



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
3 2010
Số 393

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 47

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



Chúc mừng
ngày Quốc tế Phụ nữ 8/3



Hỏi - Đáp về phong trào thi đua "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC"

CÂU HỎI. Nhà trường cần làm gì để duy trì bền vững các hoạt động ngoại khóa của học sinh?

Trả lời. Để duy trì bền vững các hoạt động ngoại khóa của học sinh, nhà trường cần:

- Cải tiến nội dung dạy học và các hoạt động giáo dục cho phù hợp với nhu cầu và cuộc sống của học sinh tại địa phương, trên cơ sở đảm bảo các nguyên tắc và yêu cầu mà Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quy định và hướng dẫn.
- Tôn trọng vai trò cùng tham gia của học sinh.
- Tạo bầu không khí thân thiện, cởi mở, trong đó học sinh được lắng nghe, chia sẻ, hoà nhập, tự tin và cảm thấy an toàn, hứng thú trong mỗi hoạt động (có hòm thư về trường học thân thiện, học sinh tích cực để lấy ý kiến của học sinh và xử lý thông tin kịp thời, có biện pháp quan tâm thực sự đến những học sinh có hoàn cảnh khó khăn, ...).
- Dự trù ngân sách hằng năm để mua sắm mới và bổ sung các dụng cụ thể thao như bóng đá, bóng rổ, bóng chuyền, cầu lông, quả cầu (dùng cho đá cầu), dây kéo co; và các nhạc cụ, trong đó có các nhạc cụ dân tộc.... để tổ chức cho học sinh hoạt động, vui chơi, ca hát phù hợp với điều kiện sân bãi, cơ sở vật chất của trường.
- Phát động giáo viên, học sinh, các đoàn viên thanh niên lớn tuổi, học sinh cũ của trường, các bậc phụ huynh và tổ chức xã hội, các cá nhân, doanh nghiệp quan tâm hoặc sưu tầm, sản xuất đóng góp các dụng cụ, phương tiện để tặng cho nhà trường, hoặc đóng góp kinh phí cho công việc này, lập sổ vàng ghi danh các cá nhân và tập thể đó để Ban chỉ đạo các cấp tổng hợp, chọn lọc và công bố trên trang Web của Bộ Giáo dục và Đào tạo hoặc các phương tiện truyền thông khác. Tổ chức cho học sinh tự làm hoặc sưu tầm các dụng cụ cho trò chơi dân gian.
- Tạo điều kiện về vật chất và tinh thần cho học sinh phát huy tính sáng tạo thông qua việc tham gia sinh hoạt câu lạc bộ (câu lạc bộ khoa học kỹ thuật, câu lạc bộ văn hoá - văn nghệ, câu lạc bộ thể thao); các hoạt động có tính chất khảo sát, tìm hiểu (sưu tầm vốn văn hoá dân gian, trò chơi dân gian, tìm hiểu về di tích lịch sử, văn hoá ở địa phương ...).
- Đảm bảo bình đẳng về giới thông qua học tập cũng như qua việc tổ chức các hoạt động vui chơi nói chung, trò chơi dân gian, hát dân ca, hoạt động thể dục thể thao nói riêng.

CÂU HỎI. Phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực" được đánh giá, khen thưởng theo những yêu cầu nào?

Trả lời. Phần thưởng lớn nhất đối với các trường, với các em học sinh khi thực hiện phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực" là niềm vui đến trường của các em, là hiệu quả và chất lượng giáo dục, là sự trưởng thành về nhân cách của các em, là niềm vui của gia đình, là niềm tin của xã hội đối với nhà trường và ngành Giáo dục.

Sự đánh giá chính xác nhất đối với nhà trường khi tham gia phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực" chính là sự thừa nhận của học sinh nhà trường, của các thầy cô giáo trong trường về việc trường đã đạt được 5 nội dung ở mức nào, bằng cách nào.

Như vậy, việc đánh giá kết quả phong trào thi đua ở mỗi trường cần đối chiếu với tình hình của trường trước khi triển khai phong trào thi đua, hoặc trước mỗi đầu năm học, đối chiếu với 5 nội dung của phong trào, nhà trường đã chọn mức phần thưởng cho từng năm học thế nào theo tinh thần: mỗi năm học tạo sự chuyển biến, tiến bộ thực sự ở một số nội dung, phát huy tối đa khả năng của nhà trường và xã hội, nhưng không chạy theo "bệnh thành tích". Trường nào có điều kiện "xuất phát" khó khăn, nhưng đạt được tiến bộ cụ thể, có cách làm hiệu quả, sáng tạo, đã tự nâng mình lên qua mỗi năm học đều xứng đáng được đánh giá cao và khen thưởng. Có thể nói đơn giản, việc đánh giá phong trào thi đua ở mỗi cơ sở theo tiêu chí 5 + 1: 5 nội dung phong trào thi đua cộng cách làm thế nào (chủ động, hiệu quả, sáng tạo).

Việc đánh giá kết quả phong trào thi đua của một trường theo tiêu chí 5 + 1 nên được làm ở hai hình thức:

- Tự tập thể học sinh, giáo viên và trường đánh giá (học sinh, giáo viên nhà trường có thể bỏ phiếu đánh giá kết quả phong trào thi đua của trường theo tiêu chí 5 + 1, trên cơ sở báo cáo của Hiệu trưởng, sự tự nhận xét của học sinh, giáo viên và mỗi học sinh, giáo viên tự cho điểm thi đua của 5 + 1 tiêu chí, sau đó nhà trường tổng hợp và công bố, phân tích.)
- Cấp trên và các tổ chức ngoài nhà trường đánh giá: Trên cơ sở hoạt động thực tế của nhà trường, báo cáo của Hiệu trưởng, ý kiến đánh giá của học sinh, giáo viên, Phòng Giáo dục và Đào tạo, Sở Giáo dục và Đào tạo, phối hợp với ngành Văn hoá, Thể thao, Du lịch và Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh, các đoàn thể và chính quyền địa phương đánh giá và đề nghị các cấp khen thưởng.

Việc đánh giá và khen thưởng các nhà trường, các địa phương trong phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực" cần làm hằng năm, có sơ kết vào cuối học kì I.

Nguồn: Dự án Phát triển Giáo dục THCS II, Bộ GD&ĐT - Một trong các cơ quan thường trực Ban Chỉ đạo phong trào.

(Chi tiết xem cuốn SỔ TAY TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC 2008 - 2013).



MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CÓ CHỨA BIẾN Ở MẪU

NGUYỄN MINH NHIÊN

(GV THPT Quế Võ số 1, Bắc Ninh)

Trong các kì thi vào lớp 10 THPT chuyên trong cả nước và các kì thi học sinh giỏi, ta gặp rất nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức (BDT) có chứa biến ở mẫu. Trong bài viết này, tác giả xin giới thiệu một số kĩ năng giải bài toán dạng này.

1. Sử dụng hai bất đẳng thức cơ bản sau

Với a, b, c là ba số thực dương tùy ý, ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (1) \quad ; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad (2)$$

★ **Thí dụ 1.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \geq 16$.

(THPT chuyên Hà Tĩnh 2007-2008)

Lời giải. Áp dụng BDT (1) ta có

$$\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{4}{c(a+b)} \geq \frac{4}{\left(\frac{c+a+b}{2} \right)^2} = 16.$$

Đẳng thức xảy ra khi $c = \frac{1}{2}, a = b = \frac{1}{4}$. □

★ **Thí dụ 2.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2009}{ab+bc+ca} \geq 670.$$

(THPT NK Trần Phú, Hải Phòng, 2009-2010)

Lời giải. Áp dụng BDT (2) ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq 1 \quad (3)$$

Mặt khác, ta có $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$,

$$\text{suy ra } \frac{2007}{ab+bc+ca} \geq \frac{3 \cdot 2007}{(a+b+c)^2} \geq 669 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

2. Đặt mẫu là các biến mới

★ **Thí dụ 3.** Cho ba số thực dương x, y, z .

Chứng minh rằng $\frac{25x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{9z}{x+y} > 12$ (5)

Lời giải. Đặt $a = y+z, b = z+x, c = x+y$ (với $a > 0, b > 0, c > 0$). Suy ra

$$x = \frac{b+c-a}{2}, y = \frac{c+a-b}{2}, z = \frac{a+b-c}{2}. \text{ Ta có}$$

$$\text{VT (5)} = \frac{25(b+c-a)}{2a} + \frac{4(c+a-b)}{2b} + \frac{9(a+b-c)}{2c}$$

$$= \left(\frac{25b}{2a} + \frac{4a}{2b} \right) + \left(\frac{25c}{2a} + \frac{9a}{2c} \right) + \left(\frac{4c}{2b} + \frac{9b}{2c} \right) - 19$$

$$\geq 10 + 15 + 6 - 19 = 12.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 5b=2a \\ 5c=3a \end{cases} \Rightarrow 5b+5c=5a \Rightarrow x=0 \text{ (vô lí)}.$$

Vậy BDT (5) đúng. □

3. Đánh giá nghịch đảo

★ **Thí dụ 4.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a-b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

Số 393 (3-2010)

TOÁN HỌC
8 Tuổi Trẻ

1

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$2\sqrt{\frac{b+c-a}{a}} \leq \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{b+c}{a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c-a}} \geq \frac{2a}{b+c}.$$

Tương tự, $\sqrt{\frac{b}{c+a-b}} \geq \frac{2b}{a+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq \frac{2c}{a+b}$.

Ta chỉ cần chứng minh $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Bài toán quen thuộc này xin dành cho bạn đọc. $\square$

4. Đưa về đồng bậc

★ **Thí dụ 5.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{ab+cb+ca+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right).$$

Tương tự có $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} \right)$,
 $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c} \right)$.

Cộng theo về các BĐT trên suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. $\square$

5. Thêm bớt biểu thức để khử mẫu

★ **Thí dụ 6.** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy+yz+zx).$$

(Iran MO 2008)

Lời giải. Ta có

$$\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y+2}{27} + \frac{y^2-2y+4}{27} \geq \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y^3+8} \geq \frac{9x+y-y^2-6}{27}.$$

Tương tự ta có

$$\frac{y^3}{z^3+8} \geq \frac{9y+z-z^2-6}{27}; \quad \frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{9z+x-x^2-6}{27}.$$

Cộng theo về ba BĐT trên ta có

$$VT \geq \frac{10(x+y+z) - (x^2+y^2+z^2) - 18}{27}$$

$$= \frac{12 - (x^2+y^2+z^2)}{27} = \frac{3 + (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{27}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy+yz+zx).$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. $\square$

★ **Thí dụ 7.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

(THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định 2009-2010)

Lời giải. Ta có

$$\frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2) - ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab}{2}.$$

Tương tự có $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}$; $\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ac}{2}$.

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$a+b+c - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{2}.$$

Từ BĐT $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$

$$\Rightarrow ab+bc+ca \leq 3, \text{ suy ra}$$

$$a+b+c - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

6. Đánh giá mẫu

★ **Thí dụ 8.** Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \geq \frac{1}{5}(a+b+c) \quad (6)$$

(Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQGHN 2009-2010, vòng 2)

Lời giải. Ta có

$$\sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{(a+4b)(3a+2b)}$$

$$\leq \frac{1}{2}(4a+6b) = 2a+3b.$$

Tương tự với các mẫu số còn lại. Từ đó,

$$\text{VT (6)} \geq \frac{a^2}{2a+3b} + \frac{b^2}{2b+3c} + \frac{c^2}{2c+3a}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{2a+3b+2b+3c+2c+3a} = \frac{1}{5}(a+b+c) = \text{VP (6)}$$

Từ đó, suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. $\square$

★Thí dụ 9. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1 \quad (7)$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh BĐT $x^5+y^5 \geq x^2y^2(x+y)$ (*) với mọi $x > 0, y > 0$.

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow x^3(x^2-y^2)+y^3(y^2-x^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3-y^3)(x^2-y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)(x^2+xy+y^2) \geq 0, \forall x, y > 0.$$

$$\text{Do đó } \frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab}$$

$$= \frac{1}{ab(a+b)+abc} = \frac{1}{ab(a+b+c)}.$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{bc}{b^5+c^5+bc} \leq \frac{1}{bc(a+b+c)};$$

$$\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq \frac{1}{ca(a+b+c)}.$$

Suy ra

$$\text{VT(7)} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} + \frac{1}{bc(a+b+c)} + \frac{1}{ca(a+b+c)}$$

$$= \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = 1.$$

Hì vọng qua các thí dụ trên các bạn nắm được phần nào các kĩ năng chứng minh BĐT chứa biến ở mẫu. Sau đây là một số bài tập tự luyện.

1. Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng $\frac{2a^3}{a^6+bc} + \frac{2b^3}{b^6+ca} + \frac{2c^3}{c^6+ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$.

2. Cho x, y, z dương, $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng $\frac{2y+3z+5}{1+x} + \frac{3z+x+5}{1+2y} + \frac{x+2y+5}{1+3z} \geq \frac{51}{7}$.

(Khối THPT chuyên, ĐH Vinh, 2009-2010)

3. Cho a, b dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a+b}{\sqrt{a(4a+5b)} + \sqrt{b(4b+5a)}}$$

(Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQGHN 2009-2010, vòng 1)

4. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{2a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{2b+ca}} \leq 1.$$

5. Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng $1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \geq \frac{6}{a+b+c}$.

(Macedonia TST 2007)

6. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$M = \frac{a^5}{b^3+c^2} + \frac{b^5}{c^3+a^2} + \frac{c^5}{a^3+b^2} + a^4 + b^4 + c^4.$$

7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc}.$$

(Rumania TST 2008)

8. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5+b^5}{ab(a+b)} + \frac{b^5+c^5}{bc(b+c)} + \frac{c^5+a^5}{ca(c+a)} \geq 3(ab+bc+ca) - 2.$$

9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{1}{a+1}\right) \left(b + \frac{1}{b+1}\right) \left(c + \frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8}.$$

(Ukraine Mathematic Festival 2007)

10. Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c.$$

Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên Toán TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH

✿✿✿ NĂM HỌC 2009 – 2010 ✿✿✿

(Đề thi đã đăng trên THPT số 392, tháng 2 năm 2010)

Câu 1. 1) ĐK $x \geq 0$. Đặt $\sqrt{x} = t$ ($t \geq 0$). PT đã cho trở thành $\sqrt{6+t} = t+2 \Leftrightarrow 6+t = (t+2)^2$
 $\Leftrightarrow t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ (vì $t \geq 0$).

$$\text{Vậy } x = t^2 = \frac{13-3\sqrt{17}}{2}.$$

$$2) \text{ Đặt } S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}};$$

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}.$$

Ta có $S > S_1$, suy ra $2S > S + S_1$. Mặt khác,

$$S + S_1 = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{101}-\sqrt{99}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{101}-1}{2} > \frac{9}{2}. \text{ Vậy } S > \frac{9}{4}.$$

Câu 2. 1) Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$). PT đã cho trở thành $t^2 - 6t + 4 = 0$ (1)

PT (1) có $\Delta' = 5 > 0$; $-\frac{b}{a} = 6 > 0$ và $\frac{c}{a} = 4 > 0$.

Suy ra PT (1) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 . Do đó PT đã cho có bốn nghiệm phân biệt $x_1 = -\sqrt{t_1}, x_2 = \sqrt{t_1}, x_3 = -\sqrt{t_2}, x_4 = \sqrt{t_2}$.

Theo Vietet ta có $t_1 + t_2 = 6, t_1 t_2 = 4$. Suy ra

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 = 2(t_1^3 + t_2^3)$$

$$= 2(t_1 + t_2)^3 - 6t_1 t_2 (t_1 + t_2) = 288.$$

2) Từ PT thứ nhất của hệ ta có

$$x^3 = -3(y-1)^2 - 1 \leq -1 \Rightarrow x \leq -1 \quad (1)$$

Mặt khác, từ PT thứ hai của hệ suy ra

$$x^2(y^2 + 1) = 2y \Rightarrow x^2 = \frac{2y}{y^2 + 1} < 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x = -1$. Thay vào PT thứ nhất của hệ ta được $y = 1$.

Thử lại ta thấy hệ PT đã cho có nghiệm

$$(x; y) = (-1; 1).$$

Câu 3. 1) (h. 1)

Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$,

$\widehat{ANC} = 90^\circ$. Gọi J

là trung điểm của MN , I là giao điểm của BC với đường trung trực của MN .

Khi đó $IJ \perp MN \Rightarrow IJ \parallel BM \parallel CN$. Suy ra I là trung điểm của BC . Vậy đường trung trực của MN luôn đi qua trung điểm của BC (cố định).

2) Ta có

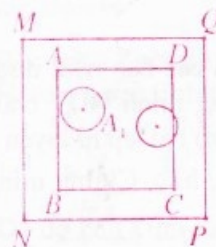
$$MB + MN + NC = (MB + MA) + (NA + NC)$$

$$\leq \sqrt{2(MB^2 + MA^2)} + \sqrt{2(NA^2 + NC^2)}$$

$$= \sqrt{2}(AB + AC).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $MA = MB$ và $NA = NC \Leftrightarrow \widehat{MAB} = \widehat{NAC} = 45^\circ$. Điều này không thể xảy ra vì $\triangle ABC$ nhọn. Vậy đẳng thức không xảy ra. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 4. Gọi $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 8cm. Giả sử 100 điểm được vẽ bên trong hình vuông $ABCD$ là $A_1, A_2, \dots, A_{100}$. Vẽ 100 đường tròn tâm A_i có cùng bán kính bằng 1cm, kí hiệu mỗi đường tròn này là $(A_i), i = 1, 2, \dots, 100$. Tổng diện tích của 100 hình tròn vừa vẽ là $S = 100\pi \text{ cm}^2$.



Hình 2

Vẽ hình vuông $MNPQ$ có tâm trùng với tâm hình vuông $ABCD$ (h.2), có $MN \parallel AB$ và $MN = 10\text{cm}$. Khi đó tất cả các đường tròn đã vẽ ở trên đều nằm bên trong hình vuông $MNPQ$.

Đề thi vào lớp 10 chuyên toán

TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN

NĂM HỌC 2009 - 2010

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1. (3.5 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{7-x} = 3$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2+3x = \frac{8}{y^3} \\ x^3 - 2 = \frac{6}{y} \end{cases}$$

Bài 2. (1.0 điểm)

Tìm số thực a để phương trình sau có nghiệm nguyên $x^2 - ax + a + 2 = 0$.

Bài 3. (2.0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác trong BE (E thuộc AC). Đường tròn đường kính AB cắt BE , BC lần lượt tại M , N (M , N khác B). Đường thẳng AM cắt BC tại K . Chứng minh rằng $AE \cdot AN = AM \cdot AK$.

Bài 4. (1.5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, trung tuyến AO có độ dài bằng độ dài cạnh BC .

và hình vuông $MNPQ$ có diện tích $S_1 = 100\text{cm}^2$. Do $\pi > 3$ nên $S > 3S_1$, suy ra tồn tại điểm O là điểm trong của ít nhất 4 đường tròn trong số các đường tròn (A_i) . Giả sử 4 đường tròn này là (A_1) , (A_2) , (A_3) , (A_4) . Khi đó 4 điểm A_1 , A_2 , A_3 , A_4 sẽ nằm bên trong đường tròn tâm O bán kính bằng 1cm.

Câu 5. 1) ĐK: $1 - 4x - x^2 \geq 0$. Ta có

$$P \leq 2x + \frac{(1-4x-x^2)+1}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1, đạt được khi và chỉ khi $x = 0$.

Đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB , AC thứ tự tại M , N (M khác B , N khác C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng AO lần lượt tại I và K . Chứng minh rằng tứ giác $BOIM$ nội tiếp và tứ giác $BICK$ là hình bình hành.

Bài 5. (2.0 điểm)

a) Bên trong đường tròn tâm O bán kính 1 cho tam giác ABC có diện tích lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng điểm O nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác ABC .

b) Cho a , b , c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}.$$

THÁI VIẾT THẢO – MAI XUÂN VINH
(Sở GD-ĐT Nghệ An) giới thiệu

2) • Nếu $x \geq y \Rightarrow 4x - 4y \geq 0$. Từ giả thiết ta có $z^2 = x^2y^2 - 4x + 4y \leq x^2y^2 \Rightarrow xy \geq z$ (1)

Mặt khác, vì x, y nguyên lớn hơn 1 ta có $z^2 = x^2y^2 - 4x + 4y > x^2y^2 - 2xy + 1 = (xy - 1)^2 \Rightarrow z > xy - 1$ (2)

Từ (1), (2) và x, y, z nguyên suy ra $z = xy$. Thay vào điều kiện giả thiết suy ra $x = y$.

• Nếu $x < y$, tương tự như trên suy ra $xy < z$.

Mặt khác, $z^2 = x^2y^2 - 4x + 4y < x^2y^2 + 2xy + 1 = (xy + 1)^2 \Rightarrow z < xy + 1$.

Vậy $xy < z < xy + 1$. Vô lí vì z là số nguyên. Do đó $x = y$ (đpcm).

NGUYỄN CÔNG MINH
(GV THCS Nam Hoa, Nam Trục, Nam Định) giới thiệu

Số 393 (3-2010)

TOÁN HỌC
Tuổi trẻ 5



Phương trình lượng giác (PTLG) luôn xuất hiện trong các đề thi đại học và cũng gây không ít khó khăn cho các thí sinh. Trong bài viết này chúng tôi trao đổi với các bạn một số điểm cần chú ý khi giải các PTLG. Về phương pháp chung thì để giải PTLG ta sử dụng các công thức biến đổi lượng giác đưa phương trình ban đầu về PTLG thường gặp.

MỘT VÀI ĐIỂM CẦN CHÚ Ý KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

NGUYỄN TẤT THU

(GV THPT Lê Hồng Phong, Biên Hòa, Đồng Nai)

Chúng ta biến đổi PTLG đã cho theo các hướng sau:

1. Đưa về phương trình bậc nhất đối với sin và cosin

Với dạng này ta cần lưu ý một số biến đổi sau

$$\sin x \pm \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos \left(x \mp \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sqrt{3} \sin x \pm \cos x = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cos \left(x \mp \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x \pm \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x \mp \frac{\pi}{4} \right)$$

★Thí dụ 1. Giải phương trình

$$\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x \quad (1)$$

Lời giải. Ta có

$$\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\text{Nên PT (1)} \Leftrightarrow \sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

★Thí dụ 2. Giải phương trình

$$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$$

(Đề thi ĐH khối B – 2009)

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x$$

$$= 2 \cos 4x + \frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases}. \quad \square$$

2. Biến đổi về phương trình chỉ chứa một hàm số lượng giác

Với phương pháp này chúng ta cần lưu ý tới một số đẳng thức sau

$$* \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x;$$

$$* \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x;$$

$$* \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}; \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$$

★Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0 \quad (2)$$

(Đề thi ĐH khối A - 2006)

Lời giải. Điều kiện $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{PT (2)} \Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đổi chiều điều kiện ta có $x = \frac{5\pi}{4} + 2m\pi, n \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của PT đã cho. $\square$

★Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\sin^2 2x \cdot \cos 6x + \sin^2 3x = \frac{1}{2} \sin \frac{11x}{2} \cdot \sin \frac{9x}{2} \quad (3)$$

Lời giải. Ta có

$$\text{PT (3)} \Leftrightarrow (1 - \cos 4x) \cos 6x + 1 - \cos 6x$$

$$= \sin \frac{11x}{2} \sin \frac{9x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 4x \cdot \cos 6x = \sin \frac{11x}{2} \sin \frac{9x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 10x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 10x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

★Thí dụ 5. Giải phương trình

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5\sin^2 x + 1 \quad (4)$$

Lời giải. Điều kiện $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

$$\text{PT (4)} \Leftrightarrow \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{6\tan^2 x + 1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x(7\tan^2 x + 5\tan x + 2) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

★Thí dụ 6. Giải phương trình

$$5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x \quad (5)$$

(Đề thi ĐH Khối B - 2004)

Lời giải. Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{PT (5)} \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = \frac{3\sin^2 x}{1 + \sin x}$$

$$\Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1 + \sin x) = 3\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Cả hai họ nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện nên là hai họ nghiệm của PT (5). $\square$

★Thí dụ 7. Giải phương trình

$$\sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) + \cos 2x - \cos x = 2 \quad (6)$$

Lời giải

$$\text{PT (6)} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \square$$

3. Biến đổi về phương trình tích

Để biến đổi về phương trình tích, chúng ta cần tạo ra các thừa số chung. Một số lưu ý khi tìm nhân tử chung: Các biểu thức

• $1 + \sin 2x$; $\cos 2x$; $1 + \tan x$; $1 + \cot x$ có thừa số chung là $\sin x + \cos x$.

• $1 - \sin 2x$; $\cos 2x$; $1 - \tan x$; $1 - \cot x$ có thừa số chung là $\cos x - \sin x$.

• $\sin^2 x$; $\tan^2 x$ có thừa số chung là $(1 - \cos x)(1 + \cos x)$.

• $\cos^2 x$; $\cot^2 x$ có thừa số chung là $(1 - \sin x)(1 + \sin x)$.

★ **Thí dụ 8.** Giải phương trình

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (7)$$

Lời giải. Ta có

$$\text{PT (7)} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 9.** Giải phương trình

$$\cos 2x - 3\sin 2x + 5\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{9\pi}{4}\right) = 3 \quad (8)$$

Lời giải. Ta có

$$\text{PT (8)} \Leftrightarrow \cos 2x - 3(1 + \sin 2x) + 5(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) - 3(\sin x + \cos x)^2 + 5(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(4\sin x + 2\cos x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(Do $4^2 + 2^2 < 5^2$ nên PT $4\sin x + 2\cos x - 5 = 0$ vô nghiệm). $\square$

★ **Thí dụ 10.** Giải phương trình

$$\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \quad (9)$$

(Đề thi ĐH khối D – 2003)

Lời giải. Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$\text{PT (9)} \Leftrightarrow \left(1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x) \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} - (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} - (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x) - (1 + \cos x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(\cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp điều kiện ta có $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

là tất cả các nghiệm của PT (9). $\square$

★ **Thí dụ 11.** Giải phương trình

$$\frac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (10)$$

(Đề thi dự bị D – 2008)

Lời giải. Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có PT (10) tương đương với

$$\cos^2 x (\tan^2 x + \tan x) = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)$$

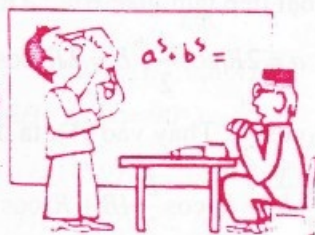
$$\Leftrightarrow 2(\sin^2 x + \sin x \cos x) = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Cả ba họ nghiệm này đều thỏa điều kiện bài toán. $\square$

(Xem tiếp trang 12)

DIỄN ĐÀN**DAY
HỌC
TOÁN**

PHÁT TRIỂN TƯ DUY HỌC SINH

thông qua việc

KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN

ĐẬU THANH KỲ
(GV THPT Diễn Châu IV, Nghệ An)

Dựa vào kết quả và các cách giải của một bài toán ta có thể khai thác để sáng tạo thêm được các bài toán mới, từ đó có thể phát huy được tư duy học sinh. Sau đây tôi xin trình bày một thí dụ minh họa.

Bài toán xuất phát. (Bài 37 sách bài tập Hình học 10 nâng cao).

Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng

$$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0} \quad (*)$$

I. MỘT SỐ CÁCH GIẢI BÀI TOÁN

Cách 1. Sử dụng định lý Thales.

Qua C dựng đường thẳng song song với AI cắt BI tại B' ; và dựng đường song song với BI cắt AI tại A' (h. 1).

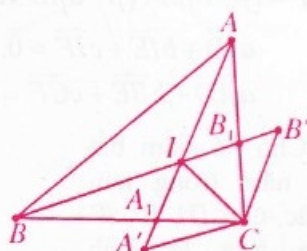
Theo định lý Thales và tính chất đường phân giác trong, ta có

$$\frac{IB}{IB'} = \frac{IB}{CA'} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b} \Rightarrow \vec{IB'} = -\frac{b}{c}\vec{IB}.$$

Tương tự $\vec{IA'} = -\frac{a}{c}\vec{IA}$. Do đó

$$\vec{IC} = \vec{IA'} + \vec{IB'} = -\frac{a}{c}\vec{IA} - \frac{b}{c}\vec{IB}$$

$$\Leftrightarrow a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}.$$



Hình 1

Cách 2. Sử dụng tích vô hướng

Đặt $\vec{v} = a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC}$. Ta có

$$\vec{v} \cdot \vec{IA} = aIA^2 + b\vec{IA} \cdot \vec{IB} + c\vec{IA} \cdot \vec{IC}$$

$$= IA(aIA + bIB \cdot \cos(\vec{IA}; \vec{IB}) + cIC \cdot \cos(\vec{IA}; \vec{IC}))$$

$$= IA\left(aIA + bIB \cdot \cos\left(\pi - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)\right)$$

$$+ cIC \cdot \cos\left(\pi - \frac{A}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$= 4Rr \cdot IA \left(\cos \frac{A}{2} - \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2} \right)$$

$$= 4Rr \cdot IA \left(\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{B+C}{2} \right) = 0.$$

Tương tự $\vec{v} \cdot \vec{IB} = 0$. Vì $\vec{IA}, \vec{IB}$ là hai vector không cùng phương nên $\vec{v} = \vec{0}$.

Cách 3. Sử dụng phép chiếu song song

Chiếu $\vec{v}$ theo phương (IA) lên BC . Lúc đó $\vec{v}$ biến thành $\vec{v'} = b\vec{A_1B} + c\vec{A_1C}$.

$$\text{Mặt khác } \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b} \Rightarrow \vec{v'} = b\vec{A_1B} + c\vec{A_1C} = \vec{0}.$$

Tương tự, chiếu $\vec{v}$ theo phương (IB) lên AC được $\vec{v''} = a\vec{B_1A} + c\vec{B_1C}$ thì $\vec{v''} = \vec{0}$.

Rõ ràng $(IA), (IB)$ là hai phương phân biệt nên $\vec{v} = \vec{0}$. $\square$

Nhận xét. Từ công thức (*) và định lý côsin cho tam giác ABC ta suy ra

$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc \quad (**)$$

II. KHAI THÁC BÀI TOÁN VÀ SÁNG TẠO BÀI TOÁN MỚI

II.1. Khai thác và sáng tạo các bài toán về đẳng thức vector

1. Thay đổi hình thức của các hệ số a, b, c

- Áp dụng công thức diện tích

$$S = \frac{a.h_a}{2} = \frac{b.h_b}{2} = \frac{c.h_c}{2} \text{ vào } (*), \text{ ta được}$$

$$\frac{1}{h_a}\vec{IA} + \frac{1}{h_b}\vec{IB} + \frac{1}{h_c}\vec{IC} = \vec{0} \quad (1)$$

- Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ vào } (*), \text{ ta được}$$

$$\sin A.\vec{IA} + \sin B.\vec{IB} + \sin C.\vec{IC} = \vec{0} \quad (2)$$

- Áp dụng công thức

$$a = r\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right); \quad b = r\left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}\right);$$

$$c = r\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}\right) \text{ vào } (*), \text{ ta được}$$

$$\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right)\vec{IA} + \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}\right)\vec{IB} + \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}\right)\vec{IC} = \vec{0} \quad (3)$$

- Áp dụng công thức $a = b.\cos C + c.\cos B$; $b = c.\cos A + a.\cos C$; $c = a.\cos B + b.\cos A$ vào (*), ta được

$$(b.\cos C + c.\cos B)\vec{IA} + (c.\cos A + a.\cos C)\vec{IB} + (a.\cos B + b.\cos A)\vec{IC} = \vec{0} \quad (4)$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{\cos C}{\sin B} + \frac{\cos B}{\sin C}\right)\vec{IA} + \left(\frac{\cos A}{\sin C} + \frac{\cos C}{\sin A}\right)\vec{IB} + \left(\frac{\cos B}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin B}\right)\vec{IC} = \vec{0} \quad (5)$$

- Áp dụng công thức $a = (p-a)\sin^2 \frac{A}{2}$;

$$b = (p-b)\sin^2 \frac{B}{2}; \quad c = (p-c)\sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\text{với } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ vào } (*), \text{ ta được}$$

$$(p-a)\sin^2 \frac{A}{2}\vec{IA} + (p-b)\sin^2 \frac{B}{2}\vec{IB} + (p-c)\sin^2 \frac{C}{2}\vec{IC} = \vec{0} \quad (6)$$

- Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC, AIC, AIB .

$$\text{Khi đó } a = 2R_1 \cos \frac{A}{2}, \quad b = 2R_2 \cos \frac{B}{2},$$

$$c = 2R_3 \cos \frac{C}{2}. \text{ Thay vào } (*), \text{ ta được}$$

$$R_1 \cos \frac{A}{2}\vec{IA} + R_2 \cos \frac{B}{2}\vec{IB} + R_3 \cos \frac{C}{2}\vec{IC} = \vec{0} \quad (7)$$

2. Thay đổi các vector $\vec{IA}, \vec{IB}, \vec{IC}$

- Với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Ta có $\vec{IA} = \vec{IP} + \vec{IN} - \vec{IM}$;

$$\vec{IB} = \vec{IM} + \vec{IP} - \vec{IN}; \quad \vec{IC} = \vec{IM} + \vec{IN} - \vec{IP}.$$

Thay vào (*), ta được

$$(b+c-a)\vec{IM} + (a+c-b)\vec{IN} + (a+b-c)\vec{IP} = \vec{0} \quad (8)$$

$$\cot \frac{A}{2}.\vec{IM} + \cot \frac{B}{2}.\vec{IN} + \cot \frac{C}{2}.\vec{IP} = \vec{0} \quad (9)$$

- Với D, E, F lần lượt là tiếp điểm của cạnh BC, CA, AB với đường tròn nội tiếp tam giác (h. 2) thì

$$\vec{ID} = \frac{DC}{BC}\vec{IB} + \frac{DB}{BC}\vec{IC} = \frac{p-c}{a}\vec{IB} + \frac{p-b}{a}\vec{IC}$$

$$\Leftrightarrow a\vec{ID} = (p-c)\vec{IB} + (p-b)\vec{IC},$$

Tương tự $b\vec{IE} = (p-a)\vec{IC} + (p-c)\vec{IA}$;

$c\vec{IF} = (p-b)\vec{IA} + (p-a)\vec{IB}$ và áp dụng (*), ta có

$$a\vec{ID} + b\vec{IE} + c\vec{IF} = \vec{0}. \quad (10)$$

$$a\vec{AD} + b\vec{BE} + c\vec{CF} = \vec{0} \quad (11)$$

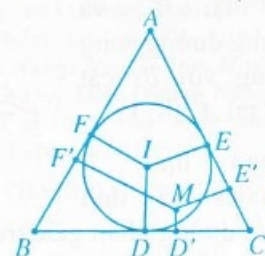
- Cho M điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Gọi D', E', F' lần lượt là hình chiếu của M lên cạnh BC, CA, AB . (h. 2). Ta có

$$a\vec{ID} + b\vec{IE} + c\vec{IF} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a.\frac{ID}{MD'}.\vec{MD'} + b.\frac{IE}{ME'}.\vec{ME'} + c.\frac{IF}{MF'}.\vec{MF'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a.\vec{MD'} + b.\frac{MD'}{ME'}.\vec{ME'} + c.\frac{MD'}{MF'}.\vec{MF'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a.\vec{MD'} + b.\frac{S_a.b}{S_b.a}.\vec{ME'} + c.\frac{S_a.c}{S_c.a}.\vec{MF'} = \vec{0}$$



Hình 2

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{S_a} \overrightarrow{MD'} + \frac{b^2}{S_b} \overrightarrow{ME'} + \frac{c^2}{S_c} \overrightarrow{MF'} = \vec{0} \quad (12)$$

với $S_a = S_{MBC}$, $S_b = S_{MAC}$, $S_c = S_{MAB}$.

II.2. Khai thác và sáng tạo các bài toán chứng minh

1. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

• Với M, P là hai điểm di động thỏa mãn $\overrightarrow{MP} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$, kết hợp với (*) suy ra $\overrightarrow{MP} = (a+b+c)\overrightarrow{MI}$. Do đó M, P, I thẳng hàng. Ta có bài toán chứng minh đường thẳng MP đi qua một điểm cố định.

• Ta viết (*) dưới dạng

$$-\frac{c}{a+b} \overrightarrow{IC} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{IA} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{IB}.$$

Do đó, nếu trên tia CI lấy điểm C' sao cho $(a+b)IC' = cIC$ thì ba điểm A, B, C' thẳng hàng.

2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Nhận xét. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P thuộc các đường thẳng BC, CA, AB thỏa mãn

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma \neq 0 \\ \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \gamma \overrightarrow{NC} + \alpha \overrightarrow{NA} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} = \vec{0} \end{cases}$$

thì AM, BN, CP đồng quy tại O , với O là điểm được xác định bởi $\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Để kiến tạo bài toán mới ta đi tìm các đường thẳng đi qua đỉnh và chia cạnh đối diện theo tỉ số là các hệ số của một số các đẳng thức vector trên, chẳng hạn :

• Xét đường thẳng qua đỉnh chia đôi chu vi tam giác, giả sử nó đi qua A cắt BC tại M , ta có

$$AB + BM = AC + MC$$

$$\Leftrightarrow c + 2BM = b + (BM + MC)$$

$$\Leftrightarrow BM = \frac{1}{2}(a+b-c); CM = \frac{1}{2}(a+c-b).$$

$$\text{Do đó } (a+c-b)\overrightarrow{MB} + (a+b-c)\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Từ Nhận xét suy ra AM đi qua O với

$$(b+c-a)\overrightarrow{OA} + (a+c-b)\overrightarrow{OB} + (a+b-c)\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

ta có bài toán

Cho tam giác ABC . Gọi x, y, z lần lượt là đường thẳng đi qua A, B, C và chia đôi chu vi tam giác. Chứng minh rằng x, y, z cùng đi qua một điểm. Hãy xác định điểm đó.

• Giả sử đường tròn bàng tiếp góc A tiếp xúc BC tại M . Gọi B', C' thứ tự là tiếp điểm của cạnh AB, AC với đường tròn bàng tiếp góc A . Khi đó $AB' = AC' \Leftrightarrow c + BM = b + CM$.

Tương tự trên ta có bài toán

Cho tam giác ABC , các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C tương ứng tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P . Chứng minh AM, BN, CP cùng đi qua một điểm và xác định điểm đó.

3. Chứng minh hai tam giác cùng trọng tâm

Nhận xét. Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và $A'B'C'$ cùng trọng tâm là

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

Kết hợp (*) ta có bài toán :

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Trên tia IA, IB, IC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $AA' = a.IA; BB' = b.IB; CC' = c.IC$. Chứng minh hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Tương tự, nếu điểm A', B', C' được xác định bởi :

$$AA' = \sin A.IA, BB' = \sin B.IB, CC' = \sin C.IC$$

$$\text{hoặc } AA' = S_a.IA, BB' = S_b.IB, CC' = S_c.IC$$

thì hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

II.3. Khai thác và sáng tạo các bài toán bất đẳng thức hình học

Nhận xét. Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và O là

điểm thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$. Khi đó với mọi điểm M ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i \cdot MA_i \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2$$

$$(\text{hay } \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i \cdot (MA_i - OA_i) \geq 0).$$

Đấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng với O .

Áp dụng kết quả trên và kết hợp với công thức (*) và (**) ta được bất đẳng thức

$$aIA.MA + bIB.MB + cIC.MC \geq abc.$$

II.4. Khai thác và sáng tạo các bài toán về tìm tập hợp điểm và xác định điểm

1. Tìm tập hợp điểm

Từ công thức (*) và (**), ta nhận được

$$\begin{aligned} & a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2 \\ &= (a+b+c).MI^2 + abc \end{aligned} \quad (***)$$

Từ kết quả (***), có thể đặt ra bài toán:

Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Tìm tập hợp điểm M, biết rằng

- $a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2 = k^2$.
- $a.MA^2 + b.MB^2 - (a+b)MC^2 = abc$

2. Tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước

- Từ công thức (***), ta có thể đặt ra bài toán:

Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Xác định vị trí của điểm M sao cho $a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- Với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có

$$\begin{aligned} MI^2 &= MO^2 + OI^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OI} \\ &= R^2 + OI^2 - 2R.OI \cos \widehat{MOI}. \end{aligned}$$

Từ đó, ta có thể đặt bài toán sau đây

Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Tìm vị trí điểm M để $P = a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, biết

- M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- M nằm trên đường thẳng d bất kỳ.

Hướng dẫn. a) P nhỏ nhất khi $\cos \widehat{MOI} = 1$
 $\Leftrightarrow \widehat{MOI} = 0^\circ$, M là giao điểm của tia OI với đường tròn (O).

- P nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất nên M là hình chiếu của I trên d.

Bạn đọc có thể tiếp tục mở rộng bài toán sang không gian hoặc xét với biểu thức

$$a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2 \text{ với } a+b+c \neq 0.$$

MỘT VÀI ĐIỂM... (Tiếp trang 8)

★Thí dụ 12. Giải phương trình

$$2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4 \quad (11)$$

Lời giải. Phương trình (11) tương đương với

$$4\sin x \cos x - 1 + 2\sin^2 x - 7\sin x - 2\cos x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

(Vì $2\cos x + \sin x \leq \sqrt{5} < 3$ nên

$$2\cos x + \sin x - 3 \neq 0 \text{ với mọi } x). \quad \square$$



Cuối cùng chúng tôi xin đưa ra một số bài toán để các bạn tự luyện tập.

Giải các phương trình lượng giác sau

$$1) \cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4;$$

$$2) \frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3};$$

$$3) \sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0;$$

$$4) 3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x;$$

$$5) \frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x);$$

$$6) 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0;$$

$$7) \cos^4 x + \sin^4 x + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{2} = 0;$$

$$8) \sin^6 x + \cos^6 x = \sin 2x;$$

$$9) \cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x};$$

$$10) \cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0.$$



Bài toán đầu xuân

Theo cách tính các năm Âm lịch:

Có 10 Can, đó là: Giáp, Ất, Bính, Đinh, Mậu, Kỷ, Canh, Tân, Nhâm, Quý. Có 12 chi, đó là: Tý, Sửu, Dần, Mão, Thìn, Tỵ, Ngọ, Mùi, Thân, Dậu, Tuất, Hợi.

Quy luật: Nếu năm nay là Canh Dần thì năm tiếp theo là Tân Mão và cứ như thế theo thứ tự trên.

Hỏi có can nào và chi nào không bao giờ được ghép với nhau?

PHẠM VĂN KHÁNH
(GV THCS Giảng Võ, Hà Nội)

Bảng ô vuông CÁC SỐ CHÍNH PHƯƠNG

(Đề đăng trên THPT số 385 tháng 7.2009)

Chú ý rằng chữ số tận cùng của số chính phương chỉ có thể là 4, 5, 6, 9 (không kể 0, 1). Trước hết điền các số chính phương có từ một đến ba chữ số vào bảng (số in màu).

Sau đó lần lượt xét và điền vào các ô như sau. (Xem hình dưới).

	a	b	c	d	e	f	g	h	k
1		4	8	8	4	1		4	
2	1		1	6	9		4	8	4
3	9			4				4	9
4	4	8	7	9	6	8	1		
5	4	4	1		5	1	9	8	4
6	8	1	2	2	5		8	1	
7	1		8	2	3	6	9		4
8		3	9	5	6	4	1		9
9	1	6					6	4	

• Hàng 1 có $48221 \leq x^2 \leq 48991$ suy ra $x = 48841 = 221^2$.

Tương tự như thế điền các số sau.

• Cột d có $8649 = 93^2$.

- Cột a có $194481 = 441^2$.
- Hàng 4 có $4879681 = 2209^2$.
- Cột c có $71289 = 267^2$.
- Hàng 6 có $81225 = 285^2$.
- Dòng 8 có $395641 = 629^2$.
- Dòng 7 có $82369 = 287^2$.
- Cột e có $65536 = 256^2$.
- Hàng 5 có $51984 = 228^2$.
- Cột g có $198916 = 446^2$.
- Hàng 9 có $64 = 8^2$.

Nhận xét. Rất nhiều bạn đã gửi đáp án đúng đến Tòa soạn. Việc nêu tóm tắt cách giải trên để chứng tỏ rằng **đáp số đó là duy nhất**. Một số bạn đã dùng phần mềm máy tính để tìm các số chính phương khi biết số các chữ số và biết một vài chữ số của nó.

Các bạn sau có lập luận tốt, gửi bài sớm, được nhận tặng phẩm:

- 1) Vũ Đình Hải, A3 K37, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**;
- 2) Lê Nhật Linh, 11C2, THPT Nông Công 1, **Thanh Hóa**;
- 3) Lê Phúc Lữ, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre;
- 4) Hồ Thị Thiên Hương, 31/14 Lê Lợi, K9, P4, TX. Trà Vinh, **Trà Vinh**;
- 5) Trương Đình Đức, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**;
- 6) Nguyễn Thị Lan Hương, 7B, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**.

DAN QUỲNH



SỐ ĐA GIÁC

và sự biểu diễn hình học

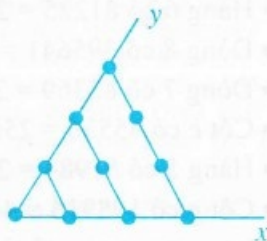


Từ thời cổ Hy Lạp môn phái Pythagore đã biết biểu diễn hình học các số bằng cách sắp xếp số các điểm theo các cạnh của các hình đa giác đều và đồng dạng với nhau sao cho các điểm trên mỗi cạnh đa giác cách đều nhau; số các điểm của một hình như thế gọi là số đa giác.

1. SỐ ĐA GIÁC VÀ CÔNG THỨC CỦA NÓ

1.1. Số tam giác

Xét tam giác đều có hai cạnh chung đỉnh nằm trên góc xOy mà có n điểm trên mỗi cạnh (kể cả hai đầu mút). Coi



Hình 1

$T_1 = 1$ và cho $n = 2, 3, 4, \dots$ rồi tính số các điểm đã có trên hình ta được dãy số tam giác (h. 1):

$$T_1 = 1, T_2 = 1 + 2 = 3, T_3 = 1 + 2 + 3 = 6,$$

$$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \dots$$

Công thức truy hồi (truy toán) của dãy số tam giác là $T_1 = 1$ và $T_n = T_{n-1} + n$ với $n = 2, 3, 4, \dots$

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

1.2. Số đa giác

Xét đa giác đều k cạnh có hai cạnh chung đỉnh nằm trên góc xOy mà có n điểm trên mỗi cạnh (kể cả hai đầu mút). Coi $G_1 = 1$ và cho $n = 2, 3, 4, \dots$ rồi tính số các điểm đã có trên hình ta được dãy số đa giác.

Công thức truy hồi của dãy số đa giác là

$$G_k(1) = 1 \text{ và}$$

$$G_k(n) = G_k(n-1) + (k-2)(n-1) + 1 \quad (2)$$

với $n = 2, 3, 4, \dots$

Thực vậy $(k-2)(n-1) + 1$ chính là số các điểm trên $k-2$ cạnh của đa giác thứ n , không kể các điểm trên hai cạnh của đa giác thứ $n-1$ mà nằm trên Ox, Oy .

Trong công thức (2) cho n chạy từ 2 đến n ta được $n-1$ đẳng thức, cộng $n-1$ đẳng thức này rồi biến đổi, rút gọn ta được

$$G_k(n) = (k-2)(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) + n$$

$$= \frac{(k-2)n(n-1)}{2} + n$$

$$\text{hay } G_k(n) = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2} \quad (3)$$

trong đó $k \geq 3$ và $n = 1, 2, 3, \dots$

Cũng có thể thu được (3) bằng cách sử dụng (2) và chứng minh bằng quy nạp.

Cho k bằng 4, 5, 6, 8 ta có các dãy số đa giác sau đây.

1.3. Số hình vuông (số tứ giác) (h. 2)

Công thức truy hồi

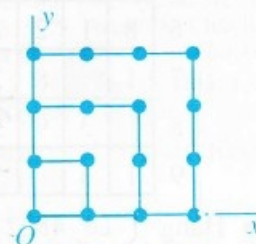
của dãy số hình vuông là $V_1 = 1$ và

$$V_n = V_{n-1} + 2n - 1$$

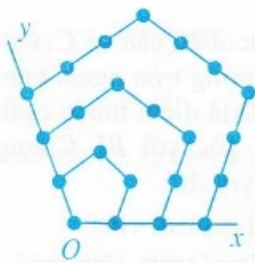
với $n = 2, 3, 4, \dots$

Công thức tổng quát của dãy số hình vuông là

$$V_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$



Hình 2



Hình 3

1.4. Số ngũ giác (h. 3)

Công thức truy hồi của dãy số ngũ giác là $N_1 = 1$ và

$$N_n = N_{n-1} + 3n - 2$$

với $n = 2, 3, 4, \dots$

Công thức tổng quát của dãy số ngũ giác

$$\text{là } N_n = \frac{3n^2 - n}{2} \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

1.5. Số lục giác

Công thức truy hồi của dãy số lục giác là $L_1 = 1$ và $L_n = L_{n-1} + 4n - 3$ với $n = 2, 3, 4, \dots$

Công thức tổng quát của dãy số lục giác là $L_n = 2n^2 - n$ với $n = 1, 2, 3, \dots$ (4)

1.6. Số bát giác

Công thức truy hồi của dãy số bát giác là $B_1 = 1$ và $B_n = B_{n-1} + 6n - 5$ với $n = 2, 3, 4, \dots$

Công thức tổng quát của dãy số bát giác là $B_n = 3n^2 - 2n$ với $n = 1, 2, 3, \dots$ (5)

II. SỐ ĐA GIÁC CÓ NHIỀU HÌNH BIỂU DIỄN

Ta thử xét xem một số đa giác có thể có nhiều hình biểu diễn khác nhau không? Nói cách khác phương trình $G_k(n) = G_h(r)$ có các nghiệm nguyên dương k, h, n, r với $k \neq h$ và $n > 1$ không?

Sử dụng (3) thì phương trình trên tương đương với

$$(k-2)n^2 - (k-4)n = (h-2)r^2 - (h-4)r \quad (6)$$

trong đó k, h, n, r là các số nguyên dương và $k \neq h, n \neq 1$.

Phương trình (6) rất tổng quát, ta chỉ xét một số trường hợp riêng của (6) khi cho trước các số k, h .

2.1. Phương trình $G_3(n) = G_6(r)$ hay $T_n = L_r$ (7)

Thay các công thức $T_n = G_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ (1)

và $L_r = G_6(r) = 2r^2 - r$ (4) vào (7) được

$$n(n+1) = 4r^2 - 2r, \text{ hay } n(n+1) = (2r-1)2r \quad (8)$$

Có thể thay $k = 3, h = 6$ vào (6) cũng có (8).

Vì hai vế của phương trình (8) đều là tích của hai số nguyên dương liên tiếp nên phương trình (8) chỉ có nghiệm là $n = 2r - 1$, nghĩa là $G_3(2r-1) = G_6(r)$ với số nguyên dương r tùy ý, hay là $T_{2r-1} = L_r$, như vậy mỗi số lục giác thứ r là số tam giác thứ $2r - 1$.

2.2. Phương trình $G_3(n) = G_8(r)$ hay $T_n = B_r$ (9)

Thay các công thức (1) và $B_r = 3r^2 - 2r$

vào (9) được $n^2 + n = 6r^2 - 4r$ (10)

Có thể thay $k = 3, h = 8$ vào (6) cũng có (10).

Biến đổi (10) thành dạng các bình phương:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = 6\left(r - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{15}{36}$$

$$\text{hay } 9(2n+1)^2 = 6.4(3r-1)^2 - 15.$$

$$\text{Đặt } x = 3(2n+1) \text{ và } y = 2(3r-1) \quad (11)$$

thì phương trình (10) trở thành

$$x^2 - 6y^2 = -15 \quad (12)$$

Phương trình (12) là phương trình Pell. Người ta đã tìm được tất cả các nghiệm $(x_m; y_m)$, $m = 1, 2, 3, \dots$ của phương trình vô định này. Ta xét một số nghiệm có giá trị nhỏ nhất của (12) và tương ứng của (10), (9).

• Với $(x_1; y_1) = (3; 2)$ thì $n = r = 0$ (loại).

• Với $(x_2; y_2) = (9; 4)$ thì $n = r = 1$ nên có $T_1 = B_1 = 1$.

• Với $(x_3; y_3) = (39; 16)$ thì $n = 6, r = 3$ nên có $T_6 = B_3 = 21$.

• Với $(x_4; y_4) = (93; 38)$ thì r không nguyên.

• Với $(x_5; y_5) = (387; 158)$ thì r không nguyên.

• Với $(x_6; y_6) = (921; 376)$ thì $n = 153, r = 63$ nên có $T_{153} = B_{63} = 11781$.

• Với $(x_7; y_7) = (3831; 1564)$ thì $n = 638, r = 261$ nên có $T_{638} = B_{261} = 203841$.

(Xem tiếp trang 29)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/393. (Lớp 6). Cho các số tự nhiên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2010}$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a_1^{11}} + \frac{1}{a_2^{11}} + \frac{1}{a_3^{11}} + \dots + \frac{1}{a_{2010}^{11}} = \frac{1005}{1024}.$$

Hãy tính

$$A = \frac{a_{2010}^6}{a_1^5} + \frac{a_{2009}^6}{a_2^5} + \frac{a_{2008}^6}{a_3^5} + \dots + \frac{a_1^6}{a_{2010}^5}.$$

PHẠM ĐỨC THẮNG

(GV THCS Vũ Hữu, Bình Giang, Hải Dương)

Bài T2/393. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có góc B và góc C nhọn. Vẽ đường phân giác BD và đường cao AH của tam giác đó. Biết rằng $\widehat{ADB} = \widehat{AHD} = \alpha$. Tính số đo góc α .

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN

(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/393. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$y^3 = x^6 + 2x^4 - 1000.$$

PHAN MẠNH HÀ

(GV THPT Phan Thúc Trục, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T4/393. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b+c+d-a} + \frac{b}{c+d+a-b} + \frac{c}{d+a+b-c} + \frac{d}{a+b+c-d}$$

trong đó a, b, c, d là độ dài các cạnh của một tứ giác lồi.

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/393. Cho tam giác ABC cân tại C . Gọi O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC , D là điểm thuộc cạnh BC sao cho DO vuông góc với BI . Chứng minh rằng DI song song với AC .

LẠI QUANG THỌ

(GV THCS Tam Dương, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/393. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1.$$

Chứng minh rằng

$$a + b + c = ab + bc + ca.$$

NGUYỄN MINH TUẤN

(GV THPT Thốt Nốt, TP. Cần Thơ)

Bài T7/393. Cho ngũ giác nội tiếp $ABCDE$ với $AC \parallel DE$ và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC}$, trong đó M là trung điểm của đoạn BD . Chứng minh rằng đường thẳng BE đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

TẠ HỒNG SƠN

(SV lớp Ngân hàng 50A, ĐHKQTĐ, Hà Nội)

Bài T8/393. Cho tứ diện $OABC$ có góc tam diện đỉnh O vuông. Chứng minh rằng

$$\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A \leq \frac{3}{2}$$

trong đó $\cot AB$ là kí hiệu cotang của góc nhị diện cạnh AB .

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT Thanh Ba, Phú Thọ)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/393. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BK và CL cắt nhau tại H . Một đường thẳng đi qua H cắt AB, AC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng $HP = HQ$ khi và chỉ khi $MP = MQ$, với M là trung điểm của cạnh BC .

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài T10/393. Tìm tất cả các số thực k và m sao cho

$$k(x^3 + y^3 + z^3) + mxyz \geq (x + y + z)^3$$

với mọi x, y, z không âm.

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/393. Cho dãy số thực (x_n) với $n = 1, 2, \dots$ thỏa mãn $\ln(1 + x_n^2) + nx_n = 1$ với mọi số nguyên dương n .

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 + nx_n)}{x_n}.$$

DƯƠNG VIỆT THÔNG

(GV khoa Cơ bản, DHSPKT Nam Định)

Bài T12/393. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + f(y)) = 2y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

NGUYỄN TRỌNG TUẤN

(GV PTNK ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/393. Học sinh A chạy theo đường tròn bán kính $R = 30\text{m}$ với tốc độ không đổi $u = 3,14 \text{ m/s}$. Học sinh B chạy đuổi theo học sinh A xuất phát từ tâm đường tròn đó. Trong khi đuổi, học sinh B luôn chạy trên bán kính nối tâm với học sinh A với tốc độ không đổi $v = 2u$. Hỏi sau bao lâu thì học sinh B đuổi kịp học sinh A?

TÔ GIANG

(Hà Nội) Sưu tầm

Bài L2/393. Một hạt có khối lượng m chuyển động dưới tác động của một lực $F = -\alpha m \vec{r}$, trong đó α là một hằng số dương, $\vec{r}$ là bán kính vector của hạt đối với gốc tọa độ. Tìm quỹ đạo chuyển động của hạt, nếu tại thời điểm ban đầu hạt có tọa độ $\vec{r} = r_0 \vec{i}$ và vận tốc $\vec{v} = v_0 \vec{j}$, trong đó $\vec{i}, \vec{j}$ lần lượt là các vector đơn vị của các trục Ox, Oy .

HUỖNH CÔNG ĐÁNG LÊ HOA

(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/393. (For 6th grade). Let $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$ be natural numbers such that

$$\frac{1}{a_1^{11}} + \frac{1}{a_2^{11}} + \frac{1}{a_3^{11}} + \dots + \frac{1}{a_{2010}^{11}} = \frac{1005}{1024}.$$

Determine the value of the following expression

$$A = \frac{a_{2010}^6}{a_1^5} + \frac{a_{2009}^6}{a_2^5} + \frac{a_{2008}^6}{a_3^5} + \dots + \frac{a_1^6}{a_{2010}^5}.$$

T2/393. (For 7th grade). In a triangle ABC where B and C are acute angles, let BD and AH be respectively the angle bisector and the altitude. Given that $\widehat{ADB} = \widehat{AHD} = \alpha$, find the measure of α .

T3/393. Find all integer solutions of the equation:

$$y^3 = x^6 + 2x^4 - 1000.$$

T4/393. Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{a}{b+c+d-a} + \frac{b}{c+d+a-b} + \frac{c}{d+a+b-c} + \frac{d}{a+b+c-d}$$

where a, b, c, d are the length of 4 sides of a convex quadrilateral.

T5/393. Let ABC be an isosceles triangle with vertex at C . Let O, I be its circumcenter and incenter respectively. D is a point chosen on the side BC so that DO is perpendicular to BI . Prove that DI is parallel to AC .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/393. Let a, b, c be positive real numbers satisfying the condition

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1.$$

Prove that

$$a + b + c = ab + bc + ca.$$

(Xem tiếp trang 26)



★ **Bài T1/389.** Chứng minh rằng số các chữ số của hai số $2008^{2009} + 2^{2009}$ và 2008^{2009} bằng nhau.

Lời giải. Giả sử số $a = 2008^{2009}$ có n chữ số thì $10^{n-1} \leq 2008^{2009} < 10^n$. Từ đó $10^n > 2008^{2009} \geq (10^3)^{2009}$ nên $n > 6027$.

Số $b = 2008^{2009} + 2^{2009} > a \geq 10^{n-1}$ nên số b có ít nhất n chữ số.

Nếu số b có ít nhất $n + 1$ chữ số thì $b \geq 10^n$, do đó có

$$\begin{aligned} 2008^{2009} < 10^n &\leq 2008^{2009} + 2^{2009} \\ \Rightarrow (2.1004)^{2009} < (2.5)^n &\leq (2.1004)^{2009} + 2^{2009} \\ \Rightarrow 2^{2009} \cdot 1004^{2009} < 2^n \cdot 5^n &\leq 2^{2009} \cdot 1004^{2009} + 2^{2009}. \end{aligned}$$

Do $n > 6027$ nên có

$$1004^{2009} < 2^{n-2009} \cdot 5^n \leq 1004^{2009} + 1.$$

1004^{2009} và $1004^{2009} + 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp mà $2^{n-2009} \cdot 5^n$ cũng là số tự nhiên lớn hơn 10 nên chỉ có thể là $2^{n-2009} \cdot 5^n = 1004^{2009} + 1$, nhưng đẳng thức này không thể xảy ra vì vế trái là số chẵn còn vế phải là số lẻ.

Như vậy số b có n chữ số, nghĩa là hai số 2008^{2009} và $2008^{2009} + 2^{2009}$ có số các chữ số bằng nhau. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Vinh Phúc: Trần Trung Thông, 6A, THCS Lập Thạch, Trần Thị Việt Hà, 6D, THCS Vĩnh Yên; **Nghệ An:** Đậu Hương Giang, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diên Châu, Nguyễn Sĩ Thắng, 6B, THCS Cửa Nam, TP. Vinh; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Kiều Duyên, 6A, THCS Hành Đức, Tống Thành Nguyễn, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

VIỆT HÀI

★ **Bài T2/389.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 1 - xy$; trong đó x và y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^{2009} + y^{2009} = 2x^{1004}y^{1004}$.

Lời giải. Ta có $x^{2009} + y^{2009} = 2x^{1004}y^{1004}$ suy ra $(x^{2009} + y^{2009})^2 = 4x^{2008}y^{2008}$ (1)

Lại có $(x^{2009} + y^{2009})^2 \geq 4x^{2009}y^{2009}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $4x^{2008}y^{2008} \geq 4x^{2009}y^{2009}$
 $\Rightarrow 4x^{2008}y^{2008}(1 - xy) \geq 0 \Rightarrow A = 1 - xy \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $x = y = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 0, đạt được chẳng hạn khi $x = y = 1$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán này tương đối dễ, chỉ việc áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $(a+b)^2 \geq 4ab$. Một số bạn phải xét dấu của x và y nhưng lập luận chưa chặt chẽ.
 2) Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Phú Thọ: Lê Minh Hoàng, 7A1, THCS Lâm Thao; **Vinh Phúc:** Nguyễn Minh Tuấn, 7A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nam:** Nguyễn Quang Lợi, 7B, THCS Liêm Chính, TP. Phú Lý; **Nghệ An:** Hoàng Thị Quỳnh An, 6C, Phạm Văn Quyền, Đậu Phi Quân, 6B, Văn Sĩ Kiên, Phạm Thị Hải Yến, Hồ Thị Hà Phương, Hồ Thục Linh, Hồ Linh Chi, Vũ Bảo Trung, Lê Thị Hà, Nguyễn Đình Quý, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/389.** Có tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho $n^6 + 26^n = 21^{2009}$ (1)

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Thị Hương Giang, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An).

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho có (1). Ta có 26^n có tận cùng là 6; 21^{2009} có tận cùng là 1. Vậy n^6 có tận cùng là 5, do đó n có tận cùng là 5.

Khi đó (1) có dạng:

$$\begin{aligned} (\overline{...5})^6 + \overline{26^{...3}} &= (\overline{21^5})^{401} \cdot \overline{21^4} \\ \Leftrightarrow \overline{...25} + \overline{...76} &= (\overline{...01}) \cdot (\overline{...81}) \\ \Leftrightarrow \overline{...01} &= \overline{...81}, \text{ vô lí.} \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn (1). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể dùng định lý Fermat để giải bài toán này như sau:

Từ (1) suy ra n lẻ, n không chia hết cho 3 và n không chia hết cho 7.

Theo định lý Fermat, ta có $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Vì n lẻ nên $26^n = (28 - 2)^n \equiv -2 \pmod{7}$.

Suy ra $1 - 2^n \equiv 0 \pmod{7}$. Do đó n chia hết cho 3, mâu thuẫn với nhận xét trên. Vậy không tồn tại n nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

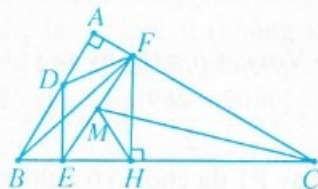
2) Nhiều bạn tham gia giải bài này với nhiều cách khác nhau, tất cả đều có lời giải đúng. Các bạn có lời giải ngắn gọn là:

Vinh Phúc: Tạ Đức Chính, Nguyễn Thị Lan Oanh, Tạ Thanh Xuân, Đậu Thị Hoàng Yên, Nguyễn Đức Đại, Vũ Đức Công, Nguyễn Ngọc Mai, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; Đỗ Xuân Việt, Nguyễn Văn Long, 9A, THCS Lập Thạch; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Hương Giang, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Tống Thành Nguyên, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/389.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên các cạnh AB , BC , CA theo thứ tự lấy các điểm D , E , F sao cho $DE \perp BC$ và $DE = DF$. Gọi M là trung điểm của EF . Chứng minh rằng $\widehat{BCM} = \widehat{BFE}$.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Thế Tiến, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An).



Kẻ $FH \perp BC$. Vì M là trung điểm của EF nên $ME = MF = MH$, suy ra $\triangle MFH$ và $\triangle MEH$ cân tại M
 $\Rightarrow \widehat{MEH} = \widehat{MHE} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{MEH} = 180^\circ - \widehat{MHE}$
 $\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{MHC}$ (1)

Mặt khác, do $DE \perp BC$, $FH \perp BC$ nên $DE \parallel FH$
 $\Rightarrow \widehat{DEF} = \widehat{MFH}$ (so le trong)
 $\Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle MFH$ (hai tam giác cân đồng dạng) $\Rightarrow \frac{DE}{EF} = \frac{MH}{HF}$ (*)

Lại có hai tam giác vuông BED và FHC đồng dạng ($\widehat{DBE} = \widehat{HFC}$ vì cùng phụ với $\widehat{ACB}$) nên

$$\frac{BE}{DE} = \frac{FH}{HC} \quad (**)$$

Nhân theo vế của (*) và (**), ta được

$$\frac{BE}{EF} = \frac{MH}{HC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BEF \sim \triangle MHC$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{BFE}$ (đpcm). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải trên, một số bạn còn chứng minh theo hướng khác: lấy điểm N là hình chiếu vuông góc của D trên BF và sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp để suy ra N, M, C thẳng hàng.

2) Ngoài bạn Tiến, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt:

Nghệ An: Phạm Văn Quyển, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; Ngô Sĩ Thanh, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Vinh Phúc:** Đỗ Xuân Việt, 9A, THCS Lập Thạch; **Hà Nội:** Lưu Nhật Nam, 9A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Hương Lý, 8A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Hải Phòng:** Lê Đức Tiến, 9A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiến An; **Ninh Thuận:** Hoàng Trần Minh, 9/5 THCS Lý Tự Trọng, TP Phan Rang, Tháp Chàm; **Hà Nam:** Nguyễn Quang Lợi, 7B, THCS Liêm Chính, Phủ Lý.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T5/389.** Cho x, y, z là các số thực thuộc khoảng $(0; 1)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x(1-y)} + \frac{1}{y(1-z)} + \frac{1}{z(1-x)} \geq \frac{3}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Do $x, y, z \in (0; 1)$ nên $x, y, z, 1-x, 1-y, 1-z$ đều dương.

Khi đó BĐT (1) tương đương với

$$\frac{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}{x(1-y)} + \frac{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}{y(1-z)} + \frac{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}{z(1-x)} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-y)(1-z-x) + zx}{x(1-y)} + \frac{(1-z)(1-x-y) + xy}{y(1-z)} + \frac{(1-x)(1-y-z) + yz}{z(1-x)} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-z}{x} + \frac{z}{1-y} + \frac{1-x}{y} + \frac{x}{1-z} + \frac{1-y}{z} + \frac{y}{1-x} \geq 6 \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có

$$\frac{1-z}{x} + \frac{x}{1-z} \geq 2\sqrt{\frac{1-z}{x} \cdot \frac{x}{1-z}} = 2 \quad (3)$$

$$\frac{1-x}{y} + \frac{y}{1-x} \geq 2, \quad (4)$$

$$\frac{1-y}{z} + \frac{z}{1-y} \geq 2, \quad (5)$$

Cộng theo vế của các BĐT (3), (4), (5) nhận được BĐT (2). Do đó BĐT (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1-z=z \\ 1-x=y \\ 1-y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn biến đổi quá dài dòng và sử dụng BĐT Cauchy cho 6 số dương không thuộc phạm vi của cấp THCS.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Dương Phước Thọ, Đỗ Quốc Việt, Nguyễn Văn Long, Nguyễn Thị Bích Nguyệt, 9A, THCS Lập Thạch; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Hương Lý, 8A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Hà Nội:** Lưu Nhật Nam, 9A5, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; **Hải Phòng:** Lê Đức Tiến, 9A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiến An; **Nghệ An:** Nguyễn Duy Thảo, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Ngô Sĩ Thanh, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Ninh Thuận:** Hoàng Trần Minh, 9/5, THCS Lý Tự Trọng, TP. Phan Rang, Tháp Chàm.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T6/389. Giải phương trình**

$$\sqrt[3]{x^2+4x+3} + \sqrt[3]{4x^2-9x-3} = \sqrt[3]{3x^2-2x+2} + \sqrt[3]{2x^2-3x-2}.$$

Lời giải. Cách 1

$$\text{Đặt } a = \sqrt[3]{x^2+4x+3}; b = \sqrt[3]{4x^2-9x-3}; \\ c = \sqrt[3]{3x^2-2x+2}; d = \sqrt[3]{2x^2-3x-2}.$$

$$\text{Ta có } a+b=c+d \quad (1)$$

$$\text{và } a^3+b^3=c^3+d^3$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (c+d)^3 - 3cd(c+d)$$

$$\text{Kết hợp với (1) ta có } (a+b)(ab-cd) = 0.$$

• Với $a+b=0$, suy ra $5x^2-5x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

• Với $ab=cd$, ta có

$$(x^2+4x+3)(4x^2-9x-3)$$

$$= (3x^2-2x+2)(2x^2-3x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-7x-5)(2x^2-6x-1) = 0.$$

PT trên có bốn nghiệm:

$$x_1 = \frac{7-\sqrt{69}}{2}; x_2 = \frac{7+\sqrt{69}}{2}; x_3 = \frac{3-\sqrt{11}}{2}; x_4 = \frac{3+\sqrt{11}}{2}.$$

Vậy PT đã cho có 6 nghiệm phân biệt

$$x \in \left\{ 0; 1; \frac{7-\sqrt{69}}{2}; \frac{7+\sqrt{69}}{2}; \frac{3-\sqrt{11}}{2}; \frac{3+\sqrt{11}}{2} \right\}.$$

Cách 2

$$\text{Đặt } a = \sqrt[3]{x^2+4x+3}; b = \sqrt[3]{4x^2-9x-3};$$

$$c = \sqrt[3]{3x^2-2x+2}; d = \sqrt[3]{2x^2-3x-2}.$$

$$\text{Ta có } a^3+b^3+c^3=d^3 \quad (2)$$

PT đã cho trở thành $a+b+c=d$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 = d^3$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a) = d^3.$$

$$\text{Kết hợp với (2) ta có } (a+b)(b+c)(c+a) = 0.$$

• Với $a+b=0$, suy ra $5x^2-5x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

• Với $b+c=0$, suy ra $2x^2-6x-1=0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{11}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{3-\sqrt{11}}{2}.$$

• Với $c+a=0$, suy ra $x^2-7x-5=0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7-\sqrt{69}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{7+\sqrt{69}}{2}.$$

Vậy PT đã cho có 6 nghiệm phân biệt

$$x \in \left\{ 0; 1; \frac{7-\sqrt{69}}{2}; \frac{7+\sqrt{69}}{2}; \frac{3-\sqrt{11}}{2}; \frac{3+\sqrt{11}}{2} \right\}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Có rất nhiều bạn tham gia giải, hầu hết đều cho kết quả đúng. Sau đây là các bạn nhỏ tuổi có lời giải tốt.

Phú Thọ: Phan Quốc Hưng, 9A1, Đinh Anh Hoàng, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Đình Lộc, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Dương Phước Thọ,** 9A, THCS Lập Thạch; **Nguyễn Thị Kim Anh,** 8A1, Nguyễn Thế Tùng, 9A1, THCS Yên Lạc; **Thái Bình:** Trương Việt Trinh, 9A2, Phân hiệu học sinh giỏi, Thanh Nê, Kiến Xương; **Nguyễn Văn Thành,** 9A5, Phân hiệu Chất lượng cao, Ttr. Diêm Điền; **Nam Định:** Trần Thị Thu Thảo, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hoá:** Lê Thị Phương Mai, 9A3, THCS Nguyễn Văn Trỗi.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T7/389.** Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$) ngoại tiếp đường tròn tâm J . Chứng minh rằng với điểm M bất kì thì

$$\sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} (MA_i - JA_i) \geq 0.$$

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Văn Thắng, 10A1 Toán, Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội).

Giả sử r là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$ và B_i là tiếp điểm của đường tròn với cạnh A_iA_{i+1} của đa giác đó ($i = 1, 2, ..., n$; quy ước $A_{n+1} \equiv A_1$). Áp dụng

định lý Con Nhím cho đa giác $B_1B_2...B_n$, với các vector đơn vị là $\frac{\overrightarrow{JA_i}}{JA_i}$ ($i = 1, 2, ..., n$)

$$\text{ta có } \frac{1}{2r} \cdot \sum_{i=1}^n B_i B_{i+1} \cdot \frac{\overrightarrow{JA_{i+1}}}{JA_{i+1}} = \vec{0},$$

$$\text{suy ra } \sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{JA_i}}{JA_i} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } \sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} \cdot MA_i &= \sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} \cdot \frac{MA_i \cdot JA_i}{JA_i} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{MA_i} \cdot \overrightarrow{JA_i}}{JA_i} = \sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} \cdot \frac{(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA_i}) \cdot \overrightarrow{JA_i}}{JA_i} \\ &= MJ \cdot \sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{JA_i}}{JA_i} + \sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} \cdot JA_i \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (2) kết hợp với (1) suy ra

$$\sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} (MA_i - JA_i) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA_i} \uparrow \uparrow \overrightarrow{JA_i}$ (với mọi $i = 1, 2, ..., n$), hay $M \equiv J$. $\square$

<Nhận xét. Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Hầu hết các bạn đều sử dụng định lý Con Nhím cho đa giác để giải bài toán này. Ngoài bạn Thắng, các bạn sau cũng có lời giải đúng và gọn:

Hà Nội: Nguyễn Văn Quý, 11A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Mạnh Quân, Đinh Tiến Dũng, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** Đỗ Thị Thu Hiền, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Lê

Quang Lâm, 10T, La Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Phạm Nhật Anh, 10A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** Lê Tuấn Dũng, 10T2, Nguyễn Thế Cường, 12 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Bình Định:** Lương Việt Chương, 10 T-L, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa.

HỒ QUANG VINH

★ Bài T8/389. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy + f(z)) = \frac{xf(y) + yf(x)}{2} + z$$

với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải. Từ hệ thức trong đầu bài, thay $x = y = z = 0$, ta được $f(f(0)) = 0$ (1); thay

$$x = 1, y = z = 0, \text{ ta được } f(f(0)) = \frac{f(0)}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(0) = 0$.

Lại thay $y = 1, z = 0, x \in \mathbb{R}$, ta được

$$f(x) = \frac{xf(1) + f(x)}{2} \Rightarrow f(x) = xf(1) \quad (3)$$

thay $x = y = 0, z = 1$, ta được $f(f(1)) = 1$ (4)

Từ (3), (4) suy ra $f^2(1) = 1 \Rightarrow f(1) = \pm 1$.

Do đó $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$.

Thử lại, ta thấy cả hai hàm số trên thỏa mãn điều kiện của đầu bài.

Vậy các hàm số cần tìm là $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$ với x thuộc $\mathbb{R}$. $\square$

<Nhận xét. 1) Khi thay trong giả thiết các giá trị đặc biệt của x, y, z và tìm được $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$ thì đó mới chỉ là điều kiện cần đối với hàm số phải tìm. Ta phải thử lại từng hàm số này và thấy chúng thỏa mãn giả thiết, mới có thể kết luận đó là hàm số phải tìm (điều kiện đủ). Việc thử lại rất đơn giản nhưng nhiều bạn không đề cập tới.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Văn Thắng, Nguyễn Mạnh Hùng, 10A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Bắc Giang:** Vũ Thanh Đạt, 10 Toán, THPT

chuyên Bắc Giang; **Hải Dương:** Lưu Hữu Phúc, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thái Bình:** Phí Ngọc Diệp, Phùng Minh Hoàng, Trần Quang Đại, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Phú Thọ:** Nguyễn Quốc Dũng, Đặng Duy Linh, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Bình Định:** Nguyễn Danh Nhân, 10A1, THPT Phù Cát II; **Thanh Hoá:** Tào Lê Minh, Lê Minh Đức, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hoá; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I, Trường Đinh Đức, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Hà Tĩnh:** Trần Thanh Huyền, 10 Toán 2, THPT Năng khiếu Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** Nguyễn Anh Quốc, 10 T, chuyên Lê Quý Đôn, TP Đông Hà; **Kon Tum:** Trịnh Hoàng Hải Ly, 11 A1, THPT chuyên Kon Tum.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T9/389.** Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2}.$$

Lời giải. Tất cả các bất đẳng thức trong lời giải dưới đều là áp dụng của bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \\ &= \left(\frac{a^2}{b} + b \right) + \left(\frac{b^2}{c} + c \right) + \left(\frac{c^2}{a} + a \right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b} + 2\sqrt{\frac{b^2}{c} \cdot c} + 2\sqrt{\frac{c^2}{a} \cdot a} = 2a + 2b + 2c. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } 2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) &\geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \\ &= \left(\frac{a^2 - ab + b^2}{b} + b\right) + \left(\frac{b^2 - bc + c^2}{c} + c\right) \\ &\quad + \left(\frac{c^2 - ca + a^2}{a} + a\right) \\ &\geq 2\sqrt{a^2 - ab + b^2} + 2\sqrt{b^2 - bc + c^2} + 2\sqrt{c^2 - ca + a^2}. \end{aligned}$$

Chia hai vế cho 2 ta nhận được bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

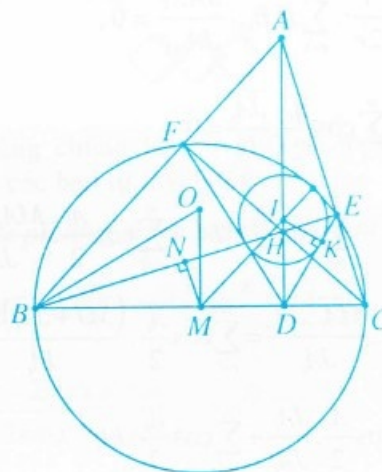
◀ **Nhận xét.** Tòa soạn nhận được rất nhiều lời giải của các bạn học sinh, tất cả các bạn đều giải đúng. Nhưng chỉ có rất ít bạn giải được gọn gàng như trên. Các bạn học sinh THCS sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Phùng Văn Mạnh, 9A, THCS Vĩnh Yên, Nguyễn Văn Hậu, Nguyễn Thế Tùng, 9A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Phạm Huy Hoàng, 9A5, THCS Giảng Võ, Quận Ba Đình; **Nghệ An:** Cao Minh Sơn, 9D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/389.** Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Trên DE lấy điểm K sao cho $DK = DH$. Trên DH lấy điểm I sao cho $\widehat{IKD} = 90^\circ$. Chứng minh rằng đường tròn tâm I , bán kính IK tiếp xúc với đường tròn đường kính BC .

Lời giải. Cách 1. (Theo nhiều bạn)



Hình 1

Gọi M là trung điểm của BC ; N là hình chiếu của M trên BH . Kí hiệu $(I, IK), (BC)$ theo thứ tự là đường tròn tâm I bán kính IK , đường kính đường kính BC (h.1). Ta thấy (I, IK) tiếp xúc với (BC)

$$\Leftrightarrow MB - IK = IM$$

$$\Leftrightarrow MB^2 + IK^2 - 2MB \cdot IK = IM^2$$

$$\Leftrightarrow MB^2 + ID^2 - DK^2 - 2MB \cdot IK = ID^2 + DM^2 \quad (\text{vì } \widehat{IKD} = 90^\circ; \widehat{IDM} = 90^\circ)$$

$$\Leftrightarrow MB^2 - DH^2 - DM^2 = 2MB \cdot IK \quad (\text{vì } DK = DH)$$

$$\Leftrightarrow MB^2 - MH^2 = 2MB.DH \cdot \frac{IK}{DK} \text{ (vì } \widehat{HDM} = 90^\circ)$$

$$\Leftrightarrow NB^2 - NH^2 = 2MB.DH \cdot \tan \widehat{ADK} \text{ (vì } MN \perp BH; \widehat{IKD} = 90^\circ)$$

$$\Leftrightarrow (NB - NH)(NB + NH) = 2MB.DH \cdot \cot \widehat{BAC} \text{ (vì } 90^\circ - \widehat{ADK} = \widehat{EDC} = \widehat{BAC})$$

$$\Leftrightarrow (NE - NH)(NB + NH) = DH.2MB \cdot \cot \widehat{BOM} \text{ (vì } \widehat{BAC} = \widehat{BOM}; NE = NB)$$

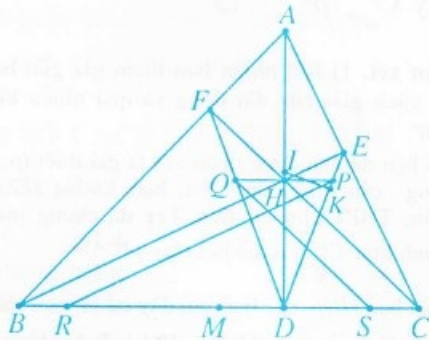
$$\Leftrightarrow HE.HB = DH.2OM$$

$$\Leftrightarrow HE.HB = HD.HA \text{ (vì } 2OM = HA)$$

$$\Leftrightarrow ABDE \text{ nội tiếp (đúng).}$$

Cách 2. (Theo bạn **Đồng Xuân Bách**, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**).

Qua H kẻ đường thẳng PQ song song với BC ($P \in DE$; $Q \in DF$). Qua P kẻ PR song song với HB ($R \in BC$). Qua Q kẻ QS song song với HC ($S \in BC$) (h.2).



Hình 2

Dễ thấy $HP = BR$. Mặt khác, vì $DK = DH$ nên các tam giác vuông DKI và DHP bằng nhau. Do đó $KI = HP$. Vậy $IK = BR$ (1)

Chú ý rằng $PR \parallel EB$; $QS \parallel FC$; $DI = DP = DQ$ (vì $\triangle DIK = \triangle DHP$; $\widehat{HDP} = \widehat{HDQ}$), để ý đến $\triangle DBF \sim \triangle DEC$, ta có

$$\begin{aligned} DR.DS &= \frac{DR}{DB} \cdot \frac{DS}{DC} \cdot DB.DC = \frac{DP}{DE} \cdot \frac{DQ}{DF} \cdot DB.DC \\ &= DI^2 \cdot \frac{DB}{DF} \cdot \frac{DC}{DE} = DI^2. \end{aligned}$$

Do đó, tam giác IRS vuông tại I (2)

Từ (1), (2) suy ra $MI = MR = MB - BR = MB - IK \Rightarrow MB - MI = IK$ (đpcm). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán này không quá khó, khá nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng.

2) Ngoài hai phương án trên một số bạn sử dụng các phương án khác và cũng cho lời giải đúng: tính toán bằng lượng giác; tính toán bằng phương pháp tọa độ; sử dụng phép nghịch đảo tâm H phương tích $HA.HD = HB.HE = HC.HF$; sử dụng định lý Lyness mở rộng.

3) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Thành Khang, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP Việt Trì; **Thái Nguyên:** Vũ Văn Hậu, 11A1, PT Dân tộc Nội trú Thái Nguyên, TP Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Mạnh Quân, Đình Tiến Dũng, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Phúc Yên; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Linh, 11A2, Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, Nguyễn Ngọc Sơn, 11T1, Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nghệ An:** Phạm Hùng Vương, 10A1, THPT Phan Đăng Lưu, Yên Thành, Đặng Hữu Trọng, 11A1, THPT Quỳnh Hợp 2, Nguyễn Thế Anh, 11T1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Bến Tre:** Khổng Hữu Hiệp, 11T, Huỳnh Công Bằng, 12T, THPT chuyên Bến Tre, TP Bến Tre; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **TP Hồ Chí Minh:** Nguyễn Lâm Minh, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T11/389.** Cho (u_n) là một dãy số dương. Đặt $S_n = u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \dots + u_n^3$ với $n = 1, 2, \dots$

Giả sử $u_{n+1} \leq ((S_n - 1)u_n + u_{n-1}) \frac{1}{S_{n+1}}$, với mọi $n = 2, 3, \dots$ Tìm $\lim u_n$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Từ giả thiết ta có ngay $S_n - S_{n-1} = u_n^3 > 0$, với $n = 2, 3, \dots$, ta thu được S_n là một dãy tăng.

Vậy nên, nếu dãy S_n bị chặn trên thì S_n là một dãy hội tụ và $\lim u_n^3 = \lim(S_n - S_{n-1}) = 0$.

Xét trường hợp dãy S_n không bị chặn trên thì $\lim S_n = +\infty$.

Từ giả thiết ta có $S_{n+1}u_{n+1} + u_n \leq S_n u_n + u_{n-1}$, với $n = 2, 3, \dots$

Từ đây, ta thu được

$$S_n u_n + u_{n-1} \leq S_2 u_2 + u_1, \text{ với } n = 2, 3, \dots$$

$$\text{Do đó } u_n + \frac{u_{n-1}}{S_n} \leq \frac{S_2 u_2 + u_1}{S_n},$$

$$\text{suy ra } 0 < u_n < \frac{S_2 u_2 + u_1}{S_n}, n = 2, 3, \dots$$

kéo theo $\lim u_n = 0$.

Vậy trong mọi trường hợp, ta đều có $\lim u_n = 0$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Đây là đề toán rất quen biết về dãy đơn điệu và tính giới hạn của dãy số nên có nhiều bạn giải được và đa số các bạn đều giải đúng, tương tự như cách đã trình bày ở trên.

Vĩnh Phúc: Nguyễn Văn Hiếu, Phùng Thị Tâm, 11A2, THPT Đội Cấn, Nguyễn Minh Quân, Đinh Tiến Dũng, Nguyễn Minh Thuận, 11A10, THPT Chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Thắng, 10A1, THPT Chuyên ĐHKHTN Hà Nội, Nguyễn Ngọc Sơn, 11T1, THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Hà Nam:** Nguyễn Đức Vinh, 12T, THPT Chuyên; **Hải Dương:** Nguyễn Tiến Dũng, 11T, THPT Chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** Trịnh Đông Sơn, 11T, THPT Chuyên Lam Sơn; **Quảng Ngãi:** Tô Đình Dương, 12A3 THPT Số 1, Đức Phổ, Phạm Viết Nhã, 11T, THPT Chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, Phạm Minh Trí, Phạm Đức Hùng, 11T1, THPT Chuyên Lương Văn Chánh; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 11A1, THPT Chuyên Lý Tự Trọng; **Bình Định:** Trần Đoàn Tấn, 11T, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** Không Hữu Hiệp, 11T, THPT Chuyên.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/389.** Cho p là một số nguyên tố, và các số tự nhiên m, n, q thỏa mãn $2 \leq n \leq m$ và $(p, q) = 1$. Chứng minh rằng $C_{qp^m}^n$ chia hết cho p^{m-n+1} (trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Lời giải. Cách 1. Viết số tự nhiên n dưới dạng $n = k.p^\alpha$ với $(k, p) = 1; k, \alpha \in \mathbb{N}^*$.

• Nếu $\alpha \geq n$ thì $n = k.p^\alpha \geq k.p^n \geq p^n$. Điều này vô lí. Vì vậy $\alpha \leq n - 1$.

$$\text{Ta có } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}.$$

$$\text{nên } C_{qp^m}^n = C_{qp^m}^{kp^\alpha} = \frac{q}{k} p^{m-\alpha} C_{qp^{m-1}}^{kp^{\alpha-1}}.$$

Do $(k, p) = 1$ và $C_{qp^{m-1}}^{kp^{\alpha-1}}$ là số nguyên dương, suy ra $C_{qp^m}^n : p^{m-\alpha}$.

Mà $\alpha \leq n - 1$ nên $p^{m-\alpha} : p^{m-n+1}$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Cách 2. Ta có

$$C_{qp^m}^n = \frac{qp^m(qp^m-1)\dots(qp^m-n+1)}{n!} \quad (1)$$

Gọi a và b thứ tự là số mũ cao nhất của p trong phân tích tiêu chuẩn của tử và mẫu trong (1) thì $C_{qp^m}^n : p^{a-b}$. Nhận thấy

$$a \geq m$$

$$b = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k} \right] \text{ với } k \in \mathbb{N}^*, p^k \leq n < p^{k+1}.$$

$$\leq n \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^k} \right) < \frac{n}{p-1} \leq n$$

nên $a - b \geq m - n + 1$.

Do vậy $C_{qp^m}^n : p^{m-n+1}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Nhưng cách giải còn dài dòng và quá nhiều biến đổi phức tạp.

Một số bạn đã đưa được nhận xét là giả thiết $(p, q) = 1$ là không cần thiết. Đặc biệt, bạn Không Hữu Hiệp, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre đã chứng minh kết quả mạnh hơn $C_{qp^m}^n$ chia hết cho p^{m-n+2} .

2) Ngoài bạn Hiệp, các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Văn Thắng, 10A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN; **Vĩnh Phúc:** Lê Văn Tú, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Tô Đình Dương, 12A3, THPT số 1 Đức Phổ; **Nghe An:** Nguyễn Thế Anh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh.

THANH LOAN

★ **Bài L1/389.** Một đoạn mạch điện AC có các linh kiện: các điện trở thuần, các cuộn thuần cảm và các tụ điện mắc nối tiếp. B là một điểm trên AC.

a) Cho biết:

$$u_{AB} = 1 \cdot \sin(1000t) \text{ (V)}$$

$$u_{BC} = \sqrt{3} \sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (V)}$$

$$i = 10^{-3} \sin(1000t) \text{ (A)}$$

Tìm biểu thức của u_{AC} .

b) Giữ nguyên các linh kiện của mạch điện, tăng tần số góc của dòng điện lên $2000s^{-1}$ thì biểu thức của i' , u'_{AB} , u'_{BC} như sau:

$$i' = 10^{-3} \sin(2000t) \text{ (A)}$$

$$u'_{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(2000t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (V)}$$

$$u'_{BC} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(2000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (V)}$$

Tìm biểu thức của u'_{AC} .

c) Trên AB và BC có các linh kiện gì? Xác định độ lớn của chúng.

Lời giải. a) Vẽ giản đồ vectơ, rồi từ đó dễ dàng tìm được

$$u_{AC} = 2 \sin\left(1000\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (V)}$$

b) Vẽ giản đồ véc tơ, rồi từ đó dễ dàng tìm được

$$u'_{AC} = 2 \sin\left(2000\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (V)}$$

Trên AB và BC có các linh kiện: điện trở thuần, cuộn thuần cảm, và tụ điện với các giá trị được kí hiệu tương ứng là $(R_1; L_1; C_1)$ và $(R_2; L_2; C_2)$.

$$\text{Ta có } Z_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = 1000\Omega.$$

Do u_{AB} cùng pha với i nên trong mạch có cộng hưởng điện (ứng với tần số góc 1000 rad/s),

$$\text{khi đó } R_1 = 1000\Omega, \text{ còn } L_1\omega_1 = \frac{1}{\omega_1^2 C_1} \quad (1)$$

Do u'_{AC} nhanh pha hơn i' góc $\frac{\pi}{6}$ nên

$$\frac{L_1\omega_2 - \frac{1}{\omega_2 C_1}}{R_1} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta tìm được $C_1 \approx 2,6\mu F$; $L_1 \approx 385mH$.

Từ đầu bài ta thấy cả u_{BC} và u'_{BC} đều lệch pha $\frac{\pi}{2}$ so với dòng điện nên $R_2 = 0$.

Do đoạn mạch BC lúc đầu có tính dung kháng nên

$$Z_{BC} = \frac{U_{BC}}{I} = 1000\sqrt{3} = \frac{1}{\omega_1 C_2} - \omega_1 L_2 \quad (3)$$

Sau khi thay đổi tần số góc đoạn mạch BC lại có tính cảm kháng (u'_{BC} nhanh pha hơn i') nên

$$Z'_{BC} = \frac{U'_{BC}}{I'} = \frac{2000}{\sqrt{3}} = \omega_2 L_2 - \frac{1}{\omega_2 C_2} \quad (4)$$

Giải hệ (3) và (4) ta tìm được $C_2 \approx 0,325\mu F$; $L_2 \approx 1,34H$. $\square$

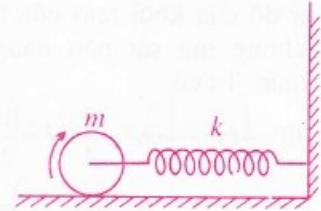
◀ Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng:

Hải Dương: Nguyễn Quốc Uy, 12A4 THPT Bình Giang; **Nguyễn Trọng Thanh**, 12A1, THPT Tuệ Tĩnh, Cẩm Giàng; **Nghệ An:** Lê Văn Hương, 12A1, THPT Quỳnh Lưu 4; **Mạnh Đạt**, A3K37, THPT Chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Nam:** Đoàn Văn Quốc, 11₂, THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Long An:** Trần Thủy Anh, 12A, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** Trần Thế Tấn, 12A3, Nguyễn Long Phước Đường, 11A3 THPT Chuyên Lý Tự Trọng; **Vũng Tàu:** Phùng Thanh Huy, 12TA7, THPT Vũng Tàu; **Cà Mau:** Dương Thái Dương, 12T1 THPT Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ Bài L2/389

Một hình trụ đặc được gắn với một lò xo không khối lượng, nằm ngang, sao cho nó có thể lăn không trượt trên một mặt phẳng ngang (hình vẽ).



Lò xo có độ cứng $k = 3,0 \text{ N/m}$. Hệ được thả từ nghỉ ở một vị trí mà lò xo bị kéo giãn $0,25\text{m}$.

a) Hãy tính động năng tịnh tiến và động năng quay của hình trụ khi nó đi qua vị trí cân bằng.

b) Chứng minh rằng, trong các điều kiện ấy, khối tâm của hình trụ thực hiện một chuyển

động điều hòa với chu kì $T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{2k}}$ trong

đó m là khối lượng của hình trụ.

Lời giải. a) Momen quán tính của hình trụ đặc là $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Thế năng của hình trụ U ở vị trí được kéo giãn lúc đầu là $U = U_{\max} = \frac{1}{2}kx_m^2$

Gọi K_t và K_q tương ứng là động năng tịnh tiến và động năng quay của hình trụ. Tổng động năng K của hình trụ khi đi qua vị trí cân bằng là

$$K = K_{\max} = K_t + K_q = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2\omega^2$$

Vì $v = R\omega$, suy ra

$$K = K_{\max} = K_t + K_q = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{4}mv_m^2 = \frac{3}{4}mv_m^2 \quad (1)$$

$$\text{Như vậy } K_t = 2K_q \quad (2)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng thì

$$\frac{3}{4}mv_m^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (0,25)^2 = 0,09375 \text{ (J)}.$$

$$\text{Suy ra } K_q = \frac{1}{4}mv_m^2 = \frac{0,09375}{3} = 0,03125 \text{ (J)};$$

$$K_t = \frac{1}{2}mv_m^2 = 2K_q = 0,03125 \times 2 = 0,0625 \text{ (J)}.$$

b) Chọn gốc tọa độ ở vị trí cân bằng. Gọi x là li độ của khối tâm của hình trụ. Do hệ trượt không ma sát nên năng lượng của hệ bảo toàn. Ta có

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{3}{4}mv^2 = \text{const} \quad (3)$$

Thay $v = x'$ (ở đây x' là đạo hàm của x theo thời gian t) vào (3) ta được

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{3}{4}m(x')^2 = \text{const} \quad (4)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (4) theo thời gian và

$$\text{rút gọn, ta có } x'' + \frac{2k}{3m}x = 0 \quad (5)$$

(5) là phương trình của dao động điều hòa,

$$\text{với chu kỳ } T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}. \quad \square$$

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T7/393. Let $ABCDE$ be a cyclic pentagon with $AC \parallel DE$ and $\widehat{AMB} = \widehat{BMC}$ where M is the midpoint of BD . Prove that the line BE passes through the midpoint of AC .

T8/393. Let $OABC$ be a tetrahedron with right trihedral angle at vertex O . Prove that

$$\cot AB \cdot \cot BC + \cot BC \cdot \cot CA + \cot CA \cdot \cot AB \leq \frac{3}{2}$$

where $\cot AB$ is the cotangent of the dihedral angle of side AB .

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/393. Let ABC be an acute triangle. The altitudes BK and CL meet at H . The line passing through H meets AB , AC at P , Q respectively. Prove that $HP = HQ$ if and only if $MP = MQ$, where M is the midpoint of BC .

T10/393. Find all real numbers k and m such that

$$k(x^3 + y^3 + z^3) + mxyz \geq (x + y + z)^3$$

for any non-negative numbers x, y, z .

T11/393. Let (x_n) be a sequence of real numbers, $n = 1, 2, \dots$ satisfying $\ln(1+x_n^2) + nx_n = 1$ for any positive integers n .

$$\text{Find } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1+nx_n)}{x_n}.$$

T12/393. Find all continuous functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

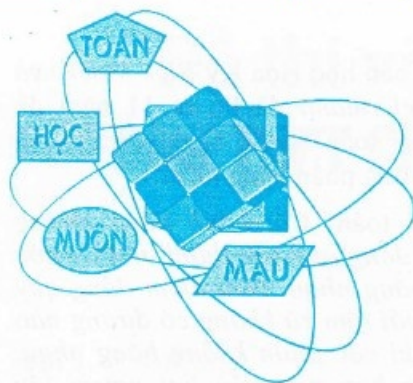
$$f(x + f(y)) = 2y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Translated by LE MINH HA

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

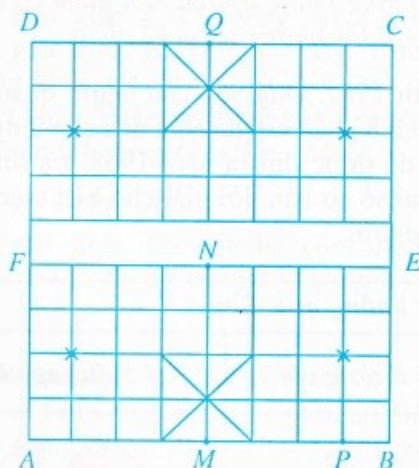
Hà Nam: Đinh Ngọc Hải, 10 Lí, THPT chuyên Hà Nam; **Hải Dương:** Đỗ Anh Quân, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** An Mạnh Công, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Trương Công Nam, 12A1, THPT Đô Lương 3, Vũ Đình Hải, Mạnh Đạt, A3K37, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Trọng Hoàng Hiệp, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Cần Thơ:** Trần Thế Tấn 12A3, Nguyễn Long Phước Đường, 11A3, THPT chuyên Lí Tự Trọng; **Bến Tre:** Liêla Khắc Vũ, 10 Lí, THPT chuyên Bến Tre; **Quảng Ngãi:** Phạm Quốc Đỏ, 11B1, Nguyễn Tấn Đông, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Vũng Tàu:** Phùng Thanh Huy, 12TA7, THPT Vũng Tàu; **Cà Mau:** Dương Thái Dương, 12T2, THPT Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN VĂN THUẬN



ĐƯỜNG ĐI CỦA QUÂN MÃ trên bàn cờ tướng

Trên bàn cờ tướng $ABCD$ kích thước 8×9 ô vuông (h.1) các quân cờ đứng và di chuyển trên giao điểm các đường. Mỗi bước đi của quân Mã di chuyển từ đầu nọ đến đầu kia trên một đường chéo nào đó của hình chữ nhật tạo bởi hai ô vuông chung nhau một cạnh.



Hình 1

Dành cho bạn đọc

1) Hỏi một quân Mã có thể đi liên tiếp đến tất cả các giao điểm của hình chữ nhật $ABEF$, mỗi điểm đứng đúng một lần, với điểm xuất phát là M và điểm cuối cùng là N được không?

Hỏi như trên với bàn cờ $ABCD$, điểm xuất phát là M và điểm cuối cùng là Q .

2) Chứng minh rằng một quân Mã, ban đầu đứng ở điểm P , thì không thể đi liên tiếp đến tất cả các giao điểm của hình chữ nhật $ABEF$, mỗi điểm đứng đúng một lần.

AN MINH

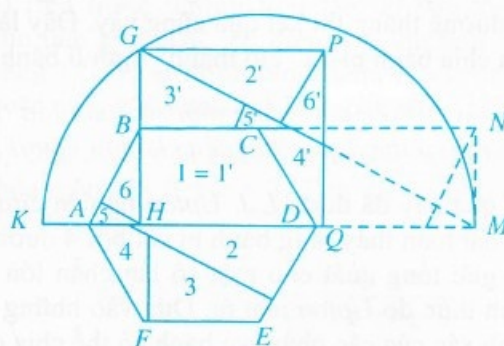
Giải đáp:

PHÂN CHIA LỤC GIÁC ĐỀU ghép thành hình vuông

(Đề đăng trên THPT số 386 tháng 8.2009)

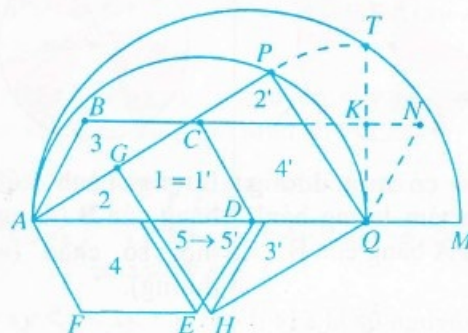
1) Có nhiều cách phân chia lục giác đều để ghép thành một hình chữ nhật, sau đó phân chia hình chữ nhật để ghép thành hình vuông (xem Toán học muôn màu trên THPT số 375 tháng 9.2008).

Trên hình 2 trình bày một cách làm như thế với số mảnh được phân chia là $k = 6$, trong đó mảnh a chuyển thành mảnh a' (a bằng 1, 2, 3, 4, 5, 6); $HM = BN = BC + AD$; $HG = GP = PQ = QH$ và $HG^2 = KH.HM = BH.BN$.



Hình 2

2) Cách phân chia và ghép hình ứng với $k = 5$ (h. 3), trong đó mảnh a chuyển thành mảnh a' (a bằng 1, 2, 3, 4, 5); $AQ = BN = AD + BC$; $HG = GP = PQ = QH$ và $QP^2 = QT^2 = AQ.QM = AQ.QK$.



Hình 3

PHI PHI



Hai nhà Toán học Hoa Kỳ Rick Mabry và Paul Deiermann đã bỏ ra 11 năm để nghiên cứu bài toán “Chia bánh pi-za (hình tròn) thành những phần bằng nhau”.

Nội dung bài toán: Cắt bánh bằng những đường thẳng đồng quy tạo thành những góc kề liên tiếp bằng nhau. Nếu điểm đồng quy không trùng với tâm và không có đường nào đi qua tâm, thì các phần không bằng nhau. Trong trường hợp này nếu hai người lần lượt lấy những phần kề nhau thì họ có lượng bánh bằng nhau không? Người nào có lượng bánh lớn hơn?

TOÁN HỌC VÀ CHIẾC BÁNH PI-ZA

Sơ bộ thấy nếu cắt bánh bằng một đường thẳng thì phần có chứa tâm sẽ lớn hơn. Nếu cắt bằng hai đường thẳng thì kết quả cũng vậy. Đây là trường hợp đặc biệt của ba quy tắc chung về “bài toán chia bánh pi-za” tạo thành “định lý bánh pi-za”.

Quy tắc 1. Nếu cắt bằng một số chẵn lần (lớn hơn 2) đường thẳng đi qua một điểm cố định, thì bánh có thể được chia đều cho hai người nếu họ lần lượt lấy những phần kề nhau.

Kết quả này đã được L.J. Upton nghiên cứu lần đầu năm 1967. Ông yêu cầu người quan tâm đến bài toán thấy rằng bánh bị cắt bởi 4 đường thẳng thành 8 phần có thể chia đều cho 2 người. Lời giải tổng quát cho một số lần chẵn lớn hơn 4, sau đó được tìm ra năm 1968, trả lời cho thách thức do Upton nêu ra. Dựa vào những phép tính đại số cơ bản, lời giải cho biết diện tích chính xác của các phần, và bánh có thể chia đều cho hai người.

Đường cắt qua tâm	Đường cắt không qua tâm		
Có 1 đường cắt qua tâm	Có 4 đường cắt	Có 3 đường cắt	Có 5 đường cắt
Nếu có một đường qua tâm lượng bánh của A bằng của B.	Lượng bánh của A bằng của B (đúng với mọi số chẵn $\neq 2$ đường).	Lượng của A nhiều hơn B nếu A lấy phần chứa tâm (đúng với 7, 11, 15..., $4k+3$ đường).	Lượng của A nhiều hơn lượng của B nếu A nhường phần chứa tâm cho B (đúng với 9, 13, 17..., $4k+1$ đường)

Phần của A: ☐

Phần của B: ☐

Nhưng sự việc trở nên phức tạp khi bánh được cắt một số lẻ lần. Theo định lý về bánh pi-za

Quy tắc 2. Nếu bánh được cắt bởi 3, 7, 11, 15... đường (tổng quát $4k + 3$ đường) mà không đường nào qua tâm, thì người chiếm phần chứa tâm của bánh có lượng bánh nhiều hơn.

Quy tắc 3. Nếu cắt thành 5, 9, 13, 17... đường (tổng quát $4k + 1$ đường) mà không có đường nào qua tâm thì người chiếm phần chứa tâm có lượng bánh nhỏ hơn.

Phép chứng minh điều này khá khó. Mãi đến gần đây Mabry và Deierman mới giải quyết nổi việc chứng minh cho mọi khả năng.

Deierman đã nhanh chóng tìm được lời giải cho bài toán bánh cắt bởi 3 đường thành 6 phần “một trong những lời giải thông minh nhất mà tôi chưa từng thấy”, Mabry nhớ lại. Tiếp theo hai nhà toán học đã chứng minh thành công cho trường hợp 10 phần. Sau đó họ đã chứng tỏ rằng kết quả của trường hợp cắt bằng 3 đường cũng giống như kết quả của cách cắt bằng 7 đường. Đó là người lấy phần có chứa tâm có lượng bánh nhiều hơn. Trên đà thắng lợi hai nhà toán học nghĩ rằng mình đã phát minh một kỹ thuật cho phép xác định một lần cho tất cả mọi trường hợp xảy ra được bằng cách so sánh diện tích các hình đối đỉnh, và cộng các hiệu số. Về nguyên tắc, kỹ thuật là đơn giản. Về thực hành thì cực kì khó để tìm lời giải bao gồm hết mọi số lẻ nhất cắt.

Hai ông thử áp dụng hình học để đơn giản hóa bài toán, nhưng tiếc thay, bài toán lại đòi hỏi những phép tính phức tạp. Dù hai ông chấp nhận một sự đánh giá chưa chính xác, nhưng cũng bó tay không biết ai có lượng bánh lớn hơn.

Hai ông đã sử dụng các chương trình máy tính để thử lại kết quả, nhưng chỉ đến khi bỏ qua các phương tiện kỹ thuật họ mới có được một cách nhìn rõ ràng bài toán. Họ đã thành công trong việc mô hình hóa lại những phép tính đại số để có được một công thức “đẹp” hơn và dễ sử dụng hơn. Sau đó hai ông còn

viện đến Giải tích Tổ hợp, một lĩnh vực toán thuần túy xử lý trên tập hợp số rời rạc để giải quyết bài toán. Năm 1999 hai ông mới công bố kết quả nghiên cứu bài toán đề ra từ 1979. Kết quả về “định lý bánh pi-za” có mở ra con đường giải quyết các bài toán thực tế khác không? Chưa chắc! Chính họ cũng thừa nhận: Có nhiều khi các nhà toán học lao vào giải quyết những bài toán hóc búa do mê say vẻ đẹp của nó, mà cũng không biết kết quả sẽ được áp dụng vào việc gì. Ví dụ như bài toán “đường cong Peano” do nhà toán học Ý Giuseppe Peano đề ra năm 1890, mãi đến một thế kỉ sau mới tìm thấy áp dụng của nó trong Cấu trúc sinh học, Kinh tế và Khí tượng.

PHAN THANH QUANG

(sưu tầm, giới thiệu)

(Nguồn: *Courrier International* số 20/1/2010)

SỐ ĐA GIÁC... (Tiếp trang 15)

• Với $(x_{10}; y_{10}) = (90249; 36844)$ thì $n = 15041$, $r = 6141$ nên có $T_{15041} = B_{6141} = 113123361$.

Như thế các số đa giác 21, 11781, 203841, 113123361 có ít nhất hai hình biểu diễn.

Nghiệm tổng quát $(x_m; y_m)$ của phương trình (12) có dạng truy hồi như sau:

$$\begin{aligned} \text{Các số } (x_1; y_1) &= (3; 2), (x_2; y_2) = (9; 4), \\ (x_3; y_3) &= (39; 16), (x_4; y_4) = (93; 38) \\ \begin{cases} x_{m+4} = 10x_{m+2} - x_m \\ y_{m+4} = 10y_{m+2} - y_m \end{cases} &\text{ với } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm của các phương trình (7) và (9) ta có

$$T_{153} = L_{77} = B_{63} = 11781.$$

$$T_{15041} = L_{7521} = B_{6141} = 113123361.$$

Như vậy hai số đa giác trên có ít nhất ba hình biểu diễn.

Các bạn có thể tiếp tục tìm thêm các nghiệm của phương trình (9) hoặc tiếp tục giải với các cặp số k, h khác.

TRẦN ĐÌNH VIỆN (Hà Nội)

(Theo *Bulletin của APMEP* số 479 tháng 7/2008)

BẠN CÓ BIẾT ?

TRẦN VĂN VUÔNG
(Hà Nội)

1. Định nghĩa tam giác Heron

Tam giác có độ dài các cạnh là ba số nguyên liên tiếp và có diện tích bằng một số nguyên là **tam giác Heron**.

Nếu gọi a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác Heron theo thứ tự tăng dần thì $a = b - 1$, $c = b + 1$, nửa chu vi và bình phương diện tích của tam giác đó lần lượt là $p = \frac{3b}{2}$ và

$$S^2 = 3 \left(\frac{b}{2} \right)^2 \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - 1 \right).$$

Nếu b là số lẻ thì S^2 không thể là số nguyên. Do đó b phải là số chẵn. Đặt $b = 2k$ (với k là số nguyên dương) thì $p = 3k$ và $S^2 = 3k^2(k^2 - 1)$. Vì S là số nguyên dương và $S^2 : 3$ nên $S^2 : 9$, suy ra $k^2 - 1 = 3r^2$ với r là số nguyên dương. Như vậy $S = 3kr$, trong đó k là nửa cạnh lớn thứ hai và r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác Heron.

Phương trình $k^2 - 1 = 3r^2$ là *phương trình Pell loại 1*.

Phương trình này có vô số nghiệm nguyên dương $(k_n; r_n)$. Tất cả các nghiệm đó được cho bởi các công thức sau:

$$k_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n}{2},$$

$$r_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}.$$

Hai dãy số (k_n) và (r_n) còn được xác định bởi các hệ thức truy hồi sau:

$$k_1 = 2, k_2 = 7, k_{n+2} = 4k_{n+1} - k_n,$$

$$r_1 = 1, r_2 = 4, r_{n+2} = 4r_{n+1} - r_n.$$

2. Cạnh của tam giác Heron

Độ dài các cạnh của tam giác Heron được tính theo các công thức sau:

$$a_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1,$$

$$b_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n,$$

$$c_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n + 1.$$

Ba dãy số (a_n) , (b_n) , (c_n) còn được xác định bởi các hệ thức truy hồi sau:

$$a_1 = 3, a_2 = 13, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n + 2,$$

$$b_1 = 4, b_2 = 14, b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n,$$

$$c_1 = 5, c_2 = 13, c_{n+2} = 4c_{n+1} - c_n - 2.$$

3. Diện tích của tam giác Heron

Từ phương trình $k^2 - 1 = 3r^2$ ta suy ra rằng nếu k lẻ thì r chẵn và nếu r lẻ thì k chẵn. Do đó diện tích $S = 3kr$ của tam giác Heron luôn luôn là bội của 6.

Sử dụng các công thức tính k_n và r_n ta suy ra công thức tính S_n như sau:

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left((2 + \sqrt{3})^{2n} - (2 - \sqrt{3})^{2n} \right).$$

Từ công thức đó suy ra hệ thức truy hồi của dãy số (S_n) như sau:

$$S_1 = 6, S_2 = 84, S_{n+2} = 14S_{n+1} - S_n.$$

4. Bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác Heron

Từ hệ thức truy hồi đối với bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác Heron là $r_1 = 1, r_2 = 4, r_{n+2} = 4r_{n+1} - r_n$ ta suy ra rằng các bán kính đó đều là số nguyên và nếu sắp xếp các bán kính đó theo thứ tự tăng dần thì chúng là các số lẻ, chẵn xen kẽ nhau.

5. Bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác Heron

Bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác Heron được tính theo công thức

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{4k^2 - 1}{6r}.$$

Do đó bán kính này luôn luôn là số hữu tỉ.

6. Đường cao của tam giác Heron

Độ dài đường cao ứng với cạnh lớn thứ hai của tam giác Heron được tính theo công thức

$$h_b = \frac{2S}{b} = 3r \text{ nên độ dài đường cao đó luôn}$$

luôn là bội của 3. Độ dài hai đường cao còn lại luôn luôn là số hữu tỉ không nguyên, trừ trường hợp đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất của tam giác Heron có độ dài ba cạnh là 3; 4; 5. Vì

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c^2 &= (2k-1)^2 + (2k)^2 - (2k+1)^2 \\ &= 4k(k-2) \geq 0 \end{aligned}$$

nên tam giác Heron chỉ là tam giác vuông trong trường hợp độ dài ba cạnh của nó là 3; 4; 5. Trừ trường hợp đó ra, tam giác Heron luôn luôn có ba góc nhọn.

Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh B xuống cạnh $AC = b = 2k$ của tam giác Heron có ba góc nhọn thì H nằm giữa A và C . Hơn nữa,

$$\begin{aligned} 2k(HA - HC) &= (HA + HC)(HA - HC) \\ &= HA^2 - HC^2 = (HA^2 + BH^2) - (HC^2 + BH^2) \\ &= AB^2 - BC^2 = (2k+1)^2 - (2k-1)^2 = 8k, \end{aligned}$$

nên $HA = k + 2$, $HC = k - 2$.

Khi đó độ dài các cạnh của hai tam giác vuông ABH và BCH đều là số nguyên dương.

$$\text{Ta có } S_{ABH} = \frac{3r(k+2)}{2} = \frac{S}{2} + 3r,$$

$$S_{BCH} = \frac{3r(k-2)}{2} = \frac{S}{2} - 3r.$$

Vì S là bội của 6 và r là số nguyên dương nên S_{ABH} và S_{BCH} đều là số nguyên dương. Do đó ABH và BCH là hai tam giác vuông có độ dài các cạnh và diện tích đều là số nguyên dương.

Gọi K là chân đường cao hạ từ đỉnh C xuống cạnh $AB = 2k + 1$ của tam giác Heron thì K nằm giữa A và B . Sử dụng các kết quả về diện tích và độ dài đường cao của tam giác Heron, ta có

$$AK = \frac{2k(k+2)}{2k+1}, BK = \frac{2k^2+1}{2k+1}, CK = \frac{6kr}{2k+1}.$$

Như vậy, đường cao ứng với cạnh lớn nhất của tam giác Heron luôn luôn chia tam giác Heron đó thành hai tam giác vuông có độ dài các cạnh và diện tích đều là số hữu tỉ.

Gọi M là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh $BC = 2k - 1$ của tam giác Heron thì M nằm giữa B và C , trừ trường hợp tam giác có độ dài ba cạnh là 3; 4; 5. Sử dụng các kết quả về diện tích và độ dài đường cao của tam giác Heron, ta có

$$AM = \frac{6kr}{2k-1}, BM = \frac{2k^2+1}{2k-1}, CM = \frac{2k(k-2)}{2k-1}.$$

Như vậy, trừ trường hợp tam giác có độ dài ba cạnh là 3; 4; 5, đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất của tam giác Heron luôn luôn chia tam giác Heron đó thành hai tam giác vuông có độ dài các cạnh và diện tích đều là số hữu tỉ.

7. Đường trung tuyến của tam giác Heron

Tuy độ dài đường trung tuyến của tam giác Heron là căn bậc hai của số hữu tỉ nhưng đường trung tuyến đó vẫn chia tam giác Heron thành hai tam giác có diện tích là số nguyên.

8. Đường phân giác của tam giác Heron

Tuy độ dài đường phân giác của tam giác Heron là căn bậc hai của số hữu tỉ nhưng đường phân giác đó vẫn chia tam giác Heron thành hai tam giác có diện tích là số hữu tỉ.

THÔNG BÁO

- ★ Tập chí THPT đang phát hành cuốn **TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ TRỌN BỘ NĂM 2009**. Tất cả 12 số tạp chí THPT trong năm được đóng thành tập bìa cứng. Đây là cách để lưu giữ tạp chí tốt nhất, có hệ thống và tiện tra cứu đối với các thư viện, các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán. Số lượng sách có hạn, bạn muốn có trọn bộ THPT năm 2009 hãy liên hệ ngay với Tòa soạn. Giá bán lẻ 88.000 đồng.
- ★ Cuốn sách **TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ QUYỂN 5** sẽ ra mắt bạn đọc vào quý II năm 2010. Sách dành cho bạn trẻ yêu toán, đặc biệt cho các bạn chuẩn bị thi tốt nghiệp THPT và thi vào đại học. Trong sách trình bày các bài toán về nhị thức Newton, công thức tổ hợp, bất đẳng thức, phương pháp vectơ và phương pháp tọa độ.

THPT



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 393 (3.2010)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: taichitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School

Nguyễn Minh Nhiên – Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức có chứa biến ở mẫu.

4 Lời giải Đề thi vào lớp 10 chuyên toán Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định, năm học 2009 – 2010.

5 Đề thi vào lớp 10 chuyên toán Trường THPT chuyên Phan Bội Châu, năm học 2009 – 2010.

6 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation

Nguyễn Tất Thu – Một vài điểm cần chú ý khi giải phương trình lượng giác.

9 Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum

Đậu Thanh Kỳ – Phát triển tư duy học sinh thông qua việc khai thác một bài toán.

13 Giải trí toán học – Math Recreation

14 Từ kho tàng toán học – From Math Treasure

Trần Đình Viện – Số đa giác và sự biểu diễn hình học.

16 Đề ra kì này – Problems in This Issue

T1/393, ..., T12/393, L1/393, L2/393.

18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems

Giải các bài của số 389.

27 Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics

28 Toán học & đời sống – Math and Life

Phan Thanh Quang – Toán học và chiếc bánh pi-za.

30 Bạn có biết? – Do you know?

Trần Văn Vương – Tam giác Heron.

Bìa 3. Câu lạc bộ – Math Club.

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG

Trĩ sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật : MINH THO

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



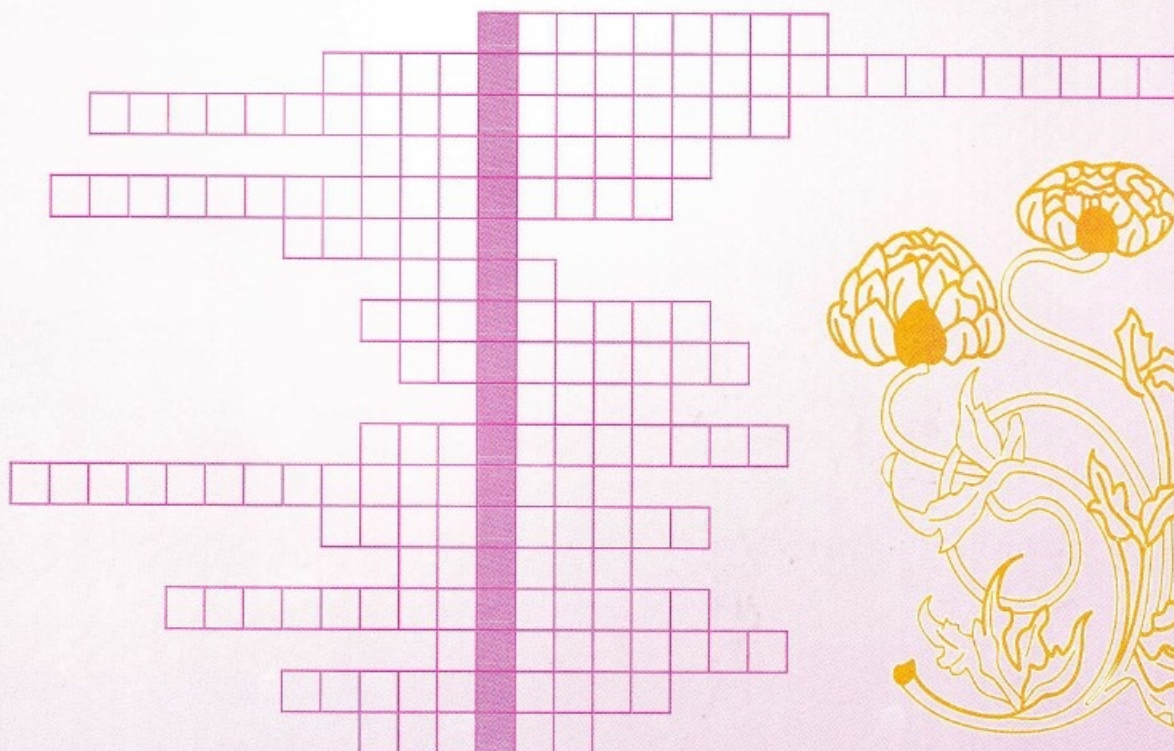
Những ngày lễ, kỉ niệm lớn trong năm 2010

Trong quá trình đấu tranh xây dựng và bảo vệ Tổ quốc, nhân dân ta đã lập nên nhiều chiến công vẻ vang, nhiều thành tích đáng tự hào. Năm 2010 là năm có nhiều ngày lễ, ngày kỉ niệm trọng đại (là bội của 5 năm) đáng ghi nhớ như: những cuộc khởi nghĩa chống ngoại xâm; ngày thành lập một đoàn thể; ngày kỉ niệm một ngành, nghề; ngày sinh của người có công dựng nước và giữ nước, ...

Bạn hãy điền vào các hàng của ô chữ và phát hiện các từ ghi ở cột sẫm màu theo năm tháng xảy ra các sự kiện từ hàng trên xuống hàng dưới sau đây.

- | | |
|----------------|------------------|
| 1) 1010 | 2) 18.11.1930 |
| 3) 15.7.1950 | 4) 27.2.1955 |
| 5) 30.4.1975 | 6) 27.9.1940 |
| 7) 11.3.1945 | 8) 19.5.1890 |
| 9) 2.9.1945 | 10) 23.11.1940 |
| 11) 3.2.1930 | 12) 20.10.1930 |
| 13) 3.40 | 14) 21.6.1925 |
| 15) 12.9.1930 | 16) 10.3 Âm lịch |
| 17) 14.10.1930 | 18) 19.8.1945 |

VÂN KHANH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

tặng 1804 phần quà cho các gia đình có hoàn cảnh khó khăn trên toàn quốc trong những ngày đầu năm 2010

Trong những ngày đầu năm 2010 vừa qua, các đơn vị thành viên trong hệ thống NXBGD Việt Nam đã tổ chức trao tặng tổng cộng 1804 phần quà, trị giá 480 triệu đồng cho các gia đình có hoàn cảnh khó khăn trên cả nước.

- Ở khu vực phía Bắc: đã có 808 suất quà, trị giá 195 triệu đồng đã được trao cho nhiều hộ gia đình chính sách và học sinh có hoàn cảnh khó khăn vươn lên học tốt tại các tỉnh Nam Định, Hòa Bình, Hưng Yên, Lào Cai, Thanh Hóa, Tuyên Quang và Hà Nội.
- Ở khu vực miền Trung: Đã có 250 suất quà được trao cho các hộ nghèo, Trung tâm phụng dưỡng người có công với cách mạng, Mái ấm tình thương, Hội người mù... tỉnh Quảng Nam và thành phố Đà Nẵng, với tổng trị giá 57 triệu đồng.
- Ở khu vực phía Nam: 532 phần quà trị giá 138 triệu đồng được trao cho các hộ nghèo, học sinh và giáo viên có hoàn cảnh khó khăn, thương binh tại một số trại điều dưỡng... thuộc các tỉnh Tiền Giang, Vĩnh Long, Bến Tre, Bình Dương và TP. Hồ Chí Minh.

Mỗi suất quà trị giá từ 200 000 đồng đến 300 000 đồng đã được trao tận tay bà con. Những phần quà tuy còn nhỏ bé nhưng mang nhiều ý nghĩa đối với các gia đình gặp khó khăn, góp phần sẽ chia những thiếu thốn, động viên phần đầu vươn lên trong cuộc sống. Đây là hoạt động truyền thống thường niên của NXBGD Việt Nam trong nhiều năm qua, thể hiện tinh thần Uống nước nhớ nguồn, Lá lành đùm lá rách và thực hiện trách nhiệm đối với xã hội của doanh nghiệp.

Theo kế hoạch, trong năm 2010, cùng với các hoạt động xã hội từ thiện khác, NXBGD Việt Nam sẽ tổ chức xây dựng 32 nhà tình nghĩa cho đối tượng chính sách của ngành giáo dục, với tổng trị giá khoảng 1,5 tỉ đồng.

BẠCH KIM



Tập chí Toán học và Tuổi trẻ trao quà cho các học sinh nghèo có nhiều cố gắng trong học tập của trường THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội.



NXBGD tại TP. Đà Nẵng trao quà cho các em trường chuyên biệt Tương Lai, TP. Đà Nẵng.



NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh trao quà cho học sinh nghèo huyện Nhà Bè, TP. Hồ Chí Minh.

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT03M0

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2010

Giá : 6000 đồng

Sáu nghìn đồng