



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
4 2010
Số 394

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 47

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

GẶP MẶT XUÂN CANH DẦN 2010

Ba Vì, ngày 06 tháng 03 năm 2010



Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2009

KỠ THI QUỐC GIA LẦN THỨ X

GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY

NĂM HỌC 2009 - 2010

Kì thi Quốc gia giải toán trên máy tính cầm tay lần thứ X dành cho các môn Toán, Lí, Hóa, Sinh thuộc cấp học THCS, THPT, Bồ Túc THPT do Bộ GD & ĐT tổ chức vào 2 ngày 19 và 20/3/2010 vừa qua tại 4 hội đồng khu vực thi: Hòa Bình, Nam Định, Hà Tĩnh và Lâm Đồng với sự tham gia của 1620 học sinh của 63 tỉnh, thành phố trên cả nước.

Công ty CP XNK Bình Tây và Công ty CP Điện Tử Việt Nhật là 2 đơn vị tài trợ về tổ chức và giải thưởng với tổng kinh phí tài trợ là 1110000000 đồng. Trong đó:

- **Tổng giá trị giải thưởng** là 301900000 đồng gồm 718 giải cá nhân với tổng trị giá là 250900000 đồng, 12 giải toàn đoàn cho 4 khu vực với tổng giá trị là 26000000 đồng và 50 giải thưởng cho giáo viên có học sinh đoạt giải Nhất với tổng giá trị là 25000000 đồng.
- **Ngoài phần tài trợ bằng tiền, nhà tài trợ còn tài trợ tặng phẩm bằng hiện vật** cho Ban Tổ chức, các đoàn và toàn thể học sinh tham dự thi như: Huy chương, Cờ lưu niệm, Kỷ niệm chương, máy tính,... Tổng kinh phí tài trợ cho 4 khu vực của 2 đơn vị tài trợ là 800000000 đồng.

Mỗi thí sinh đoạt giải Nhất, Nhì, Ba ngoài giải thưởng bằng tiền mặt còn được Bộ GD & ĐT trao huy chương Vàng, Bạc, Đồng và cấp Giấy chứng nhận. Bên cạnh đó, Công ty CP XNK Bình Tây còn tặng thưởng cho giáo viên có học sinh dự thi môn Toán đoạt giải Nhất và cấp học bổng 2 triệu đồng cho mỗi thí sinh dự thi môn Toán đoạt giải nếu trúng tuyển đại học trong kì thi tuyển sinh năm 2010.

Máy tính sử dụng trong kì thi năm nay là các loại máy tính được phép sử dụng trong các kì thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh vào đại học gồm: Casio fx-500MS/ES, Casio fx-570MS/ES, Casio fx-500VN Plus và máy tính Vinacal vn-500MS, vn-570MS và Vinacal 570MS New.

Kết quả toàn đoàn cụ thể như sau:

Hội đồng thi KV Hòa Bình: Hòa Bình (giải Nhất), Bắc Giang (giải Nhì), Thái Nguyên (giải Ba).

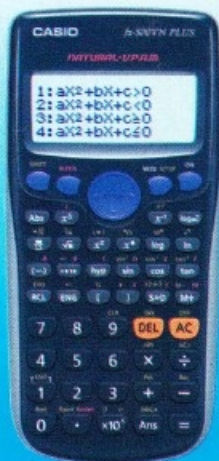
Hội đồng thi KV Hà Tĩnh: Hà Tĩnh (giải Nhất), Đà Nẵng (giải Nhì), Huế (giải Ba).

Hội đồng thi KV Nam Định: Nam Định (giải Nhất), Ninh Bình (giải Nhì), Vĩnh Phúc (giải Ba).

Hội đồng thi KV Lâm Đồng: TP.Hồ Chí Minh (giải Nhất), Lâm Đồng (giải Nhì), Đồng Nai (giải Ba).

Máy tính thế hệ mới CASIO fx-500VN PLUS

được BỘ GD & ĐT cho phép mang vào phòng thi



276
CHỨC NĂNG

ĐƯA BIỂU THỨC VÀO NHƯ ĐƯỢC VIẾT TRONG SÁCH GIÁO KHOA

Máy fx-500VN PLUS có đầy đủ tính năng của máy fx-500ES, ngoài ra máy fx-500VN PLUS còn có thêm các chức năng mới như:

- Tính toán số thập phân tuần hoàn
- Nghiệm của phương trình và bất phương trình hiển thị dạng $\sqrt{\quad}$ (Nếu có)
- Giải bất phương trình bậc 2 và bậc 3
- Hàm RanInt#(a,b)
- Tính tỉ số (ratio)
- Số biến nhớ là 8 biến (fx-500ES chỉ có 6 biến)

BITEX

Nhà phân phối MT CASIO & Văn phòng phẩm  **Horse**
Website: www.casiovn.com - www.bitex.edu.vn



PARABOL – MỘT ĐƯỜNG CONG tuyệt đẹp

NGUYỄN ĐỨC HẢO
(GV THCS Lam Sơn, TP. Hồ Chí Minh)

Với yêu cầu giảm tải kiến thức nên chương trình và sách giáo khoa (SGK) Toán 9 về nội dung Hàm số và đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) chỉ có 2 tiết Lý thuyết và 2 tiết Luyện tập. Đa số các bài toán trong SGK và sách bài tập chú trọng vào kỹ năng vẽ đồ thị; giải thích các hiện tượng vật lý; các công thức hình học liên quan đến công thức $y = ax^2$.

Qua bài viết này, tác giả giới thiệu với bạn đọc một số tính chất đặc biệt của parabol (P), giúp các em thấy được những gì "Có thể em chưa biết".

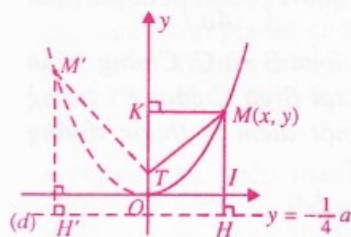
I. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA PARABOL

1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm

$T\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ ($a > 0$) và đường thẳng $d: y = -\frac{1}{4a}$.

Gọi $M(x, y)$ là điểm sao cho $MT = MH$ với H là hình chiếu của M lên d .

- Tìm biểu thức liên hệ giữa x và y (h. 1)



Hình 1

Vẽ $MK \perp Oy$.

Ta có

$$KT^2 = (OK - OT)^2$$

$$= \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2;$$

$$MH = MI + IH$$

$$= y + \frac{1}{4a} \quad (MH \text{ cắt } Ox \text{ tại } I).$$

$$\text{Ta có } MH^2 = MT^2 \Leftrightarrow MH^2 = MK^2 + KT^2$$

$$\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{y}{a} = x^2 \Leftrightarrow y = ax^2.$$

b. **Kết luận.** Tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình $y = ax^2$ nên điểm M nằm trên đồ thị của hàm số $y = ax^2$ (P).

2. Xét bài toán ngược lại

Với điểm M bất kỳ trên (P): $y = ax^2$ và H là hình chiếu của M trên d ta sẽ chứng minh $MT = MH$. Thật vậy

$$MT^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 = x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2$$

$$= a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2} = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2,$$

$$MH^2 = \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2.$$

$$\text{Do đó } MT^2 = MH^2 \Leftrightarrow MT = MH.$$

Ý nghĩa hình học của Parabol. Parabol là quỹ tích các điểm M có khoảng cách đến điểm T cố định bằng khoảng cách đến một đường thẳng (d) cố định.

II. ĐƯỜNG THẲNG ĐẶC BIỆT

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho (P): $y = ax^2$ và điểm $A(m; n)$.

1. **Viết phương trình đường thẳng (D) qua A và tiếp xúc với (P)**

PT đường thẳng (D) qua A với hệ số góc k có dạng $y - n = k(x - m) \Leftrightarrow y = kx - km + n$.

Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (D) là $ax^2 = kx - km + n \Leftrightarrow ax^2 - kx + km - n = 0$.

Ta có $\Delta = k^2 - 4amk + 4an$. Để (D) tiếp xúc (P) thì $\Delta = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4amk + 4an = 0$ (*)

PT (*) là PT bậc hai ẩn k có nghiệm khi
 $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2m^2 - 4an \geq 0 \Leftrightarrow a^2m^2 \geq an$ (**)

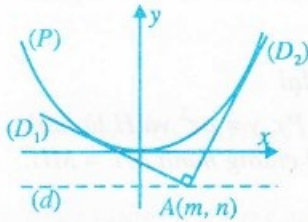
Với giá trị của a, m, n cho trước thỏa mãn (**), ta sẽ tìm được hai nghiệm

$$k_1 = 2am + \sqrt{\Delta'}; \quad k_2 = 2am - \sqrt{\Delta'}$$

của PT (*) và xác định được hai tiếp tuyến:

$$(D_1): y = k_1x - k_1m + n; \quad (D_2): y = k_2x - k_2m + n.$$

2. Tính giá trị của n theo a để hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau



Hình 2

Ta có $(D_1) \perp (D_2)$

$$\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 4an = -1$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{1}{4a}.$$

Vậy A nằm trên đường thẳng d :

$y = -\frac{1}{4a}$ không phụ thuộc vào giá trị của m (h. 2).

Đảo lại, với $A\left(m; -\frac{1}{4a}\right)$, ta chứng minh có thể kẻ hai tiếp tuyến qua A , vuông góc với nhau đến $(P): y = ax^2$.

Thật vậy, với $n = -\frac{1}{4a}$ thì PT (*) ở phần 1) trở thành $k^2 - 4amk - 1 = 0$. PT này luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $k_1 \cdot k_2 = -1$ nên ta có hai tiếp tuyến $(D_1) \perp (D_2)$.

Do đó: Đường thẳng $(d): y = -\frac{1}{4a}$ chính là quỹ tích của những điểm A từ đó ta kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc nhau đến $(P): y = ax^2$.

III. TAM GIÁC VUÔNG KÌ DIỆU

1. Tiếp tục đi tìm tọa độ hai tiếp điểm B và C của hai tiếp tuyến vuông góc đến (P) và chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua 1 điểm cố định.

Xét PT hoành độ giao điểm của (D_1) và (D_2) với $(P): y = ax^2$ ở trên:

$$\bullet \text{ (PT1) } ax^2 - k_1x + k_1m + \frac{1}{4a} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x^2 - 4ak_1x + 4ak_1m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x^2 - 4ak_1x + k_1^2 = 0 \Leftrightarrow (2ax - k_1)^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = x_B = \frac{k_1}{2a} = \frac{2am + \sqrt{\Delta'}}{2a} \quad (\Delta' = 4a^2m^2 + 1).$$

$$\bullet \text{ (PT2) } ax^2 - k_2x + k_2m + \frac{1}{4a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_C = \frac{k_2}{2a} = \frac{2am - \sqrt{\Delta'}}{2a}.$$

Do đó $x_B + x_C = 2m$.

Đường thẳng BC có hệ số góc p thỏa mãn

$$y_B - y_C = p(x_B - x_C) \Rightarrow ax_B^2 - ax_C^2 = p(x_B - x_C) \\ \Rightarrow p = a(x_B + x_C) = 2am.$$

Vậy PT đường thẳng BC là

$$y - y_B = p(x - x_B) \Leftrightarrow y - ax_B^2 = 2am(x - x_B)$$

$$\Leftrightarrow y = 2amx + ax_B^2 - 2amx_B$$

$$= 2amx + \frac{k_1^2 - 4amk_1}{4a} = 2amx + \frac{1}{4a}.$$

Suy ra BC luôn đi qua điểm $T\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ cố định.

2. Bài toán đảo

Đường thẳng (t) đi qua $T\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ cắt parabol

$(P): y = ax^2$ tại hai điểm B và C . Chứng minh rằng hai tiếp tuyến tại B và C của (P) vuông góc với nhau tại một điểm A thuộc đường

$$\text{thẳng } d: y = -\frac{1}{4a}.$$

Đường thẳng (t) có hệ số góc p thỏa mãn

$$y - y_T = p(x - x_T) \Leftrightarrow y - \frac{1}{4a} = px \Leftrightarrow y = px + \frac{1}{4a}.$$

PT hoành độ giao điểm của (t) và (P) là

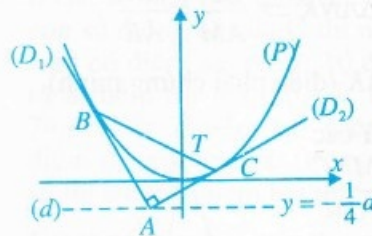
$$ax^2 - px - \frac{1}{4a} = 0, \text{ có } \Delta = p^2 + 1 > 0.$$

Suy ra (t) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt B ,

$$C \text{ với } x_B = \frac{p + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x_C = \frac{p - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

PT đường thẳng (D_1) qua B và tiếp xúc (P) có hệ số góc q thoả mãn

$$y - y_B = q(x - x_B) \Rightarrow y = qx - qx_B + y_B \quad (D_1)$$



Hình 3

PT hoành độ giao điểm của (D_1) và (P) :

$$ax^2 - qx + qx_B - y_B = 0.$$

Vì (D_1) tiếp xúc (P) tại B nên $\Delta = 0$

$$\Leftrightarrow q^2 - 4a(qx_B - y_B) = 0$$

$$\Leftrightarrow q^2 - 4aqx_B + 4a^2x_B^2 = 0 \Leftrightarrow (q - 2ax_B)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow q = 2ax_B.$$

Chứng minh tương tự, hệ số góc của (D_2) qua C và tiếp xúc (P) là $q' = 2ax_C$ và phương trình (D_2) là $y = q'x - q'x_C + y_C$.

$$\text{Ta có } q \cdot q' = 4a^2x_B \cdot x_C = 4a^2 \left(-\frac{1}{4a^2} \right) = -1.$$

Vậy $(D_1) \perp (D_2)$ (h. 3).

Hoành độ giao điểm A của hai đường thẳng (D_1) và (D_2) thoả mãn phương trình

$$2ax_B \cdot x_A - 2ax_B^2 + y_B = 2ax_C \cdot x_A - 2ax_C^2 + y_C$$

$$\Leftrightarrow x_A = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{p}{2a}. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$y_A = qx_A - qx_B + y_B, \text{ (với } q = 2ax_B)$$

$$\Leftrightarrow y_A = 2ax_B \left(\frac{x_B + x_C}{2} \right) - 2ax_B^2 + ax_B^2 = -\frac{1}{4a}$$

$$\Rightarrow A \left(\frac{p}{2a}; -\frac{1}{4a} \right).$$

Vậy A nằm trên đường thẳng $(d): y = -\frac{1}{4a}$.

Trong bài toán trên, nếu khai thác thêm ta sẽ chứng minh được:

a) $AT \perp BC$.

b) Gọi H và K là giao điểm của (D_1) và (D_2) với trục hoành thì tứ giác $AHTK$ là hình chữ nhật.

c) Hai điểm đối xứng của T qua (D_1) và (D_2) cũng nằm trên đường thẳng $y = -\frac{1}{4a}$.

Điểm $T \left(0; \frac{1}{4a} \right)$ gọi là tiêu điểm và đường

thẳng đặc biệt $(d): y = -\frac{1}{4a}$ gọi là đường chuẩn của $(P): y = ax^2$.

IV. PARABOL – MỘT ĐƯỜNG CONG TUYỆT ĐẸP

Lời tựa hấp dẫn này (xem bài Đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a > 0$), SGK Toán 9 trang 33) có gọi bạn đọc tìm tòi được điều gì tuyệt đẹp trên đường cong đó không? Bài toán tổng quát sau đây giúp cho bạn đọc khám phá được một điểm đặc biệt đối với đường cong đó.

1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol $(P): y = ax^2$ ($a > 0$). Qua gốc tọa độ, vẽ hai tia vuông góc nhau cắt (P) tại A và B (hai tia này không trùng với hai trục tọa độ). Chứng minh rằng khi góc vuông AOB quay xung quanh O thì đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Cách giải

Nếu PT đường thẳng OA là $y = kx$ thì PT đường thẳng OB là $y = -\frac{1}{k}x$ ($k \neq 0$)

$$\text{Từ đó tìm được } A \left(\frac{k}{a}; \frac{k^2}{a} \right); B \left(-\frac{1}{ak}; \frac{1}{ak^2} \right).$$

Khi đó tọa độ A, B thoả mãn PT

$$y = \frac{k^2 - 1}{k}x + \frac{1}{a}.$$

Nên đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định $I \left(0; \frac{1}{a} \right)$.

Đừng vội tự mãn. Không dừng nơi đây.

(Xem tiếp trang 31)

Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên toán

TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN

NĂM HỌC 2009 - 2010

(Đề thi đã đăng trên THPT số 393, tháng 3 năm 2010)

Câu 1. a) Lũy thừa bậc 3 hai vế PT đã cho ta có

$$9 + 3\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{7-x} (\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{7-x}) = 27.$$

$$\text{Suy ra } 9 + 9\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{7-x} = 27$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(7-x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 6 \text{ (thỏa mãn PT).}$$

Tập nghiệm của PT đã cho là $S = \{-1; 6\}$.

b)) Đặt $\frac{2}{y} = z$, ta có hệ
$$\begin{cases} 2+3x=z^3 \\ 2+3z=x^3. \end{cases}$$

Trừ theo vế hai PT của hệ trên ta được

$$3(x-z) = z^3 - x^3 \Leftrightarrow (x-z)(x^2 + xz + z^2 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - z = 0 \text{ (vì } x^2 + xz + z^2 + 3 > 0).$$

Thay vào PT thứ nhất của hệ ta có

$$x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) = 0$$

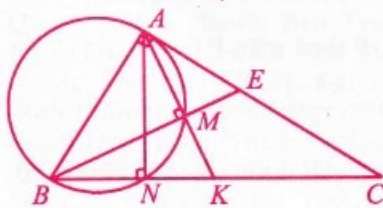
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 2. \text{ Suy ra hệ PT đã cho có hai nghiệm } (x; y) \text{ là } (-1; -2) \text{ và } (2; 1).$$

Câu 2. Giả sử PT đã cho có một nghiệm nguyên là $x = k$, dễ thấy $k \neq 1$. Ta có

$$k^2 - ak + a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{k^2 + 2}{k-1}.$$

Vậy với $a = \frac{k^2 + 2}{k-1}$, $k \neq 1$, $k \in \mathbb{Z}$ thì PT đã cho có nghiệm nguyên.

Câu 3. (h. 1)



Hình 1

Vì $CA \perp AB$ suy ra CA tiếp xúc với đường tròn đường kính AB. Hai tam giác AME và ANK có

$$\widehat{AME} = \widehat{ANK} = 90^\circ, \text{ mặt khác}$$

$$\widehat{MAE} = \widehat{ABE} = \widehat{MBN} = \widehat{NAM}.$$

$$\text{Suy ra } \triangle AME \sim \triangle ANK \Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{AK}{AE}$$

$$\Rightarrow AN \cdot AE = AM \cdot AK \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Câu 4. (h. 2) • Vì các tứ giác AMIN, BMNC nội tiếp nên $\widehat{AIM} = \widehat{ANM} = \widehat{ABC}$ (1)

Suy ra tứ giác BOIM nội tiếp.

• Từ (1) suy ra

$$\triangle AMI \sim \triangle AOB$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AO} = \frac{AI}{AB}$$

$$\Rightarrow AI \cdot AO = AM \cdot AB \text{ (2)}$$

Gọi E, F là giao điểm của AO với đường tròn (O) (E nằm giữa A và O). Tương tự, từ (1) suy ra $\triangle AME \sim \triangle AFB$, suy ra $AM \cdot AB = AE \cdot AF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$$AI \cdot AO = AE \cdot AF = (AO - OE)(AO + OF)$$

$$= AO^2 - R^2 = 3R^2 \text{ (do } AO = BC = 2R)$$

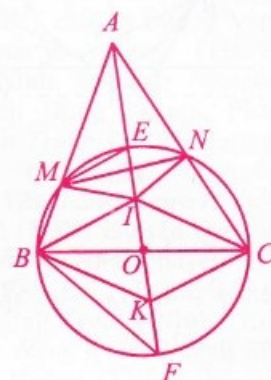
$$\text{dẫn đến } AI = \frac{3R}{2} \Rightarrow IO = \frac{R}{2}.$$

Lại có $\triangle AOB \sim \triangle COK \Rightarrow OA \cdot OK = OB \cdot OC = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R}{2}$. Do đó $OI = OK$. Vậy tứ giác BICK là hình bình hành.

Câu 5. a) (Bạn đọc tự vẽ hình) Giả sử O nằm ngoài miền tam giác ABC. Không giảm tính tổng quát, giả sử A và O nằm về hai phía của đường thẳng BC. Gọi K là giao điểm của AO và đường thẳng BC. Kẻ đường cao AH, ta có

$$AH \leq AK < AO < 1. \text{ Suy ra } S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} < 1$$

(vì $BC < 2$). Mâu thuẫn.



Hình 2

TIN TỨC

GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM năm 2009

HÀ HUY KHOÁI

(Viện Toán học Việt Nam)

Hội Toán học Việt Nam đã quyết định trao **Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2009** cho giáo viên và các học sinh sau đây:

I. GIÁO VIÊN

Thầy giáo **Dương Châu Đình**, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**. Sinh ngày 1/1/1964.

Thành tích:

- Tham gia giảng dạy THPT chuyên từ năm 1992, tại một vùng còn rất nhiều khó khăn.
- Từ năm 1995 đến nay có 19 học sinh đoạt giải Quốc gia.
- Từ năm 1994 đến nay là giáo viên giỏi cấp tỉnh, được tặng nhiều Bằng khen của Sở GD – ĐT về thành tích bồi dưỡng học sinh giỏi môn Toán.

II. HỌC SINH

1. Hà Khương Duy, Dân tộc Nùng, học sinh Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội (hiện là sinh viên Khoa Toán-Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội).

Thành tích: Huy chương Vàng Olympic Toán học Quốc tế năm 2009, với số điểm 39/42, xếp thứ 4 trên tổng số 547 thí sinh đến từ 104 nước và vùng lãnh thổ.

2. Phạm Đức Hùng, học sinh lớp 11 (hiện đang học lớp 12), Trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng.

Thành tích: Huy chương Vàng Olympic Toán học Quốc tế năm 2009.

3. Lê Duy Thanh, học sinh lớp 11 (hiện đang học lớp 12), Trường THPT chuyên Lào Cai.

Thành tích: Đã vượt nhiều khó khăn, đoạt giải Ba trong Kỳ thi Học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 năm 2009.

b) Ta có $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$
 $= a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$

mà $a^3 + ab^2 \geq 2a^2b$ (theo BĐT Cauchy)

$$b^3 + bc^2 \geq 2b^2c$$

$$c^3 + ca^2 \geq 2c^2a.$$

Suy ra $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) > 0$.

Do đó $P \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$

suy ra $P \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$, ta chứng minh được $t \geq 3$.

Từ đó $P \geq t + \frac{9-t}{2t} = \frac{t}{2} + \frac{9}{2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$
 $\geq 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow P \geq 4.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4, đạt được khi $a = b = c = 1$.

THÁI VIẾT THẢO – MAI XUÂN VINH

(Sở GD-ĐT Nghệ An) giới thiệu

Số 394 (4-2010)

TOÁN HỌC
5 Tuổi Trẻ



nhưng lại ngại Hình học không gian. Xin giới thiệu một số bài toán Hình học không gian được giải bằng phương pháp tọa độ, giúp các bạn ôn thi có hiệu quả.

GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

PHÙNG HỒNG KỶN

(GV Trường THPT Phan Đình Phùng, Hà Nội)

★ **Bài toán 1.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a .

- a) Tính theo a khoảng cách giữa $A'B$ và $B'D$.
b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $BB', CD, A'D'$. Tính góc giữa MP và $C'N$.

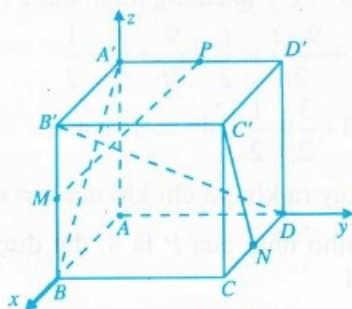
(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B năm 2002)

Hướng dẫn. a) Lập hệ trục tọa độ như hình 1. Ta có tọa độ các điểm $A(0;0;0); A'(0;0;a);$

$$B(a;0;0); B'(a;0;a); D(0;a;0); M\left(a;0;\frac{a}{2}\right);$$

$$N\left(\frac{a}{2};a;0\right); P\left(0;\frac{a}{2};a\right).$$

$$\text{Tính được } d_{(A'B, B'D)} = \frac{[\overline{A'B}, \overline{B'D}] \cdot \overline{A'B'}}{|\overline{A'B}, \overline{B'D}|} = \frac{a}{\sqrt{6}};$$



Hình 1

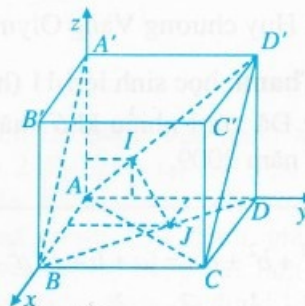
b) $\cos(MP, C'N) = |\cos(\overline{MP}, \overline{C'N})| = 0.$

Trong các đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng thường có một câu về Hình học không gian. Thực tế cho thấy nhiều thí sinh gặp khó khăn trong việc xác định các mối quan hệ giữa đường thẳng và đường thẳng, đường thẳng và mặt phẳng; xác định khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng, điểm và đường thẳng, đặc biệt là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Sử dụng phương pháp tọa độ là một giải pháp tốt để khắc phục khó khăn đó, nhất là với những học sinh giỏi đại số

★ **Bài toán 2.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Các điểm I và J lần lượt thuộc AD' và BD sao cho $AI = DJ = m$ ($0 < m < a\sqrt{2}$).

- a) Chứng minh IJ song song với mặt phẳng $(A'BCD)$.
b) Tìm m để độ dài đoạn thẳng IJ nhỏ nhất, khi đó hãy chứng minh IJ là đường vuông góc chung của AD' và BD .

Hướng dẫn. a) Lập hệ trục tọa độ như hình 2



Hình 2

$$\text{Ta có } I\left(0; \frac{m}{\sqrt{2}}; \frac{m}{\sqrt{2}}\right); J\left(\frac{m}{\sqrt{2}}; \frac{a\sqrt{2}-m}{\sqrt{2}}; 0\right)$$

$$\Rightarrow \overline{IJ}\left(\frac{m}{\sqrt{2}}; \frac{a\sqrt{2}-2m}{\sqrt{2}}; \frac{-m}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\text{Vì } \vec{n} = \vec{n}_{(A'BCD)} = (1;0;1)$$

$$\text{suy ra } \vec{n} \cdot \overline{IJ} = 0 \Rightarrow IJ \parallel \text{mp}(A'BCD).$$

b) Ta có $IJ^2 = 3m^2 - 2a\sqrt{2}m + a^2$

$$= 3 \left(m - \frac{a\sqrt{2}}{3} \right)^2 + \frac{a^2}{3} \geq \frac{a^2}{3}.$$

Ta thấy IJ nhỏ nhất khi $m = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, khi đó

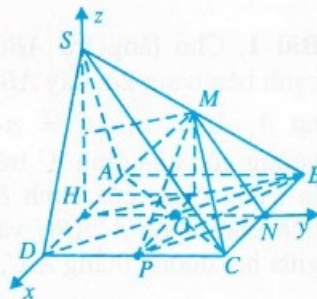
$$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AD} = 0; \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

★ **Bài toán 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SB, BC, CD . Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối A năm 2007)

Hướng dẫn

Gọi H là trung điểm AD thì SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Lập hệ trục tọa độ gốc $O \equiv H$, trục Ox chứa HD , trục Oy chứa HN , trục Oz chứa HS (h. 3). Khi đó



Hình 3

$$N(0; a; 0); P\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right); M\left(\frac{-a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right).$$

• Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ để suy ra $AM \perp BP$.

$$V_{CMNP} = \frac{1}{6} \frac{|\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{CP}|}{|\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}|} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$

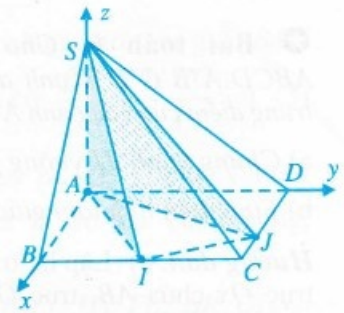
★ **Bài toán 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi I là trung điểm BC , J là điểm thuộc cạnh DC sao cho $DJ = x$. Tìm x để:

a) Hai mặt phẳng (SAI) và (SIJ) vuông góc với nhau.

b) Góc giữa hai mặt phẳng (SAI) và (SAJ) có số đo bằng 60° .

Hướng dẫn

Lập hệ trục tọa độ gốc $O \equiv A$, trục Ox chứa AB , trục Oy chứa AD , trục Oz chứa AS (h. 4).



Hình 4

a) Từ

$$SA \perp \text{mp}(ABCD)$$

$$\Rightarrow SA \perp IJ$$

$$\Rightarrow \text{mp}(SAI) \perp \text{mp}(SIJ) \Rightarrow AI \perp IJ$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0 \Rightarrow x = \frac{3a}{4}.$$

b) Để góc giữa hai mặt phẳng (SAI) và (SAJ) có số đo bằng 60° thì

$$\cos(AI, AJ) = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } x = \frac{a(\sqrt{13}-2)}{3}.$$

★ **Bài toán 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân ABC đỉnh A , $BC = a$, $SB = a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC . Tính:

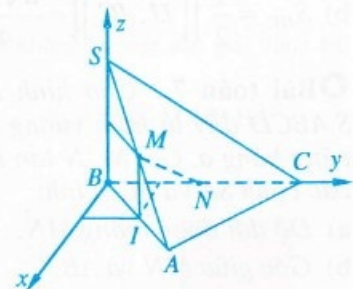
a) Độ dài đoạn thẳng MN .

b) $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MN})$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AB .

Hướng dẫn

Lập hệ trục tọa độ gốc $O \equiv B$, trục Oy chứa BC , trục Oz chứa BS (h. 5).



Hình 5

Ta có

$$M\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a}{2}\right);$$

$$N\left(0; \frac{a}{2}; 0\right); B(0; 0; 0); A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right).$$

$$a) MN = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$b) \cos(BA, MN) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

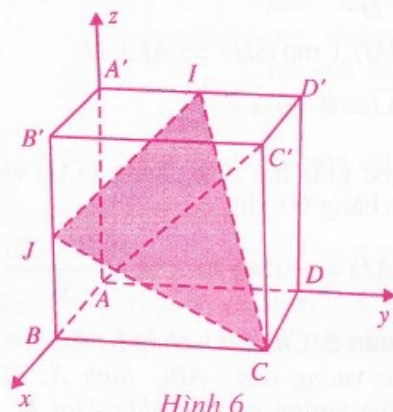
$$c) d_{(BA, MN)} = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

★ **Bài toán 6.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D'$ và BB' .

a) Chứng minh IJ vuông góc với AC' .

b) Tính diện tích tam giác IJC .

Hướng dẫn. a) Lập hệ trục tọa độ gốc $O \equiv A$, trục Ox chứa AB , trục Oy chứa AD , trục Oz chứa AA' (h. 6).



Hình 6

Ta có $I\left(0; \frac{a}{2}; a\right); J\left(a; 0; \frac{a}{2}\right)$.

Chứng minh $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AC'} = 0 \Rightarrow IJ \perp AC'$.

$$b) S_{IJC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IC}] \right| = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

★ **Bài toán 7.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên cũng bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và BC . Tính:

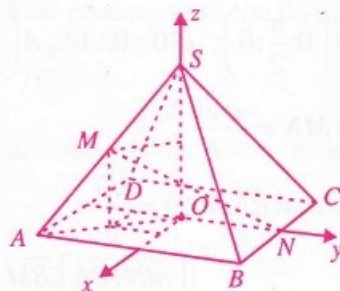
a) Độ dài đoạn thẳng MN .

b) Góc giữa MN và AB .

c) Khoảng cách giữa MN và SC .

Hướng dẫn

a) Lập hệ trục tọa độ gốc O , trục Ox vuông góc với AB , trục Oy vuông góc với BC , trục Oz chứa OS (h.7).



Hình 7

$$A\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right); B\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right); C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right);$$

$$S(0; 0; a); M\left(\frac{a}{4}; -\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}\right); N\left(0; \frac{a}{2}; 0\right).$$

$$\text{Từ đó có } MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$b) \cos(\widehat{MN, AB}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\widehat{MN, AB}) = 60^\circ.$$

$$c) d_{(MN, SC)} = \frac{|\overrightarrow{[MN, SC]} \cdot \overrightarrow{NC}|}{|\overrightarrow{[MN, SC]}|} = \frac{a\sqrt{2}(6-\sqrt{2})}{8\sqrt{6-2\sqrt{2}}}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $AA', B'C'$.

(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối A năm 2008)

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN .

(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B năm 2008)

Bài 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C'$.

(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B năm 2008)



Đổi chiều ngày DƯƠNG LỊCH và ÂM LỊCH năm CANH DẦN 2010

NGUYỄN VIỆT HẢI
(Hà Nội)

Để đổi chiều ngày Dương lịch (DL) với ngày Âm lịch (AL) và ngày tháng Can Chi trong một năm người ta thường lập bảng ghi đủ 365 ngày DL cùng với ngày AL và ngày Can Chi tương ứng, nhưng ta có thể làm được điều đó cho năm Canh Dần 2010 nhờ sử dụng các bảng trong bài viết này cùng với vài phép tính cộng trừ đơn giản. Trong bài này các năm Kỷ Sửu, Canh Dần, Tân Mão được viết tắt là KS, CD, TM.

Người ta ghép 10 Can và 12 Chi với nhau thành hệ đếm Can Chi để ghi ngày, tháng, năm. Hệ đếm này gồm tất cả 60 tên Can Chi được ghi trong Bảng 1 (nếu quá 60 thì đếm lại từ đầu), mỗi tên Can Chi cho ứng với một mã số m ($1 \leq m \leq 60$).

Bảng 1. Mã số của hệ Can Chi

1. Giáp Tý	11. Giáp Tuất	21. Giáp Thân	31. Giáp Ngọ	41. Giáp Thìn	51. Giáp Dần
2. Ất Sửu	12. Ất Hợi	22. Ất Dậu	32. Ất Mùi	42. Ất Ty	52. Ất Mão
3. Bính Dần	13. Bính Tý	23. Bính Tuất	33. Bính Thân	43. Bính Ngọ	53. Bính Thìn
4. Đinh Mão	14. Đinh Sửu	24. Đinh Hợi	34. Đinh Dậu	44. Đinh Mùi	54. Đinh Ty
5. Mậu Thìn	15. Mậu Dần	25. Mậu Tý	35. Mậu Tuất	45. Mậu Thân	55. Mậu Ngọ
6. Kỷ Ty	16. Kỷ Mão	26. Kỷ Sửu	36. Kỷ Hợi	46. Kỷ Dậu	56. Kỷ Mùi
7. Canh Ngọ	17. Canh Thìn	27. Canh Dần	37. Canh Tý	47. Canh Tuất	57. Canh Thân
8. Tân Mùi	18. Tân Ty	28. Tân Mão	38. Tân Sửu	48. Tân Hợi	58. Tân Dậu
9. Nhâm Thân	19. Nhâm Ngọ	29. Nhâm Thìn	39. Nhâm Dần	49. Nhâm Tý	59. Nhâm Tuất
10. Quý Dậu	20. Quý Mùi	30. Quý Tỵ	40. Quý Mão	50. Quý Sửu	60. Quý Hợi

1. Tìm tháng Can Chi theo tháng Âm lịch năm Canh Dần

Công thức liên hệ giữa tháng Can Chi mã số t_c với tháng t_a (AL) năm Canh Dần là

$$t_c = t_a + 14 \quad (1)$$

Do $1 \leq t_a \leq 12$ nên $15 \leq t_c \leq 26$.

★ **Thí dụ 1.** Trong năm Canh Dần tên Can Chi của tháng 4 AL là gì? Tháng mấy AL là tháng Mậu Tý?

Giải đáp. • $t_a = 4$, từ (1) có $t_c = 4 + 14 = 18$. Mã số 18 (theo Bảng 1) ứng với Tân Ty. Vậy tháng 4 năm Canh Dần là tháng Tân Ty.

• Tháng Mậu Tý có mã số $t_c = 25$, từ (1) có $t_c = 25 = t_a + 14$ suy ra $t_a = 11$, đó là tháng 11 (AL) năm Canh Dần.

2. Tìm ngày Can Chi theo ngày Âm lịch

Công thức liên hệ giữa ngày Can Chi mã số m với ngày âm lịch a ($1 \leq a \leq 30$) tháng t_a (AL) là

$$m = a + x_{t_a-1} - 60k \quad (2)$$

trong đó x_{t_a} là mã số của tháng t_a (AL) và cũng là mã số Can Chi của ngày cùng hàng ghi trong Bảng 2 (nếu $t_a = 1$ thì lấy $t_a - 1$ là 12 của năm trước đó), còn k lấy giá trị 0 hoặc 1 sao cho $1 \leq m \leq 60$.

Trong Bảng 2 cột trái a_o/t_a ghi ngày AL cuối cùng a_o của tháng t_a , còn cột phải d/t_d ghi ngày DL tương ứng với ngày AL cùng hàng. Chú ý rằng $x_{t_a+1} = a_o + x_{t_a} - 60k$ với k lấy giá trị 0 hoặc 1 sao cho $1 \leq x_{t_a+1} \leq 60$.

Bảng 2. Mã số của tháng AL

a_o/t_a	x_{t_a}	d/t_d
30/11 KS	1	14/1/2010
30/12 KS	31	13/2
30/1 CD	1	15/3
29/2	30	13/4
30/3	60	13/5
29/4	29	11/6
30/5	59	11/7
29/6	28	9/8
29/7	57	7/9
30/8	27	7/10
29/9	56	5/11
30/10	26	5/12/2010
29/11	55	3/1/2011
30/12 CD	25	2/2
30/1 TM	55	4/3

★ **Thí dụ 2.** Tên Can Chi của ngày 23/5 (AL) năm Canh Dần là gì?

Giải đáp. $a = 23$, $t_a = 5$, $x_5 = 29$ (theo bảng 2). Từ (2) có $m = 23 + 29 = 52$. Mã số 52 (theo Bảng 1) ứng với Ất Mão. Vậy ngày 23/5 (AL) Canh Dần là ngày Ất Mão.

3. Tìm ngày Can Chi theo ngày Dương lịch

Công thức liên hệ giữa ngày Can Chi mã số m với ngày dương lịch d ($1 \leq d \leq 31$) tháng t_d (DL) là

$$m = d + y_{t_d-1} - 60k \quad (3)$$

trong đó y_{t_d} là mã số của tháng t_d (DL) và cũng là mã số Can Chi của ngày cùng hàng ghi trong Bảng 3 (nếu $t_d = 1$ thì lấy $t_d - 1$ là 12 của năm trước đó), còn k lấy giá trị 0 hoặc 1 sao cho $1 \leq m \leq 60$.

Trong Bảng 3 cột trái d_o/t_d ghi ngày DL cuối cùng d_o của tháng t_d , còn cột phải a/t_a ghi ngày AL tương ứng với ngày DL cùng hàng.

Chú ý rằng $y_{t_d+1} = d_o + y_{t_d} - 60k$ với k lấy giá trị 0 hoặc 1 sao cho $1 \leq y_{t_d+1} \leq 60$.

Bảng 3. Mã số của tháng DL

d_o/t_d	y_{t_d}	a/t_a
31/12/2009	47	16/11 KS
31/1/2010	18	17/12 KS
28/2	46	15/1 CD
31/3	17	16/2
30/4	47	17/3
31/5	18	18/4
30/6	48	19/5
31/7	19	20/6
31/8	50	22/7
30/9	20	23/8
31/10	51	24/9
30/11	21	25/10
31/12/2010	52	26/11
31/1/2011	23	28/12 CD
28/2/2011	51	26/1 TM

★ **Thí dụ 3.** Tên Can Chi của ngày 26/3/2010 là gì?

Giải đáp. $d = 26$, $t_d = 3$, $y_2 = 46$ (theo Bảng 3). Từ (3) có $m = 26 + 46 - 60 = 12$. Mã số 12 (theo Bảng 1) ứng với Ất Hợi. Vậy ngày 26/3/2010 là ngày Ất Hợi.

4. Tìm ngày Dương lịch theo ngày Âm lịch

Công thức liên hệ giữa ngày âm lịch a tháng t_a và ngày dương lịch d tháng t_d là

$$a + x_{t_a-1} = d + y_{t_d-1} + 60k \quad (4)$$

trong đó k lấy giá trị 0, hoặc -1, hoặc 1 sao cho $1 \leq a \leq 30$ và $1 \leq d \leq 31$.

★ **Thí dụ 4.** Ngày 23/1 (AL) năm Canh Dần là ngày mấy theo dương lịch?

Giải đáp. $a = 23$, $t_a = 1$ nên lấy $t_a - 1$ là 12 Kỷ Sửu, x_{12} (KS) = 31 (theo Bảng 2). Ngày 23/1 (AL) (xem Bảng 3) thuộc tháng 3/2010 nên $t_d = 3$, $y_2 = 46$.

Từ (4) có $d = 23 + 31 - 46 = 8$. Vậy ngày 23/1 (AL) Canh Dần là ngày 8/3/2010.

(Xem tiếp trang 13)



THAM SỐ HÓA trong phương trình nghiệm nguyên

CAO MINH QUANG

(GV Trường THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm,
Vĩnh Long)

Phương trình nghiệm nguyên là dạng toán khó trong Số học. Có nhiều phương pháp để giải bài toán dạng này, như phương pháp sử dụng các tính chất số học; phương pháp lựa chọn modulo; phương pháp cực hạn; phương pháp xuống thang; phương pháp miền giá trị... Sau đây chúng tôi xin giới thiệu phương pháp tham số hóa trong giải phương trình nghiệm nguyên có hai ẩn số.

I. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN BẬC HAI VỚI HAI ẨN SỐ

Để giải PT dạng này chúng ta thường sử dụng phương pháp miền giá trị. Ý tưởng chính của phương pháp này là xét phương trình bậc hai theo một ẩn nào đó, ẩn còn lại là tham số. Sau đó tìm điều kiện của tham số để PT bậc hai có nghiệm. Từ đây thiết lập được bất đẳng thức để chặn giá trị của tham số và liệt kê nghiệm (nếu có).

★ **Thí dụ 1.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 3x - 3y + 2 = 0.$$

Lời giải. PT được biến đổi về dạng

$$x^2 + (3 - 2y)x + 2y^2 - 3y + 2 = 0 \quad (1)$$

Coi phương trình trên là PT bậc hai ẩn x . Điều kiện để PT (1) có nghiệm là $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow (3 - 2y)^2 - 4(2y^2 - 3y + 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}.$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $y = 0$. Với $y = 0$ ta có PT $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -2$.

Vậy PT có hai nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-1; 0)$, $(-2; 0)$. □

★ **Thí dụ 2.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2.$$

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$(x + y)(x^2 - (y + 1)x + y^2 - y) = 0.$$

Nếu $x + y = 0$ thì nghiệm của PT là $(n; -n)$, trong đó n là một số nguyên.

Nếu $x + y \neq 0$ thì $x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0$ (2)

Điều kiện để PT (2) có nghiệm là

$$(y + 1)^2 - 4(y^2 - y) \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \leq y \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0; 1; 2\}$.

- Khi $y = 0$ thì $x = 0$ hoặc $x = 1$;
- Khi $y = 1$ thì $x = 0$ hoặc $x = 2$;
- Khi $y = 2$ thì $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Vậy PT có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(1; 0), (0; 1), (2; 1), (1; 2), (2; 2)$ và $(n; -n)$, trong đó n là một số nguyên. □

★ **Thí dụ 3.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320.$$

Lời giải. PT đã cho được viết lại dưới dạng

$$y^2 - 2x^3y + 2x^6 - 320 = 0 \quad (3)$$

Xét PT bậc hai theo ẩn y . Điều kiện để PT (3) có nghiệm là

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow x^6 - 2x^6 + 320 \geq 0 \Leftrightarrow x^6 \leq 320$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{320} \leq x^3 \leq \sqrt{320}.$$

Vì x là số nguyên nên phải có $x^3 \in \{-8; -1; 0; 1; 8\}$ hay $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

- Với $x = -2$ thì $(y+8)^2 = 256 \Leftrightarrow y = 8$ hoặc $y = -24$.

- Với $x = \pm 1$ thì $(y \pm 1)^2 = 319$.
(PT không có nghiệm nguyên).

- Với $x = 0$ thì $y^2 = 320$
(PT không có nghiệm nguyên).

- Với $x = 2$ thì $(y-8)^2 = 256 \Leftrightarrow y = 24$ hoặc $y = -8$.

Vậy PT có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-2; 8), (-2; -24), (2; 24), (2; -8)$. $\square$

II. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN BẬC BA VỚI HAI ẨN SỐ

Để giải PT dạng này, nếu thấy hệ số của hai ẩn, chẳng hạn x^3 và y^3 đối nhau thì ta có thể tham số hóa chúng bằng cách đặt $x = y + d$ hoặc $y = x + d$ ($d \in \mathbb{Z}$) để đưa PT về dạng bậc hai theo một ẩn x hoặc y . Nếu hệ số của x^3 và y^3 bằng nhau thì ta đặt $z = -y$ rồi đưa về dạng trên. Từ đây ta thiết lập điều kiện có nghiệm để tìm d .

★ **Thí dụ 4.** (Tập huấn đội tuyển Singapore 2003).

Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + 27xy + 2009 = y^3.$$

Lời giải. Đặt $y = x + d$, $d \in \mathbb{Z}$. PT đã cho trở thành $(27 - 3d)x^2 + (27d - 3d^2)x - d^3 + 2009 = 0$ (4)

- Nếu $d = 9$ thì PT (4) trở thành $1280 = 0$ (vô lý).

- Với $d \neq 9$, điều kiện để PT (4) có nghiệm là $(27d - 3d^2)^2 - 4(27 - 3d)(-d^3 + 2009) \geq 0$,
hay $-3(d - 14)(d - 9)(d^2 + 41d + 574) \geq 0$
hay $9 < d \leq 14$ (vì $d^2 + 41d + 574 > 0$ với mọi d).

Do đó $d \in \{10; 11; 12; 13; 14\}$. Kiểm tra trực tiếp, ta nhận thấy PT chỉ có nghiệm nguyên

khi $d = 14$, khi đó $x = -7$, $y = 7$, các trường hợp còn lại PT không có nghiệm nguyên.

Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên duy nhất $(x; y)$ là $(-7; 7)$. $\square$

★ **Thí dụ 5.** (Bulgari 2004)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + 10x - 1 = y^3 + 6y^2.$$

Lời giải. Đặt $x = y + d$ ($d \in \mathbb{Z}$). Khi đó PT ban đầu trở thành

$$(3d - 6)y^2 + (3d^2 + 10)y + d^3 + 10d - 1 = 0 \quad (5)$$

Nếu $d = 2$ thì PT (5) trở thành $22y + 27 = 0$ (không có nghiệm nguyên).

Với $d \neq 2$, điều kiện để PT (5) có nghiệm là $\Delta = -3d^4 + 24d^3 - 60d^2 + 252d + 76 \geq 0$.

- Nếu $d \leq -1$ thì

$$\Delta = -3d^2(d^2 - 8d + 20) + 252d + 76 < 0.$$

- Nếu $d \geq 8$ thì

$$\Delta = 3d^3(8 - d) + 2(38 - d^2) + 2d(126 - 29d) < 0.$$

Do đó $-1 < d < 8$. Vì $x^3 - y^3 = 6y^2 - 10x + 1$ nên d là một số lẻ, suy ra $d \in \{1; 3; 5; 7\}$.

Kiểm tra trực tiếp, ta nhận thấy với $d = 1, d = 5$ thì Δ là một số chính phương. Cụ thể khi $d = 1$ thì $\Delta = 289 = 17^2$, suy ra $y = 5$, $x = 6$; khi $d = 5$ thì $\Delta = 961 = 31^2$, suy ra $y = -3$, $x = 2$.

Vậy PT có nghiệm $(x; y)$ nguyên là $(6; 5)$, $(2; -3)$. $\square$

★ **Thí dụ 6.** (Nga 1981)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

Lời giải. Ta nhận thấy $x > y$. Đặt $x = y + d$, $d \in \mathbb{N}^*$. Khi đó ta có PT

$$(y + d)^3 - y^3 - (y + d)y - 61 = 0 \\ \Leftrightarrow (3d - 1)y^2 + (3d^2 - d)y + d^3 - 61 = 0 \quad (6)$$

Chú ý rằng với mọi $d \in \mathbb{Z}$ thì $3d - 1 \neq 0$. Do đó PT (6) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$, hay

$$\begin{aligned}(3d^2 - d)^2 - 4(3d - 1)(d^3 - 61) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 3d^4 + 2d^3 - d^2 - 732d + 244 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (3d - 1)(d^3 + d^2 - 244) &\leq 0.\end{aligned}$$

Nếu $d \geq 6$ thì

$$\begin{aligned}(3d - 1)(d^3 + d^2 - 244) \\ \geq (3 \cdot 6 - 1)(6^3 + 6^2 - 244) = 136 > 0.\end{aligned}$$

Do đó đề PT (6) có nghiệm thì $1 \leq d \leq 5$. Kiểm tra trực tiếp ta thấy PT chỉ có nghiệm nguyên khi $d = 1$. Khi đó $y = 5$, suy ra $x = 6$, các trường hợp còn lại PT không có nghiệm nguyên.

Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên dương $(x; y)$ duy nhất là $(6; 5)$.

• **Nhận xét.** Trong trường hợp tìm nghiệm nguyên của PT trên, ta có thể đánh giá như sau:

Nếu $d \leq -1$ thì $\Delta = (3d - 1)(d^2(d + 1) - 244) > 0$, từ đó suy ra $0 \leq d \leq 5$ như đã xét trên. Trong trường hợp này ngoài nghiệm $(x; y) = (6; 5)$ ta còn nhận được thêm một nghiệm nguyên $(x; y)$ nữa là $(-5; -6)$. $\square$

★ **Thí dụ 7.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 - x^2 - 2xy = y^3 + y^2 + 100.$$

Lời giải. Đặt $x = y + d$, $d \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có PT

$$\begin{aligned}(y + d)^3 - (y + d)^2 - 2(y + d)y - y^3 - y^2 - 100 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3d - 4)y^2 + (3d^2 - 4d)y + d^3 - d^2 - 100 &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

Với mọi $d \in \mathbb{Z}$ thì $3d - 4 \neq 0$. Do đó điều kiện để PT (7) có nghiệm là

$$\begin{aligned}(3d^2 - 4d)^2 - 4(3d - 4)(d^3 - d^2 - 100) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 3d^4 - 4d^3 - 1200d + 1600 &\leq 0.\end{aligned}$$

• Nếu $d \geq 8$ thì

$$\begin{aligned}3d^4 - 4d^3 - 1200d + 1600 \\ \geq 24d^3 - 4d^3 - 1200d + 1600 \\ = 20d^3 - 1200d + 1600 \\ > 1280d - 1200d + 1600 = 80d + 1600 > 0.\end{aligned}$$

• Nếu $d \leq 0$ thì dễ thấy

$$3d^4 - 4d^3 - 1200d + 1600 > 0.$$

Do đó $d \in \{1; 2; \dots; 7\}$. Kiểm tra trực tiếp, ta thấy PT chỉ có nghiệm nguyên khi $d = 2$ hoặc $d = 5$. Cụ thể khi $d = 2$ thì $y = 6$, suy ra $x = 8$; khi $d = 5$ thì $y = 0$, suy ra $x = 5$.

Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(8; 6)$ và $(5; 0)$. $\square$

BÀI TẬP

Hãy tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

1. $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1$.

Đáp số. $(x; y) \in \{(-1; -1), (1; 0)\}$.

2. $x^3 + x^2 + x + 1 = y^3$.

Đáp số. $(x; y) \in \{(0; 1), (-1; 0)\}$.

3. $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$.

Đáp số. $(x; y) \in \{(-2; -3), (1; -2), (1; 0)\}$.

4. $x^3 = x^2y - 3x + 2y + 5$.

Đáp số. $(x; y) \in \{-1; -3\}, (5; 5)\}$.

5. $x^3 - y^3 = xy + 2003$.

Đáp số. $(x; y) \in \{21; 19\}, (-19; -21)\}$.

6. $x^3 - y^3 = xy + 8$.

Đáp số. $(x; y) \in \{(2; 0), (0; -2)\}$.

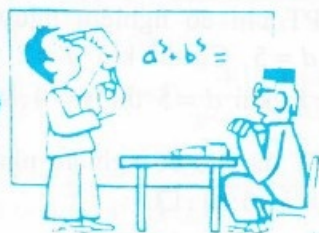
ĐỐI CHIẾU... (Tiếp trang 10)

5. Tìm ngày Âm lịch theo ngày Dương lịch

★ **Thí dụ 5.** Ngày 25/4/2010 là ngày mấy theo âm lịch?

Giải đáp. $d = 25$, $t_d = 4$, $y_3 = 17$ (theo Bảng 3). Ngày 25/4/2010 (xem Bảng 2) thuộc tháng 3 (AL) nên $t_a = 3$, $x_2 = 30$ (theo Bảng 2). Từ (4) có $a = 25 + 17 - 30 = 12$. Vậy ngày 25/4/2010 là ngày 12 tháng 3 (AL) Canh Dần.

Sử dụng các bảng và các hệ thức trên các bạn có thể lập trình cho máy tính để đối chiếu ngày dương lịch và ngày âm lịch, ngày Can Chi cho năm nay, đồng thời bằng cách tương tự lập bảng để đối chiếu ngày cho các năm khác.

DIỄN ĐÀN**DẠY
HỌC
TOÁN**

Trong chương trình Toán lớp 11 hiện hành, việc các giới hạn có kết quả bằng vô cực được phân biệt rõ ràng bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$ chứ không chung chung như chương trình cũ. Do đó những kỹ thuật cũ sẽ khó xác định giới hạn nào bằng $+\infty$, giới hạn nào bằng $-\infty$. Các thí dụ trong sách giáo khoa cũng chưa đưa ra được một kỹ thuật chung cho các bài toán này.

Thông qua các bài toán cụ thể sau đây, chúng tôi xin mạnh dạn trao đổi một số kỹ thuật xung quanh loại bài toán này.

KỸ THUẬT TÍNH GIỚI HẠN BẰNG VÔ CỰC TRONG CHƯƠNG TRÌNH MỚI

VÕ TRỌNG TRÍ

(GV THPT Anh Sơn 1, Nghệ An)

1. Giới hạn của dãy số

Đối với giới hạn của dãy số bằng vô cực ta nên biến đổi thành giới hạn dạng

$\lim n^k f(n)$, trong đó $\lim f(n) = a (a \neq 0)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $\lim n^k f(n) = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 0 \\ -\infty & \text{khi } a < 0. \end{cases}$

★ **Bài toán 1.** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim (-2n^3 + n^2 + \sqrt{3n-1} - 10)$;

b) $\lim \frac{2n^2 + n - 1}{-3n^3 + n - 4}$;

c) $\lim (\sqrt{4n^2 + n - 3} - n)$.

Lời giải. a) Đặt lũy thừa của n với số mũ cao nhất làm thừa số chung. Ta có

$$\begin{aligned} & \lim (-2n^3 + n^2 + \sqrt{3n-1} - 10) \\ &= \lim n^3 \left(-2 + \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{3}{n^5} - \frac{1}{n^6} - \frac{10}{n^3}} \right). \end{aligned}$$

Vì $\lim n^3 = +\infty$,

$$\lim \left(-2 + \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{3}{n^5} - \frac{1}{n^6} - \frac{10}{n^3}} \right) = -2 < 0$$

nên $\lim (-2n^3 + n^2 + \sqrt{3n-1} - 10) = -\infty$.

b) Đặt như câu a) cho tử và mẫu số. Ta có

$$\begin{aligned} \lim \frac{2n^2 + n - 1}{n - 4} &= \lim \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(1 - \frac{4}{n} \right)} \\ &= \lim n \left(\frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{4}{n}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \lim n = +\infty, \lim \left(\frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{4}{n}} \right) = 2 > 0$$

$$\text{nên } \lim \frac{2n^2 + n - 1}{n - 4} = +\infty.$$

c) Bài này theo thói quen làm bằng cách nhân và chia cho biểu thức liên hợp $(\sqrt{4n^2 + n - 3} + n)$, nhưng ta có thể giải bằng cách nhanh gọn hơn như sau

$$\begin{aligned} & \lim (\sqrt{4n^2 + n - 3} - n) \\ &= \lim n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} - 1 \right) = +\infty. \quad \square \end{aligned}$$

2. Giới hạn hàm số

• Đối với giới hạn của hàm số tại vô cực và có kết quả bằng vô cực, ta nên biến đổi đưa về dạng

$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} x^k f(x)$, trong đó $\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) = a \ (a \neq 0)$,

$k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 0 \\ -\infty & \text{khi } a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 0, k \text{ chẵn} \\ & \text{hoặc } a < 0, k \text{ lẻ} \\ -\infty & \text{khi } a > 0, k \text{ lẻ} \\ & \text{hoặc } a < 0, k \text{ chẵn.} \end{cases}$$

★ Bài toán 2. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x + 1}{1 - x - x^2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 - 3x} + x)$.

Lời giải. a) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x + 1}{1 - x - x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1} \right) = +\infty, \end{aligned}$$

vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1} = -1 < 0$.

b) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 - 3x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}} + 1 \right) = -\infty.$$

Ở đây chú ý do $x \rightarrow -\infty$ nên $x < 0$ và

$$\sqrt{f(x)} = x \left(-\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}} \right). \quad \square$$

• Đối với giới hạn một bên của hàm số nên đưa về dạng $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{1}{x-c} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{1}{x-c} f(x)$ trong đó $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a \ (a \neq 0)$.

Bài toán 3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-6}{x^2-3x+2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-x+1}{x^3-3x-2}$.

Lời giải. a) Phân tích mẫu số thành tích có chứa nhân tử $(x-1)$. Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-6}{x^2-3x+2} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-6}{(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} \left(\frac{2x-6}{x-2} \right) = +\infty, \end{aligned}$$

vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-6}{x-2} = 4 > 0$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-x+1}{x^3-3x+2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-x+1}{(x-2)(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1} = -\infty, \end{aligned}$$

vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{3}$. $\square$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Tìm các giới hạn sau:

1. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2+n+1}-n}{\sqrt{1+n}+1}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+n-2} + \sqrt{n^2+1} - \sqrt{8n^2-n})$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3-1}{x^3-x^2-x+1}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x}+2}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{7x+1}}{x^2-2x+1}$.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/394. (Lớp 6). Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/394. (Lớp 7). Cho n là số nguyên dương và kí hiệu $U(n) = \{d_1; d_2; \dots; d_m\}$ là tập hợp tất cả các ước số nguyên dương của n . Chứng minh rằng

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_m^2 \leq n^2 \sqrt{n}.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/394. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^4(a+b)} + \frac{1}{b^4(b+c)} + \frac{1}{c^4(c+a)} \geq \frac{3}{2}$$

trong đó a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$.

HỒ VĂN SƠN
(GV THPT 1/5, Nghĩa Đàn, Nghệ An)

Bài T4/394. Giải phương trình

$$3\sqrt{x^3 + 8} = 2x^2 - 6x + 4.$$

HÀ VĂN NHÂN
(GV THCS Hoàng Xuân, Hoàng Hóa, Thanh Hóa)

Bài T5/394. Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm trên cạnh CD ($M \neq C, M \neq D$). Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với AM tại H , BH cắt AC tại K . Chứng minh rằng

a) MK luôn song song với một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh CD .

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADMK$ nằm trên một đường thẳng cố định.

CAO NGỌC TOÀN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/394. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^3 + 2b^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{b^3 + 2c^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{c^3 + 2a^3 + 6}} \leq 1.$$

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T7/394. Xét các tam giác ABC có $A < B < C \leq \frac{\pi}{2}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$M = \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2(\cot A - \cot B)(\cot B - \cot C)(\cot C - \cot A).$$

ĐÀO QUỐC DŨNG
(GV THPT Diễn Châu 4, Nghệ An)

Bài T8/394. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Đường thẳng d đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác cắt các đường thẳng AB, AC, BC lần lượt tại các điểm M, N, P .

Chứng minh hệ thức

$$\frac{a}{BP \cdot PC} + \frac{b}{CN \cdot NA} + \frac{c}{AM \cdot MB} = \frac{(a+b+c)^2}{abc}.$$

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/394. Cho x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn các điều kiện

$$x + 2y + 3z = 5 \text{ và } 2xy + 6yz + 3xz = 8.$$

Chứng minh rằng

$$1 \leq x \leq \frac{7}{3}; \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{7}{6}; \frac{1}{3} \leq z \leq \frac{7}{9}.$$

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lương Thế Vinh, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T10/394. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3(x+y)} \\ 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 15y^4. \end{cases}$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T11/394. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + xf(y) - xy - x + 1.$$

TẠ HOÀNG THÔNG
(TP. Hồ Chí Minh)

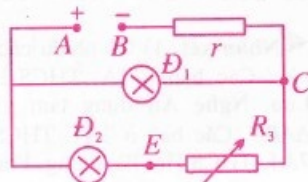
Bài T12/394. Giả sử khối tứ diện $ABCD$ thỏa mãn điều kiện: Tất cả các mặt của nó là các tam giác nhọn và BC vuông góc với AD . Gọi h_a, h_d lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ A, D xuống các mặt đối diện, còn 2α (với $0^\circ < \alpha < 45^\circ$) là số đo nhị diện cạnh BC của tứ diện đó, d là khoảng cách giữa hai cạnh BC, AD . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_d} \leq \frac{1}{d \cdot \sin \alpha}.$$

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/394. Cho mạch điện như hình vẽ. Điện trở $r = 10\Omega$, các đèn Đ_1 và Đ_2 có điện trở tương ứng là $R_1 = 20\Omega$ và $R_2 = 5\Omega$, R_3 là một biến trở. Đặt

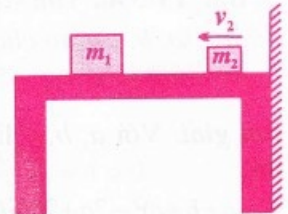


lên hai đầu đoạn mạch AB một hiệu điện thế không đổi $U_{AB} = 100V$.

Thay đổi giá trị của R_3 đến một giá trị nào đó thì thấy các đèn $\text{Đ}_1, \text{Đ}_2$ sáng bình thường và công suất của đoạn mạch AC đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị của biến trở R_3 khi đó. Tìm công suất lớn nhất của đoạn mạch AC và công suất định mức của đèn Đ_1 và Đ_2 .

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/394. Một vật khối lượng m_1 nằm yên trên một cái bàn không ma sát, một đầu của bàn tựa vào tường. Một vật khác khối lượng m_2 được đặt giữa vật m_1 và tường và được cho chuyển động sang trái, về phía vật m_1 , với tốc độ không đổi v_2 (hình vẽ). Giả sử rằng mọi va chạm đều hoàn toàn đàn hồi và tường có khối lượng vô cùng lớn. Hãy tìm giá trị của m_2 theo m_1 sao cho cả hai vật chuyển động với cùng một tốc độ sau khi vật m_2 va chạm một lần với vật m_1 và một lần với tường.



NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV ĐHSP Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/394. (For 6th grade). Find all pair of natural numbers x, y such that

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879.$$

T2/394. (For 7th grade). Let n be a positive integer and let $U(n) = \{d_1; d_2; \dots; d_m\}$ be the set of all positive divisors of n . Prove that

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_m^2 \leq n^2 \sqrt{n}.$$

T3/394. Prove that

$$\frac{1}{a^4(a+b)} + \frac{1}{b^4(b+c)} + \frac{1}{c^4(c+a)} \geq \frac{3}{2}$$

where a, b, c are three positive numbers satisfying $abc = 1$.

T4/394. Solve the equation

$$3\sqrt{x^3 + 8} = 2x^2 - 6x + 4.$$

T5/394. Let $ABCD$ be a square, M is a point lying on CD ($M \neq C, M \neq D$). Through the point C draw a line perpendicular to AM at H , BH meets AC at K . Prove that

a) MK is always parallel to a fixed line when M moves on the side CD .

b) The circumcenter of the quadrilateral $ADMK$ lies on a fixed line.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/394. Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\frac{1}{\sqrt{a^3 + 2b^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{b^3 + 2c^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{c^3 + 2a^3 + 6}} \leq 1.$$

(Xem tiếp trang 27)



★ **Bài T1/390.** Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c) sao cho $(a + b + c)^2 - 2a + 2b$ là số chính phương.

Lời giải. Với a, b, c là các số nguyên dương thì:

$$1) (a+b+c)^2 - 2a + 2b > (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) + 1 \\ \Rightarrow (a+b+c)^2 - 2a + 2b > (a+b+c-1)^2 \quad (1)$$

$$2) (a+b+c)^2 - 2a + 2b < (a+b+c)^2 + 2(a+b+c) + 1 \\ \Rightarrow (a+b+c)^2 - 2a + 2b < (a+b+c+1)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra nếu $(a+b+c)^2 - 2a + 2b$ là số chính phương thì chỉ có thể là

$$(a+b+c)^2 - 2a + 2b = (a+b+c)^2 \Rightarrow a = b.$$

Thử lại với $a = b$ thì $(a+b+c)^2 - 2a + 2b = (2a+c)^2$ là số chính phương. Vậy các bộ số $(a; a; c)$ với a, c là các số nguyên dương tùy ý, thỏa mãn yêu cầu của bài toán. □

◀ **Nhận xét.** Một số bạn xét các trường hợp $a > b, a < b$ và $a = b$ khiến lời giải dài hơn. Các bạn có lời giải đúng và gọn là:

Vinh Phúc: Lê Phương Mai, Vũ Phương Quỳnh, Nguyễn Hiền Linh, Vương Thùy Trang, Vũ Trung Hoa, Trần Thị Hồng Nhung, Lê Duy Minh Tú, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, Nguyễn Khánh Linh, 6A, THCS Lập Thạch, Phan Văn Nhiệm, 6A, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** Vương Ngọc Anh, 6H, THCS Tam Hợp, Quỳnh Hợp; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Kiều Duyên, 6A, THCS Hành Đức, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/390.** Cho tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Lấy điểm I ở trong tam giác sao cho $\widehat{IAC} = 10^\circ, \widehat{ICA} = 20^\circ$. Tìm số đo của góc $\widehat{CBI}$.

Lời giải. Kéo dài CI cắt AB tại E , ta có $\widehat{CEA} = 180^\circ - (\widehat{CAE} + \widehat{ECA}) = 80^\circ$, suy ra tam giác CAE cân tại C nên $CE = CA = AB$ (1)

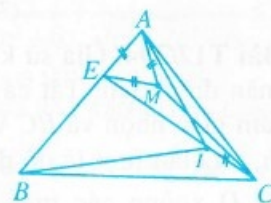
Trong tam giác CAE vẽ tam giác đều AEM . Ta có $\Delta AMC = \Delta EMC$

$$(c.c.c) \Rightarrow \widehat{ACM} = 10^\circ;$$

$$\widehat{MAC} = 20^\circ, \text{ từ đó}$$

$$\text{ta có } \Delta CIA = \Delta AMC \text{ (g.c.g),}$$

$$\text{suy ra } CI = AM = AE \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $EI = EB \Rightarrow \Delta EBI$ cân tại E , mà $\widehat{CEB} = 180^\circ - \widehat{CEA} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ suy ra $\widehat{EBI} = \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$. Từ đó ta

$$\text{có } \widehat{CBI} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Có nhiều cách giải khác cho bài toán này: Các bạn ở 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An** dựng tam giác đều AIK nằm trong ΔABC . Các bạn ở 7A1, THCS Yên Lạc, và các bạn ở 7A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, **Vinh Phúc** dựng tam giác đều BCD nằm cùng phía với ΔABC đối với BC .

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn:

Phú Thọ: Hà Ngô Hùng, 7A1, THCS Lâm Thao, Phan Huy Hoàng, 7E, THCS Vĩnh Tường; **Hà Nội:** Nguyễn Quang Minh, 7A₁₀, THCS Giảng Võ, Ba Đình. **Đặng Quốc Khánh**, 7A1, THCS Bế Văn Đàn, Đống Đa; **Lưu Thị Thúy Nga**, 7B, THCS Hải Hậu; **Hà Nam:** Nguyễn Quang Lợi, 7K, THCS Liêm Chính, TP. Phú Lý; **Nghệ An:** Phạm Lương Tùng Dương, 6C, THCS Cao Xuân Huy, Lê Văn Dũng, Nguyễn Xuân Tuấn Quang, 7A, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Hương Giang, 7A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Bảo Trâm, Nguyễn Thị Thu Hiền, Bùi Thị Hàn Ny, Nguyễn Thị Kiều Duyên, Tống Thanh Nguyên, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** Trần Đặng Mạnh Hoàng, 7B, THPT Trần Quốc Toàn, TP. Tuy Hòa; **Đông Tháp:** Âu Sao Mai, 7A1, THCS Kim Hồng, Cao Lãnh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/390.** Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là giao điểm ba đường phân giác trong. Chứng minh rằng nếu $AB^2 - AC^2 = 2(IB^2 - IC^2)$ thì GI song song với BC .

Lời giải. Gọi E, F, K lần lượt là hình chiếu của I trên ba cạnh BC, CA, AB . Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên



$AK = AF, CF = CE, BE = BK$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } IB^2 - IC^2 &= (IE^2 + EB^2) - (IE^2 + EC^2) \\ &= EB^2 - EC^2 = (EB - EC)(EB + EC) \\ &= (KB - FC)BC \\ &= ((KB + AK) - (FC + AF))BC \\ &= (AB - AC)BC. \end{aligned}$$

Từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned} AB^2 - AC^2 &= 2(AB - AC)BC \\ \Leftrightarrow (AB - AC)(AB + AC - 2BC) &= 0. \end{aligned}$$

• Nếu $AB = AC$ thì I, G cùng nằm trên đường trung tuyến cũng là đường cao AM . Khi đó hoặc I trùng G (nếu $\triangle ABC$ đều) hoặc $IG \perp BC$ (nếu $\triangle ABC$ cân tại A nhưng không đều).

• Nếu $AB \neq AC$ thì $AB + AC = 2BC$, lúc này theo tính chất đường phân giác, ta có

$$\frac{AI}{AD} = \frac{BA}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB + AC}{BD + CD} = \frac{AB + AC}{BC} = 2.$$

Kết hợp $\frac{AG}{GM} = 2$ (do G là trọng tâm $\triangle ABC$),

suy ra $IG \parallel DM$ (định lý Thales đảo) hay $IG \parallel BC$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Đề bài phải bổ sung giả thiết “tam giác ABC không cân tại A ”, chỉ những bạn sau phát hiện ra điều đó:

Phú Thọ: Đinh Anh Hoàng, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Đặng Thắng Lợi, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Vĩnh Phúc:** Dương Phước Thọ, 9A, THCS Lập Thạch, Nguyễn Đình Lộc, 9C, THCS Vĩnh Tường. Phan Văn Tín, 9A₁, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** Nguyễn Minh Quân, Ngô Sĩ Thanh, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Tp Vinh, Phan Thanh Tùng, 8D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Lê Hồng Đức, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Vương Nhật Quân, 9C, THCS Nghi Thái, Nghi Lộc; **Hà Tĩnh:** Lê Quang Đạt, Nguyễn Thành Đạt, 9A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Hà Nam:** Nguyễn Quang Lợi, 7B, THCS Liêm Chính, Phù Lý; **Thanh Hóa:** Lê Thị Phương, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ,

Hoàng Hóa; **Nam Định:** Trịnh Thị Việt Hà, 9A₄, THCS Trần Đăng Ninh.

PHAN THỊ MINH NGUYỄN

★ Bài T4/390. Giải phương trình

$$(x^2 + 1)lx^2 + 2x - 1 + 6x(1 - x^2) = (x^2 + 1)^2 \quad (1)$$

Lời giải. Cách 1. (Theo đa số các bạn)

Xét hai trường hợp:

$$1) x^2 + 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 - \sqrt{2} \\ x \geq -1 + \sqrt{2} \end{cases} \quad (2)$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 + 2x - 1) + 6x(1 - x^2) = (x^2 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 2x - 1 + 6x - 6x^3 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-3 \pm 17}{4} \end{cases}$$

Chỉ có nghiệm $x = 1$ thỏa mãn (2).

$$2) x^2 + 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2} \quad (3)$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 1)(-x^2 - 2x + 1) + 6x(1 - x^2) = (x^2 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow -x^4 - 2x^3 - 2x + 1 + 6x - 6x^3 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x + 1)(x^2 + 3x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Chỉ có các nghiệm $x = 0, x = -1$ thỏa mãn (3).

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm:

$$x = -1, x = 0, x = 1.$$

Cách 2. (Theo bạn Nguyễn Thị Hương, 8A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong, Bắc Ninh).

$$(1) \Leftrightarrow 6x(1 - x^2) = (x^2 + 1)(x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 6(1-x)(x+x^2) = (x^2+1) \cdot \frac{(x^2+1)^2 - (x^2+2x-1)^2}{x^2+1+x^2+2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 6(1-x)(x+x^2) = (x^2+1) \cdot \frac{4(1-x)(x+x^2)}{x^2+1+x^2+2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(x+x^2) \left(6 - \frac{4(x^2+1)}{x^2+1+x^2+2x-1} \right) = 0 \quad (4)$$

Vì $x^2+1+x^2+2x-1 \geq x^2+1 > 0$ nên

$$\frac{4(x^2+1)}{x^2+1+x^2+2x-1} \leq 4 < 6.$$

Do đó (4) $\Leftrightarrow (1-x)(x+x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1, x = 1. \square$

◀ **Nhận xét.** Ngoài cách giải của bạn Hương ở trên, các bạn sau cũng có lời giải ngắn gọn:

Vinh Phúc: Đỗ Xuân Việt, 9A, THCS Lập Thạch; **Nghệ An:** Phạm Văn Quyền, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nguyễn Thế Tiến, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Thu Hiền, Nguyễn Bảo Trâm, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **An Giang:** Nguyễn Sơn Hải, 9A1, THCS Lạng Giang, Chợ Mới.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T5/390.** Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 = 1$;

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n(a_n+1)(a_n+2)(a_n+3)+2}$$

với $n \in \mathbb{N}^*$. So sánh tổng

$$S = \frac{1}{a_1+2} + \frac{1}{a_2+2} + \frac{1}{a_3+2} + \dots + \frac{1}{a_{2009}+2}$$

với $\frac{1}{2}$.

Lời giải. Theo bài ra ta thấy $a_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Xét số hạng tổng quát

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n(a_n+1)(a_n+2)(a_n+3)+2}$$

$$> \sqrt{a_n(a_n+1)(a_n+2)(a_n+3)+1}$$

$$= \sqrt{(a_n^2+3a_n)(a_n^2+3a_n+2)+1}$$

$$= \sqrt{(a_n^2+3a_n)^2+2(a_n^2+3a_n)+1}$$

$$= a_n^2+3a_n+1, \text{ với } n \geq 1.$$

Suy ra $a_{n+1}+1 > a_n^2+3a_n+2 = (a_n+1)(a_n+2)$

$$\text{ nên } \frac{1}{a_{n+1}+1} < \frac{1}{(a_n+1)(a_n+2)} = \frac{1}{a_n+1} - \frac{1}{a_n+2}.$$

$$\text{ Do đó } \frac{1}{a_n+2} < \frac{1}{a_n+1} - \frac{1}{a_{n+1}+1} \text{ với } n \geq 1 \quad (*)$$

Áp dụng BĐT (*) với $n = 1, 2, \dots, 2009$ ta có

$$S = \frac{1}{a_1+2} + \frac{1}{a_2+2} + \frac{1}{a_3+2} + \dots + \frac{1}{a_{2009}+2}$$

$$< \frac{1}{a_1+1} - \frac{1}{a_2+1} + \frac{1}{a_2+1} - \frac{1}{a_3+1} + \frac{1}{a_3+1} - \frac{1}{a_4+1} + \dots$$

$$+ \frac{1}{a_{2009}+1} - \frac{1}{a_{2010}+1}$$

$$= \frac{1}{a_1+1} - \frac{1}{a_{2010}+1} < \frac{1}{a_1+1} = \frac{1}{2}. \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Các bạn tham giải đều làm theo cách trên. Tuyên dương bạn Lê Đức Tiến, 9A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiến An, Hải Phòng đã đưa ra nhận xét tổng quát:

$$\frac{1}{a_1+2} + \frac{1}{a_2+2} + \dots + \frac{1}{a_n+2} < \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

2) Ngoài bạn Tiến, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Phú Thọ: Trần Hiếu Nam, 9A, THCS Vĩnh Lại, Lâm Thao; **Nghệ An:** Ngô Sĩ Thanh, Nguyễn Minh Quân, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Thanh Hóa:** Lê Viết Nghĩa, 9A, THCS Hoàng Minh, Hoàng Hóa; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Minh Thu, 9A, THCS Tân Lập, Vũ Thư; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Tiến Vỹ, 7A, Bùi Thị Hàn Ny, 8A, Phan Đại Dương, Cao Thị Ánh Nguyệt, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Ninh Thuận:** Hàng Trần Minh, 9/5, THCS Lý Tự Long, TP. Phan Rang, Tháp Chàm.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T6/390.** Cho a, b, c là các số thực dương và $a+b+c=6$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{c^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \geq 2.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Áp dụng BDT Cauchy cho hai số dương ta có

$$\sqrt{a^3+1} = \sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \leq \frac{a^2+2}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$. Suy ra

$$\frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \geq \frac{2c}{a^2+1}.$$

Tương tự ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}} \geq \frac{2a}{b^2+1}; \quad \frac{b}{\sqrt{c^3+1}} \geq \frac{2b}{c^2+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } & \frac{a}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{c^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \\ & \geq \frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } \frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2} \geq 2$$

$$\text{hay } \left(a - \frac{2a}{b^2+2}\right) + \left(b - \frac{2b}{c^2+2}\right) + \left(c - \frac{2c}{a^2+2}\right) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab^2}{b^2+2} + \frac{bc^2}{c^2+2} + \frac{ca^2}{a^2+2} \leq 4.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$$2b^2 + 4 = b^2 + b^2 + 4 \geq 3\sqrt[3]{4b^4} = 3b\sqrt[3]{4b}$$

$$\Rightarrow b^2 + 2 \geq \frac{3}{2}b\sqrt[3]{4b}.$$

$$\text{Tương tự có } c^2 + 2 \geq \frac{3}{2}c\sqrt[3]{4c}; \quad a^2 + 2 \geq \frac{3}{2}a\sqrt[3]{4a}.$$

Từ đó, sử dụng BĐT quen thuộc

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2,$$

$$\text{suy ra } \frac{ab^2}{b^2+2} + \frac{bc^2}{c^2+2} + \frac{ca^2}{a^2+2}$$

$$\leq \frac{1}{3}(\sqrt[3]{2a.ab.ab} + \sqrt[3]{2b.bc.bc} + \sqrt[3]{2c.ca.ca})$$

$$\leq \frac{1}{9}(2(a+b+c) + 2(ab+bc+ca)) \leq 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$. $\square$

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải, hầu hết đều làm theo cách trên. Bài toán này có thể tổng quát như sau, phần chứng minh tương tự như trên, xin dành cho bạn đọc.

Với các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n$, ta luôn có

$$a) \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{a_{k+1}^3+1}} \geq \frac{2n}{3} \quad (\text{coi } a_{n+1} \equiv a_1).$$

$$b) \sum_{j=1}^n \sum_{i \neq j}^n \frac{x_j}{\sqrt{x_i^3+1}} \geq \frac{2n(n-1)}{3}.$$

2) Có ba bạn sau đây đã nêu được bài toán tổng quát:

Đào Quốc Hiếu, 10A2 Toán, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; Bùi Đăng Khoa, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng; Nguyễn Minh Hiếu, 11A3, THPT Hậu Lộc I, Thanh Hoá.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ Bài T7/390. Tìm tất cả các tam giác có độ dài ba cạnh là ba số nguyên đầu tiên của một cấp số cộng có công sai khác 0 và bán kính đường tròn nội tiếp của nó bằng 3.

Lời giải. Gọi ba cạnh của tam giác là a, b, c . Không mất tính tổng quát có thể giả thiết $a < b < c$.

Thế thì $a = b - d, c = b + d$ ($b, d \in \mathbb{N}^*$);

$$a + b > c \Rightarrow b > 2d \quad \text{và} \quad p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}.$$

$$\text{Vì } r = 3 \text{ nên } S = pr = \frac{9b}{2} \quad (1)$$

Mặt khác, theo công thức Heron

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{3b}{2} \left(\frac{b}{2} + d\right) \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} - d\right)}$$

$$= \frac{b}{4} \sqrt{3(b+2d)(b-2d)} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$\frac{b}{4} \sqrt{3(b+2d)(b-2d)} = \frac{9b}{2}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được

$$(b+2d)(b-2d) = 108 \quad (3)$$

Vì $(b+2d)$ và $(b-2d)$ là hai số nguyên cùng tính chẵn lẻ và $(b+2d)$ dương nên cả hai thừa số trong vế trái của (3) đều là các số tự nhiên chẵn. Lại vì $108 = 54 \cdot 2 = 18 \cdot 6$ và $b+2d > b-2d$ nên chỉ có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\begin{cases} b+2d=54 \\ b-2d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=28 \\ d=13. \end{cases}$

Ta được $(a;b;c) = (15; 28; 41)$.

Trường hợp 2. $\begin{cases} b+2d=18 \\ b-2d=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=12 \\ d=3. \end{cases}$

Ta được $(a;b;c) = (9; 12; 15)$.

Ta thấy các nghiệm trên thoả mãn các điều kiện của bài toán. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán cơ bản nên có rất nhiều bạn tham gia gửi lời giải và hầu hết đều làm đúng. Một số bạn gọi độ dài ba cạnh của tam giác là $a; a+d; a+2d$, từ đó lập được PT bậc hai $a^2+2da-3d^2-108=0$; PT có nghiệm nguyên khi $\Delta' = 4(d^2+27)$ là số chính phương; suy ra $d^2+27 = n^2 \Leftrightarrow (n-d)(n+d) = 27$ ($n, d \in \mathbb{Z}$); từ đó tìm được $d; a$ và suy ra kết quả. Tuy nhiên cách giải này dài và phức tạp hơn.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hải Dương: Phạm Đức Vương, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Vinh Phúc:** Phan Xuân Trường, 10A, THPT Nguyễn Viết Xuân, Vĩnh Tường; **Nghệ An:** Nguyễn Thanh Sơn, 10A1, THPT Diễn Châu 3; **Bình Định:** Lương Việt Chương, 10 TL, THPT chuyên Lê Quý Đôn; TP Quy Nhơn; **Long An:** Trần Công Thiện, 10 chuyên Toán, THPT Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** Phan Lê Hoài Ân, Ngô Quốc Thái, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN ANH DŨNG

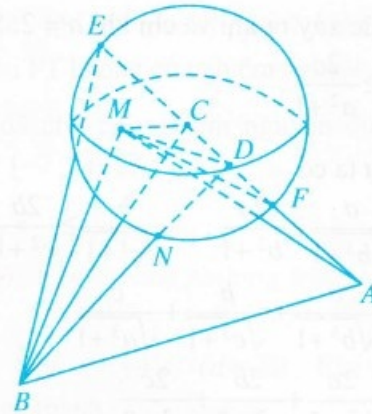
★ **Bài T8/390.** Cho tam giác ABC có $AB = 3R$, $BC = R\sqrt{7}$, $CA = 2R$. M là điểm nào đó trên mặt cầu $(C; R)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MB$.

Lời giải. Giả sử E và F là giao điểm của AC với mặt cầu $(C; R)$ (F nằm giữa A và C); D là trung điểm của đoạn CF . Áp dụng định lý cosin cho $\triangle ABC$ ta tìm được $\widehat{BAC} = 60^\circ$, do vậy $\triangle ABE$ đều, suy ra $BD = \frac{3R\sqrt{3}}{2}$ (*).

Sử dụng công thức đường trung tuyến cho hai tam giác MCF và MCA , ta có

$$MD^2 = \frac{2MC^2 + 2MF^2 - CF^2}{4};$$

$$MF^2 = \frac{2MC^2 + 2MA^2 - AC^2}{4}. \text{ Vì vậy}$$



$$MD^2 = \frac{3MC^2 + MA^2 - \frac{1}{2}AC^2 - CF^2}{4} = \frac{MA^2}{4}.$$

Do đó $MD = \frac{1}{2}MA$. Suy ra

$$\frac{1}{2}MA + MB = MD + MB \geq BD, \text{ nên}$$

$MA + 2MB \geq 2BD$. Nghĩa là $MA + 2MB \geq 3R\sqrt{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MB$ bằng $3R\sqrt{3}$, đạt được khi và chỉ khi M là giao điểm của đoạn BD với mặt cầu $(C; R)$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Một số bạn sử dụng phương pháp tọa độ hoặc dùng công cụ đạo hàm, cũng đi đến kết quả bài toán, tuy nhiên theo các hướng này lời giải của các bạn thường dài dòng, không gọn. Những bạn có lời giải tốt hơn cả:

Hải Phòng: Phan Đức Minh, 11A15, THPT Thái Phiên; **Hưng Yên:** Nguyễn Trọng Chúc, 10T2, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I; **Phú Yên:** Phan Minh Trí, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T9/390.** Trong một buổi gặp mặt có 294 người tham gia. Những người quen nhau bắt tay nhau. Biết rằng nếu A bắt tay B thì một trong hai người A và B bắt tay không quá 6 lần. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu cái bắt tay?

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Tiến Thành, 11A, THPT Đô Lương I, Nghệ An).

Chia 294 người đó thành hai tập M và N . Tập M gồm những người bắt tay quá 6 lần và tập N gồm những người còn lại. Theo giả thiết thì những người trong tập M không bắt tay nhau. (kí hiệu $|M|$ là số phần tử của M). Ta xét các trường hợp sau:

1) Nếu $|M| \geq 6$ thì $|N| \leq 288$. Do mỗi người trong N bắt tay không quá 6 lần nên số các bắt tay nhiều nhất là $6 \times 288 = 1728$.

2) $|M| = a < 6$: Vì mỗi người trong M không bắt tay nhau nên mỗi người trong M bắt tay không quá $294 - a$ lần. Mỗi người trong N bắt tay không quá 6 lần. Thành thử số bắt tay nhiều nhất là

$$\frac{a(294 - a) + (294 - a)6}{2} = \frac{(294 - a)(a + 6)}{2}$$

$$< \frac{294 \cdot 11}{2} < 1728.$$

Do đó tổng số cái bắt tay không quá 1728. Sau đây ta chỉ ra trường hợp xảy ra dấu bằng: Chọn $|M| = 6$ và $|N| = 288$. Những người thuộc M không quen nhau, những người thuộc N cũng không quen nhau và mỗi người thuộc M quen tất cả những người thuộc N . Do vậy số cái bắt tay là $6 \times 288 = 1728$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Ngọc Sơn, 11 Toán, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nam Định:** Lê Thị Phương Thanh, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Đà Lạt:** Vũ Anh, 10T1, THPT chuyên Thăng Long; **Nghệ An:** Nguyễn Thế Anh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh;

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/390.** Với số nguyên dương cho trước, tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{N}$ ta có

1) Nếu $f(x) = f(y)$ thì $x = y$;

2) $\underbrace{f(f(\dots(f(f(x) + f(y))))\dots))}_{\text{gồm } m \text{ lần } f} = x + y$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Kí hiệu $\underbrace{f(f(\dots(f(x))))\dots)}_{\text{gồm } m \text{ lần } f} = f_m(x)$ và

$$f_1(x) = f(x), f_0(x) = x.$$

Từ điều kiện giả thiết 1) suy ra: Nếu $f_n(x) = f_n(y)$ với $n \geq 1$ thì $x = y$.

Trong 2) thay x bởi $x + y$, y bởi 0, ta thu được

$$f_m(f(x + y) + f(0)) = x + y$$

$$= f_m(f(x) + f(y)), \forall x, y \in \mathbb{N}.$$

Suy ra, theo 1) có

$$f(x + y) + f(0) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Đặt $f(0) = a$, thì (1) có dạng

$$f(x + y) + a = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Thế $x = 0, y = 0$ vào 2), ta thu được $f_m(2a) = 0$.

Tiếp tục thế $x = f_{m-1}(2a), y = 0$ vào 2), ta thu được

$$f_m(f_m(2a) + f(0)) = f_{m-1}(2a).$$

Suy ra $f_m(a) = f_{m-1}(2a)$ hay $f(a) = 2a$ (3)

Từ (2) và (3), bằng quy nạp, ta thu được $f_m(2a) = (m + 2)a$. Suy ra $a = 0$.

Vậy (2) có dạng

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Từ đây suy ra $f(0) = 0$ và

$$f(x + 1) = f(x) + f(1) = f(x - 1) + 2f(1)$$

$$= \dots = f(0) + (x + 1)f(1) = (x + 1)f(1).$$

Đặt $f(1) = b$ thì $f(x) = bx$ với mọi $x \in \mathbb{N}$ và

$$f_m(f(x) + f(y)) = b^m(bx + by)$$

nên $b^m(bx + by) = x + y, \forall x, y \in \mathbb{N}$

suy ra $b^{m+1} = 1$ nên $b = 1$ (do $m \geq 1, b \in \mathbb{N}$).

Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}$.

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là đề toán về phương trình hàm trong dãy số, không sử dụng đến tính liên tục. Có nhiều bạn giải được và đa số các bạn đều giải đúng, tương tự như cách đã trình bày ở trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Minh Thuận, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Nguyễn Trọng Lượng, 11T,

THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Lưu Hữu Phúc, Nguyễn Việt An, Đồng Xuân Bách, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** Đào Công Chương, Vũ Nhật Khánh, Lương Đức Hiếu, 10T1 THPT Chuyên; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, Nguyễn Anh Thắng, 11T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Chế Hoàng Thông, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Tuấn Anh, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, Bùi Đăng Khoa, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Phạm Minh Trí, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Vĩnh Long:** Phạm Phương Tùng, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Lâm Đồng:** Vũ Anh, 10T1, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt; **Quảng Ngãi:** Phạm Viết Nhã, 11T, THPT chuyên Lê Khiết; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T11/390.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, có đạo hàm trên khoảng $(0; 1)$ và thỏa mãn điều kiện $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với hai số thực k_1, k_2 bất kỳ, luôn tồn tại các số a, b phân biệt thuộc khoảng $(0; 1)$ sao cho

$$\frac{k_1}{f'(a)} + \frac{k_2}{f'(b)} = k_1 + k_2.$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh kết quả mạnh hơn: Với các số thực dương $k_1, k_2, \dots, k_n$ bất kỳ, luôn tồn tại các số $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 1$

$$\text{sao cho } \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{f'(a_i)} = \sum_{i=1}^n k_i. \quad (1)$$

Thật vậy, đặt $S_m = \sum_{i=1}^m k_i, m = 1, 2, \dots, n$. Ta có

$$0 < \frac{S_1}{S_n} < \frac{S_2}{S_n} < \dots < \frac{S_{n-1}}{S_n} < \frac{S_n}{S_n} = 1.$$

Do đó theo một tính chất quen thuộc của hàm số liên tục (Định lý Bolzano – Cauchy): Tồn tại

$$\text{các số } 0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1} < 1 \text{ thỏa mãn } f(c_i) = \frac{S_i}{S_n},$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Theo Định lý Lagrange tồn tại các số $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 1$, và $a_i \in (c_{i-1}; c_i), i = 1, \dots, n$ (coi $c_0 = 0, c_n = 1$) sao cho

$$f(c_i) - f(0) = f'(a_i) \cdot c_i,$$

$$f(1) - f(c_{n-1}) = f'(a_n)(1 - c_{n-1}),$$

$$f(c_{i+1}) - f(c_i) = f'(a_{i+1})(c_{i+1} - c_i)$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, n-2$.

$$\text{Bởi vậy } \frac{k_1}{S_n} = f'(a_1) \cdot c_1, \frac{k_n}{S_n} = f'(a_n)(1 - c_{n-1}),$$

$$\frac{k_{i+1}}{S_n} = f'(a_{i+1})(c_{i+1} - c_i), \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

Suy ra $f'(a_1) \cdot f'(a_2) \dots f'(a_n) \neq 0$ và

$$1 = (1 - c_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-2} (c_{i+1} - c_i) + c_1 = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{S_n \cdot f'(a_i)}.$$

Từ kết quả trên ta có (1). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Do sơ suất để bài đã in có lỗi, tòa soạn thành thật xin lỗi bạn đọc.

2) Khẳng định (1) có trong tạp chí *Mathematics Magazine* (USA) khoảng 30 năm trước đây. Các bạn học sinh sau tự sửa đề và có lời giải tốt:

Thái Bình: Trần Đăng Hải, 11T, THPT chuyên Thái Bình; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T12/390.** Cho tam giác ABC với trực tâm H . Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác AH của hai đường tròn nội tiếp các tam giác ABH và ACH đi qua trung điểm cạnh BC .

Lời giải. Trước hết, xin giới thiệu hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi M, N theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với AB, CD và $K = AC \cap MN$. Khi

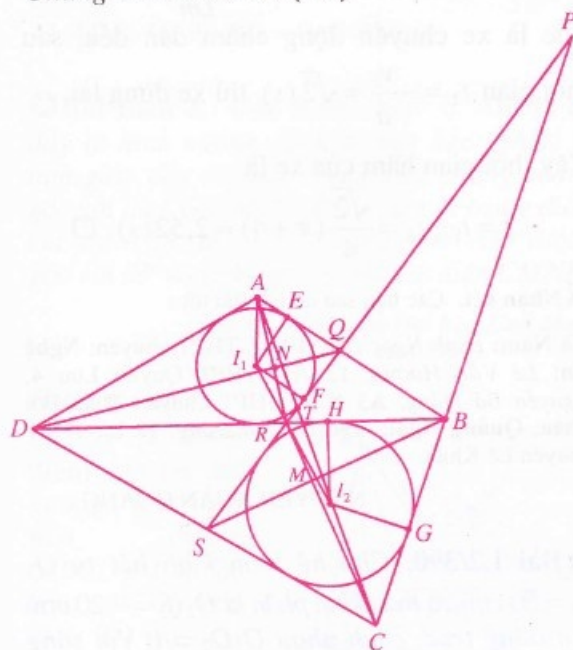
$$\text{đó } \frac{KM}{KN} = \frac{AM}{CN}.$$

Bổ đề 1 quen thuộc và việc chứng minh nó rất đơn giản, xin không trình bày ở đây.

Bổ đề 2. Cho tứ giác $ABCD$ (có thể không lồi). $(I_1), (I_2)$ theo thứ tự là đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, CBD . Tiếp tuyến chung trong khác BD của $(I_1), (I_2)$ cắt AC tại T . Khi

đó $\frac{TA}{TC} = \frac{\cot \frac{A}{2}}{\cot \frac{C}{2}}$ (A, C theo thứ tự là số đo của các góc $\widehat{BAD}, \widehat{BCD}$).

Chứng minh bổ đề 2. (h.1)



Hình 1

Gọi P, Q, R, S theo thứ tự là giao điểm của tiếp tuyến chung trong khác BD của $(I_1), (I_2)$ với BC, BA, BD, CD .

Đặt $M = CR \cap BS, N = AR \cap DQ$.

Gọi E, F là tiếp điểm của (I_1) với AQ, QR ; H, G là tiếp điểm của (I_2) với RB, BC theo thứ tự.

Áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác CBD, DRC tương ứng với các cát tuyến PRS, BMS , ta có

$$\frac{PC}{PB} \cdot \frac{RB}{RD} \cdot \frac{SD}{SC} = 1; \quad \frac{BD}{BR} \cdot \frac{MR}{MC} \cdot \frac{SC}{SD} = 1.$$

$$\text{Suy ra} \quad \frac{PC}{PB} \cdot \frac{DB}{DR} \cdot \frac{MR}{MC} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự} \quad \frac{QB}{QA} \cdot \frac{DR}{DB} \cdot \frac{NA}{NR} = 1 \quad (2)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BAC với cát tuyến QTP , ta có $\frac{QB}{QA} \cdot \frac{TA}{TC} \cdot \frac{PC}{PB} = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3), theo bổ đề 1, chú ý rằng $\widehat{FRI_1} = \widehat{HRI_2}$, gọi α là số đo của chúng, suy ra

$$\begin{aligned} \frac{TA}{TC} &= \frac{NA}{NR} \cdot \frac{MR}{MC} = \frac{EA}{FR} \cdot \frac{HR}{GC} = \frac{EA}{EI_1} \cdot \frac{FI_1}{FR} \cdot \frac{HR}{HI_2} \cdot \frac{GI_2}{GC} \\ &= \cot \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \cot \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{\cot \frac{A}{2}}{\cot \frac{C}{2}}. \end{aligned}$$

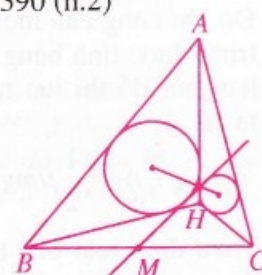
Bổ đề 2 đã được chứng minh.

Trở lại giải bài toán T12/390 (h.2)

Gọi M là giao điểm của tiếp tuyến chung trong khác AH của các đường tròn nội tiếp các tam giác ABH, ACH .

Áp dụng bổ đề 2 cho tứ giác lõm (tại H) $ABHC$, chú ý rằng

$\widehat{HBA} = \widehat{HCA}$, ta có $MB = MC$ (đpcm). $\square$

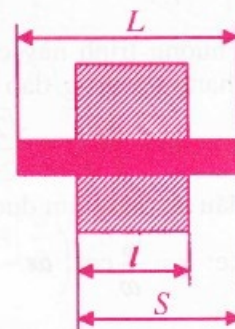


Hình 2

◀ Nhận xét. Rất tiếc không có bạn nào giải đúng bài toán này.

NGUYỄN MINH HÀ

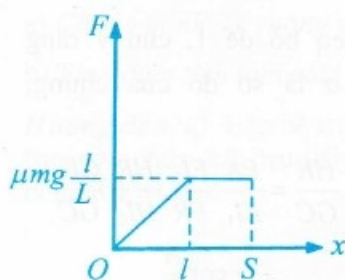
★ Bài L1/390. Một xe trượt dài $L = 4\text{m}$, khối lượng phân bố đều theo chiều dài, đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 2\text{m/s}$ trên mặt phẳng nằm ngang thì lao vuông góc vào dải đường nhám rộng $l = 2\text{m}$. Xe dừng lại sau khi đã đi thêm được quãng đường $S = 3\text{m}$, (hình vẽ). Lấy $g = 10\text{m/s}^2$. Hãy tính



a) Hệ số ma sát μ giữa bề mặt xe trượt với dải đường nhám.

b) Thời gian hãm của xe.

Lời giải. a) Chọn trục Ox dọc theo hướng trượt của thanh, gốc O tại vị trí thanh bắt đầu vào phần đường nhám.



Khi đầu xe có tọa độ x ($0 \leq x \leq l$), lực ma sát có độ lớn bằng $\mu \frac{mg}{L} x$.

Khi đầu xe vượt qua đường nhám, lực ma sát có giá trị không đổi bằng

$\mu mg \frac{l}{L}$. Đồ thị phụ thuộc lực ma sát vào tọa độ x của đầu xe như hình vẽ.

Độ lớn công của lực ma sát trong toàn bộ quá trình được tính bằng số đo diện tích hình giới hạn bởi đồ thị lực ma sát và trục hoành Ox , ta có

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \mu mg \frac{l^2}{L} + \mu mg \frac{l(S-l)}{L}.$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng độ giảm động năng bằng độ lớn công của lực ma sát:

$$\frac{mv_0^2}{2} = A \Rightarrow \mu = \frac{v_0^2 L}{gl(2S-l)} = 0,2.$$

b) • Khi $0 \leq x \leq l$, phương trình chuyển động của xe là

$$-\mu \frac{mg}{L} x = mx'' \Leftrightarrow x'' + \frac{\mu g}{L} x = 0.$$

Phương trình này cho thấy chuyển động của thanh có dạng dao động điều hòa với tần số

$$\text{góc } \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{L}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sử dụng điều kiện ban đầu dễ dàng tìm được phương trình tọa độ của

$$\text{xe: } x = \frac{v_0}{\omega} \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Khi đầu xe bắt đầu vượt qua dải đường nhám thì $x = l$, hay

$$\frac{v_0}{\omega} \cos\left(\omega l - \frac{\pi}{2}\right) = l \Rightarrow \sin \omega l = \frac{l\omega}{v_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \text{ (s)}, \text{ vận tốc của xe khi đó}$$

$$\text{bằng } v_1 = v_0 \cos \omega l = \sqrt{2} \text{ (m/s)}.$$

• Khi đầu xe đã vượt qua dải đường nhám ($l \leq x \leq S$), gia tốc của xe là $a = -\frac{\mu mg}{Lm} l = -1 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Tức là xe chuyển động chậm dần đều, sau thời gian $t_2 = -\frac{v_1}{a} = \sqrt{2} \text{ (s)}$ thì xe dừng lại.

Vậy thời gian hãm của xe là

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} (\pi + 4) \approx 2,52 \text{ (s)}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt :

Hà Nam: Đinh Ngọc Hải, 10 Lí, THPT chuyên; **Nghệ An:** Lê Văn Hướng, 12 A1, THPT Quỳnh Lưu 4, Nguyễn Bá Dũng, A3 K37, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Đông, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/390.** Cho hệ thấu kính hội tụ O_1 ($f_1 = 50 \text{ cm}$) và thấu kính phân kì O_2 ($f_2 = -20 \text{ cm}$) đặt đồng trục, cách nhau $O_1 O_2 = l$. Vật sáng AB được đặt trước hệ thấu kính và vuông góc với trục chính. Tìm l để ảnh của vật AB cho bởi hệ thấu kính có độ lớn không đổi dù AB ở bất cứ vị trí nào trước quang hệ. Hãy vẽ ảnh.

Lời giải. Sơ đồ tạo ảnh:

$$AB \xrightarrow{O_1} A_1 B_1 \xrightarrow{O_2} A_2 B_2.$$

$$\text{Ta có } K_1 = \frac{-f_1}{d_1 - f_1} \quad (1)$$

$$K_2 = \frac{-f_2}{d_2 - f_2} \quad (2)$$

$$d_2 = l - d_1' = l - \frac{d_1 f_1}{d_1 - f_1} = \frac{ld_1 - lf_1 - d_1 f_1}{d_1 - f_1} \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta có

$$K_2 = \frac{-f_2}{\frac{ld_1 - lf_1 - d_1 f_1}{d_1 - f_1} - f_2} = \frac{-f_2(d_1 - f_1)}{(l - (f_1 + f_2))d_1 - lf_1 + f_1 f_2}$$

Độ phóng đại của hệ:

$$K = K_1 \cdot K_2$$

$$= \frac{-f_1}{(d_1 - f_1)} \cdot \frac{-f_2(d_1 - f_1)}{(l - (f_1 + f_2))d_1 - lf_1 + f_1 f_2}$$

$$K = \frac{f_1 f_2}{(l - (f_1 + f_2))d_1 - lf_1 + f_1 f_2} \quad (4)$$

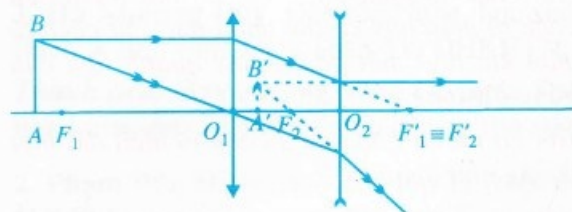
Để độ lớn của ảnh qua quang hệ không đổi ở bất cứ vị trí nào của vật trước quang hệ, nghĩa là $K_1 \cdot K_2$ không đổi thì trong biểu thức (4) thừa số của d_1 phải bằng không, tức là

$$l - (f_1 + f_2) = 0$$

$$\Rightarrow l = f_1 + f_2 = 50\text{cm} - 20\text{cm} = 30\text{cm}.$$

Vậy khi $l = 30\text{cm}$ thì ảnh của vật cho bởi hệ thấu kính sẽ có độ lớn không đổi dù vật ở bất cứ vị trí nào trước quang hệ.

Vẽ ảnh:



◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Cán thơ: Nguyễn Long Phúc Đường, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** Liêu Khắc Vũ, 10 Lí, THPT chuyên Bến Tre; **Bình Định:** Phạm Anh Thái, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, THPT chuyên Hà Nam; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Trọng Hoàng Hiệp, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Trang, THPT chuyên Bắc Ninh; **Quảng Ngãi:** Phạm Quốc Đôn, Nguyễn Tấn Toàn, 11B1, Nguyễn Tấn Đông, 12 lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Nghệ An:** Nguyễn Bá Dũng, A3K37, THPT chuyên Phan Bội Châu.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Đọc lại cho đúng

Trong số 393 (Tháng 3/2010) Đề bài T6/393 do sơ suất đã in nhầm dấu "=", đề nghị sửa lại thành dấu "≥". Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc

THTT

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T7/394. Consider all triangles ABC where $A < B < C \leq \frac{\pi}{2}$. Find the least value of the expression

$$M = \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2(\cot A - \cot B)(\cot B - \cot C)(\cot C - \cot A).$$

T8/394. Let ABC be a triangle with $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. A line d passing through its incenter meets AB , AC , BC respectively at M , N , P . Prove that

$$\frac{a}{BP \cdot PC} + \frac{b}{CN \cdot NA} + \frac{c}{AM \cdot MB} = \frac{(a+b+c)^2}{abc}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/394. Let x, y, z be non-zero real numbers such that

$$x + 2y + 3z = 5 \text{ and } 2xy + 6yz + 3xz = 8.$$

Prove that

$$1 \leq x \leq \frac{7}{3}; \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{7}{6}; \frac{1}{3} \leq z \leq \frac{7}{9}.$$

T10/394. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3(x+y)} \\ 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 15y^4. \end{cases}$$

T11/394. Find all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + xf(y) - xy - x + 1.$$

T12/394. Suppose that the tetrahedron $ABCD$ satisfies the following conditions: All faces are acute triangles and BC is perpendicular to AD . Let h_a, h_d be respectively the lengths of the altitudes from A, D onto the opposite faces, and let 2α ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$) be the measure of the dihedral angle at edge BC , d is the distance between BC and AD . Prove the inequality

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_d} \leq \frac{1}{d \cdot \sin \alpha}.$$

Translated by LE MINH HA

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2009 - 2010

MÔN TOÁN

NGUYỄN KHẮC MINH
(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD Bộ GD&ĐT)

Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT năm 2010 đã được tổ chức vào ngày 12/ 3/ 2010, cho 12 môn học. Tham dự kì thi, ở môn Toán có 403 học sinh (nhiều hơn 13 học sinh so với năm 2009) thuộc 68 đơn vị dự thi (mỗi đơn vị dự thi là một Tỉnh, Thành phố trực thuộc Trung ương hoặc một trường Đại học có khối, trường THPT chuyên). Trong buổi thi, mỗi thí sinh được đề nghị giải 5 bài tập thuộc 5 phân môn (Đại số, Giải tích, Hình học, Số học, Tổ hợp) trong thời gian 180 phút.

I. Đề thi

Câu 1 (4 điểm). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y). \end{cases}$$

Câu 2 (5 điểm). Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi $a_1 = 5$ và $a_n = \sqrt[n]{a_{n-1}^{n-1} + 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}}$ với mọi $n \geq 2$.

- 1) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n) .
- 2) Chứng minh rằng (a_n) là dãy số giảm.

Câu 3 (5 điểm). Trong mặt phẳng, cho đường tròn (O) và hai điểm cố định B, C nằm trên đường tròn đó sao cho dây BC không là đường kính. Xét một điểm A di động trên (O) sao cho $AB \neq AC$ và A không trùng với B, C . Gọi D và E lần lượt là giao điểm của đường thẳng BC với đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Gọi I là trung điểm của DE . Đường thẳng đi qua trục tâm của tam giác ABC và vuông góc với AI cắt các đường thẳng AD và AE tương ứng tại M và N .

- 1) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.
- 2) Xác định vị trí của điểm A sao cho tam giác AMN có diện tích lớn nhất.

Câu 4 (3 điểm). Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình $x^2 + 15y^2 = 4^n$ có ít nhất n nghiệm tự nhiên (x, y) .

Câu 5 (3 điểm). Cho số nguyên dương n . Cho bảng ô vuông kích thước 3×3 . Người ta dùng n màu để tô tất cả các ô vuông con của bảng sao cho trong mỗi cách tô, mỗi ô vuông con được tô bởi một màu.

Hai cách tô màu được coi là như nhau nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của bảng ô vuông.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đôi một không như nhau?

(Lưu ý: Trong một cách tô không nhất thiết phải dùng đủ n màu).

II. Chấm thi

Việc chấm thi được tiến hành từ ngày 19/3 đến ngày 24/3/2010, tại Hà Nội. Tổ chấm thi môn Toán đã làm việc với tinh thần trách nhiệm cao, đảm bảo đánh giá chính xác, khách quan, công bằng bài làm của các thí sinh, theo thang điểm đã được Lãnh đạo Ban chấm thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT năm 2010 phê chuẩn. Cũng như nhiều năm trước, tại kì thi năm nay bài làm của các thí sinh môn Toán **không bị trừ điểm trình bày**!

III. Chất lượng làm bài của thí sinh

Các số liệu thống kê dưới đây sẽ giúp độc giả có thể hình dung khái quát về tình hình làm bài của các thí sinh.

Điểm bài thi	17	15	14,5	14	13,5	13	12,75	12,5	12	11,5	11,25	11	10,75	10,5
Số bài thi	01	03	10	02	11	06	02	07	02	07	01	09	01	07
Điểm bài thi	10	9,5	9	8,75	8,5	8	7,5	7,25	7	6,75	6,5	6	5,75	5,5
Số bài thi	20	13	13	01	21	13	12	01	08	01	11	34	01	30
Điểm bài thi	5	4,5	4,25	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1,0	0,5	0,0		
Số bài thi	37	07	02	04	07	07	21	31	13	07	04	22		

Nhằm tạo điều kiện cho độc giả trong việc xử lý các số liệu nêu trên, xin nêu ra đây một số con số thống kê của kì thi năm 2009: Tỷ lệ thí sinh có điểm bài thi từ 10 điểm trở lên: 43%, từ 8 điểm trở lên: 56,4%, từ 5 điểm trở lên: 74,6%, từ 2 điểm trở xuống: 13,6%, từ 0,5 điểm trở xuống: 2% (trong đó, có 0,7% tổng số thí sinh có điểm bài thi là 0 điểm).

Xét theo từng bài toán thi, nếu với mỗi $n=1,5$ kí hiệu $s(n)$ là số thí sinh đạt điểm tối đa hoặc gần tối đa của Câu n trong đề thi năm nay, ta có: $s(1) = 80$, $s(2) = 238$, $s(3) = 88$, $s(4) = 8$ và $s(5) = 1$.

Căn cứ các số liệu nêu trên và các thông tin chuyên môn thu được trong quá trình chấm thi, Tổ chấm thi đã nhất trí nhận định: *chất lượng làm bài của các thí sinh năm nay kém hơn so với năm 2009*, mặc dù đề thi năm nay so với đề thi năm 2009 không có đột biến về cấu trúc cũng như về mức độ khó - dễ (xét dưới góc độ chuyên môn).

IV. Giải thưởng

Căn cứ Quy chế hiện hành và kết quả chấm thi, nhằm mục đích vừa đảm bảo Chất lượng chuyên môn cho danh hiệu "Học sinh Giỏi Toán cấp Quốc gia", vừa khích lệ, cổ vũ phong trào học sinh giỏi Toán trên phạm vi toàn quốc, theo đề nghị của Tổ chấm thi môn Toán và Ban chấm thi chọn học sinh giỏi quốc gia lớp 12 THPT năm 2010, Bộ GD&ĐT đã quyết định trao giải cho 150 thí sinh (chiếm 37,2% tổng số thí sinh), với mức điểm cho mỗi loại giải như sau:

- Giải Nhất: từ 17 điểm đến 20 điểm;
- Giải Nhì: từ 13,50 điểm đến 16,75 điểm;
- Giải Ba: từ 10,00 điểm đến 13,25 điểm;
- Giải Khuyến khích: từ 8,00 điểm đến 9,75 điểm.

Theo đó, có 01 thí sinh được trao giải Nhất, 26 thí sinh được trao giải Nhì, 62 thí sinh được trao giải Ba và 61 thí sinh được trao giải Khuyến khích.

Trong tổng số 68 đơn vị cử học sinh tham dự kì thi, có 49 đơn vị có học sinh đoạt giải; trong số này, có những đơn vị đã 3 năm liên tiếp (từ 2007 đến 2009) không có học sinh đoạt giải.

Kết quả cụ thể như sau:

• **Giải Nhất:** Nguyễn Quang Rực (lớp 11, Khối THPT chuyên Toán - Tin, trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội).

• **Giải Nhì:** Phạm Việt Cường, Hoàng Bùi Khánh, Nguyễn Anh Khoa, Lê Văn Tấn Quyền (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); Trương Thị Thu Nga, Nguyễn Đức Vinh (THPT chuyên Hà Nam); Đào Đức Mạnh (THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam), Đỗ Thanh Tùng (THPT Chu Văn An), Nguyễn Văn Vinh (THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội); Trần Văn Độ (THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương); Lê Hồng Phước (THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định); Tăng Văn Bình, Dương Hoàng Hưng, Nguyễn Quang Phú, Hoàng Nghĩa Quân, Vũ Đình Tâm, Trần Việt Thành (THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An); Tạ Đức Thành, Nguyễn Ngọc Trung (THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); Trần Quốc Luân, Nguyễn Đình Thi (THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên); Nguyễn Minh Hiếu (Khối THPT chuyên Toán - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội); Nguyễn Trường Giang, Trần Trung Kiên, Nguyễn Văn Linh (THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội); Trần Thái Hưng (Trường Thực hành SP, ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh).

• **Giải Ba:** Trần Khánh Hưng, Nguyễn Hữu Thọ (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu); Trần Lê Thu Hà, Dương Văn Hải, Trần Thị Thu Nga (THPT chuyên Bắc Giang); Nguyễn Tuấn An, Nguyễn Tuấn Linh, Nguyễn Văn Quý (THPT chuyên Bắc Ninh); Cao Thành Chương, Võ Minh Trí (THPT chuyên Bến Tre); Phạm Ngọc Vương (THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước); Lê Tiến Tài (THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận); Nguyễn Thu Hiền, Huỳnh Chí Thanh (THPT chuyên Phan Ngọc Hiền, Cà Mau); Nguyễn Kiều Hiếu (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); Nguyễn Thị Thanh Hòa (THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai); Trần Minh Đô (THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu, Đồng

Tháp); Trương Quang Dũng (THPT chuyên Hùng Vương, **Gia Lai**); **Trần Trung Kiên, Trần Phương Thủy** (THPT chuyên **Hà Nam**); **Nguyễn Minh Công, Nguyễn Tiến Dũng, Đỗ Kim Tuấn** (THPT chuyên **Hà Nội** - Amsterdam), **Nguyễn Thị Thu Phương** (THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**); **Nguyễn Ngọc Như, Phạm Minh Quang** (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); **Phạm Đức Hùng, Lưu Trung Kiên** (THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); **Nguyễn Sỹ Lộc, Đinh Đỗ Thủy** (THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**); **Nguyễn Chí Tài** (THPT chuyên, **Hưng Yên**); **Phùng Xuân Kiên** (THPT chuyên Thăng Long, **Lâm Đồng**); **Trần Thu Thủy, Trần Vũ Trung, Vũ Văn Tú** (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); **Nguyễn Đỗ Thành Duy, Lương Văn Thiện** (THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**); **Lê Hồng Nam** (THPT Lương Văn Chánh, **Phú Yên**); **Trần Xuân Hóa** (THPT chuyên **Quảng Bình**); **Tô Đình Dương** (THPT số 1 Đức Phổ, **Quảng Ngãi**); **Hoàng Vũ Minh** (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**); **Đinh Ngọc Hoa, Lương Thu Hương, Đỗ Trung Kiên, Nguyễn Hữu Thái** (THPT Chuyên, **Thái Bình**); **Lê Trọng Cường, Trần Xuân Quang** (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); **Lê Chí Tâm** (Quốc học Huế, **Thừa Thiên - Huế**); **Đinh Tiến Dũng, Đỗ Hồng Nhung** (THPT chuyên, **Vĩnh Phúc**); **Nguyễn Trần Thanh** (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**); **Mai Tiến Khải, Vũ Đình Long, Nguyễn Hữu Thanh** (Khối THPT chuyên Toán - Tin, **ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội**); **Nguyễn Mạnh Tiến, Nguyễn Tiến Trình** (Trường Phổ thông Năng khiếu - **ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh**); **Nguyễn Ngọc Long** (THPT chuyên, **ĐHSP Hà Nội**); **Trần Phương Thảo, Nguyễn Thanh Tú, Lê Thanh Tùng** (THPT chuyên - **ĐH Vinh**); **Nguyễn Thế Kỳ Cường, Đào Mạnh Khang** (Trường Thực hành SP, **ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh**).

• **Giải Khuyến khích:** **Võ Duy Tường** (THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu, **An Giang**); **Nguy Văn Hùng, Nguyễn Phương Quỳnh** (THPT chuyên **Bắc Giang**); **Nguyễn Văn Dương, Nguyễn Văn Long** (THPT chuyên **Bắc Ninh**); **Phạm Đặng Duy Quang** (THPT chuyên **Bến Tre**); **Phạm Thị Mỹ Hào** (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**); **Hoàng Văn Quý** (THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước**); **Đỗ Đức Hào** (THPT chuyên Trần Hưng Đạo, **Bình Thuận**); **Nguyễn Phạm Tuấn Anh** (THPT chuyên Phan Ngọc Hiền, **Cà Mau**); **Ngân Bá Đạt** (Dân tộc Tày), **Mông Quốc Hán** (Dân tộc Nùng), **Bùi Mạnh Tuyên** (THPT chuyên **Cao Bằng**); **Phạm Yofi** (THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**); **Phạm Minh Khoa** (THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**); **Nguyễn Trường Thịnh** (**Đồng Tháp**); **Phạm Đức Anh**

(THPT chuyên **Hà Nam**); **Phạm Văn Khánh** (THPT Ứng Hòa B), **Đường Mạnh Long** (THPT Chu Văn An - **Hà Nội**); **Nguyễn Thế Cường, Thiều Đăng Ba** (THPT chuyên **Hà Tĩnh**); **Nguyễn Nam Hải** (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); **Nguyễn Hồng Đức, Lê Văn Nhâm, Bùi Thanh Sơn, Nguyễn Quốc Tùng** (THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); **Phan Thanh Bình** (THPT chuyên Vị Thanh, **Hậu Giang**); **Hồ Phi Nhạn** (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Tp. Hồ Chí Minh**); **Phạm Văn Cường, Nguyễn Văn Dũng** (THPT chuyên **Hưng Yên**); **Vân Duy Ngọc Tân** (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa**); **Bạch Thu Hà** (nữ) (THPT chuyên Chu Văn An, **Lạng Sơn**); **Lương Bá Linh** (THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**); **Nguyễn Duy Quốc** (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Ninh Thuận**); **Nguyễn Trung Hà** (THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); **Nguyễn Huỳnh Bảo Trung** (THPT Lương Văn Chánh, **Phú Yên**); **Nguyễn Thị Hà Anh, Nguyễn Trung Kiên, Lê Văn Lâm, Nguyễn Viết Thanh, Nguyễn Đại Thành** (THPT chuyên **Quảng Bình**); **Nguyễn Tấn Hưng** (THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**); **Ngô Đức Long, Hoàng Minh Tuấn** (THPT chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**); **Hồ Xuân Kiên, Nguyễn Văn Năng** (THPT chuyên, **Thái Bình**); **Nguyễn Lê Hoàng** (THPT chuyên **Thái Nguyên**); **Hoàng Minh Tuấn** (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); **Nguyễn Đức Thành Công, Lê Thanh Phúc** (Quốc học Huế, **Thừa Thiên - Huế**); **Hoàng Đức Thắng** (THPT Chuyên, **Tuyên Quang**); **Đỗ Tiến Quang, Hà Ngọc Thủy** (nữ) (THPT chuyên **Vĩnh Phúc**); **Mai Xuân Hải, Đỗ Lê Hoàn** (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**); **Mạc Đức Huy, Kiều Quang Tuấn, Nguyễn Thanh Tùng** (Khối THPT chuyên Toán - Tin, **ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội**); **Phạm Hy Hiếu, Từ Nguyễn Thái Sơn** (Trường Phổ thông Năng khiếu - **ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh**); **Nguyễn Văn Thực** (THPT chuyên, **ĐHSP Hà Nội**).

V. Một số nhận xét và đánh giá

• Theo đánh giá của Tổ soạn thảo đề thi, nếu sắp xếp các bài tập trong đề thi theo thứ tự từ dễ đến khó thì thứ tự đó sẽ là: Câu 2 – Câu 3 – Câu 1 – Câu 5 – Câu 4.

Trong đề thi không có những bài toán quá khó như Câu 5 của đề thi năm 2009, đồng thời Câu 2 của đề thi năm nay dễ hơn Câu 2 (câu dễ nhất) của đề thi năm trước. Như thế, xét dưới góc độ chuyên môn, đề thi năm nay nhẹ nhàng hơn đề thi năm 2009.

• Theo đánh giá của Tổ chấm thi, Đề thi đảm bảo tính chính xác khoa học, đúng cấu trúc quy

định của Bộ GD&ĐT (về hình thức cũng như về bản chất toán học), phù hợp các yêu cầu đối với một học sinh giỏi Quốc gia môn Toán cấp THPT, có khả năng phân loại thí sinh.

- Có ý kiến rằng nhiều thí sinh vì ngay vào đầu buổi thi đã bị “sa lầy” ở Câu 1 (do nghĩ đây là câu dễ nhất của đề) nên bị ức chế tâm lý, gây ảnh hưởng không tốt tới việc làm bài thi. Nếu đây là sự thật thì điều này cho thấy các thí sinh đó thiếu sự chuẩn bị tốt (về kiến thức hoặc về tâm lý thi, về cách làm bài thi) cho kì thi, đồng thời chưa quan tâm đúng mức đến Cấu trúc của đề thi mà Bộ GD&ĐT đã thông báo tới các thí sinh thông qua các cơ quan quản lí giáo dục của các đơn vị dự thi, vì các lẽ sau:

- + Cấu trúc của đề thi không yêu cầu các bài tập trong đề phải được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, mà ấn định câu thứ bao nhiêu phải là bài tập thuộc phân môn nào;

- + Một thí sinh được chuẩn bị tốt về tâm lý thi, về cách làm bài thi sẽ đọc cẩn thận toàn bộ đề thi trước khi làm bài, biết cân đối thời gian trong quá trình làm bài, ... ;

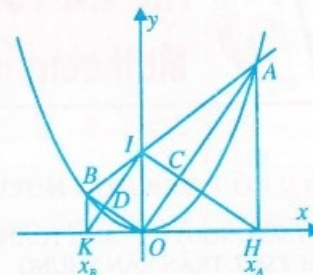
- + Một học sinh giỏi Toán, được chuẩn bị đầy đủ về chuyên môn cho kì thi không thể không nhận thấy Câu 2 là câu dễ nhất trong đề.

- Chất lượng làm bài của thí sinh trong kì thi năm nay là một dấu hiệu cho thấy sự đi xuống của phong trào học sinh giỏi Toán trong mấy năm gần đây. Nhằm mục đích ngăn chặn xu thế này, giúp phong trào hồi phục và phát triển, Tổ chấm thi đã nhất trí kiến nghị các cấp có thẩm quyền có giải pháp hữu hiệu cổ vũ, khích lệ học sinh giỏi say mê học Toán và tích cực tham gia thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán (chẳng hạn: khôi phục các quyền lợi đã có đối với các học sinh đoạt giải Quốc gia, ...).

- Ngoài giải pháp mà Tổ chấm thi đã kiến nghị nêu trên, có thể còn những giải pháp khác để cải thiện thực trạng hiện nay của phong trào học sinh giỏi Toán. Tuy nhiên, trong các giải pháp đó không thể có giải pháp biến đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán thành một đề thi có chất lượng chuyên môn tương đương một đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng (môn Toán) hay một đề thi tốt nghiệp THPT (môn Toán).

PARABOL... (Tiếp trang 3)

2. Kẻ AH và BK vuông góc với trục hoành (H và K thuộc Ox). Từ đó các bạn có thể khám phá thêm một điều lí thú nữa. “Tam giác IHK vuông tại I chăng?”



Hình 4

Thật vậy, hệ số góc của đường thẳng IH là

$$\frac{y_I - y_H}{x_I - x_H} = \frac{y_I}{-x_A} = \frac{1}{a} : \left(-\frac{k}{a}\right) = -\frac{1}{k}.$$

Hệ số góc của đường thẳng IK là

$$\frac{y_I - y_K}{x_I - x_K} = \frac{y_I}{-x_B} = \frac{1}{a} : \left(-\frac{1}{ak}\right) = k.$$

Từ đó suy ra IH vuông góc với IK (h. 4).

Bạn đọc cũng có thể chứng minh rằng $\triangle OIK \sim \triangle OHI$, từ đó suy ra $\widehat{HIK} = 90^\circ$, hoặc có thể sử dụng định lí Pythagore đảo.

Đến đây các bạn có thể kiểm tra lại kết quả của bài toán bằng cách cho a một giá trị nào đó.

3. Gọi C là giao điểm của IH và OA . Gọi D là giao điểm của IK và OB thì tứ giác $ICOD$ là hình gì?

4. Bây giờ ta hãy thành lập bài toán ngược.

Cho Parabol $y = ax^2$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy và điểm $I \left(0; \frac{1}{a}\right)$. Vẽ đường thẳng (d) bất kỳ qua I cắt hai nhánh của (P) tại A và B . Hãy chứng minh tam giác OAB vuông tại O .

Các em hãy tự giải phần 3. và 4. nhé.

Qua bài toán trên, chắc Bạn đọc đã thấy được “cái đẹp” của điểm I rồi chứ. Tọa độ $I \left(0; \frac{1}{a}\right)$ tùy thuộc vào hệ số a của (P)

Hãy tự đặt cho điểm đặc biệt này một tên riêng... mà bạn thích.



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 394 (4.2010)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOẢN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Nguyễn Đức Hảo – Parabol - một đường cong tuyệt đẹp.
- 4 **Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên toán Trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An năm học 2009 – 2010.**
- 5 **Hà Huy Khoái – Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2009.**
- 6 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Phùng Hồng Kôn – Giải toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ.
- 9 **Toán học & đời sống – Math and Life**
Nguyễn Việt Hải – Đối chiếu ngày Dương lịch và Âm lịch năm Canh Dần 2010.
- 11 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Cao Minh Quang – Tham số hóa trong phương trình nghiệm nguyên.
- 14 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Võ Trọng Trí – Kỹ thuật tính giới hạn bằng vô cực trong chương trình mới.
- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/394, ..., T12/394, L1/394, L2/394.
- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 390.
- 28 **Nguyễn Khắc Minh – Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT năm học 2009 – 2010, môn Toán.**

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG

Trĩ sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật : MINH THO

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

XIN TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU CÙNG BẠN ĐỌC



❁ PHIÊN BẢN *Chiêu dời đồ* CỦA VUA LÝ CÔNG UẨN

Đây là ấn phẩm chào mừng Đại lễ Kỷ niệm 1000 năm Thăng Long - Hà Nội của NXBGD Việt Nam. Phiên bản được trình bày bằng ba thứ tiếng trên chất liệu giấy dó truyền thống, kích thước 25 x 100 cm. Nguyên bản tiếng Hán được thể hiện bởi nét bút tài hoa của nhà thư pháp Nguyễn Văn Bách. Mặt còn lại là bản Tiếng Việt và Tiếng Anh.

Phiên bản được thiết kế, trình bày đẹp, trang trọng, độc đáo.

Giá: 136 000 đồng và 200 000 đồng (đối với loại có hộp đựng đặc biệt).



❁ TẬP BẢN ĐỒ LỊCH SỬ - TRUNG HỌC CƠ SỞ

Đồng chủ biên: Phan Ngọc Liên, Trịnh Đình Tùng, Nguyễn Thế Hiệp, Nguyễn Quý Thao, Nguyễn Thị Hồng Loan.

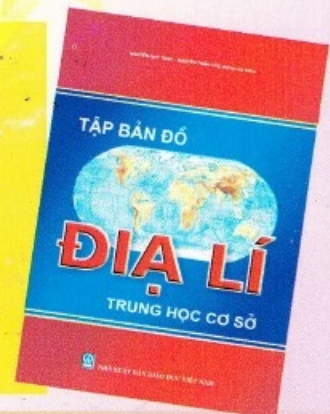
Sách gồm 80 trang, khổ 42 x 59 cm, giá 600 000 đồng.

❁ TẬP BẢN ĐỒ ĐỊA LÍ - TRUNG HỌC CƠ SỞ

Đồng chủ biên: Nguyễn Quý Thao, Nguyễn Trần Cầu.

Sách gồm 80 trang, khổ 42 x 59 cm, giá 550 000 đồng.

Đây là hai ấn phẩm chất lượng cao được xuất bản để chào mừng Kỷ niệm 20 năm thành lập Công ty CP Bản đồ và Tranh ảnh Giáo dục thuộc NXBGD Việt Nam. Với tập thể tác giả có kinh nghiệm và tâm huyết, hai tập bản đồ được biên soạn công phu, bố cục và sắp xếp bám sát chương trình và sách giáo khoa hiện hành, được trình bày khoa học, hấp dẫn, sinh động và được in với công nghệ cao trên giấy couché 200g/m² kích thước 42 x 59cm với mong muốn hỗ trợ các thầy cô giáo, học sinh, sinh viên vừa nắm được một cách hệ thống kiến thức Lịch sử, Địa lí, vừa giúp việc khai thác bản đồ trong giảng dạy và học tập được thuận lợi và hiệu quả.



Các thầy cô giáo, các em học sinh và bạn đọc cả nước có thể tìm mua các ấn phẩm trên tại các nhà sách của NXBGD Việt Nam (<http://www.nxbgd.vn>) và Công ty CP Bản đồ và Tranh ảnh Giáo dục (<http://www.bandotranhanh.vn>).

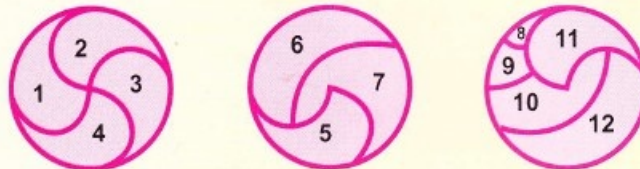


Giải đáp: **Cắt giấy,** **ghép thành số 9-2009**

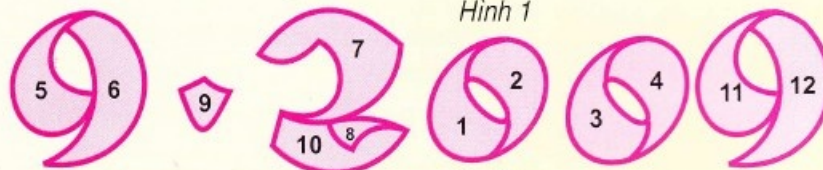
(Đề đăng trên THPT số 387, tháng 9.2009)

Cắt như ở hình 1 rồi ghép như ở hình 2.

Các đường cong bị cắt là các cung tròn của hai đường tròn, trong đó bán kính đường tròn nhỏ bằng nửa bán kính đường tròn lớn ban đầu.



Hình 1



Hình 2

AN MINH

Con kiến bò trên khối lập phương

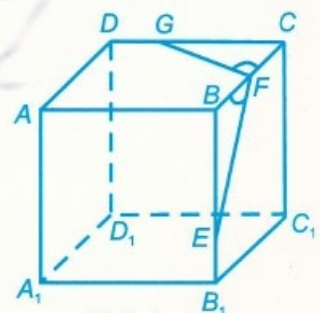
Một con kiến bò trên các mặt của khối lập phương (h.3). Ban đầu kiến ở điểm E thuộc cạnh BB_1 , ($BE = 3EB_1$), nó bò trên mặt BB_1CC_1 theo đường thẳng đến điểm F thuộc cạnh BC ($BF = FC$) rồi bò tiếp sang mặt $BCDA$ theo đường thẳng đến điểm G thuộc cạnh CD sao cho $\widehat{CFG} = \widehat{BFE}$ và cứ bò tiếp tục như thế.

Hỏi con kiến có thể trở về điểm E lần nữa không?

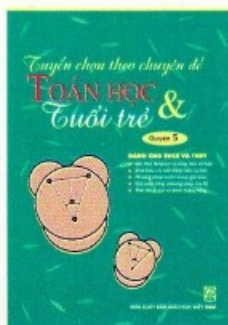
Bạn hãy vẽ đường đi của con kiến và giải thích câu trả lời.

LỤC BÌNH

(GV THPT Nguyễn Huệ, TX. Quảng Trị)



Hình 3



SÁCH MỚI

Cuốn sách **TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC & TUỔI TRÈ QUYỂN 5** sẽ ra mắt bạn đọc vào Quý II năm 2010. Sách dành cho bạn trẻ yêu toán, đặc biệt cho các bạn chuẩn bị thi tốt nghiệp THPT và thi vào đại học. Trong sách trình bày các bài toán về nhị thức Newton, công thức tổ hợp, bất đẳng thức, phương pháp vectơ và phương pháp tọa độ.

Sách dày 240 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá : 42.500 đồng.

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT04M0

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lu chiếu tháng 4 năm 2010

Giá : 6000 đồng

Sáu nghìn đồng