



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
2 2010
Số 392

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 47

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Tri sự: (04) 35144272, (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoitre

Mừng Đảng, Mừng Xuân Mới





Hỏi - Đáp về phong trào thi đua "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIÊN, HỌC SINH TÍCH CỰC"

✉ CÂU HỎI. Làm thế nào để thực hiện tốt nội dung "Dạy và học có hiệu quả, phù hợp với đặc điểm lứa tuổi của học sinh ở mỗi địa phương, giúp các em tự tin trong học tập"?

🕒 Trả lời. Nội dung thứ hai trong 5 nội dung của Chỉ thị số 40/2008/CTBGDĐT, đã nêu:

"Dạy và học có hiệu quả, phù hợp với đặc điểm lứa tuổi của học sinh ở mỗi địa phương, giúp các em tự tin trong học tập.

– Thầy, cô giáo tích cực đổi mới phương pháp giảng dạy nhằm khuyến khích sự chuyên cần, tích cực, chủ động, sáng tạo và ý thức vươn lên, rèn luyện khả năng tự học của học sinh.

– Học sinh được khuyến khích đề xuất sáng kiến và cùng các thầy cô giáo thực hiện các giải pháp để việc dạy và học có hiệu quả ngày càng cao".

Để góp phần thực hiện tốt nội dung trên, nhà trường cần quan tâm:

1. Phối hợp với Sở Giáo dục và Đào tạo và các Dự án của Bộ, Cục Nhà giáo và Cán bộ quản lý Giáo dục giới thiệu tài liệu, phương tiện nghe nhìn và tổ chức tập huấn về đổi mới phương pháp dạy học cho giáo viên, nhân các điển hình giáo viên giỏi của trường và địa phương cho các thầy cô của mỗi trường.

2. Động viên khích lệ học sinh phấn đấu vươn lên trong học tập và rèn luyện, đặc biệt là khích lệ kịp thời đối với học sinh yếu kém khi các em có sự tiến bộ dù là rất nhỏ.

3. Xây dựng một số băng hình về tiết dạy hoặc hoạt động ngoại khóa, lồng ghép nội dung dạy kiến thức với giáo dục bảo vệ môi trường phù hợp với điều kiện của mỗi địa phương.

4. Động viên giáo viên sưu tầm tài liệu, sách báo, tra cứu thông tin trên mạng Internet (ở nơi có điều kiện) để xây dựng cơ sở dữ liệu điện tử phục vụ giảng dạy và học tập, nghiên cứu, đề xuất sáng kiến về đổi mới phương pháp dạy học.

5. Khuyến khích, hướng dẫn học sinh giúp đỡ nhau trong học tập, học sinh khá giỏi giúp đỡ học sinh yếu kém. Động viên các em mạnh dạn đề xuất các ý kiến, sáng kiến của mình trong học tập. Rèn cho các em có thói quen tự học, tự nghiên cứu, tìm hiểu thêm tài liệu ngoài bài giảng của giáo viên ở trường. Nơi có điều kiện thì nên hướng dẫn học sinh tìm kiếm tư liệu bổ ích trên Internet, giới thiệu và hướng dẫn các em khai thác một số trang web như <http://www.moet.gov.vn> (trang web của Bộ Giáo dục và Đào tạo); <http://vi.wikipedia.org> (bách khoa toàn thư có nội dung mở); <http://vi.wiktionary.org> (từ điển có nội dung mở); <http://vi.wikibooks.org> (tủ sách mở),... để hỗ trợ cho việc học trên lớp và làm cho học sinh hứng thú học tập hơn.

✉ CÂU HỎI. Học sinh cần làm gì để thực hiện tốt nhiệm vụ của mình và hưởng thành quả cao nhất của phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực"?

🕒 Trả lời. Để thực hiện tốt nhiệm vụ của mình và hưởng thành quả cao nhất của phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực", học sinh cần:

– Tích cực học tập, tự tin, mạnh dạn đưa ra ý kiến của mình trong các cuộc thảo luận ở nhóm, lớp hoặc trong các tiết học.

– Các bạn học khá giỏi cần có sự quan tâm giúp đỡ các bạn còn yếu theo sự phân công và hướng dẫn của thầy cô.

– Luôn có ý thức "nói lời hay, làm việc tốt", trau dồi văn hoá ứng xử, lễ phép với người lớn tuổi, chan hoà với bạn. Có tinh thần hợp tác khi làm việc nhóm, có sự tương trợ giúp đỡ lẫn nhau trong học tập.

– Có ý thức bảo vệ trường lớp xanh, sạch, đẹp: để rác đúng nơi quy định, có ý thức giữ vệ sinh nơi công cộng, trồng và bảo vệ cây xanh, mỗi năm lớp hoặc tổ học sinh nhận trồng và chăm sóc cây xanh ở trường hoặc địa phương.

– Tham gia tích cực việc chăm sóc di tích lịch sử, văn hoá ở địa phương mình. Có ý thức tìm hiểu các di tích này qua tài liệu, sách báo, mạng Internet... hoặc qua những người am hiểu ở địa phương. Tham gia các hoạt động để giới thiệu giá trị tinh thần của các di tích cho bạn bè, gia đình, khách du lịch, ... (làm hướng dẫn viên danh dự của các di tích, tham gia các hoạt động văn nghệ làm sống lại các giai đoạn lịch sử của di tích, làm quà lưu niệm của di tích,...).

– Tham gia tích cực vào các hoạt động rèn luyện kỹ năng sống, hoạt động tập thể vui tươi, lành mạnh do nhà trường, Đoàn, Đội tổ chức.

– Lựa chọn môn thể thao (như cầu lông, bóng đá, bóng bàn, đá cầu,...) hay trò chơi dân gian mà mình yêu thích để đi xuất với lớp hoặc các tổ chức đội, đoàn thanh niên thành lập các câu lạc bộ và tham gia tích cực duy trì bền vững các câu lạc bộ đó.

– Giúp đỡ cha mẹ trong công việc nhà (nấu cơm, rửa chén bát, giặt giũ vệ sinh, chăm lo các em, quan tâm, chăm sóc ông bà, cha mẹ), góp phần cùng với cộng đồng giữ gìn vệ sinh đường làng, ngõ xóm, khu phố và môi trường xung quanh được xanh, sạch, đẹp.

– Tích cực tuyên truyền về an toàn giao thông, giữ gìn vệ sinh an toàn thực phẩm, chống ma túy, buôn bán trẻ em, phẫn ở gia đình và địa phương.

*Nguồn: Dự án Phát triển Giáo dục THCS 1 Bộ GD&ĐT - Một trong các cơ quan thường trực Ban Chỉ đạo phong trào.
(Chi tiết xem cuốn SỔ TAY TRƯỜNG HỌC THÂN THIÊN, HỌC SINH TÍCH CỰC 2008 - 2013).*

Hát mừng 45 năm

Tập chí TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

Nhạc và lời : THÁI NHẬT PHƯƠNG
GV trường THCS Nguyễn Văn Trỗi,
Cam Ranh, Khánh Hoà

Mừng bốn mươi lăm năm Toán học và Tuổi trẻ.
Là bốn mươi lăm năm nở hoa kết trái.
Tập chí thân thương nhớ hoài nhớ mãi. Tập chí thân
thương là người bạn người thầy. Vui sao Toán học Tuổi
sao Toán học Tuổi
trẻ cho ta bao điều mới lạ, cho ta
trẻ cho ta bao điều mới lạ, cho ta
con đường khám phá, cho ta niềm vui sáng
con đường khám
tạo. Vui
phá, cho ta ươm đầy ước mơ.



VẬN DỤNG HỆ THỨC LƯỢNG trong đường tròn để chứng minh hình học

HÀ VĂN NHÂN

(GV THCS Hoàng Xuân, Hoàng Hóa, Thanh Hóa)

Trong các kì thi học sinh giỏi, thi vào lớp 10 THPT ta thường gặp các bài toán chứng minh từ góc nội tiếp, chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn, ... Bài viết này giới thiệu cùng bạn đọc cách vận dụng các hệ thức giữa các đoạn cắt tuyến và các đoạn tiếp tuyến, làm cho lời giải bài toán trở nên đơn giản, ngắn gọn hơn.

Trước hết, ta nhắc lại các hệ thức sau đây.

Mệnh đề 1. Nếu hai cát tuyến AB và CD của một đường tròn cắt nhau tại một điểm M (M nằm trong hoặc ngoài đường tròn) thì ta có $MA.MB = MC.MD$.

Mệnh đề 2. (Mệnh đề đảo của mệnh đề 1)

Nếu hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M và có $MA.MB = MC.MD$. Khi đó bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Mệnh đề 3. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm bên ngoài đường tròn đó. Qua điểm M kẻ tiếp tuyến MT (T là tiếp điểm) và cát tuyến MAB ($A, B \in (O)$). Khi đó ta có $MT^2 = MA.MB$.

Mệnh đề 4. (Mệnh đề đảo của mệnh đề 3)

Cho góc $\widehat{xMy}$ khác góc bẹt. Trên tia Mx lấy hai điểm A, B . Trên tia My lấy điểm T . Khi đó nếu $MT^2 = MA.MB$ thì MT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABT .

Việc chứng minh các mệnh đề trên khá đơn giản, xin dành cho bạn đọc. Sau đây ta xét một số bài toán áp dụng các mệnh đề trên.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có hai góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ nhọn. Các đường cao BD, CE của tam giác cắt nhau tại H . Chứng minh rằng

$$BH.BD + CH.CE = BC^2.$$

Lời giải. (h. 1)

Kẻ $HK \perp BC$. Dễ thấy tứ giác $CDHK$ nội tiếp nên theo Mệnh đề 1 ta có

$$BH.BD = BK.BC \quad (1)$$

Tương tự, vì tứ giác $BEHK$ nội tiếp nên theo Mệnh đề 1 ta có $CH.CE = CK.CB \quad (2)$

Cộng theo vế hai đẳng thức (1) và (2) ta có $BH.BD + CH.CE = BC(BK + CK) = BC^2. \quad \square$

Nhận xét

- Nếu góc $\widehat{ABC} > 90^\circ$ thì ta được hệ thức $CH.CE - BH.BD = BC^2$.
- Nếu góc $\widehat{ACB} > 90^\circ$ thì ta được hệ thức $BH.BD - CH.CE = BC^2$.

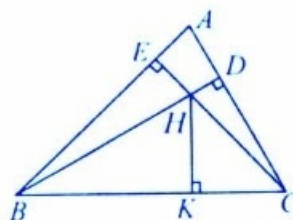
Bài toán 2. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC . EF là một dây cung đi qua H . Chứng minh rằng

a) $AEOF$ là tứ giác nội tiếp.

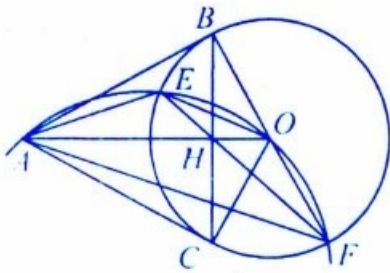
b) AO là tia phân giác của góc $\widehat{EAF}$.

Lời giải. (h. 2)

a) Ta có $OB \perp AB, OC \perp AC$ nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp, do đó theo Mệnh đề 1 ta có $AH.OH = BH.HC$.



Hình 1



Hình 2

Mặt khác, cũng theo Mệnh đề 1 ta có

$$HB.HC = HE.HF.$$

Suy ra $AH.OH = EH.HF$. Theo Mệnh đề 2 suy ra tứ giác $AEOF$ nội tiếp.

b) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEOF$. Ta có $OE = OF$, suy ra $\widehat{EAO} = \widehat{FAO}$ (góc chắn các cung bằng nhau). Do đó AO là tia phân giác của góc $\widehat{EAF}$. $\square$

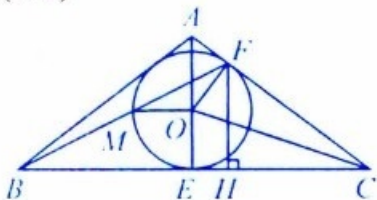
Bài toán 3. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = \frac{2}{3}BC$ và đường cao AE . Đường tròn tâm

O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC tại F .

a) Chứng minh rằng tứ giác $OECF$ nội tiếp và BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

b) Gọi M là giao điểm thứ hai của BF với đường tròn (O) . Chứng minh rằng tứ giác $BMOC$ nội tiếp.

Lời giải. (h. 3)



Hình 3

a) Đặt $BC = 6a$. Ta có $BE = CE = CF = 3a$, $AB = AC = 4a$.

Suy ra $AF = AC - CF = a$. Vì $OE \perp CE$ và $OF \perp CF$ nên tứ giác $OECF$ nội tiếp.

Kẻ $FH \perp BC$ ($H \in BC$) thì $FH \parallel AE$. Sử dụng định lý Thales ta có $\frac{CH}{CE} = \frac{CF}{CA} = \frac{3}{4}$.

$$\text{Suy ra } CH = \frac{3}{4}CE = \frac{9}{4}a \Rightarrow BH = BC - HC = \frac{15}{4}a.$$

Áp dụng định lý Pythagore cho các tam giác vuông BHF và CHF , ta có

$$BF^2 - BH^2 = FH^2 = FC^2 - CE^2 \\ \Rightarrow BF^2 - \frac{15^2}{4^2}a^2 = (3a)^2 - \frac{9^2}{4^2}a^2 \Rightarrow BF^2 = 18a^2 \quad (1)$$

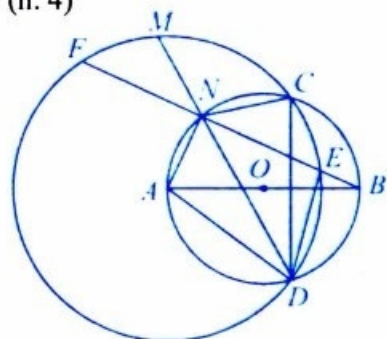
$$\text{Mặt khác, ta có } BE.BC = 3a.6a = 18a^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BF^2 = BE.BC$. Theo Mệnh đề 4 suy ra BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OECF$.

b) Theo câu a) ta có $\widehat{OFB} = \widehat{OCF} = \widehat{OCB}$. Lại có $\widehat{OFB} = \widehat{OMF}$ nên $\widehat{OCB} = \widehat{OMF}$. Từ đó suy ra tứ giác $BMOC$ nội tiếp. $\square$

Bài toán 4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Vẽ đường tròn tâm A cắt đường tròn (O) tại C và D . Kẻ dây cung BN của đường tròn (O) cắt đường tròn (A) tại điểm E . Chứng minh rằng $NE^2 = NC.ND$.

Lời giải. (h. 4)



Hình 4

Gọi F là giao điểm thứ hai của BN và đường tròn (A) . Do $AN \perp EF$ nên N là trung điểm của EF . Gọi M là giao điểm thứ hai của DN với đường tròn (A) .

Dễ thấy $\widehat{BC} = \widehat{BD}$, suy ra $\widehat{CNB} = \widehat{BND} = \widehat{MNF}$. Do đó $\widehat{ANC} = \widehat{ANM}$, suy ra C và M đối xứng nhau qua đường AN nên $NC = NM$. Từ đó ta có $NC.ND = NM.ND = NE.NF$ (theo Mệnh đề 1).

Vậy $NC.ND = NE^2$ (đpcm). $\square$

(Xem tiếp trang 31)

Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên Toán

TRƯỜNG THPT CHUYÊN VINH PHÚC

NĂM HỌC 2009 - 2010

(Đề thi đã đăng trên THPT số 391, tháng 1 năm 2010)

Câu 1. 1) ĐK $xy \neq 0$. HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2(xy(x+y) + (x+y)) = 9xy & (1) \\ 2(xy)^2 - 5xy + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải PT (2) theo xy ta được $xy = 2$ hoặc $xy = \frac{1}{2}$.

• Với $xy = 2$, thay vào (1) ta có $x + y = 3$. Từ đó tìm được $(x; y) = (1; 2)$ hoặc $(x; y) = (2; 1)$.

• Với $xy = \frac{1}{2}$, thay vào (1) ta có $x + y = \frac{3}{2}$. Từ

đó tìm được $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$ hoặc $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Vậy HPT đã cho có bốn nghiệm $(x; y)$ là

$$(1; 2), (2; 1), \left(1; \frac{1}{2}\right) \text{ và } \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

2) Chia thành các khoảng $x \geq 2$; $-3 < x < 2$; $x < -3$ để phá dấu giá trị tuyệt đối.

Từ đó ta có kết luận sau:

• Với $-1 < p < 1$ thì PT có hai nghiệm

$$x = 2 \text{ và } x = \frac{2(p-1)}{p+1}.$$

• Với $p = -1$ thì PT có nghiệm $x \geq 2$.

• Với $p = 1$ thì PT có nghiệm $-3 \leq x \leq 2$.

• Với $p < -1$ hoặc $p > 1$ thì PT có nghiệm $x = 2$.

Câu 2. Dễ thấy

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} = \\ & = \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)^2 + 2 \geq 2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$.

Câu 3. ĐK $x \neq 1$. Ta có

$$A = \frac{1}{|2x-1|}; B = \frac{2(x-1)}{|x-1|} \Rightarrow C = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{|2x+1|} + \frac{x-1}{|x-1|} \right).$$

• Nếu $x > 1$ thì $C = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2x+1} + 1 \right) = \frac{4(x+1)}{3(2x+1)} > 0$.

Mặt khác, $C-1 = \frac{1-2x}{3(2x+1)} < 0$. Suy ra $0 < C < 1$, nên C không thể là số nguyên.

• Nếu $x = 0$ hoặc $x = -1$ thì $C = 0$ (thỏa mãn)

• Nếu $x < -1$ thì $C = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2x+1} - 1 \right) \leq 0$. Mặt

khác, $C+1 = \frac{2x-1}{3(2x+1)} > 0$. Suy ra $-1 < C < 0$, nên C không thể là số nguyên.

Vậy với $x = 0$ hoặc $x = -1$ thì C là số nguyên.

Câu 4. (h. 1)

a) Gọi I là trung điểm của cạnh AB . E, R theo thứ tự là giao điểm của IK, IM với CD .

Theo định lý

$$\frac{IK}{KE} = \frac{KB}{KD} = 1 \quad (1), \quad \frac{IM}{MR} = \frac{MA}{MC} = 1 \quad (2)$$

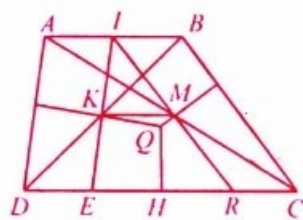
Từ (1) và (2) suy ra $KM \parallel CD$ nên $KM \parallel AB$.

b) Ta có $IE \parallel AD, IR \parallel BC$ nên $AIED, BCRI$ là các hình bình hành. Suy ra

$$DE = AI = IB = CR \quad (1)$$

Mặt khác, ta có $QK \perp AD \Rightarrow QK \perp IE, IK = KE$;

$$QM \perp BC \Rightarrow QM \perp IR, IM = MR.$$



Hình 1

Đề thi vào lớp 10 chuyên toán

TRƯỜNG THPT LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH

NĂM HỌC 2009-2010

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{6+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 2$.

2) Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}} > \frac{9}{4}.$$

Câu 2. (3,0 điểm)

1) Cho phương trình $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$.

Chứng minh rằng phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt. Gọi bốn nghiệm đó lần lượt là x_1, x_2, x_3 và x_4 . Hãy tính giá trị của biểu thức $T = x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6$ (với kết quả được rút gọn).

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3y^2 - 6y + 4 = 0 \\ x^2 + x^2y^2 - 2y = 0. \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ về phía ngoài của tam giác ABC nửa đường tròn đường kính

AB và nửa đường tròn đường kính AC . Đường thẳng d thay đổi đi qua A , cắt hai nửa đường tròn vừa vẽ theo thứ tự tại M và N (M và N khác A). Chứng minh rằng

1) Đường trung trực của đoạn thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

2) $MB + MN + NC < \sqrt{2}(AB + AC)$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Bên trong một hình vuông có cạnh bằng 8cm, lấy 100 điểm bất kì. Chứng minh rằng trong 100 điểm vừa lấy, có ít nhất 4 điểm cùng nằm trong một đường tròn có bán kính bằng 1cm.

Câu 5. (2,0 điểm)

1) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2x + \sqrt{1-4x-x^2}.$$

2) Chứng minh rằng nếu các số nguyên dương x, y, z (với $x > 1$ và $y > 1$) thỏa mãn điều kiện $x^2y^2 - 4x + 4y = z^2$ thì $x = y$.

NGUYỄN CÔNG MINH

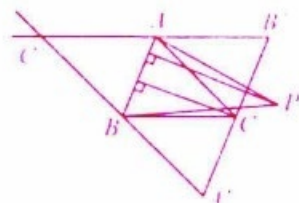
(GV THCS Nam Hoa, Nam Trục, Nam Định) giới thiệu

Suy ra Q nằm trên đường trung trực của ER . Kết hợp với (1) suy ra Q nằm trên đường trung trực của CD . Do đó $QD = QC$.

Câu 5. Trong số các tam giác tạo thành, xét tam giác ABC có diện tích S lớn nhất. Khi đó $S \leq 1$. Qua mỗi đỉnh A, B, C kẻ các đường thẳng song song với cạnh đối diện, chúng cắt nhau tạo thành $\Delta A'B'C'$. Khi đó $S_{A'B'C'} = 4S_{ABC} \leq 4$. Ta sẽ chứng minh tất cả các điểm đã cho nằm trong tam giác $A'B'C'$.

Giả sử ngược lại có điểm P nằm ngoài $\Delta A'B'C'$ (h. 2). Khi đó

$d(P, AB) > d(C, AB)$, suy ra $S_{PAB} > S_{CAB}$, trái giả sử ΔABC có diện tích lớn nhất. Vậy tất cả các điểm đã cho đều nằm trong $\Delta A'B'C'$ có diện tích không vượt quá 4.



Hình 2

TẠ MINH HIẾU

(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc) giới thiệu



Trong đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng hiện nay luôn có một câu hình học trong mặt phẳng tọa độ. Một dạng bài thường gặp là tính tọa độ các đỉnh, viết phương trình các đường thẳng hoặc đường cong có liên quan đến một tam giác được xác định theo ba điều kiện cho trước. Chúng ta bắt đầu từ một thí dụ đơn giản. Sau đó thay đổi các giả thiết và kết luận, tạo ra các tình huống khác nhau để thu được nhiều dạng bài tập mới khó hơn, thích hợp với một đề thi.

XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CỦA TAM GIÁC trong mặt phẳng tọa độ

PHAN CUNG ĐỨC

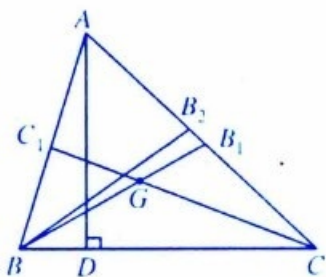
(GV khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

★ **Thí dụ 1.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(4; -1)$, $B(1; 5)$, $C(-4; -5)$. Viết phương trình các đường thẳng sau:

1) Đường cao AD ($D \in BC$)

2) Các đường trung tuyến BB_1 , CC_1 ($B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$).

3) Các đường phân giác BB_2 , CC_2 ($B_2 \in AC$, $C_2 \in AB$).



Lời giải. 1) Vì AD đi qua $A(4; -1)$, vuông góc với $\overrightarrow{BC} = (-5; -10)$ nên có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2)$. Do đó PT AD: $x + 2y - 2 = 0$.

2) Do B_1 là trung điểm cạnh AC nên $B_1(0; -3)$.

Suy ra PT $BB_1: 8x - y - 3 = 0$. Tương tự $C_1(\frac{5}{2}; 2)$ và PT $CC_1: 14x - 13y - 9 = 0$.

3) Ta viết PT các đường phân giác bằng cách tính tọa độ các điểm B_2, C_2 . Ta luôn có $\frac{B_2A}{B_2C} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AB_2} = \frac{3}{8} \overrightarrow{AC}$.

Giả sử $B_2(x; y)$, lúc đó ta có hệ PT

$$\begin{cases} x - 4 = -3 \\ y + 1 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow B_2\left(1; -\frac{5}{2}\right).$$

Vậy PT đường BB_2 là $x - 1 = 0$.

Tương tự vì $\overrightarrow{AC_2} = \frac{4}{9} \overrightarrow{AB} \Rightarrow C_2\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Suy ra PT đường $CC_2: x - y - 1 = 0$. □

★ **Thí dụ 2.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(4; -1)$ và phương trình hai đường trung tuyến $BB_1: 8x - y - 3 = 0$, $CC_1: 14x - 13y - 9 = 0$. Tính tọa độ các đỉnh B, C.

Lời giải. Để chuẩn bị cho các thí dụ được phát triển ở phần sau, chúng tôi trình bày hai cách giải của thí dụ này.

Cách 1. (Có sử dụng trọng tâm G của ΔABC).

$$\text{Đặt } G(x; y) \text{ thì } \begin{cases} 8x - y = 3 \\ 14x - 13y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow G\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. Gọi A' là điểm đối xứng của A

qua G thì dễ dàng tính được $A'\left(-\frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Khi đó

$A'B \parallel CC_1$ nên PT $A'B$ là $14x - 13y + 51 = 0$.

Giả sử $B(x; y)$ ta có hệ PT

$$\begin{cases} 8x - y = 3 \\ 14x - 13y = -51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(1; 5).$$

Tương tự từ $A'C \parallel BB_1$ tính được $C(-4; -5)$.

Cách 2

Đặt $B(x; y)$ và $C_1(x_1; y_1)$ thì $8x - y - 3 = 0$ và $14x_1 - 13y_1 - 9 = 0$. Vì C_1 là trung điểm cạnh AB nên $x + 4 = 2x_1$, $y - 1 = 2y_1$.

Tọa độ B là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} 8x - y = 3 \\ 14x - 13y = -51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(1; 5).$$

Tính toán tương tự ta thu được $C(-4; -5)$. $\square$

★**Thí dụ 3.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ΔABC có $A(4; -1)$ và phương trình hai đường phân giác $BB_2: x - 1 = 0$, $CC_2: x - y - 1 = 0$. Tính tọa độ các đỉnh B, C .

Lời giải. Theo tính chất của đường phân giác, các điểm đối xứng của A qua BB_2 và CC_2 đều thuộc BC . Gọi D là điểm đối xứng của A qua CC_2 thì đường thẳng AD_1 qua $A(4; -1)$ và vuông góc với CC_2 nên có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1)$. Vậy PT $AD_1: x + y - 3 = 0$. Nếu AD_1 cắt BB_2 tại H_1 thì tọa độ H_1 là nghiệm của hệ PT $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow H_1(2; 1)$.

Vì H_1 là trung điểm AD_1 nên $D_1(0; 3)$.

Tương tự nếu $D_2(x; y)$ là điểm đối xứng của A qua BB_2 thì $D_2(-2; -1)$. Suy ra PT đường BC là

$$\text{PT đường } D_1D_2: \frac{x-0}{-2} = \frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0.$$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ PT $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(1; 5).$$

Tọa độ C là nghiệm của hệ PT $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow C(-4; -5). \quad \square$$

★**Thí dụ 4.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ΔABC có $C(-4; -5)$ và phương trình đường cao $AD: x + 2y - 2 = 0$, đường trung tuyến $BB_1: 8x - y - 3 = 0$. Tính tọa độ các đỉnh A, B .

Lời giải. Đường thẳng CB qua $C(-4; -5)$ và vuông góc với AD nên có vector pháp tuyến $\vec{n}(2; -1) \Rightarrow \text{PT } CB: 2x - y + 3 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ PT $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 8x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(1; 5).$

Giả sử $A(x; y)$ và $B_1(x_1; y_1)$ thì $x + 2y - 2 = 0$ và $8x_1 - y_1 - 3 = 0$. Mặt khác $x - 4 = 2x_1$, $y - 5 = 2y_1 \Rightarrow 8x - y - 33 = 0$.

Tọa độ A là nghiệm của hệ PT $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 8x - y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(4; -1). \quad \square$

★**Thí dụ 5.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ΔABC có $B(1; 5)$ và phương trình đường cao $AD: x + 2y - 2 = 0$, đường phân giác $CC_2: x - y - 1 = 0$. Tính tọa độ các đỉnh A, C .

Lời giải. Vì BC qua $B(1; 5)$ và vuông góc với AD nên có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1) \Rightarrow \text{PT } BC: 2x - y + 3 = 0$. Vậy tọa độ C là nghiệm của hệ PT $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \Rightarrow C(-4; -5).$

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua CC_2 thì BB' có vector pháp tuyến là $\vec{m} = (1; 1)$ nên PT BB' là $x + y - 6 = 0$. Nếu BB' cắt CC_2 tại $K(x; y)$ thì

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow B'(6; 0). \text{ Do đó}$$

PT đường AC là PT $B'C: x - 2y - 6 = 0$.

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

Suy ra $A(4; -1)$. $\square$

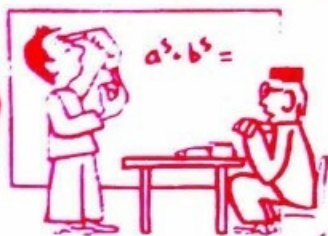
★**Thí dụ 6.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ΔABC có $A(4; -1)$ và phương trình đường trung tuyến $BB_1: 8x - y - 3 = 0$, phương trình đường phân giác $CC_2: x - y - 1 = 0$. Tính tọa độ các đỉnh B, C .

Lời giải. Theo Thí dụ 2, nếu cho A và trung tuyến BB_1 ta tính được $C(-4; -5)$. Theo Thí dụ 3, cho A và phân giác CC_2 tính được $B(1; 5)$. $\square$

(Xem tiếp trang 10)

DIỄN ĐÀN

DAY HOC TOÁN



Một số hướng XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

TRỊNH XUÂN BÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Như chúng ta đã biết phương trình (PT) vô tỉ có khá nhiều dạng và phương pháp giải khác nhau. Người giáo viên ngoài nắm được các dạng phương trình và cách giải chúng để hướng dẫn học sinh nên cần phải biết xây dựng lên các đề toán để làm tài liệu cho việc giảng dạy. Trong bài viết này tôi xin trình bày một số hướng xây dựng PT vô tỉ, hi vọng sẽ đem đến cho bạn đọc những điều bổ ích.

HƯỚNG 1. Xây dựng phương trình từ các đẳng thức

Xuất phát từ một đẳng thức nào đó, chúng ta có thể xây dựng lên các PT vô tỉ.

Chẳng hạn từ đẳng thức

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \quad (*)$$

Bằng cách chọn a, b, c sao cho $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$ ta sẽ tạo ra được PT vô tỉ chứa căn bậc ba.

- Cho $a = \sqrt[3]{3x^2 - x + 2001}$, $b = -\sqrt[3]{3x^2 - 7x + 2002}$, $c = -\sqrt[3]{6x - 2003}$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 2002$.

Ta được

Bài toán 1. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x^2 - x + 2001} - \sqrt[3]{3x^2 - 7x + 2002} - \sqrt[3]{6x - 2003} = \sqrt[3]{2002}.$$

(T2/305 THPT)

- Cho $a = \sqrt[3]{3x+1}$, $b = \sqrt[3]{5-x}$, $c = \sqrt[3]{2x-9}$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 4x-3$. Ta được

Bài toán 2. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} - \sqrt[3]{4x-3} = 0.$$

(T4/326 THPT)

- Cho $a = \sqrt[3]{7x+1}$, $b = -\sqrt[3]{x^2-x-8}$, $c = \sqrt[3]{x^2-8x-1}$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 8$. Ta được

Bài toán 3. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2.$$

(Bài đề nghị OLYM PIC 30/4- Lần V)

- Cho $a = \sqrt[3]{6x+5}$, $b = \sqrt[3]{4-3x}$, $c = \sqrt[3]{x-2}$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 4x-7$. Ta được

Bài toán 4. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{6x+5} + \sqrt[3]{4-3x} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{4x+7}.$$

Sử dụng kết quả (*) ta thấy các phương trình trên đều đưa về dạng $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ và việc giải PT tích này là khá đơn giản.

HƯỚNG 2. Xây dựng phương trình từ các hệ đối xứng loại II

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} (\alpha x + \beta)^2 = \alpha y + b & (1) \\ (\alpha y + \beta)^2 = \alpha x + b & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha x + \beta)^2 = \alpha y + b & (1) \\ (\alpha y + \beta)^2 = \alpha x + b & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta suy ra $\begin{cases} \alpha y + \beta = \sqrt{\alpha x + b} \\ \alpha y + \beta = -\sqrt{\alpha x + b} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha x + b} - \frac{\beta}{\alpha} \\ y = -\frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha x + b} - \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

thay vào phương trình (1) ta được

$$(\alpha x + \beta)^2 = \frac{a}{\alpha} \sqrt{\alpha x + b} + b - \frac{a\beta}{\alpha} \quad (**)$$

$$\text{hoặc } (\alpha x + \beta)^2 = -\frac{a}{\alpha} \sqrt{\alpha x + b} + b - \frac{a\beta}{\alpha}.$$

Đến đây bằng cách chọn α, β, a, b ta sẽ xây dựng được các PT vô ti.

Cách giải các PT dạng này là đặt $\alpha y + \beta = \sqrt{\alpha x + b}$ (hoặc $-\sqrt{\alpha x + b}$) để đưa về hệ PT đối xứng loại II ở trên đã biết cách giải. Bây giờ ta đi xây dựng một số PT dạng này.

- Cho $\alpha = 1, \beta = 1, a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ thay vào (**) và biến đổi ta được

Bài toán 5. Giải phương trình $2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$.

(Bài đề nghị Olympic 30/4- 2003 - Toán 10)

- Cho $\alpha = 2, \beta = -1, a = 8000, b = 1$ thay vào (**) và biến đổi ta được

Bài toán 6. Giải phương trình

$$x^2 - x - 1000\sqrt{1 + 8000x} = 1000.$$

(T2/295 THPT)

- Cho $\alpha = 2, \beta = -3, a = 4, b = 5$, thay vào (**) và biến đổi ta được

Bài toán 7. Giải phương trình

$$2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}.$$

Đến đây các bạn có thể tự tìm cho mình các PT khác.

Nếu xét hệ $\begin{cases} (\alpha x + \beta)^3 = ay + b \\ (\alpha y + \beta)^3 = ax + b \end{cases}$ thì bằng

cách tương tự ta xây dựng được PT dạng

$$(\alpha x + \beta)^3 = \frac{a}{\alpha} \sqrt[3]{\alpha x + b} + b - \frac{a\beta}{\alpha}.$$

- Cho $\alpha = 2, \beta = 0, a = 4004, b = -2001$ ta được $(2x)^3 = 2002\sqrt[3]{4004x - 2001} - 2001$. Từ đó ta có

Bài toán 8. Giải phương trình

$$\left(\frac{8x^3 + 2001}{2002}\right)^3 = 4004x - 2001.$$

(T3/306 THPT)

Bằng cách xét các hệ đối xứng dạng khác, các bạn có thể tự xây dựng thêm cho mình một số dạng PT. Qua đó các bạn sẽ tạo ra được nhiều đề toán hay.

HƯỚNG 3. Xây dựng phương trình dựa vào tính đơn điệu của hàm số

Dựa vào kết quả "Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu thì $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ " ta có thể xây dựng được nhiều vô ti.

- Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t^2 + 1$ đơn điệu trên $[0; +\infty)$ cho $f(x+1) = f(\sqrt{3x-1})$ ta được bài toán sau đây

Bài toán 9. Giải phương trình

$$2x^3 + 7x^2 + 5x + 4 = 2(3x-1)\sqrt{3x-1}.$$

Giải PT này bằng cách đặt

$y = \sqrt{3x-1} (y \geq 0)$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} 2x^3 + 7x^2 + 5x + 4 = 2y^3 \\ 3x - 1 = y^2 \end{cases}$$

cộng theo về hai PT trên ta được

$$2(x+1)^3 + (x+1)^2 = 2y^3 + y^2.$$

Dẫn đến $y = x+1$. Ta dễ dàng giải được PT.

- Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Nếu cho $f(2x) = f(\sqrt[3]{6x+1})$ thì được

Bài toán 10. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1.$$

- Nếu cho $f(x+1) = f(\sqrt[3]{3x^2+6x-5})$ thì ta được

Bài toán 11. Giải phương trình

$$x^3 - 2x + 7 = \sqrt[3]{3x^2 + 6x - 5}.$$

- Xét hàm số $f(t) = t(1 + \sqrt{t^2 + 2})$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Cho $f(2x+3) = f(-3x)$ ta được

Bài toán 12. Giải phương trình

$$(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11} + 3x\sqrt{9x^2+2} = -5x-3.$$

Tương tự với các hàm số đơn điệu khác các bạn có thể xây dựng được các PT vô ti hay và đa dạng.

HƯỚNG 4. Xây dựng phương trình vô tỉ dựa vào các phương trình lượng giác

Từ một PT lượng giác đơn giản nào đó, kết hợp với các phép biến đổi lượng giác thì sẽ tìm ra các PT vô tỉ hay. Chẳng hạn

- Từ PT $\cos 3t = \sin t$ với $t \in [0; \pi]$, ta thấy PT này tương đương với

$$4\cos^3 t - 3\cos t = \sin t$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{1 - \cos^2 t}.$$

Đặt $x = \cos t$ ta được

Bài toán 13. Giải phương trình.

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}.$$

(Bài đề nghị Olympic 30/4-2003 - Toán 10)

Nếu thay x bởi $x-1$ ta được bài toán khó hơn.

Bài toán 14. Giải phương trình

$$4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = \sqrt{2x - x^2}.$$

- Từ PT $\cos 3t = \cos \frac{t}{2}$ với $t \in [0; \pi]$.

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{\cos^2 \frac{t}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 t - 6\cos t = \sqrt{2\cos t + 2}.$$

Đặt $x = 2\cos t$ ta được

Bài toán 15. Giải phương trình

$$x^3 - 3x = \sqrt{x+2}.$$

(T9/351 THPT)

Tương tự, từ các PT đơn giản và các công thức $\sin 3t, \sin 4t, \dots$ các bạn có thể xây dựng được nhiều PT khác.

Trên đây chúng tôi đã trình bày một số hướng xây dựng vô tỉ. Rất mong được sự góp ý và trao đổi của bạn đọc.

Nhắn tin:

Các bạn đoạt giải thưởng Cuộc thi Giải toán kỷ niệm 45 năm THPT và Cuộc thi giải Toán Vật lý trên THPT năm học 2008 - 2009 hãy gửi địa chỉ mới về Tòa soạn để nhận giải thưởng và Giấy chứng nhận.

THPT

XÁC ĐỊNH... (Tiếp trang 7)

★**Thí dụ 7.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\triangle ABC$ có $A(4; -1)$ và phương trình trung tuyến $BB_1: 8x - y - 3 = 0$, phương trình đường phân giác $BB_2: x - 1 = 0$. Tính tọa độ các đỉnh B, C.

Lời giải. Tọa độ B là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 8x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 5).$$

Theo Thí dụ 3, $D_2(-2; -1)$ là điểm đối xứng của A qua BB_2 nên PT đường $BC: 2x - y + 3 = 0$. Gọi $C(x; y)$ và $B_1(x_1; y_1)$ thì $2x - y + 3 = 0$ và $8x_1 - y_1 - 3 = 0$. Mặt khác $x + 4 = 2x_1, y - 1 = 2y_1$ nên $8x - y + 27 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 8x - y = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow C(-4; -5). \square$

★**Thí dụ 8.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\triangle ABC$ có $B(1; 5)$ và phương trình đường cao $AD: x + 2y - 2 = 0$, đường trung tuyến $AA_1: 2x + 11y + 3 = 0$. Tính tọa độ các đỉnh A, C.

Lời giải. Tọa độ A là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 11y = -3 \end{cases} \Rightarrow A(4; -1).$$

Đường thẳng BC theo Thí dụ 5 có phương trình $2x - y + 3 = 0$. Tọa độ điểm A_1 (trung điểm đoạn BC) là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2x + 11y = -3 \end{cases} \Rightarrow A_1\left(-\frac{3}{2}; 0\right) \Rightarrow C(-4; -5). \square$$

BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $A(1; 3)$ và hai đường trung tuyến lần lượt có phương trình $x - 2y + 1 = 0; y - 1 = 0$.

2. Cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 2)$ và hai đường cao lần lượt có phương trình $9x - 3y - 4 = 0; x + y - 2 = 0$.

Lập phương trình các cạnh của tam giác đó.

3. Lập phương trình cạnh BC của tam giác ABC biết $A(2; -1)$ và các đường phân giác trong của các góc B và C lần lượt có phương trình $x - 2y + 1 = 0; x + y + 3 = 0$.



Sử dụng NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ CỦA TẬP HỢP để giải MỘT SỐ DẠNG TOÁN SỐ HỌC

TRỊNH ĐÀO CHIẾN (Sở GD-ĐT Gia Lai)

LÊ VĂN TÁM (Trường CDSP Gia Lai)

Các bạn thân mến! Công thức xác định số phần tử của hợp một số tập hợp hữu hạn thường được dùng trong nhiều bài toán đếm. Một trong những công thức đó là Nguyên lý bù trừ (NLBT) của tập hợp. Sử dụng nguyên lý này và phối hợp một số phương pháp khác trên tập hợp, chẳng hạn phương pháp ánh xạ, ta có thể giải được một số dạng toán, đặc biệt đối với các bài toán về số học. Trong bài ta kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập hợp hữu hạn A .

I. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

• Đối với hai tập hợp hữu hạn A và B ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

• Đối với ba tập hợp hữu hạn A , B và C , ta có

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$

• Tổng quát, ta có kết quả sau

Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập hợp hữu hạn. Khi đó

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|.$$

II. ÁP DỤNG

★ **Thí dụ 1.** Cho tập hợp $S = \{1, 2, \dots, 280\}$. Đặt

$$A_1 = \{k \in S \mid k:2\}; A_2 = \{k \in S \mid k:3\};$$

$$A_3 = \{k \in S \mid k:5\}; A_4 = \{k \in S \mid k:7\};$$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.$$

a) Chứng minh rằng cứ 5 phần tử tùy ý khác nhau từng đôi một của A thì có ít nhất hai số không nguyên tố cùng nhau.

b) Tính $|A|$.

Lời giải. a) Sử dụng Nguyên lý Dirichlet, với 5 phần tử phân vào 4 tập hợp.

b) Áp dụng NLBT, ta có

$$\begin{aligned} |A| &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = (|A_1| + \dots + |A_4|) \\ &\quad - (|A_1 \cap A_2| + \dots + |A_3 \cap A_4|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots \\ &\quad + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 216. \quad \square \end{aligned}$$

★ **Thí dụ 2.** Một hoán vị $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ của tập hợp $\{1, 2, \dots, 2n\}$ với n nguyên dương, được gọi là có tính chất P nếu $|x_i - x_{i+1}| = n$, với ít nhất một giá trị $i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$. Chứng minh rằng với mỗi số n , số hoán vị có tính chất P lớn hơn số hoán vị không có tính chất P .

Lời giải. Đặt $M = \{1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots, 2n\}$.

Lưu ý $|1 - (n+1)| = n$ và $|2 - (n+2)| = n$. Gọi A_k là tập tất cả các hoán vị của M sao cho trong các hoán vị đó, hai phần tử k và $k+n$ đứng kề nhau. Gọi A là tập tất cả các hoán vị có tính chất P . Ta thấy $A = \bigcup_k A_k$ nên

$$|A| = \left| \bigcup_k A_k \right| = \sum_k |A_k| - \sum_{k < h} |A_k \cap A_h| + \sum_{k < h < m} |A_k \cap A_h \cap A_m| \dots$$

Vì đây là tổng các số hạng của dãy đơn điệu giảm và đan dấu nhau nên

$$|A| \geq \sum_k |A_k| - \sum_{k < h} |A_k \cap A_h|.$$

Ngoài ra $|A_k| = 2(2n-1)!$ và $|A_k \cap A_h| = 4(2n-2)!$.

$$\text{Do đó } |A| \geq (2n-2)! \left(2n(2n-1) - \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 \right) \\ = 2n^2(2n-2)! > \frac{(2n)!}{2}. \quad \square$$

★**Thí dụ 3.** Cho hai số nguyên dương m và n sao cho $n+2$ chia hết cho m . Hãy tính các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) sao cho tổng $x+y+z$ chia hết cho m , trong đó mỗi số x, y, z đều không lớn hơn n .

Lời giải. Đặt $k = \frac{n+2}{m} \in \mathbb{N}^*$. Ta có $n = km - 2$.

Xét các tập hợp:

$$D = \{km-1, km\}; \quad E = \{1, 2, \dots, km\};$$

$$A = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in E \mid x+y+z \equiv m\};$$

$$B = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in E; x+y+z \equiv m\};$$

$$C = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in E; x \in D \text{ hoặc } y \in D \text{ hoặc } z \in D; x+y+z \equiv m\}.$$

$$\text{Dễ thấy } |A| = |B| - |C|.$$

• **Tính $|B|$.** Có km cách chọn $x \in E$. Với mỗi cách chọn $x \in E$, ta có km cách chọn $y \in E$. Với mỗi cách chọn x và y như trên, ta có k cách chọn $z \in E$ sao cho $x+y+z \equiv m$. Do đó $|B| = km \cdot km \cdot k = k^3 m^2$.

• **Tính $|C|$.** Đặt

$$X = \{(x, y, z) \mid x \in D, y \in E, z \in E, x+y+z \equiv m\},$$

$$Y = \{(x, y, z) \mid y \in D, x \in E, z \in E, x+y+z \equiv m\},$$

$$Z = \{(x, y, z) \mid z \in D, x \in E, y \in E, x+y+z \equiv m\}.$$

Khi đó $C = X \cup Y \cup Z$. Do đó

$$|C| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| \\ + |X \cap Y \cap Z|. \text{ Tương tự } |X| = |Y| = |Z| = 2k^2 m, \\ |X \cap Y| = |X \cap Z| = |Y \cap Z| = 4k,$$

$$|X \cap Y \cap Z| = \tau(m) = \begin{cases} 2^{4-m} & \text{với } m=1, 2, 3 \\ 1 & \text{với } m > 3 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Do đó } |C| = 6k^2 m - 12k + \tau(m).$$

Thay $k = \frac{n+2}{m}$ được

$$|A| = |B| - |C| = \frac{n^3 + 8}{m} - \tau(m)$$

với $\tau(m)$ xác định bởi (*). $\square$

Chú ý. Đôi khi NLBT còn được phối hợp với phương pháp ánh xạ để giải quyết những bài toán phức tạp hơn. Lí thuyết phương pháp này như sau: Giả sử A và B là hai tập hợp hữu hạn. Nếu tồn tại một đơn ánh từ A vào B thì $|A| \leq |B|$. Nếu đơn ánh này không phải là toàn ánh thì $|A| < |B|$. Nếu đơn ánh này cũng là song ánh thì $|A| = |B|$. Dưới đây là một số thí dụ về việc phối hợp với phương pháp ánh xạ.

★**Thí dụ 4.** (Ucraina 1996). Gọi M là tập tất cả các số nguyên dương (viết theo hệ thập phân) có n chữ số 1, n chữ số 2 và không còn chữ số nào khác; N là tập tất cả các số nguyên dương có n chữ số thuộc tập $\{1, 2, 3, 4\}$ và số chữ số 1 bằng số chữ số 2.

Chứng minh rằng $|M| = |N| = C_{2n}^n$.

Lời giải. Ta chứng minh tồn tại một song ánh từ N vào M . Phương pháp như sau:

Số có n chữ số gồm các chữ số 1, 2, 3, 4 và số các chữ số 1 bằng số các chữ số 2 được “nhân đôi” thành số có $2n$ chữ số theo quy tắc: Đầu tiên, hai phiên bản của số này được viết kề nhau thành số có $2n$ chữ số; sau đó, các chữ số 3 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 1, các chữ số 3 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 2. Tương tự, các chữ số 4 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 2, các chữ số 4 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 1. Như thế, ta thu được một số có đúng n số 1 và n số 2. Rõ ràng đây là một đơn ánh. Để chứng minh đây là một song ánh, ta xây dựng ánh xạ ngược như sau:

Với một số có n chữ số 1 và n chữ số 2, ta cắt n chữ số đầu và n chữ số cuối và đặt chúng “song song” với nhau như khi thực hiện phép “cộng”. Thực hiện phép “cộng” theo quy tắc: $1+1=1$; $2+2=2$; $1+2=3$; $2+1=4$. Ta sẽ thu được một số có n chữ số gồm các chữ số 1, 2, 3, 4 với số các chữ số 1 bằng số các chữ số 2.

Vậy song ánh giữa hai tập hợp đã được thiết lập. Ta tính được $|M| = |N| = C_{2n}^n$. $\square$

★**Thí dụ 5.** Hãy giải bài toán ở Thí dụ 2 bằng cách kết hợp với phương pháp ánh xạ.

Lời giải. Với mỗi số n , ta chia các số $1, 2, \dots, 2n$ thành n cặp như sau: $(1, n+1), (2, n+2), \dots, (n, 2n)$. Bây giờ, thiết lập một tương ứng từ tập hợp các

hoán vị không có tính chất P đến tập hợp các hoán vị có tính chất P như sau:

Giả sử $\{x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2n}\}$ là hoán vị bất kì không có tính chất P . Xét phần tử x_{2n} . Chọn x_k là phần tử cùng cặp với x_{2n} . Đặt tương ứng hoán vị vừa xét với hoán vị có tính chất P là $\{x_1, \dots, x_k, x_{2n}, x_{2n-1}, \dots, x_{k+1}\}$. Kiểm tra được rằng tương ứng này là một đơn ánh và không phải là toàn ánh. Suy ra điều phải chứng minh.

★Thí dụ 6. (VMO-1995, Bảng B). *Hỏi từ các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

- 1) Trong mỗi số, mỗi chữ số có mặt đúng hai lần;
- 2) Trong mỗi số, hai chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau?

Lời giải. Gọi s là số cần tìm và A là tập gồm tất cả các số có 10 chữ số, lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 thỏa mãn điều kiện 1) của đề bài. Với mỗi $i = \overline{1, 5}$, kí hiệu A_i là tập gồm tất cả các số thuộc A , mà trong mỗi số đều có hai chữ số i đứng cạnh nhau. Khi đó, theo NLBT

$$\begin{aligned} s &= \left| A \setminus \bigcup_{i=1}^5 A_i \right| = \left| A \right| - \left| \bigcup_{i=1}^5 A_i \right| \\ &= \left| A \right| - \sum_{i=1}^5 |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 5} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ &\quad - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 5} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 5} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| - \left| \bigcup_{i=1}^5 A_i \right| \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } |A| = \frac{10!}{2^5} \quad (2)$$

Xét k bất kì thuộc tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ và xét bộ $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ bất kì thỏa mãn $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 5$.

Gọi T là tập gồm tất cả các số có $(10-k)$ chữ số, lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 mà trong mỗi số đó: mỗi chữ số $i_1, i_2, \dots, i_k$ đều có mặt đúng một lần, còn các chữ số khác, mỗi chữ số có mặt đúng hai lần. Đặt tương ứng mỗi số $a \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$, với số nhận được từ a bằng cách bỏ đồng thời ở a một chữ số i_1 , một chữ số $i_2, \dots$, một chữ số i_k .

Tiếp theo, ta chứng minh tương ứng nói trên xác lập một song ánh từ $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ đến T . Khi đó

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = T = \frac{(10-k)!}{2^{5-k}} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta có

$$\begin{aligned} s &= \frac{10!}{2^5} - C_5^1 \cdot \frac{9!}{2^4} + C_5^2 \cdot \frac{8!}{2^3} - C_5^3 \cdot \frac{7!}{2^2} + C_5^4 \cdot \frac{6!}{2^1} - \frac{5!}{2^0} \\ &= 39480. \end{aligned}$$

III. BÀI TẬP

1. Có n người xếp thành một hàng dọc. Hỏi với một số nguyên dương $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ cho trước có

bao nhiêu cách chọn ra k người từ n người trên sao cho không có hai người đứng kề nhau được chọn.

2. Tập hợp các số 1, 2, ..., 100 được chia thành bảy tập hợp con. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các tập hợp con ấy tìm được hoặc 4 số a, b, c, d sao cho $a + b = c + d$, hoặc ba số e, f, g sao cho $e + f = 2g$.

3. (Bài đề nghị cho IMO của Trung Quốc năm 1991)

Cho $s = 1, 2, 3, \dots, 280$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con gồm n phần tử của S đều chứa năm số đôi một nguyên tố cùng nhau.

4. Cho ba số nguyên dương m, n, p sao cho $n+1$ chia hết cho m . Hãy tìm công thức tính số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ gồm p số nguyên dương sao cho tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ chia hết cho m , trong đó mỗi số $x_1, x_2, \dots, x_p$ đều không lớn hơn n .

5. (VMO-1995). Cho số nguyên $n \geq 2$ và cho một đa giác đều $2n$ đỉnh. Người ta tô tất cả các đỉnh của đa giác đều đó bởi n màu sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

- 1) Mỗi đỉnh được tô bởi một màu;
- 2) Mỗi màu được dùng để tô cho đúng hai đỉnh không kề nhau.

Hai cách tô màu, thỏa mãn các điều kiện trên, được gọi là *tương đương* nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của đa giác đều đã cho.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đôi một không tương đương?



Cách tính Sao và Thứ theo ngày dương lịch

NGUYỄN VĂN THANG
(Hà Nội)

Khi quan sát những vì sao, các nhà thiên văn Phương Đông thời cổ đã tìm ra 28 chòm sao (Nhị thập bát tú) gần như hợp thành một vòng tròn trên bầu trời, dường như đứng yên và nằm sát đường Hoàng Đạo (đường đi của Trái Đất quay quanh Mặt Trời), do đó có thể chọn những chòm sao này để xác định các tiết khí của bốn mùa trong một năm. 28 chòm sao này được chia thành bốn nhóm, mỗi nhóm gồm 7 chòm sao gần nhau.

Nhóm sao Huyền Vũ (Rùa Đen) ứng với phương Bắc, mùa Đông, có đường viền quanh giống hình con rùa; nhóm sao Bạch Hổ (Hổ Trắng) ứng với phương Tây, mùa Thu, có đường viền quanh giống hình con hổ; nhóm sao Chu Tước (Sẻ Đỏ) ứng với phương Nam, mùa Hạ, có đường viền quanh giống hình con chim; Nhóm Sao Thanh Long (Rồng Xanh) ứng với phương Đông, mùa Xuân, có đường viền quanh giống hình con Rồng.

Trong hình bên mỗi hình tròn nhỏ biểu thị một ngôi sao và người ta nối chúng với nhau để dễ nhận biết một chòm sao.

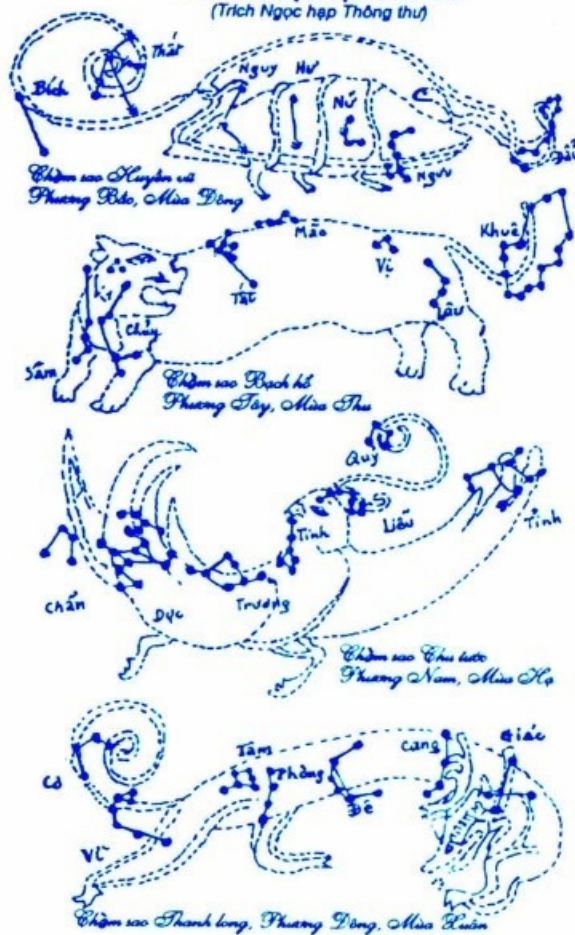
Mỗi chòm sao được minh họa bằng một vị tiên và về sau còn gắn với biểu tượng một loại cầm thú đồng thời phân ra thành 15 sao tốt (Cát tinh) và 13 sao xấu (Hung tinh).

Khi sắp xếp tên các chòm sao trong Nhị thập bát tú với các số thứ tự (gọi là mã số m_d với $1 \leq m_d \leq 28$) và với các ngày (theo thời gian), với các Thứ trong tuần lễ như ở Bảng 1 (xem trang sau), ta có *Phép ghi Lịch theo Nhị thập bát tú*.

Cứ sau 28 ngày thì Ngày Sao (ngày mang tên Sao) được lặp lại, chẳng hạn các ngày dương lịch sau có Ngày Sao như nhau: 1/3, 29/3, 26/4, 24/5, 21/6, 19/7, 16/8, 13/9, 11/10, 8/11, 6/12, 3/1, 31/1, 28/2. Từ đó có thể tìm được các Ngày Sao còn lại trong một năm.

28 chòm sao tương ứng với 28 ngày, tức là 4 tuần lễ. Năm dương lịch tương ứng với 13 chu kỳ của Nhị thập bát tú ($28 \times 13 = 364$) và còn dư 1 ngày nếu năm không nhuận, hoặc dư 2 ngày nếu là năm nhuận. Như vậy nếu biết Ngày Sao mã số m_d của một ngày dương lịch (lấy làm mốc, chẳng hạn ngày 1/3) của năm trước thì ngày đó (1/3) năm sau là Ngày Sao có mã số $m_d + 1$ nếu năm không nhuận, hoặc là $m_d + 2$ nếu là năm nhuận.

SƠ ĐỒ NHỊ THẬP BÁT TÚ
(Trích Ngọc hạp Thông thư)



BẢNG 1. Mã số m_d của Ngày Sao và Thứ trong tuần lễ

Thanh Long	Huyền Vũ	Bạch Hổ	Chu Tước	Thứ
1. Giác (Giao Long)	8. Đẩu (Giai)	15. Khuê (Sói)	22. Tinh (Tuần lộc)	Năm
2. Cang (Rồng)	9. Ngưu (Trâu)	16. Lâu (Chó)	23. Quỷ (Dê)	Sáu
3. Đê (Chồn)	10. Nữ (Dơi)	17. Vị (Trĩ)	24. Liễu (Hoàng)	Bảy
4. Phòng (Thỏ)	11. Hư (Chuột)	18. Mão (Gà)	25. Tinh (Ngựa)	Chủ nhật
5. Tâm (Cáo)	12. Ngụy (Yến)	19. Tắt (Quạ)	26. Trương (Hươu)	Hai
6. Vi (Hổ)	13. Thất (Lợn)	20. Chủy (Khỉ)	27. Dực (Rắn)	Ba
7. Cự (Báo)	14. Bích (Lợn rừng)	21. Sâm (Vượn)	28. Chân (Giun)	Tư

BẢNG 2. Mã số h_t ứng với Tháng t

Tháng t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Năm thường	0	3	3	6	8	11	13	16	19	21	24	26
Năm nhuận			$h_t + 1$									

BẢNG 3: Mã số S_n ứng với năm có hai số cuối là n trong sáu thế kỉ (1900 – 2499)

Năm trong thế kỉ n	S_n					
	1900-1999	2000-2099	2100-2199	2200-2299	2300-2399	2400-2499
00 22 67 89		16				9
00 23 45 68 90	4	17	1	13	25	10
01 24 46 91	5	18	2	14	26	11
02 47 69 92	6	19	3	15	27	12
03 25 48 70	7	20	4	16	28	13
04 26 71 93	8	21	5	17	1	14
05 27 49 72 94	9	22	6	18	2	15
05 28 50 95	10	23	7	19	3	16
06 51 73 96	11	24	8	20	4	17
07 29 52 74	12	25	9	21	5	18
08 30 75 97	13	26	10	22	6	19
09 31 53 76 98	14	27	11	23	7	20
09 32 54 99	15	28	12	24	8	21
10 55 77	16	1	13	25	9	22
11 33 56 78	17	2	14	26	10	23
12 34 79	18	3	15	27	11	24
13 35 57 80	19	4	16	28	12	25
13 36 58	20	5	17	1	13	26
14 59 81	21	6	18	2	14	27
15 37 60 82	22	7	19	3	15	28
16 38 83	23	8	20	4	16	1
17 39 61 84	24	9	21	5	17	2
17 40 62	25	10	22	6	18	3
18 63 85	26	11	23	7	19	4
19 41 64 86	27	12	24	8	20	5
20 42 87	28	13	25	9	21	6
21 43 65 88	1	14	26	10	22	7
21 44 66	2	15	27	11	23	8
22 67 89	3	16	28	12	24	9

Ghi chú: Ở cột thứ nhất, ô thứ hai tính từ trên xuống:

$n = 00$ ở dòng trên ứng với các năm nhuận 2000, 2400

$n = 00$ ở dòng dưới ứng với các năm không nhuận 1900, 2100, 2200, 2300.

Tuy nhiên, việc tìm Ngày Sao như thế khá lâu và dễ nhầm lẫn. Ta có phương pháp tìm Ngày Sao và Thứ trong tuần lễ trong sáu thế kỉ (từ 1900 đến 2499) một cách nhanh chóng nhờ việc sử dụng các Bảng 1, 2, 3 với các kí hiệu sau đây.

d là số của ngày dương lịch ($1 \leq d \leq 31$).

t là số của tháng, ghi trong Bảng 2 ($1 \leq t \leq 12$).

h_t là mã số của tháng t , ghi trong Bảng 2 ($0 \leq h_t \leq 26$).

n là hai số cuối của năm trong một thế kỉ, ghi trong Bảng 3 ($00 \leq n \leq 99$).

S_n là mã số ứng với năm có hai số cuối là n , ghi trong Bảng 3 ($1 \leq S_n \leq 28$).

$S_{t/n}$ là mã số ứng với tháng t của năm có hai số cuối là n .

Công thức liên hệ giữa các số và mã số như sau.

$$S_{t/n} = \begin{cases} S_n + h_t & \text{với năm không nhuận, hoặc năm nhuận mà } 1 \leq t \leq 2. \\ S_n + h_t + 1 & \text{với năm nhuận mà } 3 \leq t \leq 12. \end{cases}$$

$m_d = S_{t/n} + d - 28.k$, trong đó k lấy một trong các giá trị 0, 1, 2, 3 sao cho $1 \leq m_d \leq 28$;

(nói cách khác m_d là số dư khác 0 khi chia $S_{t/n} + d$ cho 28, còn $m_d = 28$ khi số dư đó bằng 0).

(Xem tiếp trang 27)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/392. (Lớp 6) Có tồn tại hay không các số nguyên x, y sao cho

$$x^3 - y^3 = 10 \times 10 \times 2010?$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/392. (Lớp 7) Cho số tự nhiên n lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1+n}{1+n^{n+1}} > \left(\frac{1+n^n}{1+n^{n+1}} \right)^n.$$

NGUYỄN HỮU BÀNG
(GV THCS Hưng Hoà, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T3/392. Cho a, b, c, x, y, z là các số dương thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2010 \\ ax^3 = by^3 = cz^3. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x + y + z \geq \frac{3}{670}$.

HOÀNG ANH TUẤN
(GV TTGDTH, Văn Bàn, Lào Cai)

Bài T4/392. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh thoả mãn hệ thức

$$BC^2 + AB \cdot AC - AB^2 = 0.$$

Tính tổng $\hat{A} + \frac{2}{3}\hat{B}$.

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/392. Trên đường tròn tâm O bán kính R vẽ hai đường kính AE và BF vuông góc với nhau. Trên cung nhỏ E lấy điểm C . Dây cung AC cắt đường kính BF tại điểm P , còn dây

cung BC cắt đường kính AE tại điểm Q . Tính diện tích tứ giác $APQB$ theo R .

NGUYỄN ĐỀ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/392. Giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 8x + 9} - \sqrt{xy + 12 - 6x} \leq 1 \\ \sqrt{2(x-y)^2 + 10x - 6y + 12} - \sqrt{y} = \sqrt{x+2}. \end{cases}$$

NGUYỄN TẤT THU
(GV THPT Lê Hồng Phong, Biên Hoà, Đồng Nai)

Bài T7/392. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I và nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Chứng minh rằng ba điểm E, I, O thẳng hàng.

MAI QUANG THÀNH
(SV CLC K53 Toán - Tin, DHSP Hà Nội)

Bài T8/392. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2$ với mọi $n \geq 1$. Tìm

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n}; \\ 2) & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right). \end{aligned}$$

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/392. Chứng minh rằng phương trình $P(x) = 2^x$, trong đó $P(x)$ là đa thức bậc n có không quá $n + 1$ nghiệm.

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T10/392. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(2010x - f(y)) = f(2009x) - f(y) + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

TẠ HOÀNG THÔNG
(GV TT Thới Long, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/392. Cho dãy số (a_n) với $a_1 = a_2 = 1$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1$. Tìm tất cả các số

nguyên dương a và b với $a < b$ thỏa mãn điều kiện $a_n - 2na^n$ chia hết cho b với mọi $n \geq 1$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T12/392. Gọi I và R lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp một tam giác ABC . IA, IB, IC cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_1, B_1, C_1 tương ứng. Chứng minh bất đẳng thức

$$2R + \frac{IA+IB+IC}{3} \leq IA_1 + IB_1 + IC_1 \leq \frac{5}{2}R + \frac{IA+IB+IC}{6}.$$

NGUYỄN VĂN ĐÌNH
(SV K49XF, ĐHXD Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/392. Một người quan sát một tàu hoả bắt đầu chuyển động. Người này nhìn thấy toa

tàu thứ nhất đi ngang qua sau thời gian t . Hỏi toa tàu thứ n sẽ đi ngang qua sau thời gian bao lâu, nếu gia tốc a của tàu thay đổi theo thời gian theo quy luật $a = kt$?

TRẦN KHÁNH HẢI
(GV THPT Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế)

Bài L2/392. Một electron có động năng 2,5 keV, chuyển động ngang vào một miền có điện trường hướng xuống dưới và cường độ 10kV/m.

- 1) Xác định chiều và độ lớn (nhỏ nhất) của từ trường làm cho electron tiếp tục chuyển động ngang. Bỏ qua lực hấp dẫn vì nó quá nhỏ.
- 2) Có khi nào một proton đi vào một tổ hợp trường như vậy mà không bị lệch? Nếu có thì trong điều kiện nào?

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV DHSP Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/392. (For 6th grade) Does there exist a pair of integers x, y such that $x^3 - y^3 = 10 \times 10 \times 2010$?

T2/392. (For 7th grade) Let n be a natural number, greater than 1. Prove that

$$\frac{1+n}{1+n^{n+1}} > \left(\frac{1+n^n}{1+n^{n+1}} \right)^n.$$

T3/392. Let a, b, c, x, y, z be positive integers

satisfying the conditions $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2010 \\ ax^3 = by^3 = cz^3. \end{cases}$

Prove that $x+y+z \geq \frac{3}{670}$.

T4/392. Let ABC be a triangle whose sides satisfying the relation

$$BC^2 + AB \cdot AC - AB^2 = 0.$$

Determine the sum $\hat{A} + \frac{2}{3}\hat{B}$.

T5/392. Two orthogonal diameters AE and BF of a circle center O , radius R are given. A

point C is chosen on the minor arc EF . The chord AC intersects BF at P , and the chord BC meets AE at Q . Find the area of the quadrilateral $APQB$ in term of R .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/392. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 8x + 9} - \sqrt{xy + 12 - 6x} \leq 1 \\ \sqrt{2(x-y)^2 + 10x - 6y + 12} - \sqrt{y} = \sqrt{x+2}. \end{cases}$$

T7/392. A quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle centered I and circumscribed another circle with center at O . The diagonals AC and BD intersect at E . Prove that E, I and O are collinear.

T8/392. Let (x_n) be a sequence given by $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2$ for any $n \geq 1$. Find

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$.

(Xem tiếp trang 27)



★ Bài T1/388. Chứng minh rằng số có dạng $(\overline{33\dots 3})^2$, trong đó có k ($k > 0$) chữ số 3, luôn viết được dưới dạng hiệu của số tự nhiên viết bởi toàn chữ số 1 và số tự nhiên viết bởi toàn chữ số 2.

Lời giải. Đặt $a = \overbrace{1...1}^{k \text{ chữ số } 1}$ thì $9a = \overbrace{9...9}^{k \text{ chữ số } 9} = 10^k - 1$
và $10^k \cdot a + a = \overbrace{1...1}^{k \text{ chữ số } 1} \overbrace{0...0}^{k \text{ chữ số } 0} + \overbrace{1...1}^{k \text{ chữ số } 1} = \overbrace{1...1}^{2k \text{ chữ số } 1}$.

Ta có

$$\underbrace{(3\dots3)}_{k \text{ chữ số } 3} = (3.a)^2 = 9.a.a = (10^k - 1)a = 10^k a - a$$

$$= 10^k a + a - 2a = \overbrace{1 \dots 1}^{2k \text{ chũ số 1}} - \overbrace{2 \dots 2}^{k \text{ chũ số 2}}. \quad \square$$

Nhận xét. Đa số các bạn gửi lời giải đều làm đúng, tuy nhiên một số bạn chỉ nêu nhận xét mà không chứng minh. Các bạn sau có lời giải đúng và trình bày gọn:

Vĩnh Phúc: Phạm Văn Nhiệm, Nguyễn Thị Nga, Kiều Quốc Đạt, Trương Thị Hoài Thu, 6A, THCS Yên Lạc, Nguyễn Thị Thanh Hà, Ngô Đức Tùng, Phạm Thị Bảo Châu, Nguyễn Ngọc Tú, Đào Nguyễn Anh Duyệt, Nguyễn Hiền Linh, Lê Duy Minh Tú, Vương Thùy Trang, Trần Thị Hồng Nhung, Vũ Phương Quỳnh, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, Lê Khải Oai, 6D, THCS Vĩnh Yên, Nguyễn Thị Kiều Loan, Trần Văn Phong, Nguyễn Long Hải, Phạm Thu Hiền, Nguyễn Thanh Hương, Trần Trung Thông, Hà Công Cẩn, 6A, THCS Lập Thạch, **Hải Phòng:** Nguyễn Lương Hoàng Hiền, 6A2, THCS Hồng Bàng; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Trâm, Lê Văn Quang, Cao Thị Mai Linh, Hồ Thị Bích, Trần Thị Thu Hằng, Nguyễn Đăng Nguyên, Nguyễn Thị Hoài Anh, Trần Ngọc Linh, Lê Hồ Minh Tuấn, Nguyễn Đức Mạnh, Đặng Mỹ Linh, Hoàng Văn Bằng, Nguyễn Cao Cường, Nguyễn Thị Cẩm Tú, Đặng Quỳnh Chi, 6A, Nguyễn Anh Tuấn, Hồ Thị Thủy, Nguyễn Bá Khánh Hòa, Phạm Văn Quyển, 6B, Hồ Thị Hà, Phan Thanh Hùng, Lê Quang Nghĩa, Bùi Nhật Nam, Hồ Minh Ngọc, Hồ Minh Huy, Hồ Văn Hóa, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Đậu Hương Giang, Hoàng Thị Tuyền, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

Dương Xuân Phi, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đồ
Lương; **Hà Tĩnh**: **Nguyễn Thị Thương**, Bùi Hạnh
Nguyễn, 6C, THCS Xuân Diệu, Nghèn, Can Lộc;
Quảng Ngãi: **Tống Thành Nguyễn**, 6A, THCS Hành
Phước, Nguyễn Thị Kiều Duyên, 6A, THCS Hành Đức,
Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/388.** *Tìm tất cả các số thực a sao cho $|3a - 2| \leq 1$ và $A = \frac{3a - 1}{4a^4 + a^2}$ là số nguyên.*

Lời giải. Từ giả thiết $|3a - 2| \leq 1$ suy ra $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$ (*).

Khi đó $A = \frac{3a-1}{4a^4+a^2} \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{Xét } 1 - A &= 1 - \frac{3a-1}{4a^4+a^2} = \frac{4a^4+a^2-3a+1}{4a^4+a^2} \\ &= \frac{(a^2+a+1)(2a-1)^2}{4a^4+a^2} \geq 0, \text{ suy ra } A \leq 1. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}$.

Như vậy $0 \leq A \leq 1$. Vì A là số nguyên nên chỉ có thể $A = 0$, hoặc $A = 1$.

• Với $A = 0$ ta có $a = \frac{1}{3}$, thỏa mãn (*).

- Với $A = 1$ ta có $a = \frac{1}{2}$, thỏa mãn (*).

Vậy các số thực a cần tìm là $a = \frac{1}{3}$ và $a = \frac{1}{2}$. $\square$

◀ Nhận xét. 1) Mấu chốt của bài toán là ở chỗ chứng minh $A \leq 1$. Nhiều bạn đã nêu và chứng minh trực tiếp nhận xét này.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng và lập luận chặt chẽ:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Hữu Cương, Tạ Thanh Xuân, Nguyễn Văn Long, Nguyễn Tú Anh, Nguyễn Ngọc Mai, Phạm Thị Văn Anh, Tạ Đức Chính, 7A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Phạm Huy Hoàng, 9A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình, Đặng Thắng Lợi, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Thanh Hóa:** Lê Viết Nghĩa, 9A, THCS Hoàng Minh, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Võ Anh Hiếu, Nguyễn Thế Anh, 6B, Hồ Linh Chi, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Cao Minh Sơn, 9D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T3/388. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 3\sqrt{x} + 8\sqrt{y}$$

trong đó x, y là hai số không âm thỏa mãn

$$17x^2 - 72xy + 90y^2 - 9 = 0 \quad (1)$$

Lời giải. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (4x - 9y)^2 + x^2 + 9y^2 - 9 = 0.$$

$$\text{Do } (4x - 9y)^2 \geq 0 \text{ nên } x^2 + 9y^2 \leq 9 \quad (2)$$

Từ (2), áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có

$$P^4 = (3\sqrt{x} + 4.2\sqrt{y})^4 \leq (25(x + 4y))^2$$

$$\leq 25^2 \cdot (x^2 + 9y^2) \left(1 + \frac{16}{9}\right) \leq 25^3.$$

$$\text{Vậy } P \leq 5\sqrt{5}.$$

$$\max P = 5\sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 4x = 9y \\ x^2 + 9y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt là:

Phú Thọ: Vũ Anh Tuấn, 9A1, THCS Lâm Thao; **Nghe An:** Phạm Văn Quyến, Võ Anh Hiếu, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nguyễn Hoàng Tâm, Trương Công Phú, Nguyễn Văn Tiến, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Trương Thị Cẩm Tú**, 9D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Ninh Thuận:** Hoàng Trâm Minh, 9/5, THCS Lý Tự Trọng, TP. Phan Rang, Tháp Chàm.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T4/388. Giải phương trình

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-5} = 2x^2 - 5x \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện xác định $\frac{5}{2} \leq x \leq 4$.

Cách 1

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-2}-1) + (\sqrt{4-x}-1) + (\sqrt{2x-5}-1) = 2x^2 - 5x - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1} + \frac{2(x-3)}{\sqrt{2x-5}-1}$$

$$= (2x+1)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x-5}-1} \right)$$

$$= (2x+1)(x-3).$$

• Với $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện).

• Nếu $x-3 \neq 0$ thì suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x-5}-1} = \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} + 2x+1 \quad (2)$$

Với điều kiện $\frac{5}{2} \leq x \leq 4$, ta có

$$\text{Vế phải của (2)} > 2x+1 > 2 \cdot \frac{5}{2} + 1 = 6.$$

$$\text{Vế trái của (2)} < 1 + 2 = 3.$$

Do đó PT (2) vô nghiệm. Hay PT (1) không có nghiệm khác 3. Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất $x=3$.

Cách 2

• Nếu $\frac{5}{2} \leq x < 3$ thì $0 \leq 2x-5 < x-2 < 4-x$

$$\Rightarrow \sqrt{2x-5} < \sqrt{x-2} < \sqrt{4-x}.$$

$$\text{Từ (1) suy ra } 2x^2 - 5x > 3\sqrt{2x-5} \Leftrightarrow x\sqrt{2x-5} > 3 \quad (3)$$

$$\text{Lại có } x < 3 \text{ nên } x\sqrt{2x-5} < 3\sqrt{2x-5} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } 3\sqrt{2x-5} > 3 \Leftrightarrow 2x-5 > 1 \Leftrightarrow x > 3 \text{ (mâu thuẫn với } x < 3).$$

• Nếu $3 < x \leq 4$ thì $2x-5 > x-2 > 4-x \geq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{2x-5} > \sqrt{x-2} > \sqrt{4-x}.$$

$$\text{Từ (1) suy ra } 2x^2 - 5x < 3\sqrt{2x-5} \Rightarrow x\sqrt{2x-5} < 3$$

$$\text{Lại có } x > 3 \text{ nên } x\sqrt{2x-5} > 3\sqrt{2x-5}. \text{ Dẫn đến } 3\sqrt{2x-5} < 3 \Rightarrow 3x < 3 \text{ (mâu thuẫn với } x > 3).$$

• Với $x=3$ thử trực tiếp thấy thỏa mãn.

Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất $x=3$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Đa số các bạn tham gia giải đều theo một trong hai cách trên. Tuy nhiên nhiều bạn đánh giá hai vế và biến đổi còn dài dòng, thiếu chặt chẽ.

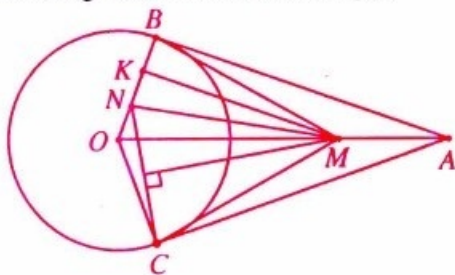
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Đặng Thắng Lợi, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Vĩnh Phúc:** Văn Ngọc Bích, 8A1, THCS Yên Lạc, Hà Quang Nhân, 9A1, THCS Hoàng Hoa Thám, Dương Phước Thọ, 9A, THCS Lập Thạch; **Thanh Hóa:** Lê Viết Nghĩa, 9A, THCS Hoàng Minh, Hoàng Hóa, Lê Thị Phương Mai, 9A3, THCS Nguyễn Văn Trỗi; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Bảo Trâm, 8A, Phạm Đình Thuyền, 9A, THCS Hành Phước; **Nghe An:** Ngô Tuấn Tài, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/388.** Từ một điểm A ở ngoài đường tròn tâm O , kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với B, C là các tiếp điểm. Trên đoạn OB lấy điểm N sao cho $BN = 2ON$. Đường trung trực của đoạn thẳng CN cắt OA tại M . Hãy tính tỉ số $\frac{AM}{AO}$.

Lời giải. (Theo bạn **Phạm Huy Hoàng**, 9A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội).



Gọi K là trung điểm của BN . Vì AB, AC tiếp xúc với (O) nên OA là trung trực của BC . Do M thuộc OA nên $MB = MC$. Mặt khác M thuộc trung trực của CN nên $MC = MN$. Suy ra $MB = MN$. Do đó, tam giác MBN cân tại M . Suy ra $MK \perp BN$. Vậy $MK \parallel AB$ (vì $AB \perp BN$).

Từ đó, theo định lý Thales, chú ý rằng $BN = 2ON$, ta có $\frac{AM}{AO} = \frac{BK}{BO} = \frac{1}{3}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán toán này và đều giải đúng. Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Đức Nhân, Đặng Quang Tuấn, 9C, THCS Vĩnh Tường, Nguyễn Văn Hậu, 9A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Định Thị Thu Trang, 9B, THCS Từ Sơn; **Thanh Hoá:** Lê Thị Nhung, 9C, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hoá; **Nam Định:** Trịnh Thị Việt Hà, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định; **Thái Bình:** Vũ Lê Phương, 9B, THCS Đông Hưng; **Hà Nam:** Nguyễn Quang Lợi, 7B, THCS Liêm Chính, TP Phủ Lý; **TP. Hồ Chí Minh:** Dương Minh Hoàng, 9A6, THCS Trần Đại Nghĩa.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T6/388.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{a^4(b+1)(c+1)} + \frac{1}{b^4(c+1)(a+1)} + \frac{1}{c^4(a+1)(b+1)}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Ta có

$$A = \frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y^3}{(z+1)(x+1)} + \frac{z^3}{(x+1)(y+1)}.$$

Áp dụng BDT Cauchy cho các số dương ta có

$$\frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y+1}{8} + \frac{z+1}{8} \geq \frac{3x}{4};$$

$$\frac{y^3}{(z+1)(x+1)} + \frac{z+1}{8} + \frac{x+1}{8} \geq \frac{3y}{4};$$

$$\frac{z^3}{(x+1)(y+1)} + \frac{x+1}{8} + \frac{y+1}{8} \geq \frac{3z}{4}.$$

Cộng theo vế ba BDT trên rồi rút gọn ta được

$$A \geq \frac{x+y+z}{2} - \frac{3}{4} \quad (1)$$

Lại vì $abc = 1$ nên $xyz = 1$, ta có

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq \frac{3}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi

và chỉ khi $x = y = z = 1$. Lúc đó $a = b = c = 1$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và hầu hết đều cho kết quả đúng. Bài toán trên có thể tổng quát như sau (phần chứng minh xin dành cho bạn đọc).

• (Theo bạn **Nguyễn Thành Khang**, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**). Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc \leq 1$; m, n là các số thực dương và k là số nguyên dương lớn hơn 4. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^k(mb+n)(mc+n)} + \frac{1}{b^k(mc+n)(ma+n)} + \frac{1}{c^k(ma+n)(mb+n)} \geq \frac{3}{(m+n)^2}.$$

• (Theo một số bạn khác). Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1^{n+1}(a_2+1)\dots(a_n+1)} + \frac{1}{a_2^{n+1}(a_1+1)(a_3+1)\dots(a_n+1)} + \dots + \frac{1}{a_n^{n+1}(a_1+1)\dots(a_{n-1}+1)} \geq \frac{n}{2^{n-1}}.$$

2) Ngoài bạn **Khang**, các bạn sau có lời giải tốt và có mở rộng bài toán:

Hải Dương: Phạm Đức Vương, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Hà Nam:** Nguyễn Chí Linh, 10A1, THPT chuyên Biên Hoà; **Hà Nội:** Nguyễn Huy Hoàng, 11CT, THPT DL Nguyễn Bình Khiêm, Cầu Giấy; **Hải Phòng:** Phan Đức Minh, 11A19, THPT Thái Phiên; **Thanh Hoá:** Hà Thu Hà, 11A5, Lê Thị Hoa, 11A3, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân; **Nguyễn Minh Hiếu**, 11A3, THPT Hậu Lộc I; **Quảng Trị:** Nguyễn Trường Sinh, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Võ Văn Tiên, 10

Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; Nghệ An: Thái Doãn Minh, 10A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ Bài T7/388. Cho a, b là hai số thực thuộc khoảng $(0; 1)$. Dãy số (u_n) , $(n = 0, 1, 2, \dots)$ được xác định như sau: $u_0 = a, u_1 = b$.

$$u_{n+2} = \frac{1}{2010} u_{n+1}^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{u_n}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Xét dãy số (v_n) được xác định như sau:

$$v_0 = \min(a, b), \quad v_{n+1} = \frac{1}{2010} v_n^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{v_n},$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vì a, b là hai số thực thuộc khoảng $(0; 1)$, nên $0 < v_0 < 1$ và nếu $0 < v_n < 1$, thì

$$v_{n+1} = \frac{1}{2010} v_n^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{v_n} < 1 \text{ hay } 0 < v_{n+1} < 1.$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $0 < v_n < 1$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Do đó } 2010(v_{n+1} - v_n) = (v_n^4 - v_n) - 2009(v_n - \sqrt[4]{v_n})$$

$$= (v_n - \sqrt[4]{v_n})((v_n + \sqrt[4]{v_n})(v_n^2 + \sqrt{v_n}) - 2009) > 0$$

$$\Rightarrow v_{n+1} > v_n.$$

Như vậy (v_n) là dãy tăng, bị chặn trên bởi 1, nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim v_n = c$ với $0 < c \leq 1$.

$$\text{Ta có } \lim v_{n+1} = \lim \left(\frac{1}{2010} v_n^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{v_n} \right),$$

$$\text{suy ra } c = \frac{1}{2010} c^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{c}.$$

Hệ thức trên có thể biến đổi thành

$$(c^4 - c) - 2009(c - \sqrt[4]{c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - \sqrt[4]{c})((c + \sqrt[4]{c})(c^2 + \sqrt{c}) - 2009) = 0.$$

Để ý rằng với $0 < c \leq 1$, thừa số thứ hai âm, ta được $\lim v_n = c = 1$. Trở lại dãy (u_n) .

Ta cũng có $0 < u_0 < 1, 0 < u_1 < 1$ và nếu $0 < u_n < 1, 0 < u_{n+1} < 1$ thì

$$0 < u_{n+2} = \frac{1}{2010} u_{n+1}^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{u_n} < 1.$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta được $0 < u_n < 1$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tiếp theo ta chứng minh $v_n \leq \min(u_{2n}, u_{2n+1})$, $(n \in \mathbb{N})$.

Thật vậy, theo cách xác định v_0 , BĐT đúng với $n = 0$.

Giả sử BĐT đúng với $n \geq 1$, nghĩa là $v_n \leq u_{2n}; v_n \leq u_{2n+1}$ thì

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= \frac{1}{2010} u_{2n+1}^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{u_{2n}} \\ &\geq \frac{1}{2010} v_n^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{v_n} = v_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{2n+3} &= \frac{1}{2010} u_{2n+2}^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{u_{2n+1}} \\ &\geq \frac{1}{2010} v_{n+1}^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{v_n}. \end{aligned}$$

Mà $v_{n+1} > v_n$, suy ra

$$u_{2n+3} > \frac{1}{2010} v_n^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{v_n} = v_{n+1}.$$

Ta được $v_{n+1} \leq \min(u_{2n+2}, u_{2n+3})$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $v_n \leq \min(u_{2n}, u_{2n+1})$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Như vậy $v_n \leq u_{2n} < 1, v_n \leq u_{2n+1} < 1$, và $\lim v_n = 1$.

Do đó dãy (u_n) có giới hạn và $\lim u_n = 1$. □

◀ Nhận xét. Theo đầu bài, (u_n) là dãy bị chặn nhưng không đơn điệu. Để chứng minh nó có giới hạn, ta đã sử dụng nguyên lý kẹp: Nếu $a > u_n \geq v_n$ và $v_n \rightarrow a$ thì $\lim u_n = a$. Đây là một kỹ thuật thường dùng để xét giới hạn của một dãy.

Có khá nhiều bạn tham gia gửi bài giải và hầu hết làm theo cách trên. Một số bạn sử dụng đạo hàm khi chứng minh (v_n) là dãy đơn điệu tăng.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T8/388. Cho tam giác ABC. Gọi l_a, l_b, l_c theo thứ tự là độ dài các đường phân

giác trong hạ từ A, B, C ; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng

$$\frac{l_a + l_b + l_c}{R} \leq 2 \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} l_a &= \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{b+c}{2} \cos \frac{A}{2} \\ &= R(\sin B + \sin C) \cos \frac{A}{2} \text{ nên} \\ \frac{l_a}{R} &\leq (\sin B + \sin C) \cos \frac{A}{2} \\ &= 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \\ &= \left(\cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A-B}{2} \right) \sin \frac{B}{2} \\ &\quad + \left(\cos \frac{A+C}{2} + \cos \frac{A-C}{2} \right) \sin \frac{C}{2} \\ &\leq \left(\sin \frac{C}{2} + 1 \right) \sin \frac{B}{2} + \left(\sin \frac{B}{2} + 1 \right) \sin \frac{C}{2} \\ &= \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ &= \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \\ &= \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{B+C}{2} \\ &= \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} + 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} \frac{l_b}{R} &\leq \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} - 2 \sin \frac{B}{2} + 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}; \\ \frac{l_c}{R} &\leq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} + 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } \frac{l_a + l_b + l_c}{R} &\leq 2 \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \right). \quad (*) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi ABC là tam giác đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Từ (*), sử dụng bất đẳng thức

$xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$, ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{l_a + l_b + l_c}{R} &\leq 2 \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \right) \\ &= 2 \left(2 + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = 4 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $l_a + l_b + l_c \leq 4R + r$.

Kết hợp với $4R + r = r_a + r_b + r_c$, ta thu được

$$l_a + l_b + l_c \leq r_a + r_b + r_c.$$

2) Đa số các bạn sử dụng các kết quả $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$,

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

để đi đến đánh giá

$$\begin{aligned} \frac{l_a + l_b + l_c}{R} &\leq \sqrt{3} (\sin A + \sin B + \sin C) \\ &\leq 2 \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \right). \end{aligned}$$

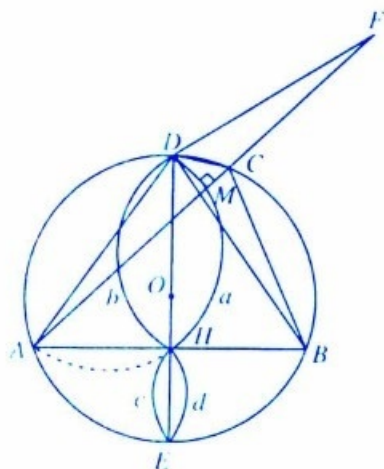
3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Ngọc Sơn, 11 Toán 1, THPT chuyên ĐHQG Hà Nội; Nguyễn Văn Thắng, 10A₁ Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội. **Nam Định:** Đỗ Thị Thu Hiền, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Dũng, Vũ Đăng Minh, 11A₁, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Ninh Bình:** Lê Thị Hồng, Phạm Thị Dung, 11A₁, THPT Nguyễn Huệ. **Hưng Yên:** Đỗ Văn Anh, 11A₁, THPT Dương Quảng Hàm; **Thái Bình:** Trần Quang Đại, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; Vũ Việt Anh, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** Nguyễn Minh Hiếu, 11A₃, THPT Hậu Lộc 1, Nguyễn Hữu Quân, 11A₁, THPT Lương Đức Bằng, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Vương Ngọc Anh, Nguyễn Mạnh Hùng, 11A₁, THPT Quỳnh Hợp II; Nguyễn Huy Tài, 10A₃, THPT Nghi Lộc 1; Hoàng Việt Anh, 11A₁, THPT Thanh Chương 3; **Hà Tĩnh:** Thiệu Đăng Ba, 12 Toán; Nguyễn Mậu Dũng, Phan Thị Quỳnh Trang, 11 Toán 1, Nguyễn Trọng Hoàng Hiệp, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** Hoàng Mạnh Cường, Vũ Duy Khanh, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết. **Bình Định:** Nguyễn Ngọc Nghĩa, 10A₁, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T9/388.** Cho đường tròn (O) và một dây cung AB của (O) . Điểm C nằm trên đường tròn đó. Điểm M thuộc đường gấp khúc ACB (gồm hai đoạn thẳng AC và CB) và chia đường gấp khúc này thành hai phần có độ dài bằng nhau. Tìm tập hợp điểm M khi điểm C di chuyển trên đường tròn (O) .

Lời giải. Kẻ đường kính DE của đường tròn (O) vuông góc với AB tại H . Trước tiên ta xét trường hợp C thuộc cung nhỏ $\widehat{DB}$.



• **Phân thuận.** Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $CF = CB$. Khi đó từ $\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = \widehat{DCA}$, suy ra $\widehat{DCB} = \widehat{DCF}$ (cùng bù với $\widehat{DAB}$), kết hợp với CD là cạnh chung, ta thấy $\triangle CDB = \triangle CDF$ (c.g.c), do đó $DA = DB = DF$ (*). Vì M là điểm thuộc đường gấp khúc ACB và chia đường gấp khúc đó thành hai phần có độ dài bằng nhau, nên M là trung điểm của đoạn AF . Từ (*) suy ra $DM \perp AF$, hay $\widehat{DMA} = 90^\circ$. Vậy M thuộc đường tròn đường kính DA .

Khi $C \equiv D$ thì $M \equiv D$. Khi C chuyển động trên $\widehat{DB}$ đến trùng với B thì tia AC quay xung quanh A , cùng chiều kim đồng hồ đến trùng với tia AB . Điểm M sẽ chuyển động trên cung $\widehat{DaH}$ của đường tròn đường kính DA đến trùng với H . Do đó, trong trường hợp này tập hợp các điểm M là cung $\widehat{DaH}$.

• **Phân đảo.** Lấy điểm M bất kì thuộc $\widehat{DaH}$, đường thẳng AM cắt cung nhỏ DB của đường tròn (O) tại điểm C . Ta chứng tỏ rằng điểm M chia đường gấp khúc ACB thành hai phần có độ dài bằng nhau. Thật vậy, trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $CF = CB$. Lúc này do $\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = \widehat{DCA}$ nên $\widehat{DCB} = \widehat{DCF}$ (cùng bù với $\widehat{DAB}$).

Suy ra $\triangle CDB = \triangle CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow DB = DF = DA$. Vì M thuộc $\widehat{DaH}$ nên $DM \perp AF$. Do đó M là trung điểm của AF , ta có điều cần chứng minh.

Xét tiếp các trường hợp C thuộc cung nhỏ $\widehat{DA}$; C thuộc cung nhỏ $\widehat{EA}$; C thuộc cung nhỏ $\widehat{EB}$ và tiến hành tương tự như trường hợp C thuộc cung nhỏ $\widehat{DB}$ ta đi đến kết luận: Tập hợp các điểm M cần tìm là hình hợp bởi bốn cung $\widehat{DaH}$, $\widehat{DbH}$, $\widehat{EcH}$, $\widehat{EdH}$ (một phần của các đường tròn đường kính DA , DB , EB , EA theo thứ tự) (xem hình vẽ bên). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn đọc đặt vấn đề tìm tập hợp các điểm M chia đường gấp khúc ACB thành hai phần theo tỉ lệ $\frac{m}{n}$.

2) Trừ một số bạn kết luận tập hợp M chưa chuẩn xác, còn lại đều có đáp án đúng. Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Đặng Thắng Lợi, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Vĩnh Phúc:** Phùng Quốc Toàn, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Bùi Huy Hoàng, 10A, THPT Kim Thành I; **Nam Định:** Trần Trọng Huy, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Thái Doãn Minh, Nguyễn Quyến Linh, Phạm Nhật Anh, 10A1, Khối THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** Trần Việt Cường, Nguyễn Văn Huy, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Phú Yên:** Phan Minh Trí, Phạm Đức Hưng, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Bình Định:** Lương Việt Chương, 10 Toán - Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Khánh Hòa:** Nguyễn Đình Luận, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T10/388.** Cho m, n, d là các số nguyên dương thỏa mãn các điều kiện $m < n$ và $(d, m) = 1$, $(d, n) = 1$. (Kí hiệu (a, b) là ước số chung lớn nhất của a và b).

Chứng minh rằng trong một dãy gồm n số nguyên bất kì tạo thành một cấp số cộng với công sai d luôn tồn tại hai số khác nhau mà tích của chúng chia hết cho $m.n$.

Lời giải. Xét dãy số gồm n số nguyên bất kì tạo thành một cấp số cộng với công sai d là $a_1, a_2, \dots, a_n$ (*), trong đó $a_i = a + id$ với $i = 1, n; a \in \mathbb{Z}$ bất kì.

Nhận xét. Với mọi số nguyên dương $k, l \leq n$ và $(k, d) = 1$ thì trong k số hạng liên tiếp của dãy (*) luôn có một số chia hết cho k . Thật vậy: Rõ ràng nhận xét đúng với $k = 1$.

Với $2 \leq k \leq n$, ta có hiệu của hai số bất kì trong k số hạng liên tiếp của dãy (*) sẽ có

dạng jd với $0 < j \leq k-1$, $j \in \mathbb{N}^*$. Do $(d, k) = 1$ nên $jd \nmid k$. Vì thế k số trên đôi một có số dư khác nhau khi chia cho k . Suy ra trong chúng có đúng một số chia hết cho k (đpcm).

Từ nhận xét suy ra: Trong dãy (*) có đúng một số chia hết cho n và có ít nhất một số chia hết cho m .

Giả sử $a_i : n$, $a_j : m$ với $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- Nếu $i \neq j$ thì $a_i a_j : mn$ (đpcm).
- Nếu $i = j$ thì $a_i : u$ với $u = \text{BCNN}(m, n)$.

Vì $m < n$ nên $v = \text{ƯCLN}(m, n) \leq \frac{n}{2}$. Do đó

trong dãy (*) sẽ có v số hạng liên tiếp không chứa a_i . Theo nhận xét thì trong v số hạng liên tiếp này có một số chia hết cho v , giả sử $a_t : v$ ($t \neq i$). Như vậy $a_i a_t : uv$, mà $uv = mn$ nên $a_i a_t : mn$ (đpcm). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn sau khi lập luận dãy (*) có $a_i : n$, đã xét tiếp dãy gồm có $n-1$ số hạng còn lại (Dãy (*) bỏ đi số hạng a_i) và đã khẳng định dãy này cũng lập thành một cấp số cộng để suy ra có số hạng $a_i : m$ ($a_i \neq a_j$) là sai lầm!!!

2) Các bạn sau đây có lập luận chặt chẽ, rõ ràng:

Hà Nội: Nguyễn Văn Thắng, 10A1 Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Huy, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Minh, 11A1 K37, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Ngãi:** Tô Đình Dương, 12A3, THPT Số 1, Đức Phổ; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Xuân Hồng, 11T, THPT chuyên Hạ Long.

THANH LOAN

★ **Bài T11/388.** Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất sau:

- $f(0) = 1$;
- $f(x) \leq 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $f\left(x + \frac{11}{24}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{8}\right) + f\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

Đặt $F(x) = \sum_{n=0}^{2009} f(x+n)$.

Hãy tính $F(2009)$.

Lời giải. (Theo Âu Dương Kim Sơn, 10T, THPT Chuyên Bắc Ninh, Tô Đình Dương, 12A1, THPT Đức Phổ 1, Quảng Ngãi).

Từ tính chất c) suy ra

$$f(x) - f\left(x + \frac{1}{3}\right) = f\left(x + \frac{1}{8}\right) - f\left(x + \frac{11}{24}\right) \quad (*)$$

Từ (*) suy ra

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{3}\right) - f\left(x + \frac{2}{3}\right) &= f\left(x + \frac{11}{24}\right) - f\left(x + \frac{19}{24}\right); \\ f\left(x + \frac{2}{3}\right) - f(x+1) &= f\left(x + \frac{19}{24}\right) - f\left(x + \frac{9}{8}\right). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(x) - f(x+1) &= f\left(x + \frac{1}{8}\right) - f\left(x + \frac{9}{8}\right) \\ \Leftrightarrow f(x) - f\left(x + \frac{1}{8}\right) &= f(x+1) - f\left(x + \frac{9}{8}\right) \quad (**). \end{aligned}$$

Từ (**) suy ra

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{8}\right) - f\left(x + \frac{2}{8}\right) &= f\left(x + \frac{9}{8}\right) - f\left(x + \frac{10}{8}\right) \\ f\left(x + \frac{2}{8}\right) - f\left(x + \frac{3}{8}\right) &= f\left(x + \frac{10}{8}\right) - f\left(x + \frac{11}{8}\right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$f\left(x + \frac{7}{8}\right) - f(x+1) = f\left(x + \frac{15}{8}\right) - f(x+2).$$

Do đó $f(x) - f(x+1) = f(x+1) - f(x+2) \quad (***)$

Trong (***) cho $x = -1$, và do $f(0) = 1$ ta thu được

$f(-1) + f(1) = 2$, nên từ giả thiết b) suy ra $f(-1) = f(1) = 1$. Do đó

$$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = \dots = f(2 \cdot 2009) = 1$$

và vì vậy $F(2009) = 2010$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Đại đa số các bạn đều giải bằng phương pháp quy nạp đối với bài toán tổng quát sau: Cho cấp số thực dương a, b sao cho ab là số hữu tỉ và hàm số $f(x)$ bị chặn thỏa mãn điều kiện

$$f(a+b+x) + f(x) = f(x+a) + f(x+b), \forall x \in \mathbb{R},$$

thì $f(x)$ là hàm số tuần hoàn.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Phú Thọ: Nguyễn Quốc Hùng, 10T, Nguyễn Thành Khang, 11T, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Giang:** Trần Lê Thu Hà, 11T, THPT chuyên; **Hà Nội:** Nguyễn Ngọc Sơn, 11T, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Hải Dương:** Phùng Minh Hoàng, Phạm Tuấn Minh, Đồng Xuân Bách, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hà Nam:** Nguyễn Chí Linh, 10A1, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam**

Định: Trần Trọng Huy, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Ninh:** Nguyễn Xuân Hồng, 11T, THPT chuyên Hạ Long; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Minh, 11A1, K37, THPT Chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Huy, 11T1, Trần Viết Cường, 11T1, Trần Lê Mạnh Hùng, 11T2, Thiếu Đăng Ba, 12T, THPT chuyên; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tiến, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** Nguyễn Đình Luận, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Phú Yên:** Phạm Đức Hưng, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Đoàn Ngọc Trí, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Đak Lak:** Lê Anh Kiệt, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/388.** Cho hai đa thức với hệ số thực (m, n là các số nguyên dương)

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

$$\text{và } Q(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m.$$

Biết rằng $Q(x)$ có m nghiệm thực và $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.

Chứng minh rằng nếu tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho $|b_k| > C_m^k \cdot 2009^k$ thì cũng tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $|a_i| > 2008$.

Lời giải. Giả sử m nghiệm thực của đa thức $Q(x)$ là $x_1, x_2, \dots, x_m$. Theo định lý Viète ta có

$$b_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

(tổng của C_m^k số hạng).

Theo giả thiết $|b_k| > C_m^k \cdot 2009^k$

$$\Rightarrow \left| \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \right| > C_m^k \cdot 2009^k$$

nên tồn tại $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ thỏa mãn $|x_j| > 2009$.

Vì $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ và $Q(x_j) = 0$ ta suy ra

$$P(x_j) = 0 \Rightarrow |x_j|^n = |a_1x_j^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_j + a_n| \leq M(|x_j|^{n-1} + \dots + |x_j| + 1),$$

trong đó $M = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$ (1)

$$= M \cdot \frac{|x_j|^n - 1}{|x_j| - 1} \leq M \cdot \frac{|x_j|^n}{|x_j| - 1}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{M}{|x_j| - 1} \Rightarrow 2008 < |x_j| - 1 \leq M.$$

Vậy tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mà $|a_i| > 2008$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Điểm mấu chốt của lời giải trên là BĐT (1), BDT này đã có trong nhiều bài toán về ước lượng nghiệm của một đa thức theo các hệ số của đa thức đó. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Ngọc Sơn, 11T, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Tô Đình Dương, 12A3, THPT số 1, Đức Phổ.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài L1/388.** Một thấu kính hội tụ L , quang tâm O , trục chính Ox , tiêu cực f tạo ảnh A_1B_1 của một vật sáng $A_1B_1 \perp Ox$ (A_1 nằm trên Ox). Dịch chuyển A_1 trên Ox và A_1B_1 song song với chính nó, tới vị trí A_2B_2 thì thu được ảnh $A_2'B_2'$ với

$$\overline{A_2'B_2'} = -2\overline{A_1B_1}.$$

Trên hình vẽ bên chỉ cho ba điểm B_1, O và B_2 .

1) Hãy vẽ trục chính Ox và các tiêu điểm của thấu kính L .

2) Cho $A_1A_2 = 12\text{cm}$ và $A_1A_2' = 54\text{cm}$, hãy tính tiêu cự f của L .

Lời giải. 1) Do tia tới song song với trục chính sẽ cho tia ló đi qua tiêu điểm chính F' nên ta nối B_1' với B_2' và trên đoạn thẳng đó

lấy điểm F' sao cho $B_1'F' = \frac{1}{2}B_2'F'$. Đường thẳng OF' chính là trục chính Ox . (Bạn đọc tự vẽ hình).

2) Dễ thấy $A_1'B_1'$ là ảnh thật còn $A_2'B_2'$ là ảnh ảo. Khoảng cách giữa hai ảnh:

$$d_1' - d_2' = \frac{-f^2(d_1 - d_2)}{(f - d_1)(f - d_2)} = 54(\text{cm}) \quad (1)$$

Độ phóng đại của hai ảnh:

$$k_1 = \frac{f}{f - d_1}; \quad k_2 = \frac{f}{f - d_2}.$$

Theo bài ra ta có $k_2 = -2k_1 \Rightarrow f - d_1 = -2(f - d_2)$ (2)

Từ (1) và (2) với chú ý $d_1 - d_2 = 12\text{cm}$ ta được

$$\frac{f^2}{(f - d_2)^2} = 9 \Rightarrow d_2 = \frac{2f}{3}.$$

Thay vào (2) suy ra $d_1 = \frac{5f}{3}$.

Do đó $d_1 - d_2 = f = 12\text{cm}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Yên Bái: Nguyễn Nam Minh, 10 Lí, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hưng Yên:** Tiểu Bá Vương, 11A1, THPT Phù Cừ; **Tường Thế Đức,** 10A1, THPT Nguyễn Siêu, Khoái Châu; **Thái Nguyên:** Vũ Quang Minh, 11 Lí, THPT chuyên; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, 10 Lí, THPT chuyên; **Thanh Hóa:** Đoàn Văn Hiệp, 10B1, THPT Triệu Sơn IV; **Hà Tĩnh:** Trần Đình Huân, 11A1, THPT Nghèn, Can Lộc; **Nguyễn Trọng Hoàng Hiệp,** 11T2, THPT chuyên; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Đông, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Nam:** Nguyễn Vĩnh Phúc, 10₂, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Bình Định:** Phạm Gia Huy, 10A1, THPT số 1 An Nhơn; **Vũng Tàu:** Phùng Thanh Huy, 12T7, THPT Vũng Tàu; **Bến Tre:** Liêu Khắc Vũ, 10 Lí, THPT chuyên.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/388.** Một thanh đồng chất, tiết diện đều, khối lượng m được treo nằm ngang bằng hai sợi dây nhẹ, dài, thẳng đứng ở hai đầu.

a) Lực căng một dây bằng bao nhiêu ngay sau khi dây kia bị cắt đứt?

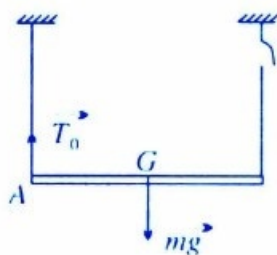
b) Lực căng dây treo còn lại bằng bao nhiêu khi thanh tạo với phương ngang một góc α ?

Lời giải

a) Ta coi khối lượng của dây treo không đáng kể.

Khi một dây vừa đứt, phương trình chuyển động của khối tâm G (h. 1) của thanh là

$$mg - T_0 = ma_0 \quad (1)$$



Hình 1

Phương trình chuyển động quay của thanh quanh điểm treo đầu thanh A là

$$\frac{1}{2} mgl = I \gamma_0 \quad (2)$$

$$\text{với } I = \frac{1}{3} ml^2, \quad a_0 = \frac{1}{2} \gamma_0 l.$$

Từ (1) và (2), ta suy ra $T_0 = \frac{1}{4} mg$.

b) Khi thanh tạo với phương ngang một góc α , phương trình chuyển động của khối tâm G (h. 2) của thanh là $mg - T = ma$ (3)

Phương trình chuyển động quay của thanh

quanh điểm A trong trường hợp này là

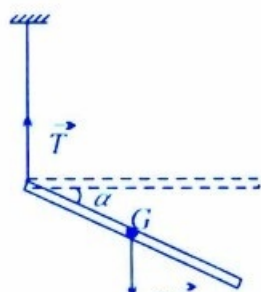
$$\frac{1}{2} mgl \cos \alpha = I \gamma \quad (4)$$

$$\text{với } I = \frac{1}{3} ml^2,$$

$$a = \frac{1}{2} \gamma l \cos \alpha.$$

Từ (3) và (4), ta suy ra:

$$T = mg \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \alpha \right). \quad \square$$



Hình 2

◀ **Nhận xét.** Phần b) của bài tập này không có bạn nào hiểu đúng, nên không làm được phần này.

NGUYỄN VĂN THUẬN

THÔNG BÁO

★ Tạp chí THPT đang phát hành cuốn **TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ TRỌN BỘ NĂM 2009**. Tất cả 12 số tạp chí THPT trong năm được đóng thành tập bìa cứng. Đây là cách để lưu giữ tạp chí tốt nhất, có hệ thống và tiện tra cứu đối với các thư viện, các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán. Số lượng sách có hạn, bạn muốn có trọn bộ THPT năm 2009 hãy liên hệ ngay với Tòa soạn. Giá bán lẻ 88.000 đồng.

★ Cuốn sách **TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ QUYỂN 5** sẽ ra mắt bạn đọc vào quý II năm 2010. Sách dành cho bạn trẻ yêu toán, đặc biệt cho các bạn chuẩn bị thi tốt nghiệp THPT và thi vào đại học. Trong sách trình bày các bài toán về nhị thức Newton, công thức tổ hợp, bất đẳng thức, phương pháp vector và phương pháp tọa độ.

THPT

Chuyện kể mới về Trâu và Hổ

Bính Tuất sắp qua,
Canh Dần gần đến.
Hổ gặp Trâu đề bàn công chuyện,
Và cùng nhau giải toán đố giao thừa...

"Tổ ra đề, cậu sẵn sàng chưa
Cậu và tớ có mấy câu cá thày".
Nghe Trâu hỏi, Hổ nhún mày mắt nháy.
Dễ dẽ thế kia chắc có mẹo gì đây.
Ngắm kĩ Trâu, Hổ trả lời ngay:
"Tổ và cậu có chín chân tất cả".
Nghe Hổ đáp Trâu cười nghiêng ngả.
Đập mõm vào bàn gẩy hể cá rưng.
Bắn cá đèn dầu lên lưng bạn.
Ngọn lửa bùng lên, trong cơn hốt hoảng.
Hổ cong đuôi chạy tuốt vào rừng.
Và Hổ có lòng vẩn từ đó...

PHAN CUNG ĐỨC

(GV Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/392. Prove that the equation $P(x) = 2^x$, where $P(x)$ is a polynomial of degree n , has less than $n + 1$ roots.

T10/392. Find all continuous functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the condition

$$f(2010x - f(y)) = f(2009x) - f(y) + x, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

T11/392. Let (a_n) be a sequence with

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ and } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1.$$

Find all pair of positive integers $a, b, a < b$ so that $a_n - 2na$ is a multiple of b for any $n \geq 1$.

T12/392. I and R are the incenter and the circumradius of a given triangle ABC . IA, IB, IC intersect the circumcircle at A_1, B_1, C_1 , respectively. Prove the inequality

$$2R + \frac{IA+IB+IC}{3} \leq IA_1+IB_1+IC_1 \leq \frac{5}{2}R + \frac{IA+IB+IC}{6}.$$

Translated by LE MINH HA

CÁCH TÍNH SAO... (Tiếp trang 15)

★ **Thí dụ 1.** Ngày 26/02/2010 là ngày Thứ mấy và ứng với Sao gì ?

Lời giải. Bước 1. Tìm S_{10} ở giao của cột (2000 - 2099) và dòng $n = 10$ trong Bảng 3 được $S_{10} = 1$.

Bước 2. Tính $S_{2/10}$. Tìm h_2 ở giao của cột $t = 2$ và dòng h_1 trong Bảng 2 được $h_2 = 3$, do đó $S_{2/10} = S_{10} + h_2 = 1 + 3 = 4$.

Bước 3. Tính m_{26}

$$m_{26} = S_{2/10} + 26 - 28.k = 4 + 26 - 28 = 2.$$

Tìm mã số $m_{26} = 2$ ở Bảng 1 ta thấy ngày 26/02/2010 là ngày thứ Sáu và ứng với Sao Càng.

★ **Thí dụ 2.** Ngày Sao Khuê trong tháng 2/2010 là ngày mấy dương lịch ?

Lời giải. Sao Khuê có $m_d = 15$. Theo kết quả trên có $15 = S_{2/10} + d - 28k$, hay $15 = 4 + d - 28k$, hay $d = 11 + 28k$. Vì $1 \leq d \leq 31$ nên $d = 11$. Vậy Sao Khuê ứng với ngày 11/2/2010.

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT NĂM 2009

MÔN TOÁN

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD – Bộ GD&ĐT)

Câu 1. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của hệ PT:

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \quad (*)$$

Nhận xét: Với điều kiện (*), ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Chứng minh. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \right) \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$ (do $x \geq 0, y \geq 0$).

Lại có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} - \frac{2}{1+2xy} \\ &= \frac{2(y-x)^2(2xy-1)}{(1+2xy)(1+2x^2)(1+2y^2)} \leq 0 \quad (\text{do } (*)) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \leq \frac{2}{1+2xy} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Từ (1) và (2), ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời xảy ra dấu bằng ở (1) và (2) $\Leftrightarrow x = y$.

Từ **Nhận xét** suy ra hệ PT đã cho tương đương với hệ PT

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{9-\sqrt{73}}{36} \\ x = y = \frac{9+\sqrt{73}}{36} \end{cases}$$

Vậy hệ PT đã cho có tất cả hai nghiệm là hai cặp số $(x; y)$ vừa nêu trên. $\square$

Chú ý. Có thể chứng minh rằng với $x, y \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$,

PT thứ nhất của hệ tương đương với PT $x = y$, bằng cách khảo sát hàm số f dưới đây trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} - \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$$

trong đó y được coi là một điểm cố định thuộc đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

Câu 2. Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} + x_{n-2}}}{2},$$

với mọi $n \geq 2$.

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$.

Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Lời giải. Từ định nghĩa dãy (x_n) dễ thấy $x_n > 0, \forall n \geq 1$ (1)

Viết lại hệ thức xác định dãy (x_n) dưới dạng:

$$2x_n - x_{n-1} = \sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}}, \quad \forall n \geq 2.$$

$$\text{Từ đó } x_{n-1} = x_n^2 - x_n x_{n-1}, \quad \forall n \geq 2.$$

$$\text{Dẫn tới } \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}^2} - \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \geq 2$$

(do $x_n \neq 0 \quad \forall n \geq 2$, theo (*))

Vì thế, với mọi $n \geq 2$, ta có

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{x_1^2} + \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{x_{i-1}^2} - \frac{1}{x_i} \right) \\ &= \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} = 6 - \frac{1}{x_n}. \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ là một dãy giảm, bị

chặn dưới bởi 0. Do đó, $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ là dãy hội tụ và

từ (2) ta được $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$. Suy ra (y_n) là dãy hội tụ và $\lim y_n = 6$. $\square$

Câu 3. Trong mặt phẳng, cho hai điểm cố định A, B ($A \neq B$). Xét một điểm C di động trong mặt phẳng sao cho $\widehat{ACB} = \alpha$, trong đó α là một góc cho trước ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC và CA tương ứng tại D, E và F . Các đường thẳng AI và BI lần lượt cắt đường thẳng EF tại M và N . Chứng minh rằng:

1) Đoạn thẳng MN có độ dài không đổi;

2) Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. 1) Xét tam giác AFM , ta có

$$\begin{aligned} \widehat{AMF} &= 180^\circ - (\widehat{MFA} + \widehat{FAM}) = 90^\circ - (\widehat{EFI} + \widehat{FAM}) \\ &= 90^\circ - (\widehat{ECI} + \widehat{FAM}) = 90^\circ - \left(\frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} \right) = \frac{\widehat{B}}{2} = \widehat{IBA}. \end{aligned}$$

Lại có $\widehat{NIM} = \widehat{AIB}$ (đối đỉnh).

Suy ra $\triangle IMN \sim \triangle IBA$. (*)

Vì thế, hạ $IH \perp MN$, ta được

$$\frac{MN}{BA} = \frac{IH}{ID} = \frac{IH}{IF} = \sin \widehat{EFI} = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Do đó $MN = BA \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$. (không đổi).

2) Dễ thấy các điểm F và D đối xứng với nhau qua đường thẳng AM . Kết hợp điều này với (*), ta được $\widehat{IMD} = \widehat{IBD}$. Do đó, tứ giác $IMBD$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BMA} = 90^\circ$, hay tam giác BMA vuông tại M . Vì thế, gọi P là trung điểm của AB , ta có $\widehat{BPM} = 2\widehat{BAM} = \widehat{BAC}$.

Do các điểm E và D đối xứng với nhau qua đường thẳng BN nên từ (*) ta được

$$\widehat{MND} = 2\widehat{INM} = 2\widehat{IAB} = \widehat{BAC}.$$

Vì thế, ta có $\widehat{BPM} = \widehat{MND}$. Suy ra, bốn điểm M, N, D, P cùng nằm trên một đường tròn. Chứng tỏ đường tròn ngoại tiếp $\triangle DMN$ luôn đi qua điểm cố định P – trung điểm của đoạn thẳng AB . $\square$

Câu 4. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: Với mỗi số nguyên dương n , $a^n + b^n + c^n$ là một số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q, r sao cho a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

Lời giải. Với mỗi số nguyên dương n , đặt $T_n = a^n + b^n + c^n$. Theo giả thiết $T_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 1$.

Ta sẽ chứng minh các số

$p = -(a + b + c)$, $q = ab + bc + ca$ và $r = -abc$ thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Thật vậy, theo định lý Viète đảo, các số a, b, c là ba nghiệm của PT $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

Hơn nữa, do $p = -T_1$ nên $p \in \mathbb{Z}$. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $q, r \in \mathbb{Z}$.

Ta có các biểu diễn dưới đây của T_n qua p, q, r :

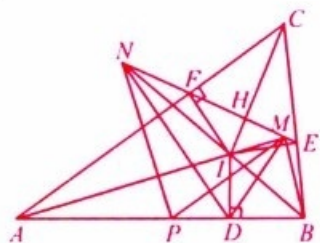
$$T_1 = -p;$$

$$T_2 = p^2 - 2q \quad (1)$$

$$T_3 = -p^3 + 3pq - 3r \quad (2)$$

$$T_{n+3} = -pT_{n+2} - qT_{n+1} - rT_n, \quad \forall n \geq 1 \quad (3)$$

Do $T_2, p \in \mathbb{Z}$ nên từ (1) suy ra $2q \in \mathbb{Z}$ (4)



Từ (2) suy ra $2pT_3 = -2p^4 + 6p^2q - 6pr$.

Từ đó, với lưu ý tới (4), suy ra $6pr \in \mathbb{Z}$ (5)

Ở (3), cho $n = 1$ ta được

$$T_4 = -pT_3 - qT_2 - rT_1 = p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2.$$

$$\text{Suy ra } 3T_4 = 3p^4 - 12p^2q + 12pr + 6q^2.$$

Từ đó, với lưu ý tới (4) và (5), suy ra $6q^2 \in \mathbb{Z}$.

Kết hợp với (4), ta được $q \in \mathbb{Z}$.

Vì thế, từ (2) suy ra $3r \in \mathbb{Z}$.

Do đó r phải có dạng $r = \frac{m}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$ (6)

Mặt khác, từ (3) ta có $rT_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \geq 1$. Kết hợp với (6), ta được $mT_n \equiv 0 \pmod{3}$, $\forall n \geq 1$. (7)

• Nếu tồn tại n sao cho $(T_n, 3) = 1$ thì từ (7) suy ra $m \equiv 0 \pmod{3}$. Vì thế $r \in \mathbb{Z}$.

• Xét trường hợp $T_n \equiv 0 \pmod{3}$, $\forall n \geq 1$. Khi đó do $p = T_1 \equiv 0 \pmod{3}$ và $T_3 \equiv 0 \pmod{3}$ nên từ (2) suy ra $r \in \mathbb{Z}$.

Bài toán được chứng minh. $\square$

Chú ý. Có thể chứng minh $6q^2 \in \mathbb{Z}$ bằng cách sử dụng (1), (2) và hệ thức

$$2q^2 = -T_4 + T_2^2 + 4rT_1.$$

Câu 5. Cho số nguyên dương n . Kí hiệu T là tập hợp gồm $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập con S của T có tính chất: Trong S không tồn tại các số a, b mà $|a - b| \in \{1; n\}$?

(Lưu ý: Tập rỗng được coi là tập con có tính chất nêu trên).

Lời giải. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, kí hiệu d_n là số cần tìm theo yêu cầu của đề bài.

Xét bảng ô vuông kích thước $2 \times n$. Điền vào các ô vuông con của bảng, lần lượt từ trên xuống dưới, từ trái qua phải, các số từ 1 đến $2n$. (h. 1).

1	2	...	$n-1$	n
$n+1$	$n+2$	...	$2n-1$	$2n$

Hình 1

Gọi ô thứ n của hàng 1 và ô thứ 1 của hàng 2 là hai ô đặc biệt.

Khi đó, hai số $a, b \in T$ thỏa mãn $|a - b| \in \{1; n\}$ khi và chỉ khi chúng nằm ở hai ô kề nhau hoặc ở hai ô đặc biệt.

Vì thế, d_n chính bằng số cách chọn một số ô của bảng (kể cả số ô được chọn bằng 0) mà ở mỗi cách không có hai ô kề nhau hoặc hai ô đặc biệt được chọn.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, kí hiệu

+ k_n là số cách chọn mà ở mỗi cách không có hai ô kề nhau được chọn; (*)

+ s_n là số cách chọn mà trong các ô được chọn ở mỗi cách có hai ô đặc biệt và không có hai ô kề nhau.

Ta có $d_n = k_n - s_n$.

• **Tính k_n**

Dễ thấy, tất cả các cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) bao gồm:

+ k_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách không có ô nào thuộc cột thứ 1 của bảng được chọn;

+ $2t_{n-1}$ cách chọn mà ở mỗi cách đều có ô thuộc cột thứ 1 của bảng được chọn;

trong đó t_n là số cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết đơn $2 \times n$. (h. 2).

		...		
x		...		

Hình 2

$$\text{Do đó } k_n = k_{n-1} + 2t_{n-1} \quad (1)$$

Lại có, tất cả các cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết đơn $2 \times n$ bao gồm:

+ k_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách ô đánh dấu "x" không được chọn;

+ t_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách ô đánh dấu "x" đều được chọn.

Vì thế $t_n = k_{n-1} + t_{n-1}$.

Từ đó và (1) suy ra

$$\begin{aligned} k_n &= k_{n-1} + 2(k_{n-2} + t_{n-2}) \\ &= 2k_{n-1} + k_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{aligned} \quad (2)$$

Bằng cách đếm trực tiếp, ta có $k_1 = 3$ và $k_2 = 7$ (3)

Hệ thức truy hồi (1) có PT đặc trưng

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

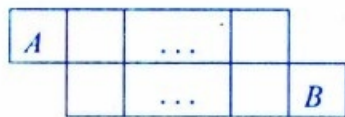
$$\text{Suy ra } k_n = C_1(1+\sqrt{2})^n + C_2(1-\sqrt{2})^n, \forall n \geq 1 \quad (4)$$

$$\text{Dựa vào (3), tìm được } C_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \text{ và } C_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } k_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2} \quad (5)$$

• Tính s_n

Để thấy, $s_1 = 0, s_2 = s_3 = 1$ và với $n \geq 4$ ta có $s_n = h_{n-2}$, trong đó h_n là số cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết kếp $2 \times n$. (h. 3).



Hình 3

Do $s_3 = 1$, đặt $h_1 = 1$. Bằng cách đếm trực tiếp, ta có $h_2 = 4$.

Xét $n \geq 3$.

Để thấy, tất cả các cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết kếp $2 \times n$ bao gồm:

- + k_{n-2} cách chọn mà ở mỗi cách cả 2 ô A và B đều không được chọn;
- + $2t_{n-2}$ cách chọn mà ở mỗi cách có đúng một trong 2 ô A, B được chọn;
- + h_{n-2} cách chọn mà ở mỗi cách cả 2 ô A và B cùng được chọn.

$$\text{Do đó } h_n = k_{n-2} + 2t_{n-2} + h_{n-2} \\ = k_{n-1} + h_{n-2}, \forall n \geq 3. \quad (6)$$

Từ (2) và (6) suy ra

$$2h_n - k_n = 2h_{n-2} - k_{n-2}, \forall n \geq 3.$$

$$\text{Đến tới } 2h_n - k_n = (-1)^n, \forall n \geq 1.$$

$$\text{Vì thế } s_n = h_{n-2} = \frac{k_{n-2} + (-1)^{n-2}}{2}, \forall n \geq 3.$$

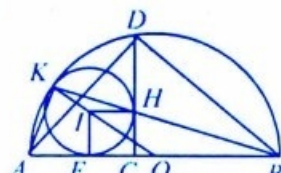
• Vậy $d_1 = 3, d_2 = 6$ và

$$d_n = \frac{2k_n - k_{n-2} + (-1)^{n-3}}{2}, \forall n \geq 3,$$

trong đó k_n được xác định theo (5). $\square$

VẬN DỤNG... (Tiếp trang 2)

★ Bài toán 5. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Điểm C thuộc bán kính OA. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn tại D. Đường tròn tâm I tiếp xúc với nửa đường tròn và tiếp xúc với các đoạn thẳng CA, CD. Gọi E là tiếp điểm của AC với nửa đường tròn (I). Chứng minh rằng $BD = BE$.



Hình 5

Lời giải. Vì AB là đường kính nên $\triangle ADB$ vuông tại D. Suy ra

$$BD^2 = BC \cdot BA \quad (1)$$

Gọi K, H lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với đường tròn (O) và CD (h. 5). Các tam giác cân $\triangle IKH$ và $\triangle OKB$ có $\widehat{KOB} = \widehat{KOH}$ (đồng vị) nên $\widehat{IKH} = \widehat{OKB}$. Suy ra K, H, B thẳng hàng. Theo Mệnh đề 3, ta có $BE^2 = BH \cdot BK$ (2)

Tứ giác $AKHC$ nội tiếp. Theo Mệnh đề 1 ta có $BH \cdot BK = BC \cdot BA$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $BD = BE$. $\square$

Cuối cùng là một số bài tập tự luyện.

1. Cho điểm C thuộc nửa đường tròn có đường kính AB, E thuộc nửa đường tròn sao cho HC là tia phân giác của góc $\widehat{DHE}$. Chứng minh rằng $HC^2 = HD \cdot HE$.

2. Từ điểm A ở ngoài đường tròn tâm O, vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC. Kẻ dây cung EF bất kì qua H. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc $\widehat{EAF}$.

3. Cho hình vuông ABCD có cạnh dài 2cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua A và B, biết rằng tiếp tuyến từ D đến đường tròn bằng 4cm.

4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài nhau tại D. Từ điểm A trên đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến AA' với đường tròn (O'). Tính độ dài AA' theo AD, R, r.

5. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM, phân giác AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB, AC theo thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng $BE = CF$.



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ **Mathematics and Youth Magazine**

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 392 (2.2010)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THÙY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 Thái Nhật Phương** – Hát mừng 45 năm
Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
 - 2 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower
Secondary School**
Hà Văn Nhân – Vận dụng hệ thức lượng
trong đường tròn để chứng minh hình học.
 - 4 Lời giải Đề thi vào lớp 10 chuyên toán
Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, năm
học 2009 – 2010.**
 - 5 Đề thi vào lớp 10 chuyên toán Trường
THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định,
năm học 2009 – 2010.**
 - 6 Chuẩn bị thi vào đại học – University
Entrance Preparation**
Phan Cung Đức – Xác định các yếu tố
của tam giác trong mặt phẳng tọa độ.
 - 8 Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching
Forum**
Trịnh Xuân Tình – Một số hướng xây
dựng phương trình vô tỉ.
 - 11 Phương pháp giải toán – Math Problem
Solving**
Trịnh Đào Chiến, Lê Văn Tám – Sử dụng
nguyên lí bù trừ của tập hợp để giải một
số dạng toán số học.
 - 14 Toán học & đời sống – Math and Life**
Nguyễn Văn Thang – Cách tính Sao và
Thứ trong ngày dương lịch.
 - 16 Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/392, ..., T12/392, L1/392, L2/392.
 - 18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous
Problems**
Giải các bài của số 388.
 - 29 Nguyễn Khắc Minh** – Lời giải các bài toán
thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12
THPT năm 2009.
-
- Bìa 3. Câu lạc bộ – Math Club.**

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG

Trĩ sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật : MINH THO

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH