Trường phổ thông Newton. Tiếp đó, GS. TSKH Trần Văn Nhung đã phát biểu khen ngợi hoạt động tích cực và có hiệu quả của Hội Toán học Hà Nội và đề xuất trong những năm tới cần huy động thêm các lực lượng tài trợ cho Cuộc thi nhiều hơn góp phần thúc đẩy việc học Toán, Tiếng Anh trong nhà trường và bồi dưỡng nhân tài cho đất nước. Cuối cùng, Ban tổ chức đã công bố danh sách 20 em bậc THCS và 20 em bậc THPT tham dự kì thi Olympic Singapore mở rộng vào ngày 1.6.2010.

Sau đây THPT xin giới thiệu đề bài của Kì thi HOMO 2010.

Important:

Answer all 10 questions.

Enter your answers on the answer sheet provided.

For the multiple choice questions, enter only the letters (A, B, C, D or E) corresponding to the correct answers in the answer sheet.

No calculators are allowed.

SENIOR SECTION

Sunday, 28 March 2010

08h45 – 11h45

Q1. The number of integer $n \in [2000, 2010]$ such that $2^{2n} + 2^n + 5$ is divisible by 7, is

- (A): 0; (B): 1; (C): 2;
(D): 3; (E): Non of the above.

Q2. The last 5 digits of the number 5^{2010} are

- (A): 65625; (B): 45625; (C): 25625
(D): 15625 (E): Non of the above.

Q3. How many real numbers $a \in (1; 9)$ such that the corresponding number $a - \frac{1}{a}$ is an integer.

- (A): 0; (B): 1; (C): 8;
(D): 9; (E): Non of the above.

Q4. Each box in 2×2 table can be colored black or white. How many different colorings of the table are there?

Q5. Determine all positive integer a such that the equation

$$2x^2 - 210x + a = 0$$

has two prime roots, i.e. both roots are prime umbers.

Q6. Let a, b be the roots of the equation

$x^2 - px + q = 0$ and let c, d be the roots of the equation $x^2 - rx + s = 0$, where p, q, r, s are some positive real numbers. Suppose that

$$M = \frac{2(abc + bcd + cda + dab)}{p^2 + q^2 + r^2 + s^2}$$

is an integer. Determine a, b, c, d .

Q7. Let P be the common point of 3 internal bisectors of a given ABC . The line passing through P and perpendicular to CP intersects AC and BC at M and N , respectively. If $AP = 3\text{cm}$, $BP = 4\text{cm}$, compute the value of $\frac{AM}{BN}$?

Q8. If n and $n^3 + 2n^2 + 2n + 4$ are both perfect squares, find n .

Q9. Let x, y be the positive integers such that $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Prove that $x - y$ is a perfect integer.

Q10. Find the maximum value of

$$M = \frac{x}{2x+y} + \frac{y}{2y+x} + \frac{z}{2z+x},$$

$x, y, z > 0$.

JUNIOR SECTION

Sunday, 28 March 2010

08h45 - 11h45

The questions Q3, Q4, Q7, Q8, Q10 are the same as the questions Q2, Q3, Q5, Q8, Q10, respectively, in the Senior Section.

Q1. Compare the numbers:

$$P = \underbrace{888\dots888}_{2010 \text{ digits}} \times \underbrace{333\dots333}_{2010 \text{ digits}} \text{ and}$$

$$Q = \underbrace{444\dots444}_{2010 \text{ digits}} \times \underbrace{666\dots667}_{2010 \text{ digits}}$$

- (A): $P = Q$; (B): $P > Q$; (C) $P < Q$.

Q2. The number of integer n from the set $\{2000, 2001, \dots, 2010\}$ such that $A = 2^{2n} + 2^n + 5$ is divisible by 7, is

- (A): 0; (B): 1; (C): 2;
(D): 3; (E): Non of the above.

Q5. Each box in 2×2 table can be colored black or white. How many different colorings of the table are there?

- (A): 4; (B): 8; (C): 16;
(D): 32; (E) Non of the above.

Q6. The greatest integer less than $(2 + \sqrt{3})^5$ are

- (A): 721; (B): 722; (C) 723;
(D): 724; (E): Non of the above.

Q9. Let be given a triangle ABC and points D, M, N belong to BC, AB, AC , respectively. Suppose that MD is parallel to AC and ND is parallel to AB . If $S_{\triangle BMD} = 9\text{cm}^2$, $S_{\triangle DNC} = 25\text{cm}^2$, compute $S_{\triangle AMN}$?



Bài toán Tìm giá trị tham số để phương trình, bất phương trình, hệ phương trình có nghiệm là bài toán quan trọng và thường gặp trong kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng.

Bài viết này trao đổi cách vận dụng đạo hàm để giải những bài toán thuộc dạng trên.

SỬ DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

HUỖNH DUY THỦY

(GV THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Trước hết chúng ta cần nắm vững các mệnh đề sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập D .

1) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $x \in D$
 $\Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \leq m \leq \max_{x \in D} f(x)$;

2) Bất phương trình $f(x) \leq m$ có nghiệm $x \in D$
 $\Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \leq m$;

3) Bất phương trình $f(x) \leq m$, nghiệm đúng với mọi $x \in D \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) \leq m$;

4) Bất phương trình $f(x) \geq m$, có nghiệm với mọi $x \in D \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) \geq m$;

5) Bất phương trình $f(x) \geq m$, nghiệm đúng với mọi $x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \geq m$;

6) Cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập D .

Khi đó $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ (với mọi $u, v \in D$).

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để giải bài toán tìm giá trị tham số m để phương trình (PT), bất phương trình (BPT) có nghiệm ta có thể thực hiện thứ tự như sau:

- Biến đổi PT (BPT) về dạng $f(x) = g(m)$.

(hoặc $f(x) \geq g(m)$; hoặc $f(x) \leq g(m)$).

- Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)$.

- Tính $f'(x)$.

- Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

- Xác định $\max_{x \in D} f(x)$, $\min_{x \in D} f(x)$.

- Vận dụng một trong các mệnh đề đã nêu ở phần trên, rút ra kết luận cho bài toán.

Lưu ý. Trường hợp PT (BPT) chứa các biểu thức phức tạp ta làm như sau:

- Đặt ẩn số phụ $t = \varphi(x)$.

- Từ điều kiện ràng buộc của ẩn x , tìm điều kiện cho ẩn số t .

- Đưa PT (BPT) ẩn số x về PT (BPT) ẩn số t .

Ta được $f(t) = h(m)$; (hoặc $f(t) \geq h(m)$; hoặc $f(t) \leq h(m)$).

- Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$.

- Từ bảng biến thiên rút ra kết luận bài toán.

III. MỘT SỐ THÍ DỤ

★ **Thí dụ 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m} \quad (1)$$

có nghiệm.

Lời giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 9$.

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow x + 9 - x + 2\sqrt{x(9-x)} = -x^2 + 9x + m$$

$$\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{-x^2 + 9x} = -x^2 + 9x + m \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 9x}$.

Ta có $t' = \frac{-2x+9}{2\sqrt{-x^2+9x}}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$.

x	0	$\frac{9}{2}$	9
t'		+	-
t	0	$\frac{9}{2}$	0

Do đó $0 \leq t \leq \frac{9}{2}$. Khi đó PT(2) trở thành

$$9 + 2t = t^2 + m \Leftrightarrow -t^2 + 2t + 9 = m \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 9$, với $0 \leq t \leq \frac{9}{2}$.

$$f'(t) = -2t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Lập bảng biến thiên hàm $f(t)$ trên $\left[0; \frac{9}{2}\right]$

t	0	1	$\frac{9}{2}$
$f'(t)$		+	-
$f(t)$	9	10	$-\frac{9}{4}$

PT (1) có nghiệm $x \in [0; 9]$ khi và chỉ khi PT

(3) có nghiệm $t \in \left[0; \frac{9}{2}\right]$. Điều này xảy ra khi

$$\text{và chỉ khi } -\frac{9}{4} \leq m \leq 10. \quad \square$$

★ **Thí dụ 2.** Cho phương trình

$$\sqrt{\log_2^2 x + \log_1 x^2 - 3} = m(\log_2 x - 3) \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in [32; +\infty)$.

Lời giải. Từ ĐK bài ra ta thấy $\log_2 x \geq 5$, suy ra $(\log_2 x - 3) \geq 2$ nên $m \geq 0$.

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = m^2(\log_2 x - 3)^2 \quad (2)$$

Đặt $t = \log_2 x$ ($t \geq 5$). PT (2) trở thành

$$t^2 - 2t - 3 = m^2(t - 3)^2 \Leftrightarrow m^2 = \frac{t+1}{t-3} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+1}{t-3}$ (với $t \geq 5$).

$$f'(t) = \frac{-4}{(t-3)^2} < 0, \text{ với mọi } t \geq 5. \text{ Ta có}$$

t	5	$+\infty$
$f'(t)$		-
$f(t)$	3	1

PT (1) có nghiệm $x \in [32; +\infty)$ khi và chỉ khi PT (3) có nghiệm $t \geq 5$ điều này xảy ra khi $1 < m^2 \leq 3$. Kết hợp với $m \geq 0$, ta được $1 < m \leq \sqrt{3}$. $\square$

★ **Thí dụ 3.** Tìm m để phương trình

$$3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x) \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải. Xét $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, khi đó $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $\tan x > 0$ và $\sin x + 3\cos x > 0$.

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x + 1} \cdot \frac{(\sin x + 2\cos x)}{(\sin x + 3\cos x)} = m$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x + 1} \cdot \left(\frac{\tan x + 2}{\tan x + 3}\right) = m \quad (2)$$

Đặt $t = \tan x$, $t > 0$, PT (2) thành

$$3\sqrt{t+1} \cdot \frac{t+2}{t+3} = m \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 3\sqrt{t+1} \cdot \frac{t+2}{t+3}$, ($t > 0$).

$$f'(t) = \frac{3}{2\sqrt{t+1}} \cdot \frac{t+2}{t+3} + \frac{3\sqrt{t+1}}{(t+3)^2} > 0; \forall t > 0.$$

Ta có bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	2	$+\infty$

Ứng với mỗi $t > 0$ thỏa mãn PT (3), ta được đúng một nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ của PT (1). Do đó PT (1) có nghiệm duy nhất $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi PT (3) có duy nhất nghiệm $t > 0$.

Căn cứ vào bảng biến thiên ta suy ra $m > 2$. $\square$

★ **Thí dụ 4.** Tìm m để bất phương trình

$$m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2 - x) \leq 0 \quad (1)$$

có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

Ta có $t' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có bảng biến thiên

x	0	1	$1 + \sqrt{3}$
t'		-	0
t	$\sqrt{2}$	1	2

Từ đó $1 \leq t \leq 2$. Với $1 \leq t \leq 2$, ta biến đổi

$$t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow t^2 = x^2 - 2x + 2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2 = -x(2 - x). \text{ BPT (1) trở thành}$$

$$m(t + 1) \leq t^2 - 2 \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2}{t + 1} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2}{t + 1}$, ($1 \leq t \leq 2$).

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)^2} > 0, \quad \forall t \in [1; 2]$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1; 2]$.

Bảng biến thiên

t	1	2
$f'(t)$		+
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

Từ bảng biến thiên, BPT (1) có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$ khi và chỉ khi BPT(2) có nghiệm $t \in [1; 2]$.

Điều này xảy ra khi $m \leq \max_{t \in [1; 2]} f(t) = f(2) = \frac{2}{3}$. $\square$

* * *

Để kết thúc bài báo xin mời bạn hãy sử dụng phương pháp trên để giải một số bài tập cùng loại sau đây

1. Tìm m để phương trình

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(x+1)(8-x)} = m$$

có nghiệm.

2. Tìm a để phương trình $\frac{3x^2-1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1} + ax$

có nghiệm duy nhất.

3. Tìm giá trị lớn nhất của a để bất phương trình

$$\sqrt{a^3}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{a}}{(x-1)^2} \leq \sqrt[4]{a^3} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|$$

có ít nhất một nghiệm.

4. Tìm m để mọi $x \in [0; 2]$ đều thỏa mãn bất phương trình

$$\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \leq 5.$$

5. Tìm m để bất phương trình

$$\log_5(x^2 + 4x + m) - \log_5(x^2 + 1) < 1$$

nhận đúng với mọi $x \in (2; 3)$.

6. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để bất phương trình

$$a.2^{x+1} + (2a+1)(3-\sqrt{5})^x + (3+\sqrt{5})^x < 0$$

nhận đúng với mọi $x \leq 0$.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I. (2,0 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Câu II. (2,0 điểm)

Giải phương trình

$$1) \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\cos^2 2x}{\tan x - \cot x}.$$

$$2) \text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 + \frac{4x}{y} = 22. \end{cases}$$

Câu III. (1,0 điểm)

$$\text{Tính tích phân } I = \int_3^8 \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}} dx.$$

Câu IV. (1,0 điểm)

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a , mặt bên tạo với mặt đáy góc 60° . Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm tam giác SAC cắt SC , SD lần lượt tại M , N . Tính thể tích hình chóp $S.ABMN$ theo a .

Câu V. (1,0 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a \leq 1$, $0 < b \leq 1$, $0 < c \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{1}{abc}\right)(a+b+c) \geq 3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc phần 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2,0 điểm)

1) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(-3;6)$, trực tâm $H(2;1)$, trọng tâm

$G\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C .

2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) có phương trình $(\alpha): 2x - y + 2z - 3 = 0$ và

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z - 4 = 0.$$

Xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) . Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng (α) .

Câu VII.a (1,0 điểm)

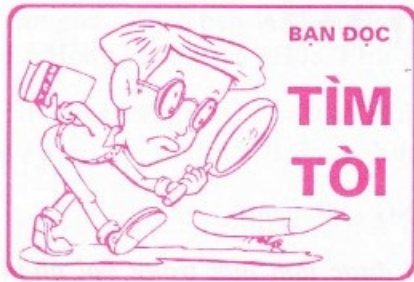
Đội dự tuyển bóng bàn có 10 nữ, 7 nam, trong đó có danh thủ nam là *Vũ Mạnh Cường* và danh thủ nữ là *Ngô Thu Thủy*. Người ta cần lập một đội tuyển bóng bàn Quốc gia từ đội dự tuyển nói trên. Đội tuyển Quốc gia bao gồm 3 nữ và 4 nam. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội tuyển Quốc gia sao cho trong đội tuyển có mặt chỉ một trong hai danh thủ trên?

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2,0 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x - 4y - 2 = 0$, cạnh BC song song với d , phương trình đường cao $BH: x + y + 3 = 0$ và trung điểm của cạnh AC là $M(1; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

(Xem tiếp trang 12)



MỘT CÁCH CHỨNG MINH các đường thẳng đồng quy

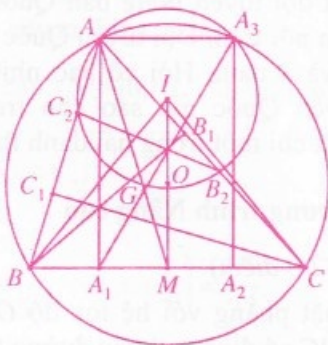
NGUYỄN VĂN LINH
(HS lớp 11A2 Toán, khối THPT chuyên,
ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Để chứng minh các đường thẳng đồng quy, có một cách là lấy một đường đại diện trong số các đường thẳng đó rồi chứng minh nó đi qua một điểm đặc biệt. Từ đó theo tính hình học chất tương tự, các đường còn lại cũng đi qua điểm đó. Ý tưởng trên có vẻ rất đơn giản nhưng đem đến sự ngắn gọn, đẹp mắt cho lời giải. Chúng ta hãy cùng tìm hiểu phương pháp thú vị này qua một số thí dụ sau:

★Thí dụ 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 . Gọi A_2, B_2, C_2 thứ tự là điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua trung điểm BC, CA, AB . Các đường tròn $(AB_2C_2), (BA_2C_2), (CA_2B_2)$ thứ tự cắt đường tròn (O) lần thứ hai tại A_3, B_3, C_3 . Chứng minh rằng ba đường thẳng A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy.

(Vietnam TST 2009)

Lời giải. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_2C_2 ; M là trung điểm BC (h. 1).



Hình 1

Do BB_1 và CC_1 là hai đường cao của tam giác ABC nên $\overline{AB_1} \cdot \overline{AC} = \overline{AC_1} \cdot \overline{AB}$.

$$\Rightarrow \overline{CB_2} \cdot \overline{CA} = \overline{BC_2} \cdot \overline{BA} \Rightarrow \mathcal{P}_B(I) = \mathcal{P}_C(I)$$

$$\Rightarrow IB = IC \Rightarrow IO \perp BC.$$

Mặt khác $IO \perp AA_3$ nên $AA_3 \parallel BC \Rightarrow AA_3 = 2A_1M$

Gọi G là giao điểm của AM và A_1A_3 . Theo

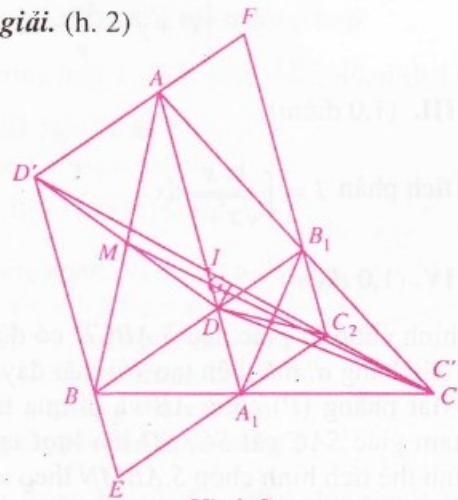
định lí Thales ta có $\frac{AG}{GM} = \frac{AA_3}{A_1M} = 2$. Suy ra

G là trọng tâm tam giác ABC . Tương tự B_1B_3, C_1C_3 cũng đi qua G . Suy ra đpcm. $\square$

★Thí dụ 2. Cho tam giác ABC với trọng tâm G và D là điểm bất kì trong tam giác. AD, BD, CD theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là điểm đối xứng với D qua trung điểm B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 . Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm thuộc đường thẳng GD .

(Bài T8/THCS, THPT số 384, tháng 6/2009)

Lời giải. (h. 2)



Hình 2

Gọi D' là điểm đối xứng với D qua trung điểm M của AB và $D'A \cap B_1C_2 = \{F\}$;

$D'B \cap C_2A_1 = \{E\}$. Suy ra tứ giác $D'FC_2E$ là hình bình hành. Gọi $\{C'\} = D'C_2 \cap AB_1$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác $D'FC_2$ với đường thẳng (A, B_1, C') ta có

$$\frac{\overline{C'C_2}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD'}} \cdot \frac{\overline{B_1C_2}}{\overline{B_1F}}.$$

Gọi $\{C''\} = BA_1 \cap D'C_2$. Tương tự cũng có

$$\frac{\overline{C''C_2}}{\overline{C''D'}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD'}} \cdot \frac{\overline{A_1C_2}}{\overline{A_1E}} = \frac{\overline{B_1C_2}}{\overline{B_1F}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{C'C_2}}{\overline{C'D'}}.$$

Do đó $C'' \equiv C' \equiv C \Rightarrow D', C_2, C$ thẳng hàng.

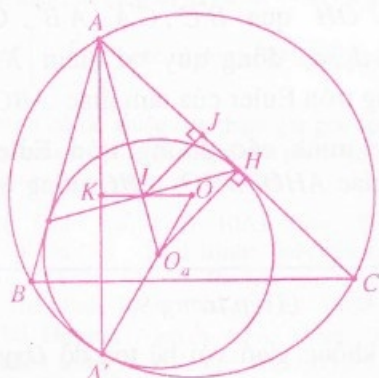
Do $\frac{\overline{GM}}{\overline{GC}} = -\frac{1}{2}$ nên G là trọng tâm tam giác

$D'DC$. Gọi $\{I\} = DG \cap C_2C$ suy ra $\frac{\overline{IG}}{\overline{ID}} = \frac{1}{3}$.

Tương tự các đường thẳng thẳng AA_2, BB_2 cũng đi qua I . Ta có đpcm. $\square$

★ **Thí dụ 3.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) . Đường tròn (O_a, r_a) tiếp xúc với tia AB, AC và tiếp xúc trong với (O) tại A' . Các điểm B', C' được định nghĩa một cách tương tự. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Lời giải. (h. 3)



Hình 3

Gọi (I, r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $\{K\} = AA' \cap OI$. Kẻ $IJ \perp AC$; $O_aH \perp AC$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác OIO_a với đường thẳng (A, K, A') ta có

$$\frac{\overline{KI}}{\overline{KO}} \cdot \frac{\overline{A'O}}{\overline{A'O_a}} \cdot \frac{\overline{AO_a}}{\overline{AI}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{KI}}{\overline{KO}} = \frac{r_a}{R} \cdot \frac{IJ}{O_aH} = \frac{r}{R} (*)$$

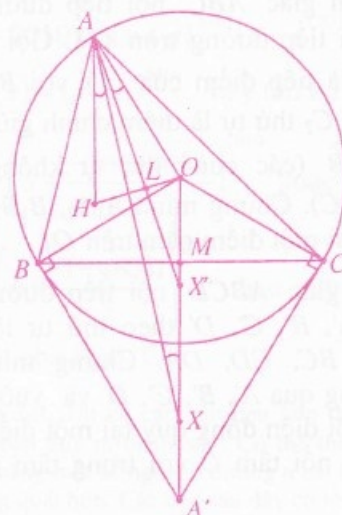
Vậy đường AA' đi qua điểm K trên đường thẳng IO thỏa mãn hệ thức (*).

Tương tự các đường thẳng BB', CC' cũng đi qua điểm K . Ta có đpcm. $\square$

Nhận xét. Với phương pháp tương tự, ta chứng minh được bài toán tổng quát sau: Cho tam giác ABC . Đường tròn (O_1) tiếp xúc với hai tia AB, AC . Các đường tròn $(O_2), (O_3)$ được định nghĩa tương tự. Gọi (O_4) là đường tròn tiếp xúc ngoài (hoặc trong) với $(O_1), (O_2), (O_3)$ lần lượt tại A', B', C' . Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

★ **Thí dụ 4.** Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Các tiếp tuyến tại A, B, C của (O) giao nhau tạo thành tam giác $A'B'C'$. Gọi X, Y, Z lần lượt là các điểm chia đoạn OA', OB', OC' theo tỉ số $\frac{\overline{OX}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OY}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OZ}}{\overline{OC'}} = t$. Chứng minh rằng các đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy.

Lời giải. (h. 4)



Hình 4

Gọi H là trực tâm tam giác ABC và M là trung điểm BC . Giả sử đường đẳng giác của AX trong góc BAC cắt OA' tại X' và $\{L\} = AX' \cap OH$.

Do H và O là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC nên $\widehat{OAX'} = \widehat{HAX} = \widehat{AXO}$, $\widehat{OX'A} = \widehat{HAX'} = \widehat{XAO} \Rightarrow \Delta OAX' \sim \Delta XOA$ (g.g) $\Rightarrow \overline{OM} \cdot \overline{OA'} = OA^2 = \overline{OX} \cdot \overline{OX'}$.

$$\text{Suy ra } \frac{\overline{OX'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OX}} = \frac{1}{t}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{\overline{OL}}{\overline{LH}} = \frac{\overline{OX'}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{OX'}}{2\overline{OM}} = \frac{1}{2t}.$$

Vậy AX đi qua điểm liên hợp đẳng giác L' của L trong tam giác ABC .

Tương tự các đường thẳng BY, CZ cũng đi qua L' . Suy ra đpcm. $\square$

Nhận xét. Khi $t = \frac{1}{2}$, tức là X, Y, Z lần lượt là

tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC, OCA, OAB thì các đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy tại điểm liên hợp đẳng giác của tâm đường tròn Euler trong tam giác ABC (điểm *Kosnita*).

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi A_1, B_1, C_1 thứ tự là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB ; A_2, B_2, C_2 thứ tự là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ (các cung thứ tự không chứa đỉnh A, B, C). Chứng minh A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại một điểm nằm trên OI .

2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm AB, BC, CD, DA . Chứng minh các đường thẳng qua A', B', C', D' và vuông góc với cạnh đối diện đồng quy tại một điểm nằm trên đường nối tâm O với trọng tâm tứ giác $ABCD$.

3. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Các đường AP, BP, CP theo thứ tự cắt các cạnh BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 ; A_2, B_2, C_2 thứ tự là trung điểm BC, CA, AB ; A_3, B_3, C_3 thứ tự là trung điểm B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 . Chứng minh A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 đồng quy tại một điểm nằm trên đường thẳng PG với G là trọng tâm tam giác ABC .

4. Cho tam giác ABC . Về phía ngoài tam giác dựng các tam giác đều A_1BC, AB_1C, ABC_1 .

a) Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm *Torricelli* của tam giác ABC , ta kí hiệu là điểm T .

b) Gọi d_a, d_b, d_c thứ tự là đường thẳng đối xứng với TA, TB, TC qua BC, CA, AB . Chứng minh d_a, d_b, d_c đồng quy tại điểm liên hợp đẳng giác của T trong tam giác ABC (kí hiệu là T').

c) Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là điểm đối xứng của T qua BC, CA, AB . Chứng minh AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại điểm R nằm trên đường thẳng TT' .

d) Gọi O, O_a, O_b, O_c thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, A_1BC, AB_1C, ABC_1 ; A_3, B_3, C_3 thứ tự là giao điểm của AA_1 với BC, BB_1 với CA, CC_1 với AB . Chứng minh O_aA_3, O_bB_3, O_cC_3 đồng quy tại điểm S nằm trên đường thẳng OT' .

5. Cho tam giác ABC với trực tâm H , tâm đường tròn ngoại tiếp O , còn A', B', C' thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB .

a) Gọi d_a, d_b, d_c thứ tự là đường thẳng đối xứng của OH qua $B'C', C'A', A'B'$. Chứng minh d_a, d_b, d_c đồng quy tại điểm X nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC .

b) Chứng minh các đường tròn Euler của các tam giác AHO, BHO, CHO đồng quy tại điểm X .

THỬ SỨC... (Tiếp trang 9)

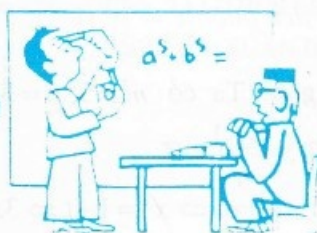
2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ với $A(3; -1; -2), B(1; 5; 1), C(2; 3; 3)$, trong đó AB là đáy lớn, CD là đáy nhỏ ($CD < AB$). Tìm tọa độ điểm D .

Câu VII.b (1,0 điểm)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

HUỖNH TÂN CHÂU

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

DIỄN ĐÀN**DAY
HỌC
TOÁN**

Trong bài viết này tôi xin được trao đổi về cách tính đối với một lớp tích phân đặc biệt thường xuất hiện trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng. Đó là tích phân có dạng

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} x^m (a + bx^n)^p dx$$

trong đó $a, b \in \mathbb{R}^*$; $m, n, p \in \mathbb{Q}$; $n, p \neq 0$.

(Đối với các trường hợp đặc biệt khi $a=0, b=0, n=0$ hoặc $p=0$ tích phân trên suy biến thành các tích phân đơn giản. Chúng ta dễ dàng tính được bằng cách dùng bảng nguyên hàm).

Khi đó tùy thuộc vào tính chất và mối quan hệ qua lại của các lũy thừa m, n, p mà chúng ta sử dụng phép đổi biến tương ứng.

★ **Trường hợp 1.** Nếu $p \in \mathbb{Z}$, thì đặt $x = t^q$, trong đó q là mẫu số chung nhỏ nhất của các phân số tối giản biểu thị bởi m và n .

Phương pháp. Ta xét tích phân tổng quát

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} x^{\frac{m_1}{m_2}} (a + bx^{\frac{n_1}{n_2}})^p dx$$

trong đó $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$; $m_2, n_2 \neq 0$.

$$(m_1, n_1) = (m_2, n_2) = 1.$$

Gọi $q = \text{BCNN}(m_2, n_2)$ khi đó $\exists k, l \in \mathbb{Z}^*$ sao cho $q = km_2 = ln_2$.

Đặt $x = t^q$ thì $dx = qt^{q-1}dt$.

Khi $x = \alpha \Rightarrow t = \alpha_1$; $x = \beta \Rightarrow t = \beta_1$.

Từ đó ta có

Cách tính đối với một lớp tích phân đặc biệt

TRẦN XUÂN ĐƯỜNG

(GV Trường sĩ quan Tăng thiết giáp,
Tam Dương, Vĩnh Phúc)

$$I = q \int_{\alpha_1}^{\beta_1} t^{\frac{qm_1}{m_2}} (a + bt^{\frac{qn_1}{n_2}})^p t^{q-1} dt$$

$$= q \int_{\alpha_1}^{\beta_1} t^{km_1} (a + bt^{ln_1})^p t^{km_2-1} dt.$$

$$\text{Do đó } I = q \int_{\alpha_1}^{\beta_1} t^{k(m_1+m_2)-1} (a + bt^{ln_1})^p dt \quad (1)$$

Do $m_1, m_2, k, n_1, l, p \in \mathbb{Z}$ nên tích phân (1) là tích phân của hàm hữu tỉ, và dĩ nhiên việc tính tích phân mới này đơn giản hơn so với tích phân ban đầu.

★ **Thí dụ 1.** Tính tích phân $I = \int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

Lời giải. Ta có

$$I = \int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} = \int_1^4 x^{-1} (1+x^{\frac{1}{2}})^{-1} dx,$$

ở đây $m = -1$, $n = \frac{1}{2}$, $p = -1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow q = 2$.

Đặt $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$.

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$. Từ đó

$$I = 2 \int_1^2 \frac{tdt}{t^2(1+t)} = 2 \int_1^2 \frac{dt}{t(1+t)}$$

$$= 2 \left(\int_1^2 \frac{dt}{t} - \int_1^2 \frac{dt}{1+t} \right) = 2 \left(\ln|t|_1^2 - \ln|t+1|_1^2 \right)$$

$$= 2 \ln \frac{4}{3}. \square$$

★ **Trường hợp 2.** Nếu $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, $p = \frac{s}{r}$, $s, r \in \mathbb{Z}^*$, $(s, r) = 1$ thì đặt $a + bx^n = t^r$.

Phương pháp. Từ điều kiện $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$

sao cho $m+1 = kn$.

$$\text{Đặt } a+bx^n = t^r \Rightarrow x^n = \frac{t^r - a}{b} \Rightarrow x^{n-1}dx = \frac{r}{bn} t^{r-1}dt$$

Khi $x = \alpha \Rightarrow t = \alpha_1$; $x = \beta \Rightarrow t = \beta_1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{\alpha}^{\beta} x^m (a+bx^n)^{\frac{s}{r}} dx \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} x^{m+1-n} (a+bx^n)^{\frac{s}{r}} x^{n-1} dx \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} x^{n(k-1)} (a+bx^n)^{\frac{s}{r}} x^{n-1} dx \\ &= \frac{r}{nb} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\frac{t^r - a}{b} \right)^{k-1} t^s t^{r-1} dt. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } I = \frac{r}{nb^k} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} (t^r - a)^{k-1} t^{r+s-1} dt \quad (2)$$

Do $r, k, s \in \mathbb{Z}$ nên tích phân (2) là tích phân của hàm hữu tỉ.

★ **Thí dụ 2.** (Đề thi Đại học Ngoại thương, 1996)

$$\text{Tính tích phân } I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Lời giải. Ta có

$$I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x^3 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$\text{ở đây } m=3, n=2, p=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Đặt } 1-x^2 = t^2 \Rightarrow x^2 = 1-t^2 \Rightarrow xdx = -tdt.$$

Khi $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$. Từ đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-t^2)t^2 dt = \int_1^0 (t^2 - t^4) dt \\ &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_1^0 = \frac{2}{15}. \quad \square \end{aligned}$$

◀ **Nhận xét.** Trong trường hợp đặc biệt khi $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ và $p \in \mathbb{Z}$ phép đặt ẩn phụ trong tích phân trên có dạng $a+bx^n = t$, ta xét thí dụ sau đây.

★ **Thí dụ 3.** (Đề thi Đại học Kinh tế Quốc dân, 1997)

$$\text{Tính tích phân } I = \int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx.$$

Lời giải. Ta có $m=5, n=3, p=6$ do vậy

$$p \in \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Đặt } 1-x^3 = t \Rightarrow x^3 = 1-t \Rightarrow 3x^2 dx = -dt.$$

Khi $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$. Từ đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx = \int_1^0 x^3 (1-x^3)^6 x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int_1^0 (1-t)t^6 dt = \frac{1}{3} \int_0^1 (t^6 - t^7) dt \\ &= \frac{1}{27} t^7 \Big|_0^1 - \frac{1}{24} t^8 \Big|_0^1 = \frac{1}{21} - \frac{1}{24} = \frac{1}{168}. \quad \square \end{aligned}$$

◀ **Trường hợp 3.** Nếu $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}, p = \frac{s}{r},$

$s, r \in \mathbb{Z}^*$ thì đặt $\frac{a+bx^n}{x^n} = t^r.$

Phương pháp. Từ điều kiện $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, suy ra $\exists k \in \mathbb{Z}$ sao cho $m+np+1 = kn$.

$$\text{Đặt } \frac{a+bx^n}{x^n} = t^r \Rightarrow x^n = \frac{a}{t^r - b}$$

$$\Rightarrow x^{n-1}dx = -\frac{ar}{n} \times \frac{t^{r-1}dt}{(t^r - b)^2}.$$

Khi $x = \alpha \Rightarrow t = \alpha_1$; $x = \beta \Rightarrow t = \beta_1$. Từ đó

$$\begin{aligned} I &= \int_{\alpha}^{\beta} x^m (a+bx^n)^p dx \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{x^m}{x^{np}} \frac{(a+bx^n)^p}{x^n} x^{np} x^{n-1} dx \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} x^{m+np+1-n} \left(\frac{a+bx^n}{x^n} \right)^p x^{n-1} dx \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} x^{n(k-1)} \left(\frac{a+bx^n}{x^n} \right)^p x^{n-1} dx \\ &= -\frac{ar}{n} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\frac{a}{t^r - b} \right)^{k-1} t^p \frac{t^{r-1}dt}{(t^r - b)^2} \\ &= -\frac{a^k r}{n} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} t^s \frac{t^{r-1}dt}{(t^r - b)^{k+1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } I = -\frac{a^k r^{\beta_1}}{n} \int_{a_1}^{\beta_1} \frac{t^{s+r-1}}{(t^r - b)^{k+1}} dt \quad (3)$$

Do $r, k, s \in \mathbb{Z}$ nên tích phân (3) là tích phân của hàm hữu tỉ.

★ **Thí dụ 4.** Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$.

Lời giải. Ta có

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \int_1^2 x^{-4} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$m = -4, n = 2, p = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m+1}{n} + p = -2 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Đặt } \frac{1+x^2}{x^2} = t^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t^2-1} \Rightarrow x dx = \frac{-tdt}{(t^2-1)^2}$$

$$\text{Khi } x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}; x=2 \Rightarrow t=\frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ Từ đó}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \int_1^2 \frac{x dx}{x^6 \sqrt{1+x^2}} \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{(t^2-1)^3}{t} \cdot \frac{-tdt}{(t^2-1)^2} = - \int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} (t^2-1) dt \\ &= \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{7\sqrt{5}-8\sqrt{2}}{24}. \quad \square \end{aligned}$$

Để kết thúc bài viết mời các bạn hãy thử tính các tích phân sau:

$$1. I = \int_0^1 x(1-x)^{2010} dx \quad 2. I = \int_0^1 x^3(1-x^2)^{20} dx$$

$$3. I = \int_1^{16} \frac{dx}{x(1+\sqrt[4]{x})} \quad 4. I = \int_0^1 \sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^5 dx$$

$$5. I = \int_0^1 x^2 \sqrt{2+x^3} dx \quad 6. I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x \sqrt{x^2+4}}$$

$$7. I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} \quad 8. I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx$$

$$9. I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3} \sqrt{(1+x^2)^3}}$$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH... (Tiếp trang 2)

• Nếu $1 - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{2}$ thì

$$\text{PT(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} 4bx = 4b^2 + 1 \\ -4bx = 4b^2 + 1. \end{cases}$$

chúng đều vô nghiệm khi $b = 0$, nên HPT đã cho vô nghiệm khi $b = 0$.

• Nếu $1 - 4a^2 \neq 0 \Leftrightarrow |a| \neq \frac{1}{2}$ thì

HPT đã cho có nghiệm với mọi $b \Leftrightarrow \text{PT(3)} \Leftrightarrow \Delta = 4b^2 + 1 - 4a^2 \geq 0, \forall b$

$$\Leftrightarrow 1 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow |a| < \frac{1}{2} \text{ (do } |a| \neq \frac{1}{2} \text{)}. \quad \square$$

Những sai lầm thường gặp

• Ở bài toán 2 nhiều bạn thường nhầm các kí hiệu “hoặc” và “đồng thời”. Các bạn cần chú ý để HPT đã cho vô nghiệm thì đồng thời HPT (I) và HPT (II) vô nghiệm.

• Ở bài toán 5, sau khi tìm được giá trị của m nhiều bạn không kiểm tra điều kiện của m nên vẫn kết luận $m = 2$.

• Ở bài toán 6 nhiều bạn không xét trường hợp $1 - 4a^2 = 0$. Vì vậy có kết luận sai là $|a| \leq \frac{1}{2}$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$

có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x + y < 1$.

2. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + my = m + 2 \\ (m+1)x + 2my = 2m + 4 \end{cases}$$

có vô số nghiệm.

3. Tìm a để hệ phương trình $\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$

có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x - y = 0$.

4. Tìm các giá trị của a để hệ phương trình

$$\begin{cases} (a+1)x + 8y = 4a \\ ax + (a+3)y = 3a - 1 \end{cases}$$

có vô số nghiệm.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/395. (Lớp 6). So sánh hai số sau:

$$A = \frac{2^{2009} + 1}{2^{2010} + 1} \text{ và } B = \frac{2^{2010} + 1}{2^{2011} + 1}.$$

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Nam Yên Thành, Nghệ An)

Bài T2/395. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 45^\circ$, AM là trung tuyến, AD là phân giác trong của tam giác MAC , kẻ DK vuông góc với AB (K thuộc AB). Gọi giao điểm của AM với DK là I . Chứng minh rằng nếu AM là tia phân giác của góc $\widehat{BAD}$ thì BI là tia phân giác của góc $\widehat{ABD}$.

PHAN THẾ HẢI
(GV CĐSP Bà Rịa – Vũng Tàu)

Bài T3/395. Tìm tất cả các số nguyên dương a và b sao cho $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ và $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ đều là số nguyên.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/395. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + b + c$. Biết rằng a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $3 \leq a, b, c \leq 5$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 50$.

VŨ ĐỨC CẢNH
(Hà Nội)

Bài T5/395. Cho tam giác ABC . Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ ở I và cắt cạnh BC ở E . Đường vuông góc với AE tại E cắt cung $\widehat{BIC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC ở H . Chứng minh rằng AH tiếp xúc với cung $\widehat{BIC}$.

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/395. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Các đường thẳng AI , BI , CI kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại A' , B' , C' . Chứng minh rằng

$$(p-a)IA'^2 + (p-b)IB'^2 + (p-c)IC'^2 = \frac{1}{2}abc,$$

trong đó $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

NGUYỄN TIÊN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T7/395. Giả sử tam giác ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) có ba góc A, B, C thỏa mãn điều kiện $\cos A + \cos B = 2\cos C$.

Chứng minh bất đẳng thức $c \geq \frac{8}{9} \max\{a, b\}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T8/395. Giải phương trình

$$x^{\log_7 11} + 3^{\log_7 x} = 2x.$$

PHẠM QUỐC PHONG
(GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/395. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x+4} = x^3 + 3x^2 + x - 2.$$

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T10/395. Cho X là tập hợp con của tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, 2010\}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

1) $|X| = 62$.

2) Với mọi $x \in X$ đều tồn tại $a, b \in X \cup \{0; 2011\}$

(a và b đều khác x) sao cho $x = \frac{a+b}{2}$.

Chứng minh rằng có hai phần tử x, y của X sao cho $|x-y| \geq 11$ và $\frac{x+y}{2}$ không thuộc X .

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/395. Người ta dán hai mép đối diện một bàn cờ $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ô vuông thành một hình trụ và sau đó dán hai mép đối diện của hình trụ lại thành một bàn cờ hình xuyên. Chứng minh rằng có thể xếp n quân Hậu trên bàn cờ hình xuyên $n \times n$ này sao cho chúng đôi một không ăn nhau khi và chỉ khi $(n, 6) = 1$.

(Hai quân Hậu ăn được nhau nếu như chúng trên cùng một cột, một hàng, hoặc trên cùng một đường chéo).

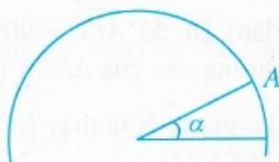
VŨ ĐÌNH HÒA
(GV DHSP Hà Nội)

Bài T12/395. Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn có AC song song với DF và BE là đường kính của đường tròn. Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm của AB với EF và BC với DE ; I là giao điểm của AN với CM . Chứng minh rằng EI vuông góc với AC .

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/395. Một sợi dây đồng chất chiều dài $\frac{\pi R}{2}$ nằm trên một hình trụ bán kính R có trục nằm ngang. Tìm lực căng của sợi dây tại điểm A (xác định bởi góc α như hình vẽ) ngay sau khi thả. Cho khối lượng sợi dây bằng m , gia tốc trọng trường bằng g .



NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài L2/395. Cho N điện tích điểm dương q như nhau, nằm cách đều nhau trên một đường tròn O bán kính R . Cần đặt tại tâm đường tròn một điện tích bằng bao nhiêu để hệ cân bằng? Khảo sát thêm với các trường hợp riêng $N = 3$ và $N = 4$.

TRẦN KHÁNH HẢI
(TP Huế)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/395. (For 6th grade). Compare the following two numbers:

$$A = \frac{2^{2009} + 1}{2^{2010} + 1} \text{ and } B = \frac{2^{2010} + 1}{2^{2011} + 1}.$$

T2/395. (For 7th grade). Let ABC be a triangle with $\widehat{BAC} = 45^\circ$, AM is its median, AD is the angle bisector of the triangle MAC , draw DK perpendicular to AB (K lies on AB). AM cuts DK at I . Prove that if AM is the angle bisector of $\widehat{BAD}$ then BI is the angle bisector of $\widehat{ABD}$.

T3/395. Find all positive numbers a and b such that $\frac{a^2 + b}{b^2 - a}$ and $\frac{b^2 + a}{a^2 - b}$ are both integers.

T4/395. Find the minimum value of the expression $P = a + b + c$ given that $3 \leq a, b, c \leq 5$ and $a^2 + b^2 + c^2 = 50$.

T5/395. Let ABC be a triangle. The angle bisector of $\widehat{BAC}$ cuts the angle bisector of $\widehat{ABC}$ at I and meets BC at E . The line perpendicular to AE at E meets the arc $\widehat{BIC}$ of the circumcircle of the triangle BIC at H . Prove that AH touches the arc $\widehat{BIC}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/395. Let I be the incenter of the triangle ABC with $BC = a$, $CA = b$ and $AB = c$. The lines AI , BI , CI cut the circumcircle of ABC at A' , B' , C' respectively. Prove that

$$(p - a)IA'^2 + (p - b)IB'^2 + (p - c)IC'^2 = \frac{1}{2}abc$$

$$\text{where } p = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

(Xem tiếp trang 27)



★ **Bài T1/391.** Có tồn tại hay không số nguyên dương k sao cho $2^k + 3^k$ là số chính phương?

Lời giải.

Bổ đề 1. Số chính phương không thể có tận cùng là 2, 3, 7, 8.

Bổ đề 2. Số chính phương chia cho 3 không thể có số dư là 2.

(Các bạn tự chứng minh hai Bổ đề trên).

Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $2^k + 3^k$ là số chính phương.

Đặt $k = 4t + r$ với $t \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ thì số đang xét có dạng

$$A = 2^k + 3^k = 2^{4t+r} + 3^{4t+r} = 16^t \cdot 2^r + 81^t \cdot 3^r.$$

Xét bốn trường hợp xảy ra:

- Với $r = 0$ thì $t \in \mathbb{N}^*$ và số $A = 16^t + 81^t$ có tận cùng là 7, trái với Bổ đề 1 ở trên.

- Với $r = 2$ thì số $A = 16^t \cdot 4 + 81^t \cdot 9$ có tận cùng là 3, trái với Bổ đề 1 ở trên.

- Với $r = 1$ thì số

$$A = 16^t \cdot 2 + 81^t \cdot 3 = (3m+1) \cdot 2 + 3n \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

chia cho 3 dư 2, trái với Bổ đề 2 ở trên.

- Với $r = 3$ thì số

$$A = 16^t \cdot 8 + 81^t \cdot 27 = (3u+1)(3 \times 2 + 2) + 3v \quad (u, v \in \mathbb{N})$$

chia cho 3 dư 2, trái với Bổ đề 2 ở trên. Vậy không tồn tại số nguyên dương k nào để số $A = 2^k + 3^k$ là số chính phương. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Cách khác: Với $r = 1$ và $r = 3$ thì A chia cho 4 dư 3 nên A cũng không là số chính phương.

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: Nguyễn Đình Mậu, 6A2, Nguyễn Thị Thanh Huyền, 6A4, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn

Tuấn Huy, Tạ Quang Quyết, Nguyễn Hồng Ngọc, 6A, THCS Lập Thạch, Trần Thị Hồng Nhung, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, Không Trọng Quang, 6A, THCS Đồng Quê; **Hà Nội:** Vũ Tuấn Hiền, 6E, THCS Hà Nội – Amsterdam; **Nghệ An:** Trịnh Thị Mỹ Ngọc, Trương Như Uyên, Hồ Thị Thúy, Nguyễn Thị Hoài Anh, Đào Mỹ Linh, Đinh Thị Hồng Ngọc, Nguyễn Việt Khánh, Nguyễn Hoàng Thảo Hiền, Hoàng Văn Bằng, 6A, Đặng Thu Thủy, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu.

NGUYỄN VIỆT HẢI

★ **Bài T2/391.** Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC , $AB = 5\text{cm}$, $AM = 6\text{cm}$ và $AC = 13\text{cm}$. Đường thẳng qua B và vuông góc với BC cắt đường thẳng AM ở D . Đường thẳng qua C và vuông góc với BC cắt đường thẳng AB ở E . Chứng minh rằng CD vuông góc với ME .

Lời giải. Trên tia đối của MA lấy điểm F sao cho $MF = MA$. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng AM và CE . Dễ thấy

$$\triangle AMB = \triangle FMC \text{ (c.g.c)} \quad (1)$$

$$\triangle BMD = \triangle CMK \text{ (g.c.g)} \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $AB = FC$

$= 5\text{ cm}$; kết hợp với $AC = 13\text{ cm}$ (gt) và $AF = 2AM = 12\text{cm}$ suy ra $AC^2 = AF^2 + FC^2$ nên $\triangle AFC$ vuông tại F (theo định lý Pythagore đảo). Do đó $\widehat{AFC} = 90^\circ = \widehat{BAM}$. Suy ra KA là đường cao của $\triangle BEK$ (3)

Từ giả thiết ta thấy BC cũng là đường cao của $\triangle BEK$ (4)

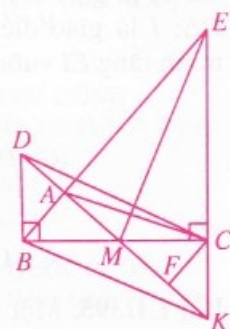
Từ (3) và (4) suy ra $EM \perp BK$ (5)

Từ (2) suy ra $MD = MK \Rightarrow \triangle CMD = \triangle BMK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{MBK} \Rightarrow CD \parallel BK$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $CD \perp ME$ (đpcm). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán cơ bản, mấu chốt của nó là phát hiện được $\triangle ABM$ vuông ở A . Lời giải trên gợi ý cho chúng ta thêm một phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau, đó là sử dụng tính chất: Trong tam giác ba đường cao đồng quy.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:



Thái Nguyên: Bùi Xuân Trường, 7A1, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Phú Thọ:** Lê Minh Hoàng, Hà Ngô Hùng, Dương Mạnh Tùng, 7A1, THCS Lâm Thao.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/391.** Tìm các số thực a, b thỏa mãn

điều kiện $a + b = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$ và $A = a^4 - 6a^2b^2 + b^4$ là số nguyên dương.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} A &= (a^2 + b^2)^2 - 8a^2b^2 \\ &= ((a+b)^2 - 2ab)^2 - 8a^2b^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2ab\right)^2 - 8a^2b^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{2}}ab - 4a^2b^2 \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2ab\right)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Mà A là số nguyên dương nên $A = 1$.

$$\text{Rõ ràng } A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} \\ ab = -\frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$$\text{Giải ra ta được } \begin{cases} a = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt[4]{8}}{4} \\ b = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt[4]{8}}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt[4]{8}}{4} \\ b = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt[4]{8}}{4}. \quad \square \end{cases}$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả :

Vĩnh Phúc: Nguyễn Minh Hiếu, 8A1, THCS Yên Lạc;
Bắc Ninh: Đinh Thị Thu Trang, 9B, THCS Từ Sơn;
Hà Nội: Trần Tuấn Nghĩa, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Thanh Xuân; **Thanh Hóa:** Bùi Thanh Tùng, 9B, THCS Hoàng Trung, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Lê Đình Tài, 7A2, THCS Văn Yên, Đô Lương.

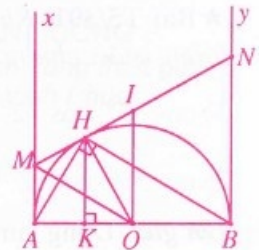
TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/391.** Giả sử O là trung điểm của đoạn thẳng $AB = 2a$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng các tia Ax, By cùng vuông góc với

AB . Trên tia Ax lấy điểm M , trên tia By lấy điểm N sao cho $MN = AM + BN$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên MN . Xác định vị trí của M và N để diện tích tam giác HAB lớn nhất.

Lời giải. Gọi I là trung điểm của MN thì OI là đường trung bình của hình thang vuông $AMNB$. Do đó

$$\begin{aligned} OI &= \frac{1}{2}(AM + BN) \\ &= \frac{1}{2}MN = MI \end{aligned}$$



suy ra $\triangle IMO$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IMO} = \widehat{IOM}$, mà $\widehat{IOM} = \widehat{OMA}$ (so le trong) nên $\widehat{IMO} = \widehat{OMA}$, từ đó hai tam giác vuông AMO và HMO bằng nhau, suy ra $OH = OA = a$.

Gọi HK là đường cao của $\triangle HAB$ thì $HK \leq HO = a$, do đó

$$S_{HAB} = \frac{1}{2}HK \cdot AB \leq \frac{1}{2}HO \cdot AB = a^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $HO \perp AB \Leftrightarrow MN \parallel AB \Leftrightarrow AM = BN = a$.

Vậy khi $AM = BN = a$ thì diện tích tam giác HAB lớn nhất và bằng a^2 . $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Mấu chốt của bài toán trên là chứng minh $\triangle AMO = \triangle HMO$. Để chứng minh điều đó, có bạn lấy điểm H' sao cho $H'M = MA$ rồi chứng tỏ H' trùng H ; có bạn kéo dài MO cắt đường thẳng BN ở P rồi chứng tỏ $\triangle NMP$ cân tại N ; có bạn chứng minh phản chứng rằng nếu $MH > MA$ thì $MN > MA + NB$... Các cách giải đó đều tốt.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Phú Thọ: Đinh Anh Hoàng, 9A3, THCS Lâm Thao;
Vĩnh Phúc: Hoàng Thị Ánh, Tạ Thị Mai Hạnh, Phan Văn Tấn, Nguyễn Văn Hậu, Nguyễn Thế Tùng, 9A1, Nguyễn Minh Hiếu, 8A1, THCS Yên Lạc, Đỗ Xuân Việt, 9A, THCS Lập Thạch; **Hà Nội:** Dương Tú Anh, 8C, THCS Đa Tôn, Gia Lâm; **Hải Dương:** Mạc Văn Vĩnh, 9A, THCS Phú Thứ, Kinh Môn; **Hải Phòng:** Lê Đức Tiến, 9A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiến An; **Nam Định:** Trần Thị Thu Thảo, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Trịnh Thị Việt Hà**, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh; **Bùi Trọng Dũng**, 9A, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Thanh Hóa:** Đỗ Thủy Linh, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Mai Châu Tuấn**, 9B, THCS Nga Hải, Nga Sơn; **Nghệ An:** Phan Thanh Tùng, 8D, THCS Cao

Xuân Huy; Nguyễn Thị Hào, 9A, Lê Hồng Đức, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Lê Đình Tài, 7A₂, THCS Văn Yên, Đỗ Lương; **Huế:** Hà Thúc Huy, lớp 7/5, THCS Phan Sào Nam; **Khánh Hòa:** Vũ Ngọc Cương, 9⁶, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh; **Quảng Ngãi:** Phạm Đình Thuyền, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T5/391.** Không sử dụng các công thức lượng giác, chứng minh các đẳng thức sau:

$$1) \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{4};$$

$$2) \tan 36^\circ \cdot \tan 72^\circ = \sqrt{5}.$$

Lời giải. Dựng tam giác ABC có $AB = AC = b$, $BC = a$ và $\widehat{BAC} = 36^\circ$. Khi đó $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72^\circ$. Kẻ đường phân giác trong BM của $\triangle ABC$ (hình vẽ), ta có $\widehat{ABM} = 36^\circ \Rightarrow \triangle ABM$ cân tại M . Kẻ $MK \perp AB$

$$\Rightarrow AK = KB = \frac{b}{2}.$$

Mặt khác, $\widehat{BMC}$

$$= \widehat{BAM} + \widehat{ABM} = 72^\circ$$

$\Rightarrow \triangle BMC$ cân tại $B \Rightarrow AM = MB = BC = a$. Kẻ $AH \perp BC \Rightarrow H$ là trung điểm BC . Xét $\triangle AKM$ có

$$\cos 36^\circ = \frac{AK}{AM} = \frac{b}{2a}; \quad \tan 36^\circ = \frac{KM}{AK} = \frac{2KM}{b}.$$

Xét $\triangle ABH$ có

$$\cos 72^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{2b}; \quad \tan 72^\circ = \frac{AH}{HB} = \frac{2AH}{a}.$$

Từ đó ta có

$$1) \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{4}.$$

$$2) \tan^2 36^\circ \cdot \tan^2 72^\circ = \frac{16KM^2 \cdot AH^2}{a^2 b^2} \quad (1)$$

Sử dụng định lý Pythagore ta có

$$KM^2 = AM^2 - AK^2 = \frac{4a^2 - b^2}{4} \quad (2)$$

$$AH^2 = AB^2 - HB^2 = \frac{4b^2 - a^2}{4} \quad (3)$$

Mặt khác, vì BM là phân giác trong góc ABC ,

$$\text{ta có } \frac{MA}{MC} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 = b^2 - ab$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 = (2b-a)^2 \Rightarrow a\sqrt{5} = 2b-a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^2}{b^2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra

$$\begin{aligned} \tan^2 36^\circ \cdot \tan^2 72^\circ &= \frac{(4a^2 - b^2)(4b^2 - a^2)}{a^2 b^2} \\ &= \left(4\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \left(4\frac{b^2}{a^2} - 1\right) = (5 - 2\sqrt{5})(5 + 2\sqrt{5}) = 5. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \tan 36^\circ \cdot \tan 72^\circ = \sqrt{5}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Đình Lộc, 9C, THCS Vĩnh Tường; Lê Chí Hùng, 9A, THCS Tuân Chính; **Bùi Thị Ngọc Mai**, 8A1, Phan Văn Tín, Hoàng Thị Ánh, Nguyễn Văn Hậu, 9A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** Phan Quốc Hưng, 9A1, THCS Lâm Thao; **Hải Phòng:** Lê Đức Tiến, 9A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiên An; **Hà Nội:** Bùi Văn Duy, 9A, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; Dương Tú Anh, 8C, THCS Đa Tốn, Gia Lâm; **Thanh Hóa:** Nguyễn Hồng Hạnh, 9C, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa; **Nam Định:** Trịnh Thị Việt Hà, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh; **TT-Huế:** Hà Thúc Huy, Lớp 7/5, THCS Phan Sào Nam; **Khánh Hòa:** Vũ Ngọc Cương, 9⁶, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Quảng Ngãi:** Phạm Đình Thuyền, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T6/391.** Giải phương trình

$$3x^4 - 4x^3 = 1 - \sqrt{(1+x^2)^3} \quad (1)$$

Lời giải. Cách 1

$$(1) \Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 = (1 - \sqrt{1+x^2})(2+x^2 + \sqrt{1+x^2})$$

$$\Leftrightarrow x^2(3x^2 - 4x) = \frac{-x^2(2+x^2 + \sqrt{1+x^2})}{1 + \sqrt{1+x^2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left(3x^2 - 4x + \frac{2+x^2 + \sqrt{1+x^2}}{1 + \sqrt{1+x^2}} \right) = 0.$$

Nhận thấy

$$3x^2 - 4x + \frac{2+x^2 + \sqrt{1+x^2}}{1 + \sqrt{1+x^2}}$$

$$= 3 \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)^2 + 5x^2 + 2}{6(1 + \sqrt{1+x^2})} > 0$$

với mọi x .

Do đó $(1) \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Cách 2. Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số không âm, ta có

$$\left(1 + \frac{3}{2}x^2\right) + \left(1 + \frac{3}{2}x^2\right) + 1 \geq 3\sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}x^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+x^2)^3} \geq 1 + \frac{3}{2}x^2 \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho bốn số không âm có

$$x^4 + 2x^4 + x^2 + \frac{1}{2}x^2 \geq 4\sqrt[4]{x^{12}} \geq 4x^3.$$

Suy ra $3x^4 + \frac{3}{2}x^2 \geq 4x^3 \quad (3)$

Cộng theo vế của (2) và (3), biến đổi được

$$3x^4 - 4x^3 \geq 1 - \sqrt{(1+x^2)^3} \quad (4)$$

Đẳng thức ở (4) xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Phương trình trên còn có thể giải bằng cách đặt ẩn phụ $t = \sqrt{1+x^2}$; hoặc sử dụng đạo hàm và xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + \sqrt{(1+x^2)^3} - 1$ trên đoạn $\left[0; \frac{4}{3}\right]$; hoặc sử dụng BĐT Becnoulli, ...

2) Bài toán có rất nhiều bạn tham gia giải song đa số lời giải còn quá dài dòng, đánh giá còn phức tạp. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và chặt chẽ:

Hà Nội: Phan Văn Kiên, 10A3 Toán, THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội; **Thái Bình:** Trần Quang Đại, Đinh Thị Nho, 10 Toán, Nguyễn Thị Thu Mai, 11 Toán, THPT chuyên Thái Bình, Tạ Bá Trung, 11A1, THPT Đông Thụy Anh; **Hải Dương:** Nguyễn Ngọc Thiện, 10A1, THPT Thanh Miện I, Bùi Huy Hoàng, 10A2, THPT Kim Thành I; **Phú Thọ:** Nguyễn Quốc Hùng, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thế Tùng, 9A1, THCS Yên Lạc, Lê Văn Trọng, 10A2, THPT Đội Cấn; **Nam Định:** Phùng Minh Phương, 10 Toán 2, THPT Lê Hồng Phong, Trần Quang Huy, 10A1, THPT A Hải Hậu; **Thanh Hóa:** Nguyễn Minh Hiếu, 11A3, THPT Hậu Lộc I, Lê Sĩ Bảo, 11A3, THPT Lê Lợi, Lê Phú Cường, 10A3, THPT Lê Văn Huru; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, Nguyễn Duy Hải, 11A7, THPT Đô Lương I; Nguyễn Thị Quỳnh Trang, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Hoàng Danh Thắng, 10A1, THPT Quỳnh Lưu III, Đặng Hữu Trọng, 11A1, THPT Quỳnh Hợp II; **Hà Tĩnh:** Lê Tuấn Dũng, Phạm Thị Thu Hoài, 10T2, Phan Huỳnh Đức, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Ninh Bình:** Vũ Thanh Tùng, 12 Toán, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Quảng Trị:** Nguyễn Trường Sinh, Nguyễn Anh Quốc, Lê Thái

Son, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong; **Bình Định:** Nguyễn Thị Bạch Tuyết, 10T, Lê Anh Tú, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** Khổng Hữu Tiệp, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre, Ngô Thúy Kiều, 12/1, THPT Nguyễn Đình Chiểu; **Vũng Tàu:** Phùng Thanh Huy, 12TA7, THPT Vũng Tàu; **An Giang:** Trương Đàm Thái Vinh, 10A1, THPT Châu Văn Liêm; **Long An:** Bùi Lê Mạnh Hùng, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T7/391.** Có tồn tại hay không một đa thức $P(x)$ bậc 2010 sao cho $P(x^2 - 2010)$ chia hết cho $P(x)$?

Lời giải. Xét đa thức $P(x) = (x+a)^{2010}$, thế thì

$$P(x^2 - 2010) = (x^2 - 2010 + a)^{2010}$$

$$= (x^2 - a^2 + a^2 + a - 2010)^{2010}$$

$$= ((x+a)(x-a) + (a^2 + a - 2010))^{2010}.$$

Nếu $a^2 + a - 2010 = 0$ hay $a = \frac{-1 \pm \sqrt{8041}}{2}$ thì

$P(x^2 - 2010) = (x+a)^{2010}(x-a)^{2010}$ chia hết cho $P(x) = (x+a)^{2010}$. Vậy tồn tại đa thức

$$P(x) = \left(x + \frac{-1 + \sqrt{8041}}{2}\right)^{2010} \quad \text{hoặc}$$

$$P(x) = \left(x + \frac{-1 - \sqrt{8041}}{2}\right)^{2010} \quad \text{thỏa mãn } P(x^2 - 2010)$$

chia hết cho $P(x)$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Tất cả các bạn đều làm theo cách trên. Một số bạn đưa ra nhận xét: Có thể thay 2010 trong đầu bài bằng một số nguyên dương n bất kỳ để được bài toán tổng quát hơn. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

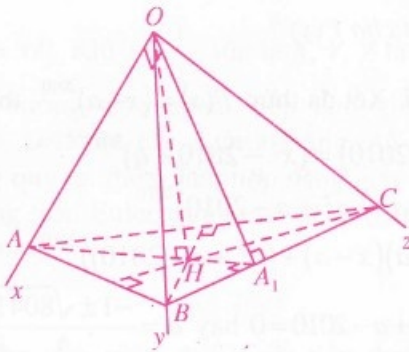
Thái Bình: Đinh Thị Nho, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Hải Dương:** Đồng Xuân Bách, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP Hải Dương; **Hà Nam:** Đinh Hữu Anh Khoa, 10A1, THPT chuyên Hà Nam; **Phú Thọ:** Nguyễn Quốc Hùng, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Đặng Quang Tuấn, 9C, THCS Vĩnh Tường, Dương Phước Thọ, 9A, THCS Lập Thạch; **Lê Văn Trọng,** Nguyễn Đức Anh, 10A2, THPT Đội Cấn; **Thanh Hoá:** Trịnh Văn Tam, Lê Văn Tuấn, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** Trần Thanh Huyền, 10 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** Lương Việt Chương, 10 TL, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T8/391.** Giả sử $Oxyz$ là một tam diện vuông ở O và A, B, C thứ tự là ba điểm thay đổi trên các cạnh Ox, Oy, Oz sao cho tam giác ABC có diện tích S không đổi cho trước. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác OBC, OCA, OAB . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{S_1}{S + 2S_1} + \frac{S_2}{S + 2S_2} + \frac{S_3}{S + 2S_3}.$$

Lời giải



Trước tiên ta sẽ chứng minh $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.
Thật vậy, gọi H là trực tâm tam giác ABC thì $OH \perp mp(ABC)$. Giả sử AH cắt BC tại A_1 thì do $BC \perp OH$ và $BC \perp AA_1$ nên $BC \perp mp(OAA_1) \Rightarrow BC \perp OA_1$. Sử dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông OAA_1 với OH là đường cao ứng với cạnh huyền AA_1 , ta có $OA_1^2 = AA_1 \cdot HA_1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{4} OA_1^2 \cdot BC^2 = \left(\frac{1}{2} AA_1 \cdot BC \right) \left(\frac{1}{2} HA_1 \cdot BC \right).$$

$$\text{Suy ra } S_1^2 = S \cdot S_{HBC} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } S_2^2 = S \cdot S_{HAC} \quad (2) \quad S_3^2 = S \cdot S_{HAB} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) với lưu ý rằng tam giác ABC nhọn, ta có $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$.

$$\begin{aligned} \text{Ta thấy } 3 - 2P &= \frac{S}{S + 2S_1} + \frac{S}{S + 2S_2} + \frac{S}{S + 2S_3} \\ &\geq \frac{9S}{3S + 2S_1 + 2S_2 + 2S_3} \end{aligned} \quad (4)$$

Lại có

$$S_1 + S_2 + S_3 \leq \sqrt{3(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)} = \sqrt{3S^2} = S\sqrt{3}.$$

Từ (4) suy ra

$$3 - 2P \geq \frac{9S}{3S + 2S\sqrt{3}} = \frac{9}{3 + 2\sqrt{3}}.$$

$$\text{Từ đó } P \leq \frac{3\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}.$$

Kết luận. Giá trị lớn nhất của biểu thức P

bằng $\frac{3\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}$, đạt được khi và chỉ khi

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{hay } OA = OB = OC = \sqrt{\frac{2S\sqrt{3}}{3}}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Tất cả đều giải đúng. Xin nêu tên một số bạn có lời giải gọn hơn cả.

Hà Nội: Nguyễn Văn Quý, 11A1 Toán, Nguyễn Trọng Lương, 11T, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Đức Anh, 10A1, THPT Đội Cấn, Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Kỳ, 11 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh, Nguyễn Thế Nam Huy, 11A0, THPT Yên Phong I; **Hải Dương:** Nguyễn Tuấn Dũng, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** Lê Quang Lâm, 10T, La Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, Triệu Việt Anh, 11C1, THPT Hoàng Hóa 4, Nguyễn Minh Hiếu, 11A3, THPT Hậu Lộc I; **Nghệ An:** Nguyễn Huy Hoàng, 10A1, Khối THPT chuyên, ĐH Vinh, Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, Nguyễn Duy Hải, Nguyễn Khắc Linh, Hồ Sỹ Trung, 11A7, THPT Đô Lương I, Đặng Hữu Trọng, 11A1, THPT Quỳnh Hợp 2; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Đồng Tháp:** Nguyễn Trường Thịnh, 11T, THPT Thành phố Cao Lãnh; **Phú Yên:** Phan Minh Trí, 11 Toán, THPT Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa, Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Bình Định:** Nguyễn Hùng Cường, 11A1, THPT An Nhơn II, Nguyễn Thị Bạch Tuyết, 10T, Lương Việt Chương, 10T-L, Lê Anh Tú, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** Ngô Mỹ Tiên, Võ Minh Trí, 11T, THPT chuyên Bến Tre; **Tiền Giang:** Đỗ Quang Bình, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Ngọc Quang, 10SN1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T9/391.** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\min \left\{ \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}; \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \right\} \geq$$

$$\geq \max \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}; \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right\}.$$

Lời giải. Vì các số a, b, c có vai trò như nhau trong bất đẳng thức (BĐT) trên, do đó BĐT trên đúng tương đương với cả hai BĐT sau đúng:

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad (1)$$

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$$2 \cdot \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{ab}{c^2} \cdot \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{bc}{a^2}} = 3 \cdot \frac{b}{c}.$$

$$\text{Tương tự } 2 \cdot \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \geq 3 \cdot \frac{c}{a} \text{ và } 2 \cdot \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} \geq 3 \cdot \frac{a}{b}.$$

Cộng theo về ba BĐT trên ta có BĐT (1).

BĐT (2) cũng được chứng minh tương tự theo cách đó

$$\frac{a^2}{bc} + 2 \cdot \frac{b^2}{ca} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc} \cdot \frac{b^2}{ca} \cdot \frac{b^2}{ca}} = 3 \cdot \frac{b}{c},$$

$$\frac{b^2}{ca} + 2 \cdot \frac{c^2}{ab} \geq 3 \cdot \frac{c}{a}; \quad \frac{c^2}{ab} + 2 \cdot \frac{a^2}{bc} \geq 3 \cdot \frac{a}{b}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Về kỹ thuật, bài toán trên khá đơn giản. Chỉ có vấn đề đáng nói: rất ít bạn học sinh nhận xét được vai trò của a, b, c trong bài toán là như nhau. Nếu không có nhận xét đó thì các bạn phải chứng minh cả bốn BĐT, mà thực chất từng cặp các BĐT đó là một. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: Vũ Nhật Khánh, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Đình Lộc, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Hà Nội:** Lê Minh Phúc, 9A5, THCS Giảng Võ; **Hải Dương:** Nguyễn Ngọc Thiện, Phạm Đức Vượng, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Thanh Hóa:** Hoàng Văn Hiệp, 10B2, THPT Triệu Sơn II; **La Hồng Quân**, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Thế Tiến, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Quảng Trị:** Nguyễn Hữu Ánh, 10A1, THPT TX. Quảng Trị.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/391.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số mà trong mỗi số đó đều chứa một số lẻ chữ số 1 và một số chẵn chữ số 2 (với n là số nguyên dương cho trước) ?

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Trọng Lượng, 11T, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội).

Ta tính xem với mỗi số k lẻ cố định có bao nhiêu số có n chữ số ($n \geq k$) trong đó có k chữ số 1 và 2. Gọi số các số đó là $a_k(n)$.

+ **Công đoạn 1.** Chọn k trong n vị trí để đặt chữ số 1 và 2. Có C_n^k cách.

+ **Công đoạn 2.** Chọn i vị trí (i lẻ, $i \leq k$) để đặt chữ số 1; với $k - i$ vị trí còn lại đặt chữ số 2.

$$\text{Có } \sum_{\substack{i \leq k \\ i \text{ lẻ}}} C_k^i = \frac{(1+1)^k - (1-1)^k}{2} = 2^{k-1}.$$

+ **Công đoạn 3.** Trong $n - k$ vị trí còn lại, mỗi vị trí đặt một trong ba chữ số 3, 4, 5. Có 3^{n-k} cách.

Vậy theo quy tắc nhân $a_k(n) = C_n^k 2^{k-1} 3^{n-k}$.

Vậy số các số thỏa mãn điều kiện đề bài là

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\substack{k \text{ lẻ} \\ k \leq n}} a_k(n) = \sum_{\substack{k \text{ lẻ} \\ k \leq n}} C_n^k 2^{k-1} 3^{n-k} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \text{ lẻ} \\ k \leq n}} C_n^k 2^k 3^{n-k} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(3+2)^n - (3-2)^n}{2} \right) = \frac{5^n - 1}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

◀ **Nhận xét.** 1) Bạn Lê Anh Tú, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định và bạn Vũ Thanh Tùng, 12T, THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình đã thiết lập hệ thức truy hồi $A_{n+1} = A_n + 5^n$, từ đó cũng dẫn đến

$$A_n = \frac{5^n - 1}{n}.$$

2) Ngoài các bạn Lượng, Tú, Tùng, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** Trần Trọng Huy, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Lê Văn Tuấn, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Trần Khánh Hưng, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T11/391.** Cho dãy số (x_n) , $n = 0, 1, \dots$

$$\text{được xác định bởi } x_0 = \alpha \text{ và } x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{x_n + 1}},$$

$n = 0, 1, \dots$ và α là số cho trước lớn hơn 1.

Tìm lim x_n .

TOÁN HỌC
Số 395 (5-2010) Tuổi trẻ 23

Lời giải. (Theo bạn Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, Phú Yên).

Nhận xét rằng với $x_0 = \alpha > 1$ thì $x_n > 0$ và do vậy $x_n > 1$, với $n = 1, 2, \dots$. Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x+1}}, \text{ suy ra } x_{n+1} = f(x_n). \text{ Ta có}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2(x+1)^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x+1}}} < 0$$

$$\text{và } |f'(x)| < \frac{1}{8}, \text{ với } x > 1.$$

Vì $f(1) > 1$ và $f(2) < 2$ nên phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $(1; 2)$. Gọi nghiệm đó là L . Theo định lí Lagrange thì với mọi $L \neq x > 1$ tồn tại $c > 1$ sao cho

$$\frac{f(x) - f(L)}{x - L} = f'(c).$$

$$\text{Suy ra } |f(x) - f(L)| < \frac{1}{8} |x - L|$$

$$\text{và } |f(x_n) - f(L)| < \frac{1}{8} |x_n - L|$$

$$\text{hay } |x_{n+1} - L| < \frac{1}{8} |x_n - L| < \dots < \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} |x_0 - L|.$$

Từ đây suy ra $\lim x_n = L$.

Vậy ta cần xác định L . Giải phương trình

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{x+1}} = x$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{25}{27},$$

ta thu được một nghiệm trong $(1; 2)$ là

$$L = \sqrt{\frac{43}{54} + \frac{\sqrt{177}}{18}} + \sqrt{\frac{43}{54} - \frac{\sqrt{177}}{18}} - \frac{1}{3}.$$

Vậy

$$\lim x_n = \sqrt{\frac{43}{54} + \frac{\sqrt{177}}{18}} + \sqrt{\frac{43}{54} - \frac{\sqrt{177}}{18}} - \frac{1}{3}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hà Nội: Nguyễn Văn Thắng, 10A1, Nguyễn Văn Quý, 11A1, THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Ninh Văn Quý, 12A, THPT Kim Thành; **Ninh Bình:** Vũ Thanh Tùng, 12T, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Hà Tĩnh:** Phạm Thị Thúy Hằng, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** Lương Việt Khương, Trần Đoàn Tiến, Lê Văn Tú, Nguyễn Hữu Hoàng, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** Trần Khánh Hưng, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Long An:** Nguyễn Quốc Bảo, 11A, THPT chuyên Long An; **Bến Tre:** Không Hữu Hiệp, 11T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/391.** Cho tam giác ABC có các đường cao AA', BB', CC' đồng quy tại H. Chứng minh rằng

$$\frac{HA}{HA'} + \frac{HB}{HB'} + \frac{HC}{HC'} + 6\sqrt{3} \geq 6 + \frac{a}{HA'} + \frac{b}{HB'} + \frac{c}{HC'}.$$

Lời giải. Để các biểu thức trong hai vế của BĐT xác định cần có điều kiện tam giác ABC không vuông. Có hai trường hợp:

Trường hợp 1. Tam giác ABC nhọn (h.1).

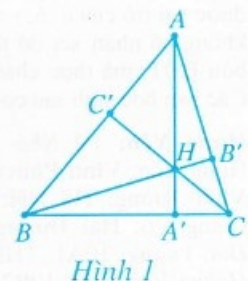
Bổ đề. Nếu ba số $x, y, z > 0$ và $x + y + z = xyz$ thì
 $(x-1)(y-1)(z-1) \leq 6\sqrt{3} - 10.$

Chứng minh. Vì $x, y, z > 0$ nên $x < x + y + z = xyz$. Do đó $yz > 1$, tương tự $zx > 1$; $xy > 1$. Suy ra trong ba số x, y, z không thể có hơn một số nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Nếu trong ba số x, y, z có đúng một số nhỏ hơn hoặc bằng 1 thì

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq 0 \leq 6\sqrt{3} - 10.$$

Nếu ba số x, y, z cùng lớn hơn 1 thì đặt $u = x - 1$; $v = y - 1$; $w = z - 1$ ($u > 0$; $v > 0$; $w > 0$).



Hình 1

Vì $x + y + z = xyz$, nên

$$u + v + w + 3 = (u + 1)(v + 1)(w + 1).$$

Khai triển và rút gọn đẳng thức trên ta có

$$uvw + vw + wu + uv = 2. \text{ Đặt } t = \sqrt[3]{uvw} > 0, \text{ ta có}$$

$$t^3 + 3t^2 = uvw + 3\sqrt[3]{u^2v^2w^2} \leq uvw + vw + wu + uv = 2 \Rightarrow t^3 + 3t^2 - 2 \leq 0.$$

Suy ra $t \leq \sqrt{3} - 1$. Vậy

$$(x-1)(y-1)(z-1) = uvw = t^3 \leq (\sqrt{3}-1)^3 = 6\sqrt{3}-10.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$.

Trở lại giải bài toán.

Từ $\tan A \cdot \overline{HA} + \tan B \cdot \overline{HB} + \tan C \cdot \overline{HC} = 0$, suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{HA}{HA'} + \frac{HB}{HB'} + \frac{HC}{HC'} \\ &= \frac{\tan B + \tan C}{\tan A} + \frac{\tan C + \tan A}{\tan B} + \frac{\tan A + \tan B}{\tan C} \\ &= \frac{\tan B + \tan C}{-\tan(B+C)} + \frac{\tan C + \tan A}{-\tan(C+A)} + \frac{\tan A + \tan B}{-\tan(A+B)} \\ &= -1 + \tan B \tan C - 1 + \tan C \tan A - 1 + \tan A \tan B \\ &= -3 + (\tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B) \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý rằng $\widehat{BHC'} = \widehat{CHB'} = \widehat{BAC}$;
 $\widehat{CHA'} = \widehat{AHC'} = \widehat{ABC}$; $\widehat{AHB'} = \widehat{BHA'} = \widehat{ACB}$,

ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a}{HA'} + \frac{b}{HB'} + \frac{c}{HC'} \\ &= \frac{A'C + A'B}{HA'} + \frac{B'A + B'C}{HB'} + \frac{C'B + C'A}{HC'} \\ &= 2(\tan A + \tan B + \tan C) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta thấy BĐT cần chứng minh tương đương với

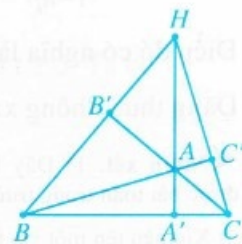
$$\begin{aligned} & 2(\tan A + \tan B + \tan C) \\ & - (\tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B) \\ & \leq 6\sqrt{3} - 9 \quad (3) \end{aligned}$$

Từ bỏ đề, suy ra

$$(\tan A - 1)(\tan B - 1)(\tan C - 1) \leq 6\sqrt{3} - 10.$$

Khai triển và rút gọn BĐT trên, chú ý rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$, suy ra BĐT (3) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Trường hợp 2. Tam giác ABC tù (h.2) (theo bạn Nguyễn Văn Quý, 11A, THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội).



Hình 2

Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{BAC} > 90^\circ$.

Đặt $\cot \widehat{BHC} = m$; $\cot \widehat{HBC} = n$; $\cot \widehat{HCB} = p$

thì $m, n, p > 0$ và $np + pm + mn = 1$.

Vì $\widehat{BAA'} = \widehat{HCB}$ nên

$$\frac{HA}{HA'} = 1 - \frac{AA'}{HA'} = 1 - \frac{BA'}{HA'} \cdot \frac{AA'}{BA'} = 1 - np.$$

Vì $\widehat{BAB'} = \widehat{BHC}$; $\widehat{HAB'} = \widehat{HBC}$ nên

$$\frac{HB}{HB'} = 1 + \frac{BB'}{HB'} = 1 + \frac{BB'}{AB'} \cdot \frac{AB'}{HB'} = 1 + \frac{n}{m}.$$

Tương tự có $\frac{HC}{HC'} = 1 + \frac{p}{m}$.

Vì $\widehat{CAA'} = \widehat{HBC}$; $\widehat{BAA'} = \widehat{HCB}$ nên

$$\frac{a}{HA'} = \frac{CA'}{HA'} + \frac{BA'}{HA'} = n + p.$$

Vì $\widehat{HAB'} = \widehat{HBC}$ nên $\frac{b}{HB'} = \frac{CB'}{HB'} \cdot \frac{AB'}{HB'} = \frac{1}{m} - n$.

Tương tự có $\frac{c}{HC'} = \frac{1}{m} - p$.

BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & 1 - np + 1 + \frac{n}{m} + 1 + \frac{p}{m} + 6\sqrt{3} \\ & \geq 6 + n + p + \frac{1}{m} - n + \frac{1}{m} - p \\ & \Leftrightarrow 1 - np + \frac{n+p}{m} + 6\sqrt{3} - 4 \geq \frac{2}{m} \quad (4) \end{aligned}$$

Ta thấy $6\sqrt{3}-4>2$; $m=\frac{1-np}{n+p}$ và $np<1$, nên

$$1-np+\frac{n+p}{m}+6\sqrt{3}-4>0+\frac{(n+p)^2}{1-np}+2$$

$$=\frac{(n-1)^2+(p-1)^2+2(n+p)}{1-np}\geq\frac{2(n+p)}{1-np}=\frac{2}{m}.$$

Điều đó có nghĩa là BDT (4) đúng.

Đẳng thức không xảy ra. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán khó, có ít bạn giải được bài toán trong trường hợp tam giác ABC tù.

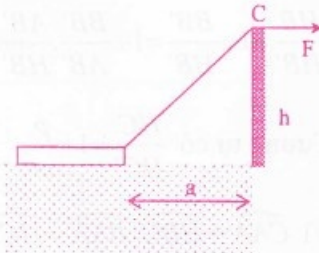
2) Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tương đối tốt.

Vĩnh Phúc: Phan Xuân Trường, 10A, THPT Nguyễn Viết Xuân, Vĩnh Tường; **Hà Nội:** Lê Duy Hoàng, 10T3, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Nguyễn Tuấn Dũng, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Ninh Bình:** Vũ Thanh Tùng, 12T, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Thanh Hoá:** Lê Thành Công, 11B₁₀, THPT Hậu Lộc II; **Nghệ An:** Nguyễn Thế Anh, 11A₁, THPT chuyên ĐH Vinh; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Bình Định:** Nguyễn Thị Bạch Tuyết, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

★ Bài L1/391.

Một chiếc bè có khối lượng m được kéo không vận tốc ban đầu từ khoảng cách a vào bờ nhờ một sợi dây vắt qua ròng rọc ở trên bờ. Cho độ cao của bờ là h . Dây được kéo với lực không đổi là F (hình vẽ). Tìm vận tốc của bè khi nó còn cách bờ một khoảng là b ($b < a$). Giả thiết bè không bị nhấc lên, lực cản của nước không đổi là F_c . Với $F_c < \frac{Fb}{\sqrt{b^2+h^2}}$.



của nước không đổi là F_c . Với $F_c < \frac{Fb}{\sqrt{b^2+h^2}}$.

Lời giải. Công của ngoại lực tác dụng lên bè gồm công của lực cản F_c của nước và công của lực kéo F . Kí hiệu A_c là công của lực cản F_c . Nếu tính từ khi bè bắt đầu chuyển động cho đến khi nó cách bờ một khoảng b thì lực cản đã thực hiện một công là

$$A_c = -F_c(a-b).$$

Kí hiệu A_k là công của lực kéo F . Nếu tính từ khi bè bắt đầu chuyển động cho đến khi nó cách bờ một khoảng b thì công của lực kéo bằng lực kéo nhân với chiều dài của phần dây đi qua điểm C trên bờ, tức là

$$A_k = F.s = F(\sqrt{a^2+h^2} - \sqrt{b^2+h^2}).$$

Theo định lí động năng, vì bè chuyển động không vận tốc ban đầu, ta có

$$\Delta W_d = \frac{mv^2}{2} - 0 = A_k + A_c.$$

$$\text{hay } \frac{mv^2}{2} = F(\sqrt{a^2+h^2} - \sqrt{b^2+h^2}) - F_c(a-b)$$

Từ đây dễ dàng tìm được

$$v = \sqrt{\frac{2(F(\sqrt{a^2+h^2} - \sqrt{b^2+h^2}) - F_c(a-b))}{m}}$$

Từ điều kiện $F_c < \frac{Fb}{\sqrt{b^2+h^2}}$, ta thấy

$$F_c < \frac{Fb}{\sqrt{b^2+h^2}} = T_n \text{ (ở đây } T_n \text{ là hình chiếu}$$

của lực căng của dây theo phương ngang). T_n đóng vai trò như lực phát động, lực này lớn hơn lực cản nên bè chuyển động với gia tốc dương. Vì vậy biểu thức của v tìm được ở trên luôn thỏa mãn. $\square$

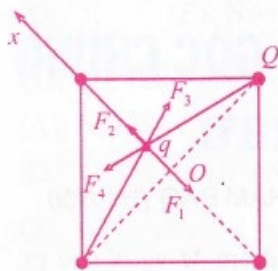
◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Yên Bái: Nguyễn Nam Minh, 10 Lí, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Phúc:** Phùng Văn Duy, 11A3, THPT Đội Cấn; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, 10 Lí, THPT chuyên Hà Nam; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Đông, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN VĂN THUẬN

★ **Bài L2/391.** Bốn điện tích giống nhau Q được đặt cố định ở bốn đỉnh hình vuông có cạnh bằng a trong chân không. Tại tâm O của hình vuông trên đặt một điện tích điểm q (cùng dấu với Q) có khối lượng m . Dịch chuyển q một đoạn nhỏ theo phương của một đường chéo rồi thả nhẹ. Chứng tỏ rằng điện tích q sẽ dao động điều hoà. Tìm chu kì dao động. Bỏ qua tác dụng của trọng lực.

Lời giải. Chọn trục toạ độ như hình vẽ.



Xét khi điện tích q ở toạ độ x rất nhỏ. Kí hiệu nửa độ dài của đường chéo của hình vuông là $b \left(b = \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$. Hợp lực tác dụng lên điện tích q là

$$\begin{aligned} F_x &= F_2 + 2F_3 \cos(\widehat{OqQ}) - F_1 \\ &= \frac{kqQ}{(b+x)^2} + 2 \frac{kqQ}{b^2+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} - \frac{kqQ}{(b-x)^2} \\ &= \frac{kqQ}{b^2 \left(1 + \frac{x}{b}\right)^2} + 2 \frac{kqQ}{b^2+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} - \frac{kqQ}{b^2 \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2} \\ &\approx \frac{kqQ}{b^2} \left(1 - 2\frac{x}{b}\right) + 2 \frac{kqQ}{b^3} x - \frac{kqQ}{b^2} \left(1 + 2\frac{x}{b}\right) \\ &= -2 \frac{kqQ}{b^3} x. \end{aligned}$$

Theo định luật II Newton ta có

$$\begin{aligned} mx'' &= -2 \frac{kqQ}{b^3} x, \text{ với } b = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ ta được} \\ x'' + 2 \frac{kqQ}{mb^3} x &= 0 \Leftrightarrow x'' + 4\sqrt{2} \frac{kqQ}{ma^3} x = 0 \end{aligned}$$

Phương trình này chứng tỏ điện tích q dao động điều hoà với chu kì:

$$T = \pi a \sqrt{\frac{ma}{kqQ\sqrt{2}}}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Vũ Quang Minh, 11 Lí, THPT Chuyên;
Hà Nam: Đinh Ngọc Hải, 10 Lí, THPT Chuyên; **Nam Định:** Lê Quang Trung, 11 Lí, THPT Chuyên Lê Hồng Phong; **Bình Định:** Phạm Minh Thái, 11 Lí, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Bùi Đức Khánh, 11 Lí, THPT Chuyên Lê Khiết; **Long An:** Trần Thùy Anh, 12A, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** Trần Thế Tấn, 12A3, Nguyễn Long Phước Đường, 11A3, THPT Chuyên Lí Tự Trọng; **Vũng Tàu:** Phùng Thanh Huy, 12T7, THPT Vũng Tàu; **Cà Mau:** Dương Thái Dương, 12T2, THPT Chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T7/395. Let ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) be a triangle where A , B , C satisfying the condition

$$\cos A + \cos B = 2\cos C.$$

Prove the inequality

$$c \geq \frac{8}{9} \max\{a, b\}.$$

When does the equality occur?

T8/395. Solve the equation:

$$x^{\log_7 11} + 3^{\log_7 x} = 2x.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/395. Solve the equation

$$\sqrt[3]{3x+4} = x^3 + 3x^2 + x - 2.$$

T10/395. Let X be the subset of the set $\{1, 2, 3, \dots, 2010\}$ satisfying the following two conditions:

- $|X| = 62$.
- For every $x \in X$, there exist $a, b \in X \cup \{0; 2011\}$ (a and b differ from x) such that $x = \frac{a+b}{2}$.

Prove that there exist two elements x, y in X such that $|x-y| \geq 11$ and $\frac{x+y}{2}$ is not in X .

T11/395. Make a torus-shaped chessboard by first identifying a pair of opposite edges of an $n \times n$ chessboard to get a cylinder and then identifying the opposite bases of the resulting cylinder. Prove that it is possible to place n queens on this torus chessboard so that none of them are able to capture any other using the standard chess queen's moves if and only if $(n, 6) = 1$. (A queen can capture another if they share the same row, column or diagonal.)

T12/395. Let $ABCDEF$ be an inscribed hexagon, AC is parallel to DF and BE is the circumdiameter. AB cuts EF at M and BC cuts DE at N ; I is the intersection point of AN and CM . Prove that EI is perpendicular to AC .

Translated by LE MINH HA

Nhiều cách giải cho một bài toán

VỀ MỘT BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG của hai đường chéo nhau

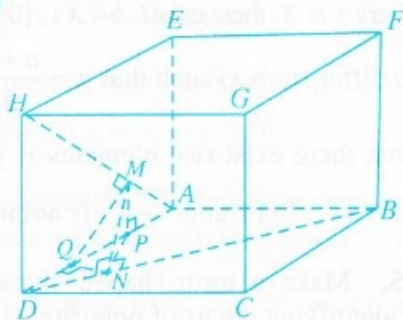
PHẠM BẢO (Hà Nội)

Trong chương trình ôn thi tuyển sinh vào các trường Đại học, bài toán "xác định và tính độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau" thường là khó. Sau đây là bốn cách giải của cùng một bài toán về vấn đề này. Hi vọng bài viết sẽ giúp ích cho các em học sinh trong việc tìm lời giải các bài tương tự.

BÀI TOÁN. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh a . Hãy xác định và tính độ dài đường vuông góc chung của AH và DB .

• Phương pháp tổng hợp

Cách 1



Hình 1

Trên hình 1: M trên AH ; N trên DB ; MN là đường vuông góc chung của AH và DB . Từ M kẻ $MP \perp AD$ thì $MP \perp (ABCD)$ và $PN \perp DB$ (theo định lý ba đường vuông góc). Tương tự, kẻ $NQ \perp AD$ thì $NQ \perp (ADHE)$ và $QM \perp AH$. Hai tam giác AMQ và DNP vuông cân nên

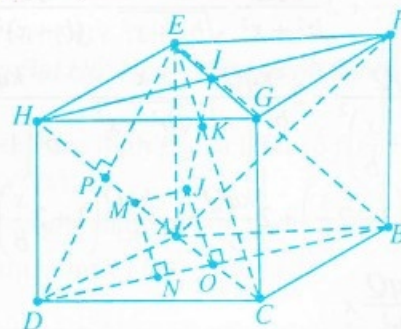
$DQ = QN = QP = PM = PA = \frac{a}{3}$. Lại có

$$PN = \frac{a\sqrt{2}}{3}; MN^2 = MP^2 + PN^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Cách xác định vị trí các điểm M và N suy ra từ hai điểm P và Q chia đoạn DA thành ba phần bằng nhau. $\square$

Cách 2. (h. 2)



Hình 2

Ta có $HF \parallel DB$ và tam giác AHF đều. Mặt phẳng (AHF) qua AH và song song với DB . Gọi I, O, P theo thứ tự là tâm của các hình vuông $EFGH, ABCD, AEHD$. CE cắt mp (AHF) tại K là giao của AI và CE . Dễ thấy K là trọng tâm của tam giác AHF . $FI \perp EG$ nên $FI \perp (EGCA)$ do đó $FI \perp CK$. Tương tự $HP \perp (CDE)$ nên $HP \perp CK$. Suy ra $CK \perp (AHF)$. Từ O kẻ $OJ \parallel CK$. Từ J kẻ $JM \parallel HI$. Từ M kẻ $MN \parallel JO$. Tứ giác $OJMN$ là hình chữ nhật và MN là đường vuông góc chung của

AH và DB . Ta có $MN = OJ = \frac{1}{2}CK =$

$$\frac{1}{3}CE = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Còn } NO = MJ = \frac{1}{3}HI = \frac{1}{6}BD$$

$$\text{và } DN = \frac{1}{3}DB; \frac{AM}{AH} = \frac{AJ}{AI} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = \frac{1}{3}AH.$$

Từ đó suy ra cách xác định vị trí các điểm M, N . $\square$

• Phương pháp vector

Cách 3. (xem h. 2 hoặc bạn đọc tự vẽ hình).

Lấy A làm gốc và ba vector cơ sở là $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\overrightarrow{AH} = \vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AH} = k(\vec{a} + \vec{c})$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{DN} = m \overrightarrow{DB} = m(\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a}) - k(\vec{a} + \vec{c}) = (1-m-k)\vec{a} + m\vec{b} - k\vec{c}$

Vì $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ nên

$$((1-m-k)\vec{a} + m\vec{b} - k\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = ma^2 + (k+m-1)a^2 = 0 \Rightarrow 2m+k-1=0 \quad (1)$$

Vì $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ nên

$$((1-m-k)\vec{a} + m\vec{b} - k\vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = (1-m-k)a^2 - ka^2 = 0 \Rightarrow 1-m-2k=0 \quad (2)$$

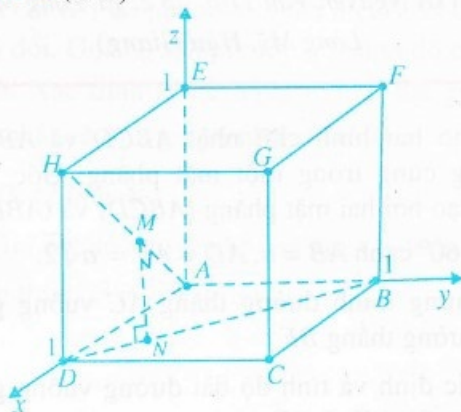
Từ (1) và (2) ta thu được $m = k = \frac{1}{3}$, do đó

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}, \quad MN^2 = \frac{a^2}{3}, \quad MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Từ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ ta có cách xác định vị trí các điểm M, N. $\square$

• Phương pháp tọa độ

Cách 4. (h. 3)



Hình 3

Lấy góc tam diện vuông đỉnh A của hình lập phương làm hệ trục chuẩn Axyz. Các đỉnh D, B, E lần lượt nằm trên Ax, Ay, Az. Để tiện tính toán lấy cạnh hình lập phương $a = 1$. Tọa độ

các đỉnh $A(0; 0; 0)$, $D(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $C(1; 1; 0)$, $G(1; 1; 1)$, $F(0; 1; 1)$, $H(1; 0; 1)$.

Vì $\overrightarrow{AH} = (1; 0; 1)$ nên PT dạng tham số của

$$AH \text{ là } \begin{cases} x = t_1 \\ y = 0 \\ z = t_1 \end{cases} \quad (t_1 \in \mathbb{R}).$$

Lại có $\overrightarrow{DB} = (-1; 1; 0)$ nên PT dạng tham số

$$\text{của đường thẳng } BD \text{ là } \begin{cases} x = -t_2 + 1 \\ y = t_2 \\ z = 0 \end{cases} \quad (t_2 \in \mathbb{R}).$$

Do $MN \perp DB$ và $MN \perp AH$ nên vector chỉ phương của $\overrightarrow{MN}$ là

$$\vec{u}_{MN} = [\vec{u}_{AH}, \vec{u}_{DB}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1; -1; 1).$$

$M \in AH$, tọa độ của $M(t_1; 0; t_1)$, $N \in DB$, tọa độ của $N(-t_2+1; t_2; 0)$; $\overrightarrow{MN} = (-t_2+1-t_1; t_2; -t_1)$,

$\overrightarrow{MN} = k\vec{u}_{MN} = (-k; -k; k)$ ta có hệ PT

$$\begin{cases} -t_2 - t_1 + 1 = -k \\ t_2 = -k \\ -t_1 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ t_1 = \frac{1}{3} \\ t_2 = \frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Do đó}$$

$$M\left(\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right), N\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0\right), \overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right);$$

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{khi } a = 1).$$

Với a tùy ý thì $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. $\square$

Nhận xét. Trong bốn cách giải trên: Cách 1 đơn giản nhất vì đã tận dụng được tính chất của hai mặt phẳng vuông góc và định lý về ba đường thẳng vuông góc. Cách 2 sử dụng quy tắc: Muốn xác định được đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau phải xác định được mặt phẳng qua đường này và



Giúp nhớ MỘT SỐ HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

Xin giới thiệu một số câu thơ, câu về chúng tôi đã sưu tầm mong giúp các bạn dễ nhớ một số hệ thức lượng giác. Bạn nào tìm thấy những vần thơ hay nữa xin góp thêm để cùng tham khảo.

HỆ THỨC

- 1) $\sin = \text{đối} / \text{huyền}$
 $\cos = \text{kề} / \text{huyền}$
 $\tan = \text{đối} / \text{kề}$
 $\cotang = \text{kề} / \text{đối}$
- 2) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 1/2$
 $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$
- 3) $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$
- 4) $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$

CÂU VỀ

Sao đi học
Cứ khóc hoài
Thôi đừng khóc
Có kẹo đây

Sin ba, cos sáu, nửa phần
Cos ba, sin sáu, nửa lần căn ba.

Tang tổng (hiệu) thì lấy tổng (hiệu) tang
Chia một trừ (cộng) với tích tang ra liền.

Tang ta cộng với tang mình
Bằng sin tổng đôi lứa chia cos mình cos ta.

MAI THY

(1A Nguyễn Văn Trỗi, ấp 2, TT Long Mỹ,
Long Mỹ, Hậu Giang)

song song với đường kia. Từ đó tìm đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và suy ra cách xác định đường vuông góc chung. *Cách 3* chọn hệ vectơ cơ sở gồm gốc và ba vectơ không đồng phẳng, chỉ rõ tính chất cơ bản của hệ đó. Trong bài này ta chọn gốc là A và ba vectơ cơ sở là $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ với tính chất $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$. *Cách 4* cũng tương tự như *cách 3*, ngoài việc chọn hệ tọa độ nên "Số hóa" các dữ kiện để việc tính toán được dễ dàng.

Sau đây là một số bài tập để bạn đọc thử nghiệm.

1. Cho hai hình chữ nhật ABCD và ABEF không cùng trong một mặt phẳng. Góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (ABCD) và (ABEF) bằng 60° cạnh $AB = a$, $AD = AF = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng BF.

b) Xác định và tính độ dài đường vuông góc chung của AC và BF.

2. Cho hình chóp S.ABC. Đáy ABC là tam giác vuông tại B. Góc $\widehat{ACB} = 60^\circ$, cạnh $AC = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy. Cạnh SB tạo với đáy một góc 60° . Xác định và tính độ dài đường vuông góc chung của AB và SC; AC và SB.

Cuộc thi

MỪNG THĂNG LONG - HÀ NỘI TRÒN 1000 TUỔI

LTS. Các bạn thân mến!

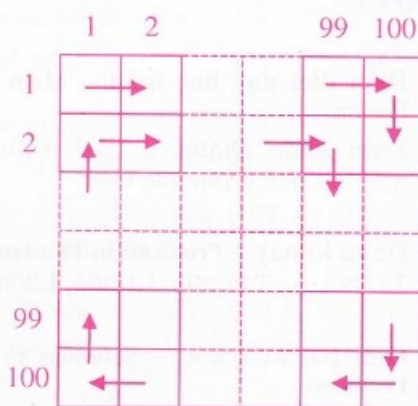
Để hướng tới Đại Lễ kỉ niệm 1000 năm Thăng Long – Hà Nội, Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tổ chức cuộc thi **Mừng Thăng Long – Hà Nội tròn 1000 tuổi** cho các bạn yêu toán trên khắp miền đất nước. Cuộc thi được chia làm ba đợt, mỗi đợt gồm ba bài đố vui, lần lượt đăng trên các số báo tháng 5, 6, 7 năm 2010 và thời hạn nhận bài giải mỗi đợt theo thứ tự là ngày 15 của các tháng 7, 8, 9 năm 2010. Đáp án và nhận xét của từng đợt lần lượt đăng trên các số tháng 8, 9, 10 năm 2010. Trên số báo tháng 10/2010, sẽ đăng danh sách các bạn đoạt giải cuộc thi. Chúc các bạn may mắn.

ĐỢT 1

Bài 1. XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ

Cho một bảng kẻ ô gồm 100 hàng được đánh số thứ tự từ trên xuống dưới và 100 cột được đánh số thứ tự từ trái qua phải (hình vẽ).

Xếp các chữ cái của cụm từ THĂNG LONG vào các ô còn trống theo hình xoáy tròn ốc bắt đầu từ ô (1, 1) liên tục từ trái sang phải và từ trên xuống dưới (theo chiều mũi tên). Hỏi chữ G cuối cùng của cụm từ thứ 1000 nằm ở hàng nào và cột nào?



PHẠM VĂN KHÁNH

Bài 2. NGÀY NÀO TRONG TUẦN LỄ?

Bằng suy luận (không xem lịch), bạn hãy cho biết ngày Đại Lễ kỉ niệm 1000 năm Thăng Long - Hà Nội là ngày nào trong tuần lễ? Biết rằng ba ngày chủ nhật trong tháng 10 năm 2010 được ghi bởi ba số nguyên tố.

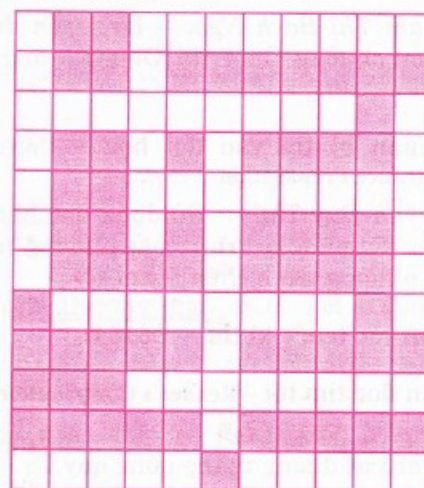
THANH LOAN



Bài 3. NHỮNG TÊN GỌI CỦA HÀ NỘI

Nhân dịp kỉ niệm 1000 năm Thăng Long – Hà Nội, mời các bạn tìm hiểu về những tên gọi của Hà Nội được ghi trong sử sách từ thời xưa đến nay.

Các bạn hãy điền một số tên gọi đó theo hàng ngang và cột dọc vào các ô trống ở hình bên và cho biết thêm mỗi tên gọi đó có từ thời kì nào?



VÂN KHANH



Tap chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 395 (5.2010)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Cao Quốc Cường – Hệ phương trình có chứa tham số.
- 3 **Đề thi vào lớp 10 chuyên toán Trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước năm học 2009 – 2010.**
- 4 **Phạm Thị Bạch Ngọc** – Lễ tuyên dương khen thưởng Cuộc thi Olympic toán Hà Nội mở rộng 2010.
- 6 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Huỳnh Duy Thủy – Sử dụng đạo hàm để giải các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình chứa tham số.
- 9 **Thử sức trước kì thi – Đề số 1**
- 10 **Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contributions**
Nguyễn Văn Linh – Một cách chứng minh các đường thẳng đồng quy.
- 13 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Trần Xuân Đường – Cách tính đối với một lớp tích phân đặc biệt.
- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/395, ..., T12/395, L1/395, L2/395.
- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 391.
- 28 **Nhiều cách giải cho một bài toán**
Phạm Bảo – Về một bài toán xác định đường vuông chung của hai đường chéo nhau.
- 30 **Câu lạc bộ – Math Club**
- 31 **Cuộc thi Mừng Thăng Long – Hà Nội tròn 1000 tuổi. Đợt 1.**

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG

Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ

Mỹ thuật : MINH THƠ

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

XIN TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU CÙNG BẠN ĐỌC



☀ PHIÊN BẢN *Chiêu đời đô* CỦA VUA LÝ CÔNG UẨN

Đây là ấn phẩm chào mừng Đại lễ Kỷ niệm 1000 năm Thăng Long - Hà Nội của NXBGD Việt Nam. Phiên bản được trình bày bằng ba thứ tiếng trên chất liệu giấy dó kích thước 21 x 100 cm. Nguyên bản tiếng Hán được thể hiện bởi nét bút tài hoa của nhà thư pháp Nguyễn Văn Bách. Mặt còn lại là bản dịch Tiếng Việt và Tiếng Anh. Bản Chiêu sử dụng hoa văn lá đề và hoa văn rồng thời Lý. Phiên bản được thiết kế, trình bày đẹp, có hộp đựng rất trang trọng.

Giá loại có hộp đựng là 200 000 đồng, loại có túi đựng là 136 000 đồng.



☀ TẬP BẢN ĐỒ LỊCH SỬ - TRUNG HỌC CƠ SỞ

Đồng chủ biên: **Phan Ngọc Liên, Trịnh Đình Tùng, Nguyễn Thế Hiệp, Nguyễn Quý Thao, Nguyễn Thị Hồng Loan.**

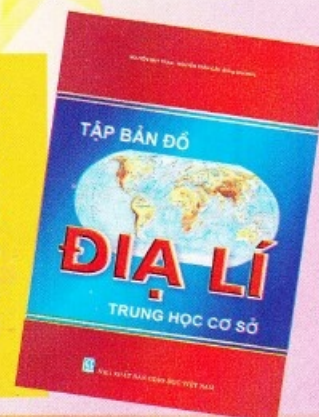
Sách gồm 80 trang, khổ 42 x 59 cm, giá 600 000 đồng.

☀ TẬP BẢN ĐỒ ĐỊA LÍ - TRUNG HỌC CƠ SỞ

Đồng chủ biên: **Nguyễn Quý Thao, Nguyễn Trần Cầu.**

Sách gồm 80 trang, khổ 42 x 59 cm, giá 550 000 đồng.

Đây là hai ấn phẩm chất lượng cao được xuất bản chào mừng Kỷ niệm 20 năm thành lập Công ty CP Bản đồ và Tranh ảnh Giáo dục của NXBGD Việt Nam. Với tập thể tác giả có kinh nghiệm và tâm huyết, hai tập bản đồ được biên soạn công phu, bố cục và sắp xếp bám sát chương trình và sách giáo khoa hiện hành, được trình bày khoa học, hấp dẫn, sinh động trên giấy couché 200g/m² kích thước 42 x 59cm; giúp các thầy cô giáo, học sinh, sinh viên vừa nắm được một cách hệ thống kiến thức Lịch sử, Địa lí, vừa giúp việc khai thác bản đồ trong giảng dạy và học tập được thuận lợi và hiệu quả.



Các thầy cô giáo, các em học sinh và bạn đọc cả nước có thể tìm mua các ấn phẩm trên tại các nhà sách của NXBGD Việt Nam (<http://www.nxbgd.vn>) và Công ty CP Bản đồ và Tranh ảnh Giáo dục (<http://www.bandotranhanh.vn>).

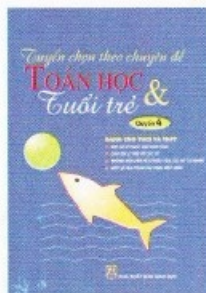
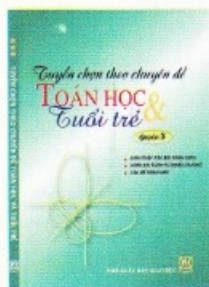
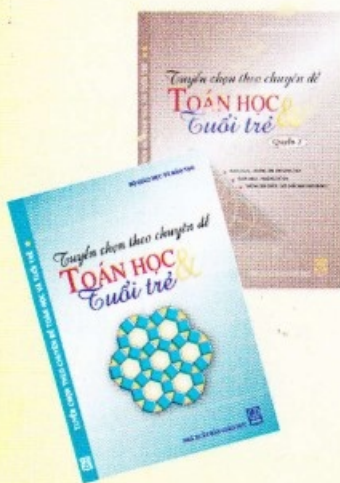


CÁC SẢN PHẨM CỦA TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ VÀ TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

PHÁT HÀNH TRONG NĂM 2010

<https://www.facebook.com/letrungkienmath>

<https://sites.google.com/site/letrungkienmath>



- **TUYỂN CHON THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ,**
Quyển 1 - Tập thể tác giả, 300 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 47.500 đồng
Quyển 2 - Tập thể tác giả, 252 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 30.000 đồng
Quyển 3 - Tập thể tác giả, 252 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 34.000 đồng
Quyển 4 - Tập thể tác giả, 200 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 38.500 đồng
Quyển 5 - Tập thể tác giả, 240 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 42.500 đồng

● **ẤN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ**

Tác giả : Lê Quốc Hán, 164 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 21.500 đồng

● **CÁC BÀI THI OLYMPIC TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VIỆT NAM 1990-2006**

Tập thể tác giả, 284 trang, khổ 17 x 24cm. Giá bìa : 39.500 đồng

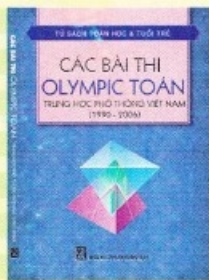
● **45 ĐỀ THI TOÁN CHON LỘC CẤP TRUNG HỌC CƠ SỞ (2005-2008)**

Tập thể tác giả, 180 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 29.500 đồng

● **CÁC BÀI TOÁN CHON LỘC 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

Tập thể tác giả, 300 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa : 48.500 đồng

● **TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ TRON BỘ NĂM 2009.** Giá bìa : 88.000 đồng



Các bạn có thể mua các sản phẩm trên tại Tòa soạn, các cơ sở bưu điện, các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương, các cửa hàng sách của NXBGD Việt Nam. Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ: **TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI**

Để biết thêm chi tiết xin liên hệ với Tòa soạn: ĐT - FAX : 04.35121606. Email : tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT05M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010

In tại Công ty CP In Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2010

Gia : 6000 đồng

Sáu nghìn đồng