



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
1 2010
Số 391

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 47

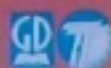
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Tri sư: (04) 35144272, (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

LỄ KỈ NIỆM

45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

1964 - 2009

ngày 17 tháng 12



Happy New Year
2010

LỄ KỶ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



TS. Phạm Thị Bạch Ngọc đọc báo cáo 45 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ



GS. TSKH Trần Văn Nhung và PGS.TS Phan Doãn Thoại tặng Bằng Khen, giải thưởng cho các em học sinh đoạt giải Cuộc thi giải Toán - Vật lý năm học 2008 - 2009 và Cuộc thi giải Toán kỷ niệm 45 năm Toán học tuổi trẻ.



Trao tặng Kỷ niệm chương Vì thế hệ trẻ của TƯ đoàn TNCS Hồ Chí Minh.

Từ trái sang: PGS.TS Phan Doãn Thoại, Ông Phan Kế Thái,

TS. Phạm Thị Bạch Ngọc, TS. Trần Đình Châu,

Bà Nguyễn Thị Hà, ThS. Nguyễn Anh Dũng,

ThS. Nguyễn Văn Thông, PGS.TSKH. Vũ Đình Hòa.



TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ - TÀI LIỆU THAM KHẢO QUÝ VỚI CÁC BẠN TRẺ YÊU TOÁN

(Trích bài phát biểu của Thứ trưởng Bộ GD&ĐT PGS. TS. Trần Quang Quý tại Lễ Kỷ niệm)

... Trong hơn bốn thập kỉ qua, từ các kiến thức toán học trong sách giáo khoa, các thông tin toán học, các hoạt động dạy và học toán trong nhà trường, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã khai thác sâu hơn nội dung với các bài toán hay cùng nhiều cách giải thú vị, thực sự trở thành tài liệu tham khảo quý giá bồi dưỡng học sinh giỏi toán, là nhịp cầu khơi dậy niềm đam mê toán học cho hàng triệu học sinh, sinh viên, góp phần vào thắng lợi của các Đoàn học sinh Việt Nam dự thi Olympic Toán học Quốc tế. Nhiều chuyên mục trên Tạp chí đã phát triển tư duy cho các em học sinh, góp phần vào việc cải tiến phương pháp dạy môn Toán cho các giáo viên theo hướng đào sâu suy nghĩ, gắn liền toán học với đời sống, giúp cho các bạn trẻ yêu toán thấy rằng Toán học thực sự là môn Khoa học quan trọng, là chìa khóa để mở cánh cửa của các ngành Khoa học Công nghệ hiện đại.

... Huân chương Lao động Hạng Nhất và nhiều phần thưởng cao quý của Đảng, Nhà nước, Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng thưởng cho Tạp chí là sự ghi nhận những thành quả xuất sắc của Tạp chí trong 45 năm qua. Những thành quả đó là nhờ sự đóng góp công sức sáng tạo, tâm huyết, đầy trách nhiệm của nhiều thế hệ các nhà toán học đầu ngành, của các nhà sư phạm, của tập thể Hội đồng Biên tập và các cộng tác viên của Tạp chí; sự quan tâm chỉ đạo của NXBGD Việt Nam, sự hỗ trợ của các địa phương, các tổ chức trong và ngoài nước.

Thay mặt lãnh đạo Bộ Giáo dục và Đào tạo, tôi nhiệt liệt biểu dương và ghi nhận những đóng góp của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ cho phong trào học toán trong các trường phổ thông trên toàn quốc.

Trong những năm tới, để góp phần nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện trong học sinh như mục

tiêu của cuộc vận động *Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực* và thực hiện mục tiêu bồi dưỡng nhân tài, tôi đề nghị lãnh đạo và các cán bộ Tạp chí thảo luận để làm tốt những việc sau:

1. Tập trung hàng đầu cho việc đào tạo, bồi dưỡng đội ngũ cán bộ giỏi về chuyên môn và quản lí, có chính sách thu hút, tập hợp những nhà toán học, các nhà sư phạm trong và ngoài nước, các em học sinh trên toàn quốc trở thành cộng tác viên thường xuyên và tích cực của Tạp chí.

2. Tiếp tục khai thác sâu hơn các vấn đề của toán học nhằm nâng cao kiến thức cho học sinh, đóng góp có hiệu quả vào việc bồi dưỡng học sinh giỏi toán; chuẩn bị các kĩ năng về toán học cho học sinh trong các kì thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng; đổi mới hình thức hấp dẫn hơn, thú vị hơn nhằm thu hút bạn đọc, làm cho Tạp chí trở thành diễn đàn giới thiệu và trao đổi về chương trình SGK mới và giới thiệu các thông tin mới về toán học trong nước và thế giới; về cải tiến phương pháp dạy và học toán theo hướng tư duy sáng tạo và tích cực.

3. Tiếp tục đa dạng hoá các ấn phẩm, nâng cao chất lượng nội dung để vừa có những bài viết hay, sâu sắc, vừa có những bài vui vẻ vừa học vừa chơi thích ứng với Toán học và Tuổi trẻ. Tạp chí nên duy trì hình thức gửi báo thưởng cho các em có cách giải bài toán hay, độc đáo đăng trên Tạp chí.

... Lãnh đạo Bộ Giáo dục và Đào tạo tin tưởng và hi vọng rằng, với truyền thống 45 năm qua, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ sẽ luôn giữ vững thương hiệu, có nhiều bài viết hay, bổ ích, chất lượng, ngày càng có nhiều thầy giáo và học sinh đến với Tạp chí. Lãnh đạo Bộ luôn quan tâm, chỉ đạo và tạo điều kiện để Tạp chí ngày càng phát triển, đóng góp tích cực cho sự nghiệp đào tạo nhân tài cho đất nước.

* Lễ Kỷ niệm *

45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Hội trường Lớn 22.12 NXBGD tại TP. Hà Nội sáng ngày 17.12.2009 được trang hoàng trang trọng chào đón hơn 200 đại biểu đến dự Lễ Kỷ niệm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (TH&TT) tròn 45 tuổi.

Đội Văn nghệ của các thầy cô giáo và các em học sinh trường THCS Giảng Võ đã đem đến cho buổi lễ một không khí tươi vui và sinh động với những tiết mục ca múa nhạc đặc sắc. Về dự ngày vui của tạp chí có PGS. TS. Trần Quang Quý, Thứ trưởng Bộ GD&ĐT, Các Vụ trưởng cùng các lãnh đạo các Vụ chức năng Văn phòng Bộ GD&ĐT, Bà Nguyễn Thị Hà, Bí thư TƯ Đoàn TNCS Hồ Chí Minh; GS.TSKH. Nguyễn Cảnh Toàn, Nguyên Thứ trưởng Bộ GD&ĐT, Nguyên Tổng Biên tập Tạp chí TH&TT; GS.TSKH. Trần Văn Nhung, Nguyên Thứ trưởng Bộ GD&ĐT; GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu, Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội; PGS. TS. Tống Đình Quý, Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam; PGS. TS. Trần Huy Hồ, Phó Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội; Lãnh đạo các Sở GD-ĐT, Các Công ty CP Sách và Thiết bị Giáo dục, Xí nghiệp In Bản đồ I Bộ Quốc phòng,... Đại diện các Báo - Đài Trung ương và Hà Nội. Về phía NXBGD Việt Nam có TS. Nguyễn Quý Thao, Phó Tổng Giám đốc, Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam; Ông Nguyễn Minh Khang, Phó Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam; Ông Huỳnh Bá Văn, Phó Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam kiêm Giám đốc NXBGD tại TP. Đà Nẵng; Ông Đinh Khắc Cao, Giám đốc NXBGD tại TP. Hà Nội; Ông Lê Trí Tú, Chánh Văn phòng NXBGD Việt Nam; Ông Hoàng Lê Bách, Trưởng Ban Tổ chức Nhân sự NXBGD Việt Nam; PGS. TS. Phan Doãn Thoại, Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam, Tổng Biên tập Tạp chí TH&TT; Các Trưởng, Phó phòng ban Cơ quan Văn phòng NXBGD Việt Nam; Lãnh đạo các Công ty, các đơn vị thành viên thuộc NXBGD Việt Nam; các tạp chí *Toán Tuổi thơ*, *Văn học và Tuổi trẻ*, *Thế Giới Mới*; các Ủy viên trong Ban Cố vấn, Hội đồng Biên tập; các cán bộ Tòa soạn; các cộng tác viên, trong đó có các tác giả lão thành; các thầy cô giáo và các em học sinh đoạt giải cao trong *Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2008 - 2009* và *Cuộc thi giải toán kỷ niệm 45 năm Tạp chí TH&TT*.

Sau phần tuyên bố lý do và giới thiệu đại biểu, TS. Phạm Thị Bạch Ngọc, Phó Tổng Biên tập Tạp chí TH&TT đã đọc Báo cáo 45 năm xây dựng và phát triển Tạp chí TH&TT. Báo cáo đã nêu quá trình phát triển của Tạp chí và những phương hướng đổi mới trong tương lai để Tạp chí có thể

đáp ứng được những đòi hỏi lớn lao của các độc giả yêu toán. Thay mặt lãnh đạo Bộ GD&ĐT, Thứ trưởng Trần Quang Quý, trao tặng tạp chí **Bằng Khen** của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT vì những thành tích xuất sắc trong năm 2008 và năm 2009, điển hình là góp phần xây dựng Phong trào thi đua *Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực*. Thứ trưởng Trần Quang Quý đã phát biểu khen ngợi Tạp chí TH&TT và chỉ ra những yêu cầu của công cuộc cải cách giáo dục hiện nay để Tạp chí định hướng thực hiện.

Ông Hoàng Lê Bách, Trưởng Ban Tổ chức Nhân sự NXBGD Việt Nam đọc Quyết định của TƯ Đoàn TNCS Hồ Chí Minh trao tặng Kỷ niệm chương *Vì thế hệ trẻ* cho 10 Ủy viên Hội đồng Biên tập, các cộng tác viên, cán bộ Tòa soạn có nhiều công lao đóng góp cho sự nghiệp giáo dục thế hệ trẻ. Thay mặt Ban Bí thư TƯ Đoàn, Bà Nguyễn Thị Hà đã trao Kỷ niệm chương *Vì thế hệ trẻ* cho các đồng chí: TS. Trần Đình Châu (Bộ GD&ĐT), Ông Phan Kế Thái (NXBGD Việt Nam), PGS. TS. Phan Doãn Thoại (Tạp chí TH&TT), GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa (Viện Toán học Việt Nam), PGS. TSKH. Vũ Đình Hòa (ĐHSP Hà Nội), TS. Phạm Thị Bạch Ngọc (Tạp chí TH&TT), TS. Trần Nam Dũng (ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh), ThS. Nguyễn Văn Thông (trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng), ThS. Nguyễn Anh Dũng (Hà Nội), Ông Nguyễn Phước (trường THCS Lê Hồng Phong, Thừa Thiên - Huế).

Thay mặt NXBGD Việt Nam, TS. Nguyễn Quý Thao, Phó Tổng Giám đốc, Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam đã trao tặng Giải thưởng Cuộc thi sáng tác *Biểu trưng Tạp chí TH&TT* cho họa sĩ Tạ Thanh Tùng, Công ty CP Mĩ thuật Truyền thông và phát biểu chào mừng, điểm lại quá trình phát triển, nêu lên các nhiệm vụ trước mắt và những định hướng hoạt động của Tạp chí. Tiếp đó ThS. Hồ Quang Vinh, Thư ký Tòa soạn Tạp chí TH&TT đọc Báo cáo tổng kết trao giải *Cuộc thi giải Toán và Vật lý trên Tạp chí TH&TT năm học 2008-2009* và *Cuộc thi giải toán kỷ niệm 45 năm Tạp chí TH&TT*. GS. TSKH. Trần Văn Nhung và PGS. TS. Phan Doãn Thoại đã trao **Bằng Chứng nhận và Giải thưởng** cho các em học sinh đoạt giải cao nhất ở hai cuộc thi. Mọi người đều xúc động khi nghe ý kiến phát biểu của ThS. Nguyễn Anh Dũng, một bạn đọc thủy chung, một cộng tác viên tích cực của Tạp chí.

Buổi lễ kết thúc trong không khí vui vẻ, đầm ấm của nhiều thế hệ đọc và viết bài, xây dựng tờ Tạp chí TH&TT theo tôn chỉ mục đích: Phát hiện và bồi dưỡng nhân tài cho đất nước Việt Nam.

QUANG PHÚC

45 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNH TRÌNH CÙNG BẠN TRẺ YÊU TOÁN

(Trích báo cáo của Phó Tổng biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ trong Lễ Kỷ niệm)

...Cách đây 45 năm, khi cuộc kháng chiến chống Mỹ cứu nước của nước ta bước vào giai đoạn mới, chiến tranh lan ra cả miền Bắc, theo sáng kiến của Ban Vận động thành lập Hội Toán học Việt Nam, Tờ báo Toán học và Tuổi trẻ (TH&TT) đã ra đời với mục đích và tôn chỉ là: Phổ biến kiến thức toán học phổ thông, khơi dậy lòng ham mê, sức sáng tạo của các bạn trẻ yêu toán trên toàn quốc, góp phần nâng cao dân trí, đào tạo tài năng cho đất nước. Từ khắp nơi trên miền Bắc, bạn đọc đã gửi thư về tòa soạn bày tỏ niềm hân hoan sau khi đọc số báo đầu tiên. Một phong trào học toán và giải toán đã được đẩy lên trong các Trường học, Xí nghiệp, Cơ quan, Công trường, Nông trường và Quân đội. Những năm đầu tiên, báo ra mỗi tháng một kì. Từ năm 1968 do ảnh hưởng của cuộc chiến tranh ác liệt ở miền Bắc, báo ra hai tháng một kì.

Cuộc kháng chiến chống Mỹ kết thúc thắng lợi, năm 1975 đất nước thống nhất đã tạo điều kiện cho Báo TH&TT mở rộng địa bàn hoạt động ra cả nước. Một phong trào đọc báo và giải bài trên Báo TH&TT lại sôi nổi trong các nhà trường của các tỉnh, thành phố mới được giải phóng. Số lượng phát hành tăng lên 15 nghìn bản mỗi kì. Báo TH&TT trở thành diễn đàn chung cho các thầy, cô giáo và các học sinh trong cả nước. Những năm đó khi các kênh thông tin còn hạn chế thì Báo TH&TT là một nguồn tư liệu quý giá bồi dưỡng học sinh giỏi toán. Những năm đầu sau hoà bình và thời kì bao cấp là những tháng ngày gian khổ, khó khăn của Báo TH&TT... Nhiều tác giả, nhiều cộng tác viên đã viết bài không có nhuận bút, chọn bài, chọn đề đăng không có thù lao. Thời kì khó khăn nhất của TH&TT là năm 1991 khi báo chỉ còn phát hành được 1500 tờ mỗi kì. Những lúc này, bạn đọc yêu Toán chính là niềm động viên lớn lao cho người làm báo.

Chính trong lúc Báo TH&TT gặp khó khăn ấy, tháng 1/1992 báo được chuyển từ Viện Khoa học Việt Nam về Bộ GD&ĐT giao cho NXBGD trực tiếp quản lí. Tờ báo khởi sắc phù hợp với thời đại đổi mới của đất nước. Báo không chỉ nhằm vào một đối tượng là học sinh chuyên Toán THPT mà được mở rộng ra đến các học sinh yêu toán, khá toán ở cả hai cấp THCS và THPT... Từ năm 1993, Báo chuyển thành Tạp chí và ra hàng tháng, bìa in 4 màu.

Tháng 1/1994, tạp chí tăng thành 20 trang và mở thêm các chuyên mục như: *Dành cho các bạn THCS, Ống kính cải cách dạy và học toán, Dành cho các bạn chuẩn bị*

thi vào Đại học. Giới thiệu các Kì thi Toán của các nước. Giới thiệu sách mới...

Trong mười lăm năm trở lại đây 1995 – 2009, Dưới sự quan tâm của Lãnh đạo NXBGD Việt Nam, Tạp chí đã ổn định về nhân sự: có thêm biên chế về Biên tập, Kỹ thuật, Kế toán, bổ sung Trưởng ban Biên tập và Thư kí Tòa soạn. Theo yêu cầu của độc giả, Tạp chí đã không ngừng đổi mới về nội dung, mở thêm một số chuyên mục như: *Diễn đàn Dạy và Học toán, Tiếng Anh qua các bài toán và cách giải, Câu lạc bộ, Tin học, Vật lí, Nhìn ra Thế giới, Toán học muôn màu, Nhiều cách giải cho một bài toán, Giới thiệu các điển hình giáo dục ở các địa phương...* chú trọng hơn đến đối tượng học sinh khá và yêu thích toán ở hai cấp THCS và THPT và tăng trang dần: từ 28 trang (tháng 1/1998), tăng thành 32 trang (1/1999), lên 36 trang (năm 2005). Số lượng Tạp chí tăng dần từ 15 nghìn bản lên trên 20 nghìn bản, có tháng đạt trên 30 nghìn bản.

Bên cạnh việc xuất bản Tạp chí, Tòa soạn còn giới thiệu các chuyên mục của Tạp chí và trao đổi rộng rãi với bạn đọc ở trong và ngoài nước trên trang WEB:

<http://www.nxbgd.vn/toanhocvatuoi>

Tòa soạn đã lần lượt biên soạn và xuất bản các cuốn sách thuộc bộ sách *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ* nhằm đáp ứng nhu cầu của các bạn chưa có trong tay các số báo TH&TT những năm trước,...

Năm 2007, nhân Kì thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 48 tổ chức tại Việt Nam, Tòa soạn đã kết hợp với Ban tổ chức IMO tổ chức Cuộc thi giải toán "Chào IMO 2007" và xuất bản hai ấn phẩm bằng tiếng Anh (gồm số tạp chí tháng 6/2007 và cuốn *The Vietnamese Mathematical Olympiad (1990 – 2006)*) làm quà tặng của NXBGD Việt Nam cho các đại biểu dự IMO... Năm 2008, hưởng ứng phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, Học sinh tích cực" do Phó Thủ tướng kiêm Bộ trưởng Bộ GD&ĐT GS. Nguyễn Thiện Nhân phát động, Tòa soạn đã phối hợp với Ban Chỉ đạo Phong trào Thi đua, đặc biệt là Dự án Phát triển Giáo dục THCS 2 biên tập và phát hành cuốn "Sổ tay Trường học thân thiện, học sinh tích cực 2008 – 2013" của Bộ Giáo dục và Đào tạo nhằm hướng dẫn các cơ sở giáo dục trong cả nước về phong trào thi đua...

LỜI CẢM ƠN!

Nhân kỉ niệm 45 năm TH&TT, Tạp chí đã nhận được sự giúp đỡ ủng hộ tài trợ, lãng hoa chúc mừng và quà tặng của:

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam; NXBGD tại TP. Hà Nội; NXBGD tại TP. Đà Nẵng; NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh; Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội; Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng; Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam; Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội; Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Đà Nẵng; Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Gia Định; Công ty CP Sách Giáo dục tại TP. Hà Nội; Công ty CP Sách Giáo dục tại TP. Đà Nẵng; Công ty CP Sách Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh; Công ty CP Sách Đại học - Dạy nghề; Công ty CP Sách Dân tộc; Công ty CP Thiết kế và Phát hành Sách Giáo dục; Công ty CP Bản đồ và Tranh ảnh Giáo dục; Công ty CP In Diên Hồng; Công ty CP In SGK tại TP. Hà Nội; Công ty CP Mĩ thuật và Truyền thông; Công ty CP Đầu tư Tài chính Giáo dục; Công ty CP Tài chính Thiên Hóa; Công ty CP Đầu tư và Phát triển Công nghệ Văn Lang; Tạp chí Thế Giới Mới; Tạp chí Văn học và Tuổi trẻ; Tạp chí Toán Tuổi thơ; Công ty CP Sách - Thiết bị Giáo dục Nam Định; Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu Giáo dục; Dự án Giáo dục Tiểu học cho trẻ em có hoàn cảnh khó khăn; Dự án Giáo dục THCS vùng khó khăn nhất; Dự án Phát triển Giáo dục THPT; Dự án Phát triển giáo viên THPT và TCCN; Dự án Phát triển Giáo dục THCS II; Hội Toán học Việt Nam; Viện Toán học Việt Nam; Hội Toán học Hà Nội; Công ty CP Sách - Thiết bị Giáo dục Hải Dương; Báo Sài Gòn Tiếp thị; Công ty Máy tính Điện tử Việt Nam; Xí nghiệp In Bản Đồ 1, Bộ Quốc phòng; Chi nhánh Công ty CP FPT Đà Nẵng; Các Sở GD-ĐT Hải Dương, Hải Phòng, Hưng Yên, Phú Thọ, Vĩnh Phúc; Trường THCS Giảng Võ, Hà Nội; Trường THPT Thuận Thành 1, Bắc Ninh; Bưu điện Giảng Võ, Hà Nội.

Trong dịp Kỷ niệm trọng thể này, tạp chí TH&TT đã được các Báo Đài Trung ương và Hà Nội đưa tin, viết bài giới thiệu.

Chân thành cảm ơn sự quan tâm giúp đỡ của các Quý Cơ quan, đoàn thể và các bạn đồng nghiệp.

THTT

... Gần nửa thế kỉ qua, Tạp chí TH&TT đã trở thành người bạn đồng hành của các học sinh giỏi toán, của các giáo viên say sưa với nghề.... Tạp chí đã hai lần nhận được thư khen của Cố Thủ tướng Chính phủ *Phạm Văn Đồng*, Bằng Khen của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT, Bằng Khen của Thủ tướng Chính phủ, Hai Huân chương Lao động Hạng Nhì (năm 1984, năm 1995) và Huân chương Lao động Hạng Nhất (năm 2004). Đây là những phần thưởng cao quý và vinh dự lớn lao dành cho tập thể Ban Cố vấn, Hội đồng Biên tập, các cộng tác viên - Những người đã đóng góp công sức xây dựng Tạp chí TH&TT. Hôm nay chúng ta cùng thắp nén hương lòng tưởng nhớ đến đóng góp lớn của hai Phó Tổng biên tập *Hoàng Chúng* và *Ngô Đạt Tứ* đã đi xa.

Nhân Lễ Kỷ niệm này, thay mặt Tạp chí TH&TT, xin gửi lời cảm ơn tới các lãnh đạo Đảng, Nhà nước, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bộ Văn hoá Thông tin và Truyền thông, Hội Toán học Việt Nam, Viện Toán học Việt Nam, các Vụ Viện, Dự án thuộc Bộ Giáo dục và Đào tạo, lãnh đạo các Sở GD-ĐT, các trường Đại học và Trung học phổ thông, các Công ty Sách - Thiết bị trường học... Chúng tôi xin gửi lời cảm ơn tới Ban lãnh đạo NXBGD Việt Nam, các đơn vị thành viên của NXBGD Việt Nam, các công ty trong và ngoài NXB trong nhiều năm qua đã giúp đỡ, tạo điều kiện cho Tạp chí trong các khâu định hướng tổ chức, tài chính, in ấn

và phát hành. Chúng tôi xin đặc biệt cảm ơn Hội đồng Biên tập, các cộng tác viên và toàn thể các thầy cô giáo, các em học sinh yêu toán đã gắn bó tạo nên sức sống, sức trẻ của Tạp chí.

... Để đảm bảo sự ổn định, phát triển và đáp ứng tốt hơn yêu cầu của độc giả, Tạp chí TH&TT dự kiến hoạt động trong năm 2010 như sau:

- 1) Ổn định nhân sự trong Tòa soạn, chú trọng đào tạo, bồi dưỡng đội ngũ cán bộ của đơn vị theo hướng gọn nhẹ và khả năng chuyên sâu cao.
- 2) Tiếp tục đổi mới nội dung và hình thức Tạp chí TH&TT sao cho phù hợp với số đông học sinh THCS và THPT
- 3) Duy trì tổ chức các cuộc thi giải Toán - Lí thường niên. Tổ chức cuộc thi Chào mừng 1000 năm Thăng Long- Hà Nội.
- 4) Tổ chức, biên tập và xuất bản các tập sách tuyển chọn theo chuyên đề TH&TT có chất lượng tốt về nội dung và khả năng phục vụ lâu dài.

Cuối cùng, chúng tôi mong mỗi được quý vị đại biểu, các cộng tác viên xa gần tiếp tục ủng hộ và cộng tác để Tạp chí TH&TT ngày càng phát triển phục vụ nhiều bạn đọc hơn nữa. Xin chúc các Quý vị đại biểu dồi dào sức khỏe, hạnh phúc và thành đạt. Xin trân trọng cảm ơn.



THỬ NHÌN BẰNG CON MẮT LƯỢNG GIÁC

CHU TUẤN

(GV THCS Nguyễn Thượng Hiền,
Ứng Hòa, Hà Nội)

Trong cuốn "Sáng tạo toán học, tập III", G. Polya khuyên rằng "Hãy tìm trong bài toán của bạn những gì có thể có ích khi giải các bài toán khác. Theo tình huống cụ thể đã cho, hãy cố gắng phát hiện phương pháp chung"

Xin bắt đầu từ bài toán hình học trong câu III (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, 2009)

✪ **Bài toán 1.** Cho hình thoi $ABCD$. Gọi H là giao điểm của AC và BD . Biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng a và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD bằng b .

a) Chứng minh rằng $\frac{AH}{BH} = \frac{a}{b}$.

b) Tính diện tích hình thoi $ABCD$ theo a, b .

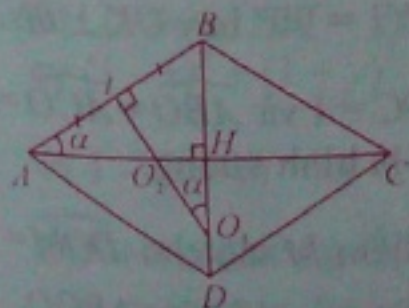
Đây là một bài toán hay và đẹp. Không quá khó nhưng lại có độ phân hoá rất cao. Nhiều bạn gặp khó khăn khi giải bằng phương pháp hình học thuần túy. Tuy nhiên, thử nhìn bài toán bằng con mắt lượng giác, ta sẽ thấy hiệu quả thật bất ngờ, ngắn gọn, đơn giản và rất tự nhiên. Trong bài luyện tập số 14 (trang 77, SGK Toán 9, Tập 1), bạn đọc đã được biết, với góc nhọn α tùy ý, ta có

$$a) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$b) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Ta sẽ sử dụng hai tính chất trên để giải bài toán 1.

Lời giải. Từ trung điểm I của cạnh AB , kẻ đường trung trực của đoạn AB cắt BD tại O_1 , cắt AC tại O_2 thì O_1, O_2 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ABD (h. 1). Suy ra $O_1B = a, O_2A = b$.



Hình 1

Đặt $AI = IB = x > 0$; $\widehat{BAC} = \alpha$ thì $\widehat{IO_1B} = \alpha$.

$$\text{Khi đó } \cos \alpha = \frac{x}{b} = \frac{AH}{2x} \Rightarrow AH = \frac{2x^2}{b} \quad (1)$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{a} = \frac{BH}{2x} \Rightarrow BH = \frac{2x^2}{a} \quad (2)$$

a) Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AH}{BH} = \frac{a}{b}$.

$$b) \text{ Ta có } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2AH \cdot BH = \frac{8x^4}{ab}.$$

Mặt khác,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = x^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Từ đó } S_{ABCD} = \frac{8a^3 b^3}{(a^2 + b^2)^2}. \quad \square$$

Bây giờ mời các bạn thử nhìn bằng con mắt lượng giác thông qua các bài toán sau.

✪ **Bài toán 2.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Một cát tuyến Ax qua A cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng DC tại I . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình).

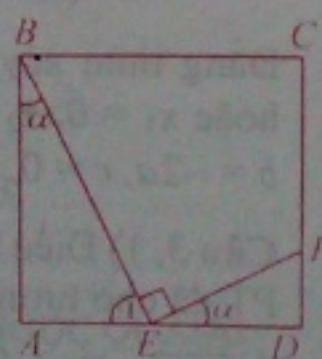
Gọi $\widehat{DIA} = \alpha \Rightarrow \widehat{MAB} = \alpha$. Ta có

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{AI^2} + \frac{a^2}{AM^2}.$$

Từ đó có điều phải chứng minh. $\square$

✪ **Bài toán 3.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là trung điểm của AD . Đường thẳng qua E vuông góc với BE cắt CD tại F . Tính tỉ số $\frac{EF}{EB}$.

(Xem tiếp trang 12)



Hình 2

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA

NĂM HỌC 2009 - 2010

(Đề thi đã đăng THPT số 390, tháng 12 năm 2009)

Câu 1. 1) Từ giả thiết suy ra

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \quad (x > 0). \text{ Ta có}$$

$$A = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) = 18, \text{ và}$$

$$B = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 123.$$

2) ĐK. $x > 0, y > 0$. Từ HPT đã cho suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} \quad (*)$$

• Nếu $x < y$ thì $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{y}}$ và $\sqrt{2 - \frac{1}{y}} > \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$, suy ra đẳng thức (*) không xảy ra.

• Tương tự nếu $x > y$ thì đẳng thức (*) cũng không xảy ra. Suy ra $x = y$, thay vào PT thứ nhất của hệ giải được $x = y = 1$.

Câu 2. Chia cả tử số và mẫu số của Q cho a^2 rồi sử dụng hệ thức Viète $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$,

$$\text{ta có } Q = \frac{2 + 3(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{2 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2}.$$

Mặt khác, vì $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2 \Rightarrow x_1^2 \leq x_1 x_2$ và $x_2^2 \leq 4$. Suy ra $(x_1 + x_2)^2 \leq 3x_1 x_2 + 4$. Do đó

$$Q \leq \frac{2 + 3(x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 + 4}{2 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2} = 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = 2$ hoặc $x_1 = 0, x_2 = 2$. Lúc đó $c = -b = 4a$ hoặc $b = -2a, c = 0$.

Câu 3. 1) Điều kiện $x \geq 2, y \geq -2009, z \geq 2010$. PT đã cho tương đương với

$$(\sqrt{x-2}-1)^2 + (\sqrt{y+2009}-1)^2 + (\sqrt{z-2010}-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=1, \sqrt{y+2009}=1, \sqrt{z-2010}=1$$

$$\Leftrightarrow x=3, y=-2008, z=2011.$$

2) Do p là số nguyên tố nên $4p^2 + 1 > 5$ và $6p^2 + 1 > 5$. Ta có

$$4p^2 + 1 = 5p^2 - (p-1)(p+1);$$

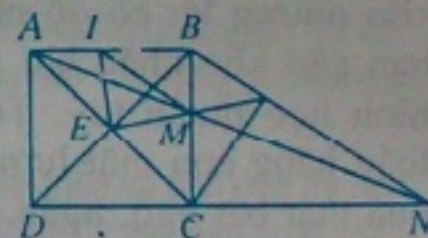
$$6p^2 + 1 = 25p^2 - (p-2)(p+2).$$

• Nếu p chia 5 dư 1 hoặc dư 4 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 5, suy ra $4p^2 + 1$ không là số nguyên tố.

• Nếu p chia 5 dư 2 hoặc dư 3 thì $(p-2)(p+2)$ chia hết cho 5, suy ra $6p^2 + 1$ không là số nguyên tố.

Vậy để $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ cùng là số nguyên tố thì $p : 5 \Rightarrow p = 5$. Thử lại ta có số nguyên tố cần tìm là $p = 5$.

Câu 4. 1) Trên cạnh AB lấy điểm I sao cho $IB = CM$ (h. 1). Ta có $\triangle IBE = \triangle MCE$ (c.g.c).



Hình 1

Suy ra $EI = EM$, $\widehat{MEC} = \widehat{BEI} \Rightarrow \triangle MEI$ vuông cân tại E . Vậy $\widehat{EMI} = \widehat{BCE} = 45^\circ$.

Mặt khác $\frac{IB}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AN} \Rightarrow IM \parallel BN$. Do

đó $\widehat{BCE} = \widehat{EMI} = \widehat{BKE}$, suy ra tứ giác $BECK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BEC} + \widehat{BKC} = 180^\circ$

Mà $\widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BKC} = 90^\circ$ hay $CK \perp BN$.

2) Vì $AO = \sqrt{2}, OB = OC = 1$ và $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ nên tứ giác $OBAC$ là hình vuông.

Trên cung nhỏ BC lấy điểm M sao cho $\widehat{DOM} = \widehat{DOB} \Rightarrow \widehat{MOE} = \widehat{COE}$. Suy ra $\triangle MOD = \triangle BOD$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

TRƯỜNG THPT CHUYÊN VINH PHÚC

NĂM HỌC 2009 - 2010

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (3 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \\ xy + \frac{1}{xy} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

b) Giải và biện luận phương trình $|x + 3| + p|x - 2| = 5$, trong đó p là tham số có giá trị thực.

Câu 2. (1.5 điểm)

Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$.

Câu 3. (1.5 điểm)

Cho $A = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$ và $B = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$.

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho $C = \frac{2A+B}{3}$ là một số nguyên.

Câu 4. (3 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi K, M lần lượt là trung điểm của BD, AC . Đường thẳng qua K và vuông góc với AD cắt đường thẳng qua M và vuông góc với BC tại Q . Chứng minh rằng

a) $KM \parallel AB$.

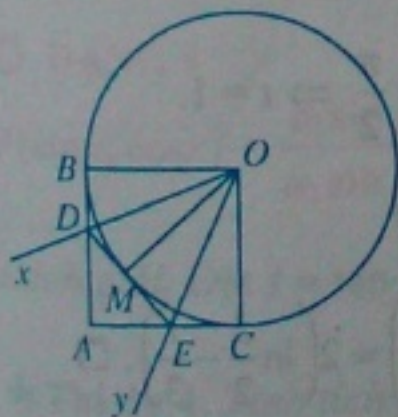
b) $QD = QC$.

Câu 5. (1 điểm)

Trong mặt phẳng cho 2009 điểm, sao cho ba điểm bất kì trong chúng là ba đỉnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1. Chứng minh rằng tất cả những điểm đã cho nằm trong một tam giác có diện tích không lớn hơn 4.

TẠ MINH HIẾU

(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc) giới thiệu



Hình 2

$\Rightarrow \widehat{DME} = 90^\circ$. Lại vì $\triangle MOE = \triangle COE \Rightarrow \widehat{EMO} = 90^\circ$, suy ra D, M, E thẳng hàng, do đó DE là tiếp tuyến của (O) .

Vì DE là tiếp tuyến suy ra $DM = DB$,

$EM = EC$. Ta có $DE < AE + AD \Rightarrow 2DE < AD + AE + BD + CE = 2$ suy ra $DE < 1$.

Đặt $DM = x$, $EM = y$ ta có $AD^2 + AE^2 = DE^2 \Leftrightarrow (1-x)^2 + (1-y)^2 = (x+y)^2$

$\Leftrightarrow 1 - (x+y) = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ suy ra

$DE^2 + 4.DE - 4 \geq 0 \Leftrightarrow DE \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Vậy $2\sqrt{2} - 2 \leq DE < 1$.

Câu 5. Sử dụng giả thiết $ad - bc = 1$ ta có $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bc)^2 + (ad - bc)^2 = (ac + bc)^2 + 1$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có $P \geq 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + ac + bd = 2\sqrt{1 + (ac + bd)^2} + ac + bd$.

Rõ ràng $P > 0$. Đặt $x = ac + bd$ ta có

$$P \geq 2\sqrt{1+x^2} + x$$

$$\Leftrightarrow P^2 \geq 4(1+x^2) + 4x\sqrt{1+x^2} + x^2 = (\sqrt{1+x^2} + 2x)^2 + 3 \geq 3.$$

Vậy $P \geq \sqrt{3}$.

PHẠM NGỌC QUANG

(Sở GD-ĐT Thanh Hóa) giới thiệu



ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

ĐẶNG THANH HẢI - TRẦN TUYẾT THANH
(GV Học viện PKKQ, Sơn Tây, Hà Nội)

Trong bài viết này, chúng tôi xin được trao đổi một số dạng cơ bản của tích phân hàm lượng giác và các phương pháp đổi biến tương ứng thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng.

Tích phân hàm lượng giác tổng quát có dạng:

$$I = \int_a^b F(\sin x, \cos x) dx.$$

Tùy thuộc vào tính chất và dạng đặc biệt của hàm $F(\sin x, \cos x)$ hoặc mối quan hệ giữa hàm $F(\sin x, \cos x)$ với các cận lấy tích phân mà chúng ta sử dụng phép đổi biến tương ứng.

★ **DẠNG 1.** $F(\sin x, \cos x) = F(-\sin x, -\cos x)$
(F là hàm số chẵn theo $\sin x$ và $\cos x$)

Cách giải. Đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$.

★ **Thí dụ 1.** Tính tích phân

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx.$$

Lời giải. Rõ ràng $F = \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x$ là hàm số chẵn theo $\sin x$ và $\cos x$.

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{\sin^2 x}}}{\sin^2 x} \cot x dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{1 - (1 + \cot^2 x)}}{\sin^2 x} \cot x dx = - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\cot^2 x}}{\sin^2 x} \cot x dx.$$

$$\text{Đặt } t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx.$$

$$\text{Khi } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \sqrt{3}; x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Từ đó } I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} t^{\frac{2}{3}} dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} t^{\frac{5}{3}} dt = \frac{1}{8} \left(9\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \square$$

★ **DẠNG 2.** $F(\sin x, \cos x) = -F(\sin x, -\cos x)$
(F là hàm số lẻ theo $\cos x$)

Cách giải. Đặt $t = \sin x$.

$$\star \text{Thí dụ 2. Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx.$$

$$\text{Lời giải. Ta thấy } F = \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{2 \sin x \cos x}{(2 + \sin x)^2}$$

là hàm số lẻ theo $\cos x$. Đặt $t = \sin x$
 $\Rightarrow dt = \cos x dx$.

$$\text{Khi } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Từ đó } I = 2 \int_0^1 \frac{t}{(2+t)^2} dt = 2 \left(\int_0^1 \frac{dt}{2+t} - \int_0^1 \frac{dt}{(2+t)^2} \right) = 2 \left(\ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right). \square$$

★ **DẠNG 3.** $F(\sin x, \cos x) = -F(-\sin x, \cos x)$
(F là hàm số lẻ theo $\sin x$)

Cách giải. Đặt $t = \cos x$.

★ **Thí dụ 3.** Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx.$$

Lời giải. Rõ ràng $F = \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x}$ là hàm số

lẻ theo $\sin x$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Từ đó

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x - 1}{2\cos^2 x - 1} (-\sin x) dx$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x - 1} (-\sin x) dx = - \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2}{2t^2 - 1} dt$$

$$= - \frac{1}{2} \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2t^2 - 1 + 1}{2t^2 - 1} dt = - \frac{1}{2} \left(\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dt + \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{2t^2 - 1} \right)$$

$$= - \frac{1}{2} \left(\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dt - \frac{1}{2} \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{2t-1} - (\sqrt{2t+1})}{(\sqrt{2t-1})(\sqrt{2t+1})} dt \right)$$

$$= - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2} \left(\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2t+1}} - \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2t-1}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1 \right) - \ln(\sqrt{2} + 1) \right)$$

$$- \ln \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \right) + \ln(\sqrt{2} - 1) \Big). \square$$

★ DẠNG 4

$$F(\sin x, \cos x) = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$$

Cách giải. Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$.

★ **Thí dụ 4.** Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}.$$

Lời giải. Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ thì

$$\begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Từ đó

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\frac{8t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int_0^1 \frac{d(t+2)}{(t+2)^2} = \frac{1}{6}. \square$$

★ MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

★ **Thí dụ 5.** Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx \quad (n \text{ là số nguyên dương})$$

Lời giải. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Từ đó } I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right)}{\cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right)} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx.$$

$$\text{Do đó } 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $I = \frac{\pi}{4}. \square$

• **Lời bình.** Do cận lấy tích phân có dạng $a = 0$; $b = \frac{\pi}{2}$, nên các hàm $\sin x$ và $\cos x$ có mối liên hệ của các góc phụ nhau. Trong trường hợp này ta thường dùng phép đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x$.

★ **Thí dụ 6.** Tính tích phân $I = \int_0^{3\pi} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx$.
(Xem tiếp trang 12)



Phương pháp ĐỒN BIẾN "THỬA - TRỪ"

(Tiếp theo kì trước)

VÕ QUỐC BÁ CẦN
(SV ĐH Y Dược Cần Thơ)

★ **Thí dụ 3.** Cho các số dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{ab}{a^2 + b^2 + 3c^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 + 3a^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2 + 3b^2} \leq \frac{3}{5}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Trước hết, ta chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{bc}{b^2 + c^2 + 3a^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2 + 3b^2} \\ & \leq \frac{c(a+b) + \frac{18}{25}(a-b)^2}{2a^2 + 2b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Thật vậy, BĐT này tương đương với

$$\begin{aligned} & c \left(\frac{b(2a^2 + 2b^2 + c^2)}{b^2 + c^2 + 3a^2} + \frac{a(2a^2 + 2b^2 + c^2)}{c^2 + a^2 + 3b^2} - a - b \right) \\ & \leq \frac{18}{25}(a-b)^2. \text{ Tức là} \end{aligned}$$

$$c = \left(\frac{a(a^2 - b^2)}{c^2 + a^2 + 3b^2} + \frac{b(b^2 - a^2)}{b^2 + c^2 + 3a^2} \right) \leq \frac{18}{25}(a-b)^2,$$

$$\frac{c(a-b)^2(a+b)(3a^2 + 3b^2 + c^2 + 2ab)}{(3a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 3b^2 + c^2)} \leq \frac{18}{25}(a-b)^2,$$

hay $9c(a+b) \cdot 2(3a^2 + 3b^2 + c^2 + 2ab)$

$$\leq \frac{18^2}{25}(3a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 3b^2 + c^2).$$

Từ BĐT AM-GM và Cauchy - Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} & 9c(a+b) \cdot 2(3a^2 + 3b^2 + c^2 + 2ab) \\ & \leq \left(\frac{9c(a+b) + 2(3a^2 + 3b^2 + c^2 + 2ab)}{2} \right)^2, \text{ và} \end{aligned}$$

$$(3a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 3b^2 + c^2) \geq (a^2 + b^2 + 2ab + c^2)^2.$$

Lại có

$$\begin{aligned} & 36(a^2 + b^2 + 2ab + c^2) \\ & - 5(9c(a+b) + 2(3a^2 + 3b^2 + c^2 + 2ab)) = \\ & = 6a^2 + 6b^2 + 26c^2 - 45c(a+b) + 52ab \\ & = 26(c-a)(c-b) + 6a^2 + 6b^2 - 19c(a+b) + 26ab \\ & \geq 6a^2 + 6b^2 - 19c(a+b) + 26ab \\ & \geq 38ab - 19c(a+b) \geq 0, \text{ nên BĐT trên đúng.} \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{a^2 + b^2 + 3c^2} + \frac{c(a+b) + \frac{18}{25}(a-b)^2}{2a^2 + 2b^2 + c^2} \\ & \leq \frac{a^2 + b^2}{2(a^2 + b^2 + 3c^2)} + \frac{c\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{2a^2 + 2b^2 + c^2}, \text{ hay} \\ & \frac{(a-b)^2}{2(a^2 + b^2 + 3c^2)} + \frac{c(a-b)^2}{(2a^2 + 2b^2 + c^2)(\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b)} \\ & \geq \frac{18(a-b)^2}{25(2a^2 + 2b^2 + c^2)}. \end{aligned}$$

Do $\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b \leq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)}$,

nên ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(2t^2 + 3c^2)} + \frac{c}{4t(4t^2 + c^2)} \geq \frac{18}{25(4t^2 + c^2)} \\ & \left(t = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right), \text{ hay } \frac{2(4t^2 + c^2)}{2t^2 + 3c^2} + \frac{c}{t} \geq \frac{72}{25}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\frac{2(4t^2 + c^2)}{2t^2 + 3c^2} + \frac{c}{t} - 3 = \frac{(t-c)(2t^2 + 4tc - 3c^2)}{t(2t^2 + 3c^2)} \geq 0,$$

mà $\frac{73}{25} < 3$ nên BĐT trên hiển nhiên đúng.

Cuối cùng, ta đi chứng minh BĐT

$$\frac{t^2}{2t^2 + 3c^2} + \frac{2tc}{4t^2 + c^2} \leq \frac{3}{5}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} & \frac{t^2}{2t^2 + 3c^2} + \frac{2tc}{4t^2 + c^2} - \frac{3}{5} \\ &= -\frac{(t-c)^2(2t-3c)^2}{5(2t^2 + 3c^2)(4t^2 + c^2)} \leq 0, \end{aligned}$$

nên BĐT trên hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}c$ cùng các hoán vị. $\square$

★ **Thí dụ 4.** Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4a^2 - 27}{b^2 + c^2} + \frac{4b^2 - 27}{c^2 + a^2} + \frac{4c^2 - 27}{a^2 + b^2} + \frac{69}{2} \geq 0.$$

Lời giải. Với chú ý rằng

$$\frac{4a^2 - 27}{b^2 + c^2} + 4 = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2) - 27}{b^2 + c^2},$$

viết lại BĐT cần chứng minh dưới dạng

$$(4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 27) \times \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \right) + \frac{45}{2} \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$.

Áp dụng BĐT *Cauchy - Schwarz*, ta có

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 27 \geq 4a^2 + 2(b+c)^2 - 27,$$

nên BĐT trên được suy ra từ

$$(4a^2 + 2(b+c)^2 - 27) \times \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \right) + \frac{45}{2} \geq 0.$$

Nếu $4a^2 + 2(b+c)^2 - 27 \geq 0$ thì BĐT này hiển nhiên đúng. Trong trường hợp ngược lại, áp dụng BĐT mà ta đã thiết lập trong Thí dụ 2 ở trong số 390 (12/2009), ta có

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + k} + \frac{1}{b^2 + c^2 + k} + \frac{1}{c^2 + a^2 + k}$$

$$\leq \frac{2}{a^2 + \frac{(b+c)^2}{4} + k} + \frac{1}{\frac{(b+c)^2}{2} + k}, \text{ với mọi } k \geq 0.$$

Từ đó, đặt $t = \frac{b+c}{2}$ và cho $k = 0$, thu được

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \leq \frac{2}{a^2 + t^2} + \frac{1}{2t^2}.$$

Do $4a^2 + 8t^2 - 27 \leq 0$ nên

$$\begin{aligned} & (4a^2 + 8t^2 - 27) \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \right) \\ & \geq (4a^2 + 8t^2 - 27) \left(\frac{2}{a^2 + t^2} + \frac{1}{2t^2} \right). \end{aligned}$$

Vì thế, chỉ cần chứng minh

$$(4a^2 + 8t^2 - 3(a+2t)^2) \left(\frac{2}{a^2 + t^2} + \frac{1}{2t^2} \right) + \frac{45}{2} \geq 0.$$

Ta thấy BĐT này tương đương với

$$\frac{(a-t)^2(a-5t)^2}{2t^2(a^2 + t^2)} \geq 0$$

là một BĐT hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = \frac{15}{7}$;

$b = c = \frac{3}{7}$ và các hoán vị tương ứng. $\square$

◀ **Nhận xét 2.** Tập hợp tất cả các giá trị của k để bất đẳng thức

$$\frac{a^2 + k}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + k}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + k}{a^2 + b^2} \geq 3(k+1)$$

đúng với mọi a, b, c dương sao cho $a + b + c = 3$

$$\text{là } -\frac{27}{4} \leq k \leq \frac{9}{7}.$$

Mời bạn đọc cùng chứng minh kết quả này.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$.

a) Chứng minh rằng

$$\text{i) } \sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab} \leq \frac{3}{2}.$$

(Xem tiếp trang 27)

THỬ NHÌN... (Tiếp trang 5)

Lời giải. Đặt $\widehat{ABE} = \alpha$ (h. 2) $\Rightarrow \widehat{FED} = \alpha$ (cùng phụ với $\widehat{E_1}$). Lúc đó $\cos \alpha = \frac{a}{BE} = \frac{2a}{EF} \Rightarrow \frac{EF}{BE} = \frac{1}{2}$. $\square$

❖ **Bài toán 4.** Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Chứng minh rằng

a) $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$.

b) $AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{2}$.

Lời giải. (h.3). a) Đặt $\widehat{HBD} = \alpha$, $\widehat{HCD} = \beta$.

Ta có $\cos \alpha = \frac{BD}{BH} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow BH \cdot BE = BC \cdot BD$ (1)

$\cos \beta = \frac{CD}{CH} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow CH \cdot CF = BC \cdot CD$ (2)

Cộng theo vế (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned} BH \cdot BE + CH \cdot CF &= BC(BD + CD) \\ &= BC^2 \end{aligned} \quad (3)$$

b) Tương tự câu a) ta có các đẳng thức

$$CH \cdot CF + AH \cdot AD = CA^2 \quad (4)$$

$$AH \cdot AD + BH \cdot BE = AB^2 \quad (5)$$

Cộng theo vế các đẳng thức (3), (4) và (5) ta có điều phải chứng minh. $\square$

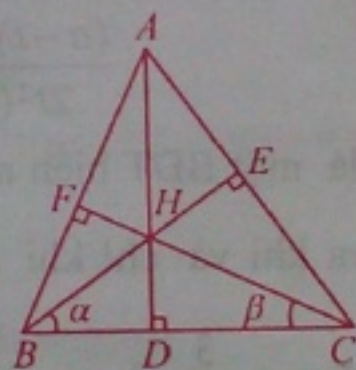
Cuối cùng, mời bạn đọc thử xem xét các bài tập dưới đây bằng con mắt lượng giác.

1. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm P thuộc cạnh CD . Kẻ BE , DF cùng vuông góc với AP . Chứng minh rằng $AE = DF$.

2. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{DAB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$) có $AC \perp BD$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2}.$$

3. Gọi O là tâm của tam giác nhọn ABC . Trên các đoạn thẳng OB và OC lần lượt lấy các điểm B_1 , C_1 sao cho $\widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1B} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AB_1 = AC_1$.



Hình 3

ĐỔI BIẾN... (Tiếp trang 9)

Lời giải. Ta có

$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{3\pi} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx \quad (1)$$

Xét tích phân $J = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{3\pi} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx$.

Đặt $t = 3\pi - x \Rightarrow dx = -dt$.

Khi $x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}$; $x = 3\pi \Rightarrow t = 0$.

Từ đó

$$\begin{aligned} J &= - \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 \sin(3\pi - t) \cdot \sin(6\pi - 2t) \cdot \sin(9\pi - 3t) dt \\ &= - \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin t \cdot \sin 2t \cdot \sin 3t dt = - \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta được $I = 0$. $\square$

• **Lời bình.** Có thể sử dụng kết quả sau để suy ra kết quả thí dụ 6: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; 2a]$. Khi đó

$$\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(2a-x)) dx.$$

Hướng dẫn. $\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{2a} f(x) dx$.

Đổi biến số $t = 2a - x$ trong tích phân thứ hai ở vế phải đẳng thức trên được

$$\int_a^{2a} f(x) dx = \int_a^0 f(2a-t) (-dt) = \int_0^a f(2a-x) dx,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Để kết thúc bài viết, mời các bạn hãy thử tính các tích phân sau:

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx$; 2. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7\cos x + 6}{4\sin x + 3\cos x + 5} dx$;

3. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}}$; 4. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$;

5. $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{4-2\cos 2x}} dx$; 6. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}$.



Trò chơi Tháp Hà Nội

LỊCH SỬ VÀ BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

TẠ DUY PHƯƠNG
(Viện Toán học Việt Nam)

Bài toán Tháp Hà Nội hay Trò chơi Tháp Hà Nội đã được tác giả Phạm Trà Ân giới thiệu với bạn đọc trên báo THPT số 280, tháng 10/2000. Nhân năm Kỉ niệm 1000 năm Thăng Long-Hà Nội, xin cùng bạn đọc trở lại với Trò chơi này.

1. Lịch sử. Trò chơi Tháp Hà Nội được *Edouard Lucas* (1842–1891), giáo sư toán học cao cấp tại Lycée Saint-Louis, phổ biến tại Paris năm 1883. Tại sao ông gọi nó là trò chơi Tháp Hà Nội, mặc dù ông chưa bao giờ đến Hà Nội? Đến nay vẫn chưa có câu trả lời thỏa đáng. Có lẽ Pháp chiếm Hà Nội là vấn đề thời sự ở Paris lúc ấy đã gợi ý *E. Lucas* đặt tên cho trò chơi của mình là Tháp Hà Nội?



Trò chơi Tháp Hà nội với 8 đĩa trong cuốn sách của *E. Lucas* xuất bản 1895



Có thể Tháp Hà Nội chính là Cột cờ Hà Nội. Đáy của cột cờ Hà Nội gồm ba khối vuông xếp chồng lên nhau, trong khi đó trò chơi Tháp Hà Nội đơn giản nhất cũng gồm ba đĩa tròn (kích thước nhỏ dần) xếp chồng nhau trên một cột.

Ảnh bên minh họa bìa hộp đựng trò chơi Tháp Hà Nội sản xuất lần đầu tiên tại Paris năm 1883. Đây là tư liệu quý về lịch sử trò chơi. Mỗi hộp đựng trò chơi có kèm theo một tờ giới thiệu và một tờ hướng dẫn cách chơi.



Bìa hộp đựng trò chơi Tháp Hà Nội

Tờ giới thiệu trò chơi được lược dịch như sau :

THÁP HÀ NỘI

Trò chơi trí tuệ của *Annam*. Trò chơi được đem về từ Đông Kinh (Bắc Kỳ) bởi Giáo sư N. Claus, Trường Cao đẳng Li-Sou-Stian (*Claus* là tên giả của Giáo sư *Lucas* (đảo từ); *Li-Sou-Stian* là đảo từ của trường Trung học Saint-Louis, nơi *E. Lucas* dạy học).

Tháp Hà Nội gồm có các đĩa, nhỏ dần, có số lượng khác nhau, làm bằng gỗ, có lỗ ở giữa. Ở Nhật Bản, Trung Quốc, và ở Đông Kinh, chúng được làm bằng sứ. Trò chơi có mục đích là dỡ bỏ các đĩa, và đặt vào cột bên cạnh, theo các quy tắc nhất định.

Đây là trò chơi vui, bổ ích, dễ học và dễ chơi. Nó được tạo ra để mang đến kiến thức khoa học, giống mọi trò chơi kì thú và mới lạ của giáo sư N. Claus.

Chúng tôi trao giải thưởng 1000 franc, 100 nghìn franc, một triệu franc, và nhiều hơn, cho ai hoàn thành, bằng việc dùng tay di chuyển tháp Hà Nội với 64 đĩa, theo quy tắc của trò chơi. Chúng tôi nói ngay là cần số lần di chuyển là 18 446 744 073 709 551 615, tức là nếu tính tốc độ di chuyển mỗi lần là 1 giây thì cần nhiều hơn 5 tỉ thế kỉ để hoàn thành!

Tờ hướng dẫn trò chơi được lược dịch như sau:

LUẬT CHƠI VÀ CÁCH CHƠI TRÒ THÁP HÀ NỘI

Đế đặt nằm ngang, các cột thẳng đứng. Các đĩa đặt theo thứ tự từ lớn đến nhỏ, từ thấp lên cao, tạo nên một Tòa tháp. Trò chơi đòi hỏi di chuyển các đĩa, bằng cách đặt chúng vào cột bên cạnh, mỗi lần chỉ di chuyển một đĩa theo quy tắc sau:

I. Sau mỗi di chuyển, các đĩa đều nằm trên một trong các cột, theo thứ tự từ lớn đến nhỏ, từ thấp đến cao.

II. Đĩa trên cùng của một trong ba cột được chuyển sang đặt vào cột rỗng hoặc được đặt lên một cột đĩa khác, nếu đĩa này nhỏ hơn các đĩa của cột đó.

Trò chơi có thể dễ dàng tự khám phá, bằng việc giải quyết dần từ 3, 4, và 5 đĩa.

Trò chơi luôn giải được và đòi hỏi thời gian lâu khoảng gấp đôi mỗi khi cho thêm một đĩa vào Tòa tháp. Bất kì ai giải được cho 8 đĩa, cũng sẽ biết cách giải cho 9 đĩa. Khi thêm 1 đĩa vào trò chơi, tổng số di chuyển tăng gấp đôi, cộng với một, so với trước.

Số đĩa	Cần chuyển	Số đĩa	Cần chuyển
2 đĩa	3 lần	6 đĩa	63 lần
3 đĩa	7 lần	7 đĩa	127 lần
4 đĩa	15 lần	8 đĩa	255 lần
5 đĩa	31 lần	9 đĩa	511 lần

Với tốc độ một di chuyển trong 1 giây, cần hơn bốn phút để chuyển 8 đĩa. Xem thêm chi tiết trong chương nói về trò chơi **Baguenaudier** (trò chơi tháo nhẫn) ở cuốn sách **Toán học Giải trí** của E. Lucas, Nhà xuất bản Gauthier-Villars, Paris, 1883.

2. Bài toán Tháp Hà Nội và thuật giải đệ quy

E. Lucas đã mô tả quy tắc của trò chơi Tháp Hà Nội trong tờ hướng dẫn thứ hai. Dưới đây trình bày thuật giải đệ quy cho bài toán Tháp Hà Nội cho n đĩa với 3 cọc.

Bài toán 1. Có n đĩa kích thước nhỏ dần xếp chồng lên nhau ở cọc A (đĩa to ở dưới)

và hai cọc B và C. Hãy chuyển các đĩa này sang cọc B tuân theo hai quy tắc sau đây:

1) Mỗi lần chỉ được chuyển một đĩa từ cọc này sang cọc khác và được dùng cọc C làm cọc trung gian.

2) Không xếp đĩa lớn lên trên đĩa nhỏ.

Lời giải

• Nếu $n = 1$ thì bài toán giải được ngay.

• Giả sử đã biết cách giải bài toán với $n - 1$ đĩa. Khi đó ta giải bài toán cho n đĩa như sau:

Chuyển $n - 1$ đĩa trên cùng từ A sang C (theo giả thiết đã biết cách giải).

Chuyển đĩa thứ n (to nhất, dưới cùng trong A) từ A sang B (Bài toán 1 đĩa).

Chuyển $n - 1$ đĩa từ C sang B (theo giả thiết quy nạp đã biết cách giải).

Như vậy, lời giải bài toán rất đơn giản: Bài toán n đĩa được đưa về bài toán $n - 1$ đĩa và bài toán 1 đĩa. Cách giải như vậy được gọi là *thuật giải đệ quy*.

Kí hiệu $L(n)$ là số lần chuyển trong bài toán n đĩa. Ta có

$$L(1) = 1; L(2) = 3; L(n) = 2L(n - 1) + 1.$$

Theo quy nạp ta có $L(n) = 2^n - 1$. Vậy thuật toán đệ quy giải bài toán Tháp Hà Nội là thuật toán có *thời gian mũ*. Giả sử mỗi lần chuyển 1 đĩa hết thời gian 1 giây. Nếu có 64 đĩa thì thời gian là

$$2^{64} - 1 = 18446744073703551615 \text{ giây} \approx 50 \text{ tỉ năm.}$$

Nếu sử dụng máy tính thực hiện chương trình đệ quy với tốc độ 1 triệu phép toán/giây thì thời gian chạy máy là

$$(2^{64} - 1) : 1000000 \approx 50 \text{ 000 năm.}$$

Như vậy bài toán Tháp Hà Nội, mặc dù có thuật giải đơn giản và tối ưu, vẫn *không giải được* trong *thời gian thực*. $\square$

3. Trò chơi Tháp Hà Nội tổng quát

Bài toán Tháp Hà Nội được mở rộng cho trường hợp k cọc trong Problem 3918 của *Americal Mathematical Monthly* năm 1939 như sau.

Bài toán 2. Có k cọc được đánh số từ 1 đến k . Cọc 1 được gọi là cọc nguồn chứa n đĩa to nhỏ khác nhau được xếp theo thứ tự "to dưới, nhỏ trên"; cọc k được gọi là cọc đích, các cọc còn lại được gọi là cọc trung gian. Hãy chuyển tất cả n đĩa từ cọc nguồn sang cọc đích, sắp xếp cũng theo thứ tự "to dưới, nhỏ trên" sau một thời gian ngắn nhất. Khi chuyển có thể sử dụng các cọc trung gian theo quy tắc của Bài toán 1.



Lời giải của B. M. Stewart và J. S. Frame cho trường hợp 4 cọc (*Americal Mathematical Montly* 48, 1941) cho tới nay vẫn chưa chứng minh được là tối ưu (thời gian ngắn nhất).

Khi có nhiều cọc, rõ ràng ta có nhiều lựa chọn (thuật toán) để đặt các đĩa vào các cọc trung gian. Vì có nhiều lựa chọn, nên chứng minh lựa chọn (thuật toán) nào là tối ưu là bài toán khó.



Ta có thể gán giá cho mỗi lần chuyển đĩa từ cọc này sang cọc khác (thí dụ, nếu chuyển đĩa từ cọc thứ i sang cọc thứ $i+1$ thì giá bằng 1, từ cọc thứ i sang cọc thứ $i+p$ thì giá bằng

p hoặc thêm các hạn chế, thí dụ các dịch chuyển phải tuân theo chiều kim đồng hồ (khi xếp các cọc tại đỉnh của đa giác đều trên đường tròn), ...

Những suy luận này dẫn tới những mở rộng khác nhau của bài toán cũng như những hạn chế đặt ra để tìm thuật toán tối ưu trong các

lớp bài toán cụ thể. Đây là một ví dụ cho thấy một bài toán đơn giản, khi mở rộng thì xuất hiện nhiều bài toán mới thú vị.

4. Đôi điều kết luận

Bài toán Tháp Hà Nội hấp dẫn "dân" Toán - Tin học trên thế giới, được đưa vào nhiều sách Tin học, toán Tổ hợp và sách về Trò chơi toán học, không chỉ bởi vì nó là thí dụ điển hình về thuật giải đệ quy và lập trình căn bản, mà còn vì Bài toán Tháp Hà Nội tổng quát có quan hệ mật thiết với nhiều bài toán khác (tam giác Pascal, thặng Sierpinski, hình học Fractal, đồ thị Hamilton, toán học rời rạc, ô tômat hữu hạn, lý thuyết đồ thị, độ phức tạp tính toán, thuật toán tối ưu, quy hoạch động, dãy số nguyên, mã sửa sai,...) và là khởi nguồn của nhiều sáng tạo Toán - Tin học. Xung quanh Tháp Hà Nội còn nhiều vấn đề thú vị, thậm chí, năm 2005, một Hội thảo Quốc tế được tổ chức tại Slovenia về chủ đề Tháp Hà Nội và những vấn đề liên quan.

Trong 369 bài báo khoa học (tính đến năm 2005) viết về các vấn đề Toán-Tin học của Tháp Hà Nội, đăng trên hơn 90 tạp chí, có 210 bài có đầu đề với từ "The Tower of Hanoi" hoặc "La Tour d'Hanoi". Bài toán Tháp Hà Nội còn được sử dụng trong nghiên cứu giáo dục về giải quyết vấn đề, trong chuẩn đoán và điều trị thần kinh tâm lý đối với các chức năng thực hành.

Hi vọng Bài toán Tháp Hà Nội sẽ được các bạn trẻ Hà Nội và Việt Nam quan tâm. Có thể tìm hiểu các vấn đề Toán-Tin học sâu sắc và thời sự của bài toán Tháp Hà Nội qua cuốn *The Tower of Hanoi: A Bibliography* của Paul K. Stockmeyer (2005) và các tài liệu trên mạng Internet. Chẳng hạn, bạn đọc có thể vào trang <http://www.google.com.vn>, tìm "Tháp Hà Nội" hoặc "Tower of Hanoi" để download từ các trang WEB các chương trình cũng như những phần mềm hiển thị, hướng dẫn từng bước chơi với số đĩa tăng dần, hoặc tìm mua trò chơi Tháp Hà Nội bằng gỗ hoặc bằng nhựa để giải trí.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/391. (Lớp 6). Có tồn tại hay không số nguyên dương k sao cho $2^k + 3^k$ là số chính phương?

NGUYỄN VĂN HIỂN
(Budapest, Hungary)

Bài T2/391. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC , $AB = 5\text{cm}$, $AM = 6\text{cm}$ và $AC = 13\text{cm}$. Đường thẳng qua B và vuông góc với BC cắt đường thẳng AM ở D . Đường thẳng qua C và vuông góc với BC cắt đường thẳng AB ở E . Chứng minh rằng CD vuông góc với ME .

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/391. Tìm các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $a + b = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$ và $A = a^4 - 6a^2b^2 + b^4$ là số nguyên dương.

LÊ VIỆT HẢI
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T4/391. Giả sử O là trung điểm của đoạn thẳng $AB = 2a$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng các tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm M , trên tia By lấy điểm N sao cho $MN = AM + BN$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên MN . Xác định vị trí của M và N để diện tích tam giác HAB lớn nhất.

LÊ THỪA THÀNH
(GV THPT BC Nguyễn Hiền, Đà Nẵng)

Bài T5/391. Không sử dụng các công thức lượng giác, chứng minh các đẳng thức sau:

$$1) \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{4};$$

$$2) \tan 36^\circ \cdot \tan 72^\circ = \sqrt{5}.$$

LÊ QUỐC HÁN
(GV khoa Toán, ĐH Vinh, Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/391. Giải phương trình

$$3x^4 - 4x^3 = 1 - \sqrt{(1+x^2)^3}.$$

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T7/391. Có tồn tại hay không một đa thức $P(x)$ bậc 2010 sao cho $P(x^2 - 2010)$ chia hết cho $P(x)$?

MAI ĐÌNH SINH
(SV K39, Học viện Kỹ thuật Quân sự)

Bài T8/391. Giả sử $Oxyz$ là một tam diện vuông ở O và A, B, C thứ tự là ba điểm thay đổi trên các cạnh Ox, Oy, Oz sao cho tam giác ABC có diện tích S không đổi cho trước. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác OBC, OCA, OAB . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{S_1}{S + 2S_1} + \frac{S_2}{S + 2S_2} + \frac{S_3}{S + 2S_3}.$$

NGUYỄN TIÊN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/391. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\min \left\{ \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}; \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \right\} \geq \max \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}; \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right\}.$$

TRẦN TUẤN ANH
(GV ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T10/391. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số mà trong mỗi số đó đều chứa một số lẻ chữ

số 1 và một số chẵn chữ số 2 (với n là số nguyên dương cho trước) ?

DƯƠNG BÙU LỘC

(GV THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/391. Cho dãy số (x_n) , $n = 0, 1, \dots$

được xác định bởi $x_0 = \alpha$ và $x_n = \sqrt{1 + \frac{1}{x_{n-1}}}$,

$n = 0, 1, \dots$ và α là số cho trước lớn hơn 1.

Tìm $\lim x_n$.

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT Thanh Ba, Phú Thọ)

Bài T12/391. Cho tam giác ABC có các đường cao AA' , BB' , CC' đồng quy tại H . Chứng minh rằng

$$\frac{HA}{HA'} + \frac{HB}{HB'} + \frac{HC}{HC'} + 6\sqrt{3} \geq 6 + \frac{a}{HA'} + \frac{b}{HB'} + \frac{c}{HC'}.$$

TRẦN QUANG HÙNG

(GV Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/391. Một chiếc bè có khối lượng m được kéo không vận tốc ban đầu từ khoảng

cách a vào bờ nhờ một sợi dây vắt qua ròng rọc ở trên bờ. Cho độ cao của bờ là h . Dây được kéo với lực không đổi là F (hình vẽ). Tìm vận tốc của bè khi nó

còn cách bờ một khoảng là b ($b > a$). Giả thiết bè không bị nhấc lên, lực cản của nước không

đổi là F_c . Với $F_c < \frac{Fb}{\sqrt{b^2 + h^2}}$.

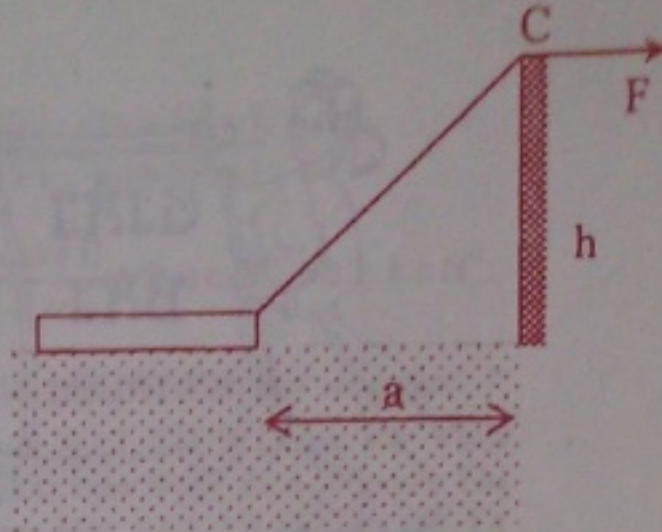
ĐỖ TUẤN

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/391. Bốn điện tích giống nhau Q được đặt cố định ở bốn đỉnh hình vuông có cạnh bằng a trong chân không. Tại tâm O của hình vuông trên đặt một điện tích điểm q (cùng dấu với Q) có khối lượng m . Dịch chuyển q một đoạn nhỏ theo phương của một đường chéo rồi thả nhẹ. Chứng tỏ rằng điện tích q sẽ dao động điều hoà. Tìm chu kì dao động. Bỏ qua tác dụng của trọng lực.

NGUYỄN XUÂN QUANG

(GV THPT Hà Nội - Amsterdam)



PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/391. (For 6th grade) Does there exist a positive integer k such that $2^k + 3^k$ is a perfect square?

T2/391. (For 7th grade) Let ABC be a triangle and let M be the midpoint of BC such that $AB = 5\text{cm}$, $AM = 6\text{cm}$ and $AC = 13\text{cm}$. The line through B and perpendicular to BC meets AM at D , the line through C and perpendicular to BC meets AB at E . Prove that CD is perpendicular to ME .

T3/391. Find all pair of real numbers a and b so that $a + b = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$ and $A = a^4 - 6a^2b^2 + b^4$ is a positive integer.

T4/391. Let O be the midpoint of a line segment $AB = 2a$. In the half-plane with edge AB , draw two rays Ax , By , both perpendicular to AB . Choose M and N on Ax and By respectively such that $MN = AM + BN$. Let H be the foot of the altitude from O onto MN . Find the positions of M and N such that the area of the triangle HAB is greatest possible.

T5/391. Without using trigonometry formula, prove the following equalities:

$$1) \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{4};$$

$$2) \tan 36^\circ \cdot \tan 72^\circ = \sqrt{5}.$$

(Xem tiếp trang 26)



★ **Bài T1/387.** Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên gồm 2009 chữ số, được viết bởi các chữ số 0, 2, 7, 9 và có tổng các chữ số bằng 7209 sao cho số đó chia hết cho 2007.

Lời giải. Kí hiệu s_i, t_i ($i = 1, 2, 3, 4$) theo thứ tự là số các chữ số và tổng các chữ số của một số.

Chú ý. Nếu viết các bội số của 2007 một cách liên tiếp thì số tạo thành chia hết cho 2007.

Bài toán có nhiều đáp số, dưới đây trình bày một số cách tìm bội của 2007 dựa vào chú ý trên.

Cách 1. Số $22077 = 2007 \times 11$ là số có $s_1 = 5$ chữ số và có tổng các chữ số là $t_1 = 18$. Ta thấy $7209 = 18 \times 399 + 27$ và $2009 = 5 \times 399 + 14$ nên số sau chia hết cho 2007

$$\overbrace{22077 \dots 22077}^{399 \text{ bộ số } 22077} \cdot \overbrace{22079007000000}^{14 \text{ chữ số}}$$

Ta có thể nhận được các nghiệm khác nếu thay đổi một số chữ số của số trên bằng cách sau:

- Chuyển số 22079007 xen vào giữa các bộ số 22077;
- Chuyển n ($1 \leq n \leq 6$) chữ số 0 ở đầu phải xen vào giữa các bộ số 22077;
- Thay số 22079007000 bởi số 20090072007, hoặc bởi số 20072009007.

Cách 2. Số $222777 = 2007 \times 111$ có $s_2 = 6$ chữ số, $t_2 = 27$ và $7209 = 27 \times 266 + 27$, còn

$2009 = 6 \times 266 + 413$, với số này ta thấy số sau chia hết cho 2007.

$$\overbrace{222777 \dots 222777}^{266 \text{ bộ số } 222777} \overbrace{220790070 \dots 0}^{405 \text{ chữ số } 0}.$$

Cách 3. Làm tương tự trên với số

$2209707 = 2007 \times 1101$ trong đó $s_3 = 7$ chữ số và $t_3 = 27$.

Cách 4. Làm tương tự trên với số

$2229777 = 2007 \times 1111$, trong đó $s_4 = 7$ chữ số và $t_4 = 36$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn tìm ra quy luật là

$$\overbrace{222 \underbrace{9 \dots 9}_n}_{n \text{ chữ số } 9} \overbrace{777 \underbrace{1 \dots 1}_{n+3 \text{ chữ số } 1}} = 2007 \times \overbrace{1 \dots 1}_{n+3 \text{ chữ số } 1}$$

từ đó suy ra số sau chia hết cho 2007

$$\overbrace{222 \underbrace{9 \dots 9}_n}_{789 \text{ chữ số } 9} \overbrace{777 \underbrace{0 \dots 0}_{1205 \text{ chữ số } 0}}.$$

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Vũ Phương Quỳnh, Nguyễn Thị Thanh Hà, Tạ Thúy Hằng, Hoàng Thị Thu Thủy, Vương Thùy Trang, Đào Nguyễn Anh Duy, Lê Thùy Dương, Phạm Thị Bảo Châu, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Nghệ An:** Nguyễn Hoàng Thảo Hiền, Nguyễn Thị Hoài Anh, Trịnh Thị Mỹ Ngọc, Lê Hồ Minh Tuấn, Hồ Thị Thúy, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** Phạm Huyền Trang, 6B, Võ Trà My, Nguyễn Thị Thương, Trần Phương Thảo, 6C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/387.** Cho n số nguyên lẻ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 2007$) thỏa mãn điều kiện

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2005}^2 = a_{2006}^2 + a_{2007}^2 + \dots + a_n^2 \quad (1)$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của n và chỉ ra một bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn với n tìm được.

Lời giải. **Nhận xét.** Số chính phương lẻ khi chia cho 8 có số dư là 1. Thật vậy, với $k \in \mathbb{N}$ thì $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$ chia hết cho 8 dư 1. Từ đó $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$ chia 8 dư 1. Vậy $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2005}^2$ chia 8 dư 5.

Do (1) nên $a_{2006}^2 + a_{2007}^2 + \dots + a_n^2$ chia cho 8 dư 5. Suy ra $n - 2005$ chia cho 8 dư 5.

Mà $n > 2005$ nên $n - 2005 > 0$. Vậy để n nhỏ nhất thì $n - 2005 = 5$ hay $n = 2010$.

Với $n = 2010$, ta có thể lấy:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{2006} = 1, a_{2007} = 3, a_{2008} = 5, a_{2009} = 11, a_{2010} = 43. \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Với $n = 2010$, có nhiều bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn (1), chẳng hạn:

$$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2005 \text{ số } 1}, 5, 7, 9, 25, 35); (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2005 \text{ số } 1}, 17, 5, 31, 21, 17);$$

$$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2005 \text{ số } 1}, 15, 19, 19, 23, 23); \dots$$

2) Tất cả các bạn tham gia đều giải đúng. Các bạn có lời giải tốt là:

Vinh Phúc: Nguyễn Thành Công, Nguyễn Minh Tuấn, Nguyễn Thị Lan Oanh, Tạ Thanh Xuân, Đại Thị Hoàng Yến, Nguyễn Đức Đại, Nguyễn Trí Anh, Phạm Thị Vân Anh, 7A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** Lê Minh Hoàng, Dương Mạnh Tùng, 7A1, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** Nguyễn Hà Trang, Nguyễn Văn Tiến, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Thanh Hoa, 7A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T3/387. Tính

$$S = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \times \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \times \dots \times \frac{2009^3 - 1}{2009^3 + 1}.$$

Lời giải. Nhận xét rằng mỗi số hạng của tổng S có dạng

$$\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} = \frac{(k-1)((k+1)^2 - (k+1) + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)},$$

với $k = 2, 3, \dots, 2009$.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{1.(3^2 - 3 + 1)}{3.(2^2 - 2 + 1)} \cdot \frac{2.(4^2 - 4 + 1)}{4.(3^2 - 3 + 1)} \dots \frac{2008.(2010^2 - 2010 + 1)}{2010.(2009^2 - 2009 + 1)} \\ &= \frac{1.2 \dots 2008.(3^2 - 3 + 1)(4^2 - 4 + 1) \dots (2010^2 - 2010 + 1)}{3.4 \dots 2010.(2^2 - 2 + 1)(3^2 - 3 + 1) \dots (2009^2 - 2009 + 1)} \\ &= \frac{2.(2010^2 - 2009)}{2009.2010.3} = \frac{4038091}{6057155}. \square \end{aligned}$$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài này rất nhiều bạn tham gia, đặc biệt các bạn ở tỉnh Nghệ An và tỉnh Vĩnh Phúc. Một số bạn chưa tính đến kết quả cuối cùng và còn tính toán nhầm lẫn. Tuyên dương một số bạn đã nêu và cho kết quả bài toán tổng quát hơn:

$$a) P = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \dots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3(n^2 + n)}$$

với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

$$\begin{aligned} b) Q &= \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \cdot \frac{(n+1)^3 - 1}{(n+1)^3 + 1} \dots \frac{(n+k)^3 - 1}{(n+k)^3 + 1} \\ &= \frac{(n-1)n((n+k)^2 + (n+k) + 1)}{(n+k)(n+k+1)(k^2 - k + 1)} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2; k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt, trình bày sáng sủa:

Hà Nội: Đỗ Quang Anh, 9A7, THCS Giảng Võ; **Vĩnh Phúc:** Phùng Thị Quỳnh, Văn Ngọc Bích, Nguyễn Thị Bích Thủy, Bùi Thị Ngọc Mai, 8A1, Vũ Thị Thu Hà, Tạ Thị Mai Hạnh, 9A1, THCS Yên Lạc, Phạm Hùng Thiện, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Phú Thọ:** Nguyễn Thị Mai Anh, 8A1, Đinh Anh Hoàng, 9A7, Triệu Thị Thu, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nam:** Nguyễn Quang Lợi, 7B, THCS Liêm Chính, TP. Phủ Lý; **Nam Định:** Trịnh Thị Việt Hà, 9A1, THCS Trần Đăng Ninh; **Nghệ An:** Hồ Thị Thúy, Trịnh Thị Mỹ Ngọc, 6A, Nguyễn Đức Tuấn, Trần Ngọc Linh, Lê Hương Ly, 7A, Phan Thị Hoài Anh, 7C, Nguyễn Mạnh Dũng, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; Ngô Sỹ Thanh, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** Hà Khánh Uyên, 7A, THCS Lê Ninh, Đức Thọ, Bùi Thị Phương Mai, 8A, Bùi Thị Thúy Quỳnh, 8C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** Phạm Anh Kiệt, 7A, Cao Thị Ánh Nguyệt, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **An Giang:** Nguyễn Quốc Thịnh, 7A9, THCS Nguyễn Trãi.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T4/387.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC > AB$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Qua D dựng đường vuông góc với BC tại E . Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE tại H . Chứng minh rằng

$$AH < \frac{\sqrt{2}}{2} AC.$$

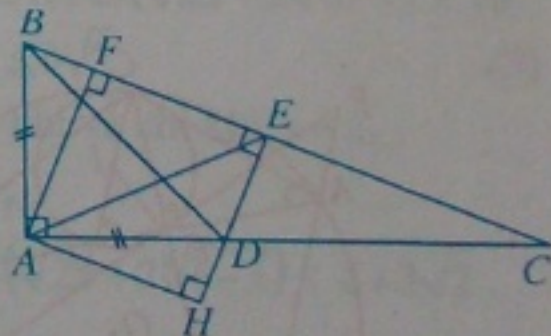
Lời giải

Kẻ $AF \perp BC$,

ta có $AF \parallel HE$;

$AH \parallel FE$

$\Rightarrow AH = FE$.



Mặt khác, vì

$AB = AD$, nên tam giác ABD vuông cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ADB} = 45^\circ$.

Tứ giác $ABED$ nội tiếp nên $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 45^\circ$; tam giác AFE vuông cân. Do đó $AF = FE = AH$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC và giả thiết $AC > AB$, ta có

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} > \frac{2}{AC^2}$$

$$\Rightarrow AF^2 < \frac{AC^2}{2} \Rightarrow AF < \frac{\sqrt{2}}{2} AC.$$

Vậy $AH < \frac{\sqrt{2}}{2} AC$. Đpcm. $\square$

◀ **Nhận xét.** Có thể giải bài toán bằng các cách khác như sau :

$$1. \text{ Ta có } AH = AF = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$$

$$\text{và } AB^2 + AC^2 \geq 2AB \cdot AC;$$

$$\text{suy ra } AH \leq \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{2AB \cdot AC}} = \sqrt{\frac{AB \cdot AC}{2}} < \frac{\sqrt{2}}{2} AC.$$

2. Ta có tứ giác $AHEF$ là hình vuông và $AE < AC$ nên

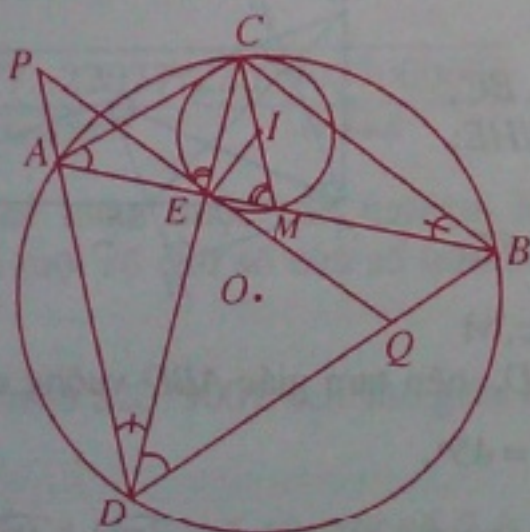
$$\sqrt{2} \cdot AH = AE < AC \Rightarrow AH < \frac{\sqrt{2}}{2} AC.$$

Nhiều bạn tham gia gửi bài và hầu hết làm theo một trong các cách trên.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T5/387.** Cho đường tròn (O) và dây cung AB . Lấy điểm E trên dây cung AB (E khác A và B). Qua E vẽ dây cung CD của đường tròn (O) . Trên hai tia DA, DB lấy hai điểm P, Q đối xứng nhau qua E . Chứng minh rằng đường tròn (I) tiếp xúc với PQ tại E và đi qua C luôn đi qua một điểm cố định khi E đi động trên dây cung AB .

Lời giải. (Theo Đặng Thắng Lợi, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Nội)



Gọi M là giao điểm của AB và đường tròn (I) . Vì $\triangle CME$ nội tiếp (I) , EP là tiếp tuyến của (I) nên $\widehat{CMA} = \widehat{PEC} = \widehat{QED}$ (1)

Mặt khác, $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (cùng chắn cung BC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CMA \sim \triangle QED$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{DE}{QE} \quad (3)$$

Tương tự $\widehat{DEP} = \widehat{BMC}$, $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ nên

$$\triangle BMC \sim \triangle DEP \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{DE}{PE} = \frac{DE}{QE} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) có } \frac{AM}{CM} = \frac{BM}{CM} \Rightarrow AM = BM.$$

Do đó đường tròn (I) luôn đi qua trung điểm M của AB là điểm cố định (đpcm). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Mấu chốt của bài toán là dựa vào một số vị trí đặc biệt của điểm E để dự đoán điểm cố định mà đường tròn (I) đi qua.

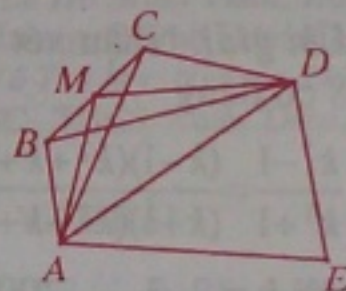
2) Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Ngoài bạn Lợi, bạn Lê Đức Tiến, 9A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiến An, Hải Phòng cũng có lời giải tốt.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T6/387.** Trong các ngũ giác lồi có tổng các bình phương của các đường chéo bằng 1, tìm ngũ giác có tổng các lập phương độ dài của các cạnh nhỏ nhất.

Lời giải. Trước hết, với bốn điểm A, B, C, D bất kì, ta có

$$AC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2 \leq 2 \cdot BC \cdot AD \quad (*).$$



Thật vậy

$$\begin{aligned} AC^2 - AB^2 + BD^2 - CD^2 &= (\overline{AC} - \overline{AB})(\overline{AC} + \overline{AB}) + (\overline{BD} - \overline{CD})(\overline{BD} + \overline{CD}) \\ &= \overline{BC} \cdot 2\overline{AM} + \overline{BC} \cdot 2\overline{MD} \quad (M \text{ là trung điểm của } BC) \\ &= 2\overline{BC}(\overline{AM} + \overline{MD}) = 2\overline{BC} \cdot \overline{AD} \leq 2 \cdot BC \cdot AD. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\overline{BC}$ cùng hướng với $\overline{AD}$.

Xét ngũ giác lồi $ABCDE$ có tổng bình phương các đường chéo bằng 1, đặt x là tổng bình phương các cạnh của nó. Áp dụng (*) cho các bộ 4 đỉnh của ngũ giác $ABCDE$, suy ra

$$\begin{aligned} &2(AC^2 + BD^2 + CE^2 + DA^2 + EB^2) \\ &- 2(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + EA^2) \\ &\leq 2(BC \cdot AD + CD \cdot BE + DE \cdot CA + EA \cdot DB + AB \cdot EC) \quad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta được

$$(BC \cdot AD + CD \cdot BE + DE \cdot CA + EA \cdot DB + AB \cdot EC)^2 \leq (BC^2 + CD^2 + DE^2 + EA^2 + AB^2) \times (AD^2 + BE^2 + CA^2 + DB^2 + EC^2) = x \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(1-x)^2 \leq x \Leftrightarrow 1-3x+x^2 \leq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Đặt $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = a$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$AB^3 + AB^3 + \left(\sqrt{\frac{a}{5}}\right)^3 \geq 3\sqrt{\frac{a}{5}} \cdot AB^2 \quad (3)$$

Cộng thêm bốn BĐT tương tự, suy ra

$$2(AB^3 + BC^3 + CD^3 + DE^3 + EA^3) + 5\left(\sqrt{\frac{a}{5}}\right)^3 \geq 3\sqrt{\frac{a}{5}} \cdot x \geq 3a\sqrt{\frac{a}{5}}.$$

Vậy $AB^3 + BC^3 + CD^3 + DE^3 + EA^3$

$$\geq \frac{1}{2} \left(3a\sqrt{\frac{a}{5}} - 5\left(\sqrt{\frac{a}{5}}\right)^3 \right) = a\sqrt{\frac{a}{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)^3}{8\sqrt{5}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi ở (1), (2), (3) và các bất đẳng thức tương tự (3) xảy ra dấu bằng, tức là khi $ABCDE$ là ngũ giác đều có cạnh bằng $\sqrt{\frac{a}{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$. Khi đó, có thể tính được tổng bình phương các đường chéo của $ABCDE$ đúng bằng 1.

Như vậy trong các ngũ giác có tổng bình phương các đường chéo bằng 1, ngũ giác đều

(với cạnh bằng $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$) có tổng lập phương các cạnh nhỏ nhất. $\square$

◀Nhận xét. Bài toán này khó ở chỗ thay vì yêu cầu tìm ngũ giác có tổng bình phương các cạnh nhỏ nhất,

để bài yêu cầu tìm ngũ giác có tổng lập phương các cạnh nhỏ nhất. Điểm mấu chốt nữa trong lời giải trên là bất đẳng thức (*). Một số bạn đưa ra các bất đẳng thức khác để đánh giá, tuy nhiên bất đẳng thức (*) là sáng sủa hơn cả. Ba bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Văn Quý, 11A, Toán, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội. TP Hồ Chí Minh: Lê Tạ Đăng Khoa, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong. Hà Tĩnh: Thiều Đăng Ba, 12 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ Bài T7/387. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} - y^2 = 2\sqrt{2} \\ \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt{6-x} + 2\sqrt{2}y = 8 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 6$. Cộng theo vế hai phương trình của hệ rồi biến đổi ta được

$$(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}) + (\sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x}) = (y - \sqrt{2})^2 + 6 + 3\sqrt{2} \geq 6 + 3\sqrt{2} \quad (1)$$

Áp dụng BDT Bunyakovsky cho hai bộ hai số dương ta có

$$(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x})^2 \leq (1+2)(2x + (12-2x)) = 36 \Rightarrow \sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x} \leq 6 \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Tương tự ta có

$$(\sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x})^2 \leq (1+2)(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}) \leq 18 \Rightarrow \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} \leq 3\sqrt{2} \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Từ (2) và (3) suy ra

$$(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}) + (\sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x}) \leq 6 + 3\sqrt{2}.$$

Kết hợp với (1) suy ra các đẳng thức ở (1), (2) và (3) phải xảy ra. Khi đó $x = 2$ và $y = \sqrt{2}$.

Thử lại ta được nghiệm của hệ PT đã cho là $(x; y) = (2; \sqrt{2})$.

◀Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và hầu hết đều cho kết quả đúng. Một số bạn giải bằng cách xét hàm số

$$f(x) = (\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}) + (\sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x}), \quad 0 \leq x \leq 6.$$

Tính đạo hàm và xét sự biến thiên của $f(x)$ trong đoạn $[0; 6]$ cũng giải ra kết quả đúng.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Quảng Ninh: Bùi Hoàng Tùng, 10A3, THPT Uông Bí;
Bắc Ninh: Nguyễn Thị Hương Lý, 8A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Kon Tum:** Cao Thanh Hà, 10A1, THPT chuyên Kon Tum; **Thái Bình:** Trần Quang Đại, Đinh Thị Nho, 10 Toán, Lê Hiến Tươi, 11 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Đức Anh, 10A1, Đàm Văn Tú, 10A3, THPT Đội Cấn; Lê Văn Tú, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Lâm, Trần Mạnh Tiến, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I; Yên Bái: Hà Tuấn Dũng, 10K, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Nam Định:** Trần Quang Huy, 10A1, THPT A Hải Hậu; **Bình Định:** Nguyễn Danh Nhân, 10A1, THPT Phù Cát II; Lê Như Ngọc, 10T, Lương Việt Chương, 10TL, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Đà Lạt:** Vũ Anh, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Hải Dương:** Mạc Lưu Phong, 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi; Bùi Huy Hoàng, 10A, THPT Kim Thành; **Thanh Hoá:** Lê Viết Nghĩa, 9A, THCS Hoàng Minh; TP. Hồ Chí Minh: Nguyễn Ngọc Quang, 10SN1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bình Phước:** Dương Tuấn Anh, 9A9, THCS Tân Xuân, TX. Đồng Xoài; **Hưng Yên:** Vũ Nhật Khánh, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ Bài T8/387. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin A}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{\sin B}{\tan \frac{C}{2}} + \frac{\sin C}{\tan \frac{A}{2}} \geq \frac{9}{2}$$

trong đó A, B, C lần lượt là số đo ba góc trong tam giác. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Tuấn Vũ, 11A1, THPT Hương Sơn, Hà Tĩnh)

Gọi a, b, c lần lượt là độ dài ba cạnh đối diện với ba góc A, B, C ; p là nửa chu vi và S là diện tích tam giác.

$$\text{Ta có } \sin A = \frac{2S}{bc}; \tan \frac{B}{2} = \frac{S}{p(p-a)}$$

$$\text{Do đó } \frac{\sin A}{\tan \frac{B}{2}} = \frac{2p(p-b)}{bc}. \text{ Tương tự}$$

$$\frac{\sin B}{\tan \frac{C}{2}} = \frac{2p(p-c)}{ca}; \frac{\sin C}{\tan \frac{A}{2}} = \frac{2p(p-a)}{ab}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{2abc} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc \quad (1)$$

$$\text{Ta có } a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad (2)$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \quad (3)$$

(BĐT Trung bình cộng – Trung bình nhân)

Nhân (2) và (3) vế với vế ta được (1).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Bài này được rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng. Một số lời giải còn dài.

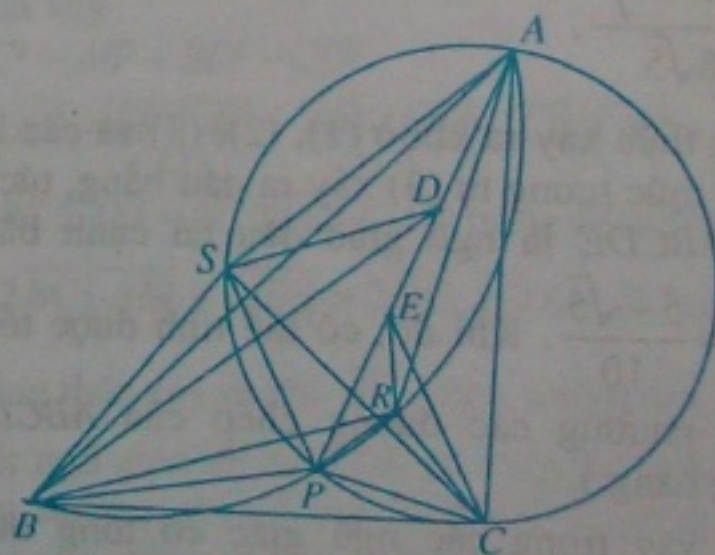
2) Ngoài bạn Vũ, các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Lê Văn Tú, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Ninh Bình:** Lê Thị Hồng, Phạm Thị Dung, 11A1, THPT Nguyễn Huệ, Tam Điệp; **Nghệ An:** Nguyễn Duy Hải, 11A7, THPT Đô Lương Hà Tĩnh: Trần Lê Mạnh Hùng, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** Võ Duy Thanh, 11T, THPT chuyên Lê Khiết; **Thừa Thiên – Huế:** Lê Thanh Phúc, 12 Toán, THPT Quốc học Huế.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T9/387.** Cho tam giác ABC . P là một điểm nằm trong tam giác thỏa mãn $PA = PB + PC$. Gọi R là điểm chính giữa cung AB chứa P của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP , S là điểm chính giữa cung AC chứa P của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACP . Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BPS và CPR tiếp xúc nhau.

Lời giải



Trên đoạn AP lấy hai điểm D và E sao cho $PD = PB$ và $PE = PC$. Để chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp $\triangle BPS$ và $\triangle CPR$ tiếp xúc nhau, từ $\triangle SAC \sim \triangle PEC$ ta sẽ chứng tỏ rằng $\widehat{PBS} + \widehat{PCR} = \widehat{RPS} = \widehat{RBA} + \widehat{SCA} = \widehat{PBD} + \widehat{PCE}$.

Hay cần chứng minh $\widehat{DBS} = \widehat{ECR}$.

Thật vậy, từ giả thiết $PA = PB + PC$ có $AD = PE$, suy ra $\frac{AD}{CE} = \frac{PE}{CE} = \frac{AS}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AS} = \frac{CE}{CA}$ (1)

Mặt khác, $\widehat{SAD} = \widehat{SCP} = \widehat{ACE}$ (2).

Từ (1) và (2) ta thấy $\triangle SAD \sim \triangle ACE$. Suy ra $\widehat{SDP} = \widehat{PEC}$, kết hợp với $\widehat{PCE} = \widehat{SCA} = \widehat{SPD}$ dẫn đến $\triangle SDP \sim \triangle PEC$.

Hoàn toàn tương tự có $\triangle REP \sim \triangle PDB$.

Do đó $\widehat{SDB} = \widehat{REC}$ và

$$\frac{SD}{DB} = \frac{SD}{PE} \cdot \frac{PE}{BD} = \frac{DP}{EC} \cdot \frac{RE}{PD} = \frac{RE}{EC}.$$

Từ đó $\triangle SBD \sim \triangle RCE \Rightarrow \widehat{DBS} = \widehat{ECR}$ (đpcm). $\square$

◀ Nhận xét. 1) Hai bạn Nguyễn Đăng Hiếu, 11T1, trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Kim Đình Sơn, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc đã sử dụng tính chất của phép nghịch đảo cực P, phương tích $k = PB \cdot PC$ ($I_{(P,k=PB \cdot PC)}$) để chứng tỏ ảnh của hai đường tròn ngoại tiếp $\triangle BPS$ và $\triangle CPR$ qua $I_{(P,k=PB \cdot PC)}$ song song với nhau, từ đó cũng đi đến điều cần chứng minh.

2) Ngoài hai bạn Hiếu và Sơn, các bạn sau cũng có lời giải đúng và gọn:

Hà Nội: Nguyễn Văn Thắng, 10A1 Toán, Nguyễn Văn Quý, 11A1 Toán, Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, Nguyễn Minh Thuận, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hóa:** Nguyễn Thị Thu Hiền, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Trần Thị Ngọc An, 12A1, Khối THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Tam Kỳ; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Ngọc Quang, 10SN1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T10/387.** Có tồn tại hay không hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

i) f liên tục trên $\mathbb{R}$;

ii) $f(x+2008)(f(x)+\sqrt{2009}) = -2010, \forall x \in \mathbb{R}$?

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Giả sử tồn tại hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+2008)(f(x)+\sqrt{2009}) = -2010, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Khi đó $f(x) \neq 0$ và $f(x) \neq -\sqrt{2009}$ trên $\mathbb{R}$. Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên chỉ có thể xảy ra một trong ba trường hợp đối với miền giá trị của f (kí hiệu là $\text{Im } f$) như sau:
 $\text{Im } f \subset (-\infty; -\sqrt{2009}); \text{Im } f \subset (-\sqrt{2009}; 0);$
 $\text{Im } f \subset (0; +\infty).$

- Nếu $\text{Im } f \subset (-\infty; -\sqrt{2009})$ thì $f(x+2008)(f(x)+\sqrt{2009}) > 0 > -2010, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $\text{Im } f \subset (-\sqrt{2009}; 0)$ thì $-\sqrt{2009} < f(x+2008) < 0$ nên $\sqrt{2009} > |f(x+2008)|$ và $|f(x)| < \sqrt{2009}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ kéo theo $|f(x+2008)(f(x)+\sqrt{2009})| < 2009 < 2010, \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Từ (2) suy ra

$$f(x+2008)(f(x)+\sqrt{2009}) > -2010, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Nếu $\text{Im } f \subset (0; +\infty)$ thì $f(x+2008)(f(x)+\sqrt{2009}) > 0 > -2010, \forall x \in \mathbb{R}$.

Kết luận. Không tồn tại hàm số thỏa mãn điều kiện bài ra. $\square$

◀ Nhận xét. Đây là đề toán quen biết về phương trình hàm trong lớp hàm liên tục nên có nhiều bạn giải được và đa số các bạn đều giải đúng, tương tự như cách đã trình bày ở trên. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Trần Anh Tuấn, 12A1, THPT Thuận Thành 1; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Quý, 11A1T, Lê Đình Vượng, 10T, THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội, Nguyễn Đăng Hiếu, 11T1, Trường THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hà Nam:** Nguyễn Đức Vinh, 12T, THPT Chuyên Hà Nam; **Hải Dương:** Ninh Văn Quý, 12A, THPT Kim Thành; **Thanh Hóa:** Trịnh Đăng Sơn, 11T, THPT Chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Xuân Thắng, 11A1, THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương; **Quảng Ninh:** Giang Thọ Anh, Nguyễn Xuân Hồng, 11T THPT Chuyên Hạ Long; **Thừa Thiên – Huế:** Lê Thanh Phúc, 12T, THPT Quốc học Huế; **Quảng Ngãi:** Tô Đình Dương, 12A3, THPT số 1, Đức Phổ; **Bình Định:** Lê Anh Tú, Nguyễn Ngọc Quý, Nguyễn Đồng Tiến, 11T THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 11A1 THPT Chuyên Lý Tự Trọng; **Phú Yên:** Vũ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Đồng Tháp:**

Trần Minh Đức, 12T, THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu; Đồng Nai: Đỗ Minh Tiếp, 11T, THPT Chuyên Biên Hòa; Kon Tum: Cao Thanh Hải, 12A1, THPT Chuyên Kon Tum; Bến Tre: Huỳnh Công Bằng, 12T, Khổng Hữu Hiệp, 11T, THPT Chuyên Bến Tre.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ Bài T11/387. Cho dãy số (u_n) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định như sau

$$u_1 = 2, 1; u_{n+1} = \frac{-2u_n^2 + 5u_n}{-u_n^2 + 2u_n + 1}, n = 1, 2, \dots$$

Tìm $\lim(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$.

Lời giải. Trước hết ta có các nhận xét sau:

$$\bullet -u^2 + 2u + 1 = 2 - (1 - u)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < u < 1 + \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\bullet \frac{-2u^2 + 5u}{-u^2 + 2u + 1} - 1 = \frac{-2u^2 + 5u + u^2 - 2u - 1}{-u^2 + 2u + 1} = \frac{-u^2 + 3u - 1}{-u^2 + 2u + 1} = \frac{u(3 - u) - 1}{-u^2 + 2u + 1} > 0 \quad (2)$$

nếu $1 < u < 2$ (vì khi đó $3 - u > 1$).

$$\bullet u_{n+1} - 2 = \frac{-2u_n^2 + 5u_n}{-u_n^2 + 2u_n + 1} - 2 = \frac{-2u_n^2 + 5u_n - 2(-u_n^2 + 2u_n + 1)}{-u_n^2 + 2u_n + 1} = \frac{u_n - 2}{-u_n^2 + 2u_n + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 - u_{n+1}} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 1}{2 - u_n} = u_n + \frac{1}{2 - u_n} \quad (3)$$

Dùng kết quả (3), bằng tính toán trực tiếp ta có $2 < u_n < 3, \forall n = 1, 2, 3, 4, 5$ và $1 < u_6 < 2$.

Dùng kết quả (2) và (3), chứng minh bằng quy nạp theo $n = 6, 7, 8, \dots$ ta nhận được $1 < u_n < 2$ với mọi $n \geq 6$.

Hệ quả là $u_1 + u_2 + \dots + u_n > n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = +\infty. \square$

◀ Nhận xét. 1) Kết hợp (2), (3) với (1) ta suy ra $2, 1 = u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < 1 + \sqrt{2} < u_5$ vì

$$\frac{-2u^2 + 5u}{-u^2 + 2u + 1} - u = \frac{u(u^2 - 4u + 4)}{-u^2 + 2u + 1} = \frac{u(u - 2)^2}{-u^2 + 2u + 1} > 0$$

nếu $0 < u < 1 + \sqrt{2}, u \neq 2$.

Dùng kết quả (3) suy ra $1 < u_6 < u_7 < u_8 < \dots \rightarrow 2$.

2) Các bạn học sinh có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Đức Anh, 10A1, Phùng Thị Tám, 11A2, THPT Đội Cấn; Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; Nghệ An: Nguyễn Văn Minh, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; Quảng Nam: Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; Phú Yên: Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; Bến Tre: Khổng Hữu Hiệp, 11T, Huỳnh Công Bằng, 12T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ Bài T12/387. Trong mặt phẳng cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$ với r, r' thứ tự là bán kính các đường tròn nội tiếp chúng, còn R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng với mọi điểm P trong mặt phẳng đó ta có bất đẳng thức

$$\left(\sin \frac{B'}{2} + \sin \frac{C'}{2} \right) PA + \left(\sin \frac{C'}{2} + \sin \frac{A'}{2} \right) PB + \left(\sin \frac{A'}{2} + \sin \frac{B'}{2} \right) PC > \frac{6rr'}{R'}$$

Lời giải. Trước hết xin phát biểu không chứng minh ba bổ đề đơn giản.

Bổ đề 1. Nếu r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC thì $\min\{BC, CA, AB\} > 2r$.

Bổ đề 2. Nếu R, r thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC thì

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Bổ đề 3. Với mọi tam giác ABC , ta có

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Trở lại việc giải bài toán T12/387.

Theo BĐT tam giác, từ các bổ đề 1, 2 và 3, ta có

$$\begin{aligned}
& \left(\sin \frac{B'}{2} + \sin \frac{C'}{2} \right) PA + \left(\sin \frac{C'}{2} + \sin \frac{A'}{2} \right) PB \\
& + \left(\sin \frac{A'}{2} + \sin \frac{B'}{2} \right) PC \\
& = (PB + PC) \sin \frac{A'}{2} + (PC + PA) \sin \frac{B'}{2} \\
& + (PA + PB) \sin \frac{C'}{2} \\
& > \sin \frac{A'}{2} \cdot \sin \frac{B'}{2} \cdot \sin \frac{C'}{2} \times \\
& \times \left(\frac{BC}{\sin \frac{B'}{2} \cdot \sin \frac{C'}{2}} + \frac{CA}{\sin \frac{C'}{2} \cdot \sin \frac{A'}{2}} + \frac{AB}{\sin \frac{A'}{2} \cdot \sin \frac{B'}{2}} \right) \\
& > \frac{1}{4} \frac{r'}{R'} \cdot 2r \times \\
& \times \left(\frac{1}{\sin \frac{B'}{2} \cdot \sin \frac{C'}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C'}{2} \cdot \sin \frac{A'}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{A'}{2} \cdot \sin \frac{B'}{2}} \right) \\
& \geq \frac{rr'}{2R'} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\left(\sin \frac{A'}{2} \sin \frac{B'}{2} \sin \frac{C'}{2} \right)^2}} \\
& \geq \frac{rr'}{2R'} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{64} = \frac{6rr'}{R'}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Vậy } \left(\sin \frac{B'}{2} + \sin \frac{C'}{2} \right) PA + \left(\sin \frac{C'}{2} + \sin \frac{A'}{2} \right) PB \\
& + \left(\sin \frac{A'}{2} + \sin \frac{B'}{2} \right) PC > \frac{6rr'}{R'}. \quad \square
\end{aligned}$$

◀ **Nhận xét.** Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Các bạn có lời giải đúng là:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I; **Bến Tre:** Khổng Hữu Hiệp, 11T, Huỳnh Công Bằng, 12T, THPT chuyên Bến Tre; **Quảng Ngãi:** Tô Đình Dương, 12A3, THPT số 1 Đức Phổ.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/387.** Đặt một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng $U = 60V$ vào hai đầu một đoạn mạch RLC mắc nối tiếp thì cường độ dòng điện qua đoạn mạch là $i_1 = I_0 \cos \left(100\pi t + \frac{\pi}{4} \right)$ (A). Nếu nối tắt hai bản cực của tụ điện C bằng một dây dẫn điện thì cường độ dòng điện qua đoạn mạch là $i_2 = I_0 \cos \left(100\pi t - \frac{\pi}{12} \right)$ (A). Tìm biểu thức của điện áp ở hai đầu đoạn mạch.

Lời giải. Theo bài ra thì $I_{01} = I_{02}$ nên tổng trở $Z_1 = Z_2$.

$$\begin{aligned}
& \text{Do đó } R^2 + (Z_L - Z_C)^2 = R^2 + Z_L^2, \\
& \text{suy ra } Z_L - Z_C = \pm Z_L. \quad (1)
\end{aligned}$$

PT (1) cho 2 nghiệm $Z_C = 0$ (loại) và $Z_C = 2Z_L$.

Điện áp hai đầu đoạn mạch có dạng

$$u = 60\sqrt{2} \cos(100\pi t + \varphi_0) \quad (2)$$

i_1 trễ pha hơn u là φ_1 , với

$$\tan \varphi_1 = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{Z_L - 2Z_L}{R} = -\frac{Z_L}{R} \quad (3)$$

$$i_2 \text{ trễ pha hơn } u \text{ là } \varphi_2, \text{ với } \tan \varphi_2 = \frac{Z_L}{R} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& \text{Từ (3) và (4) suy ra } \tan \varphi_1 = -\tan \varphi_2, \text{ vậy} \\
& \varphi_1 = -\varphi_2 \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Do đó } i_1 &= I_0 \cos(100\pi t + \varphi_0 - \varphi_1) \\
&= I_0 \cos \left(100\pi t + \frac{\pi}{4} \right) \quad (6) \\
i_2 &= I_0 \cos \left(100\pi t - \frac{\pi}{12} \right) \quad (7)
\end{aligned}$$

Từ (6) và (7), chú ý đến (5) ta có

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \quad (8), \quad \varphi_0 - \varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_1 = -\frac{\pi}{12} \quad (9)$$

$$\text{Từ (8) và (9) suy ra } \varphi_0 = \frac{\pi}{12} \quad (10)$$

Thế (10) vào (2) ta được

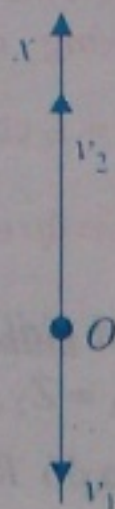
$$u = 60\sqrt{2} \cos \left(100\pi t + \frac{\pi}{12} \right). \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Những bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghệ An: Lê Văn Hương, 12A1, THPT Quỳnh Lưu 4;
Quảng Ngãi: Nguyễn Tấn Đông, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Cà Mau:** Dương Thái Dương, 12T2, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN VĂN THUẬN

★ **Bài L2/387.** Từ một khí cầu cách mặt đất một khoảng 15m đang hạ thấp với vận tốc $v_1 = 2\text{m/s}$ người ta phóng ra một vật theo phương thẳng đứng, hướng lên trên với vận tốc $v_2 = 18\text{m/s}$ đối với mặt đất. Tìm khoảng cách lớn nhất giữa khí cầu và vật trong quá trình rơi. Cho $g = 10\text{m/s}^2$.



Lời giải. Chọn trục Ox hướng thẳng đứng lên trên, gốc O là vị trí ném vật. Phương trình chuyển động của khí cầu và vật lần lượt là:

$$x_1 = v_1 t = -2t; \quad x_2 = v_2 t - \frac{g}{2} t^2 = 18t - 5t^2$$

Khoảng cách giữa vật và khí cầu ở thời điểm t là
 $l = x_2 - x_1 = 20t - 5t^2$

Để thấy l đạt cực đại khi $t = 2\text{s}$ (trước khi khí cầu chạm đất), và giá trị cực đại bằng 20m. □

◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng và ngắn gọn:

Thanh Hóa: Nguyễn Thị Thu Hà, 12A1, THPT Hậu Lộc II; **Nghệ An:** Nguyễn Thanh Sơn, 10A1, THPT Diễn Châu 3, Lê Văn Hương, 12A1, THPT Quỳnh Lưu 4; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Hoài Bảo, 10 Toán 2, THPT Chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Ngô Ngọc Đống, 10T, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Kon Tum:** Cao Thanh Hà, 10A1, THPT chuyên Kon Tum; **Vĩnh Long:** Nguyễn Thiên Quang, 10T2, Trần Hoàng, 12T, THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Vũng Tàu:** Phùng Thanh Huy 12 TA7 THPT Vũng Tàu.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Đọc lại cho đúng

Trong THPT số 390 (tháng 12/2009) trang 17, đề T11/390 có sự nhầm lẫn, nay xin đọc lại như sau:

$$\frac{k_1}{f'(a)} + \frac{k_2}{f'(b)} = k_1 + k_2.$$

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

THẺ LỆ GỬI BÀI CHO TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

- Bài cần đánh máy hoặc viết tay sạch sẽ, không dập xóa, trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng. Không gửi bản photocopy. Nếu bài đã chế bản nên gửi kèm file. Phông chữ nên là unicode.
- Mỗi bài dài không quá 2000 chữ hoặc không quá 4 trang A4 chế bản vi tính.
- Bài dịch cần gửi kèm bản photocopy bài gốc.
- Mỗi đề ra đều có kèm lời giải và không ghi 2 đề trên cùng 1 tờ giấy.
- Ghi đầy đủ họ và tên thật, số điện thoại, địa chỉ để tiện liên hệ. Mỗi bài chỉ gửi một lần. Bài không đăng không trả lại bản thảo.
- Ảnh tập thể gửi đăng phải là ảnh màu, cỡ nhỏ nhất 9×12 . Sau ảnh ghi rõ nội dung ảnh và tên người chụp.
- Đối với bài giải gửi dự thi, mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng. Phía trên bên trái ghi số thứ tự của bài, bên phải ghi rõ họ tên, ngày sinh, trường lớp, địa chỉ gia đình. Bài chỉ gửi về một địa chỉ: *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội. Ngoài phong bì ghi rõ: Dự thi giải toán số tạp chí...* Không gửi bài giải của nhiều số tạp chí trong cùng một phong bì. Học sinh THPT không giải bài dành cho THCS. Bài gửi có dán tem.
- Thời hạn nhận bài giải *Để ra kì này* là hai tháng tính từ cuối tháng ra số tạp chí đó. Các bài giải cho các chuyên mục khác là 1 tháng.
- Bài đã gửi cho TH&TT thì không gửi cho các tạp chí khác.

THTT

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/391. Solve the equation

$$3x^4 - 4x^3 = 1 - \sqrt{(1+x^2)^3}.$$

T7/391. Does there exist a polynomial $P(x)$ of degree 2010 such that $P(x^2 - 2010)$ is divisible to $P(x)$?

T8/391. Let $Oxyz$ be a right trihedral with right angle at O , and A, B, C move on the sides Ox, Oy and Oz respectively so that the area of the triangle ABC is a constant S . Let S_1, S_2, S_3 be the areas of the triangles OBC, OCA, OAB respectively. Find the greatest value of the expression :

$$P = \frac{S_1}{S + 2S_1} + \frac{S_2}{S + 2S_2} + \frac{S_3}{S + 2S_3}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/391. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\min \left\{ \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}; \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \right\} \geq \max \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}; \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right\}.$$

T10/391. For a given positive integer n , how many n -digit natural numbers can be formed from five possible digits 1, 2, 3, 4 and 5 so that an odd numbers of 1 and even numbers of 2 are used?

T11/391. A sequence $(x_n), n = 0, 1, \dots$ is given by $x_0 = \alpha$ and $x_n = \sqrt{1 + \frac{1}{x_{n-1} + 1}}, n = 0, 1, \dots$ where α is greater than 1.

Determine $\lim x_n$.

Bài T12/391. Let ABC be a triangle with the altitudes AA', BB', CC' meet at H . Prove that

$$\frac{HA}{HA'} + \frac{HB}{HB'} + \frac{HC}{HC'} + 6\sqrt{3} \geq 6 + \frac{a}{HA'} + \frac{b}{HB'} + \frac{c}{HC'}.$$

Translated by LE MINH HA

PHƯƠNG PHÁP... (Tiếp trang 11)

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & \frac{1}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(a^2+ac+c^2)}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{(b^2+bc+c^2)(b^2+ba+a^2)}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{(c^2+ca+a^2)(c^2+cb+b^2)}} \geq 4 + \frac{8}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

b) Tìm hằng số k lớn nhất để mỗi bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sqrt{a+k(b-c)^2} + \sqrt{b+k(c-a)^2} + \sqrt{c+k(a-b)^2} \leq 3 \\ \text{ii)} \quad & \frac{1}{\sqrt{a+k(b-c)^2}} + \frac{1}{\sqrt{b+k(c-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{c+k(a-b)^2}} \geq 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(b+c)^2+6} + \frac{1}{(c+a)^2+6} + \frac{1}{(a+b)^2+6} \geq \frac{3}{10}.$$

3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{8a^2+1} + \sqrt{8b^2+1} + \sqrt{8c^2+1} \leq 3(a+b+c).$$

Chào Xuân
CANH DẦN

*Đón chúa Sơn Lâm đón Tết Dần
Rượu nồng vui chút để chào Xuân.
Người yêu lướt Hổ nhanh xa liền,
Kể khoai năm Trâu khỏe hội phần.*

*Giải loạn xời cày làm hương mới,
Làm thơ trần trở nghĩ cách lân.
Mong sao Tết chỉ Văn, Toán trẻ
Nối kết tâm duyên xích lại gần.*

ĐÀO TAM
(ĐH Vinh)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

LỚP 12 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2009

MÔN TOÁN

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD Bộ GD&ĐT)

Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm 2009 đã được tổ chức vào ngày 25/02/2009. Có 390 học sinh tham dự kì thi. Đề thi gồm 5 câu (bài toán) với thời gian làm bài là 180 phút.

I. ĐỀ THI

Câu 1 (4 điểm). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Câu 2 (5 điểm). Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}$$

với mọi $n \geq 2$.

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$.

Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Câu 3 (5 điểm). Trong mặt phẳng, cho hai điểm cố định A, B ($A \neq B$). Xét một điểm C di động trong mặt phẳng sao cho $\widehat{ACB} = \alpha$, trong đó α là một góc cho trước ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC và CA tương ứng tại D, E và F . Các đường thẳng AI và BI lần lượt cắt đường thẳng EF tại M và N . Chứng minh rằng:

- 1) Đoạn thẳng MN có độ dài không đổi;
- 2) Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4 (3 điểm). Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: Với mỗi số nguyên dương n , $a^n + b^n + c^n$ là một số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q, r sao cho a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Câu 5 (3 điểm). Cho số nguyên dương n . Kí hiệu T là tập hợp gồm $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập con S của T có tính chất: Trong S không tồn tại các số a, b mà $|a - b| \in \{1; n\}$?

(Lưu ý: Tập rỗng được coi là tập con có tính chất nêu trên).

II. KẾT QUẢ

Căn cứ kết quả chấm thi và quy chế hiện hành, lãnh đạo Bộ GD&ĐT đã quyết định trao giải cho 131 thí sinh (chiếm 33,58% tổng số thí sinh dự thi) có điểm bài thi từ 12 điểm trở lên; trong đó, có 01 thí sinh (đạt 18 điểm) được trao giải Nhất, 22 thí sinh được trao giải Nhì, 62 thí sinh được trao giải Ba và 46 thí sinh được trao giải Khuyến khích. Kết quả cụ thể như sau:

- **Giải Nhất:** Đoàn Nguyên Nhật (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng).
- **Giải Nhì:** Nguyễn Quang Chúc (Bắc Giang); Lê Phúc Lữ (Bến Tre); Trần Lê Bách (Đà Nẵng); Nguyễn Văn Hùng, Trương Đại Phước (Hà Nam); Nguyễn Xuân Kỳ (Hà Nội); Lê Thanh Bình, Nguyễn Xuân Cường (Hải Dương); Phan Phương Đức (Nghệ An); Tạ Đức Thành (Phú Thọ); Võ Văn Cửu (Quảng Ngãi); Ngô Đức Long (Quảng Ninh); Trịnh Phương Thu (Thanh Hóa); Đỗ Trung

Kiên (Thái Bình); Lưu Xuân Khôi (Thái Nguyên); Nguyễn Thành Thái (Thừa Thiên - Huế); Tạ Thế Anh, Văn Mạnh Tuấn (Vĩnh Phúc); Hà Khương Duy (ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội); Nguyễn Phạm Đạt, Nguyễn Anh Hùng và Nguyễn Thọ Tùng (ĐHSP Hà Nội).

• **Giải Ba:** Hà Trọng Sỹ (Bắc Giang); Nguyễn Thành Long (Bắc Ninh); Dương Tú (Bình Định); Hoàng Văn Quý (Bình Phước); Nguyễn Phạm Tuấn Anh (Cà Mau); Hoàng Gia Ân, Nguyễn Anh Khoa, Lê Văn Tấn Quyền (Đà Nẵng); Bùi Đình An, Bùi Quốc Dũng (Đắk Lắk); Nguyễn Ngọc Hoa Quỳnh (Đồng Nai); Phạm Lan Anh (Hà Nam); Mai Tuấn Anh, Nguyễn Trần Bách, Hồ Đức, Nguyễn Văn Quyền (Hà Nội); Trần Quang Biển (Hà Tĩnh); Nguyễn Văn Cường, Dương Tiến Quang, Nguyễn Anh Tú (Hải Dương); Đào Minh Hoàng, Phạm Đức Hùng, Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Đào Tùng (Hải Phòng); Nguyễn Thanh Giang (Hưng Yên); Trần Công Bằng (Khánh Hòa); Lê Viết Sơn (Kiên Giang); Lê Duy Thanh (Lào Cai); Trần Thị Hồng Vân, Phạm Văn Cảnh, Trần Thanh Tùng, Trần Vũ Trung (Nam Định); Thân Trọng Đức, Dương Hoàng Hưng, Nguyễn Phước Lộc, Lê Tiến Nam (Nghệ An); Triệu Quang Phong, Nguyễn Ngọc Trung, Phùng Minh Vũ (Phú Thọ); Lê Kim Cao, Phan Sơn Dương (Phú Yên); Nguyễn Trung Kiên (Quảng Bình); Thái Nguyên Dung (Quảng Nam); Đặng Thu Hương (Quảng Ninh); Tô Đình Dương, Phạm Ngọc Trường Vinh (Quảng Ngãi); Trịnh Quang Thanh (Thanh Hóa); Lương Thu Hương, Huỳnh Dương (Thái Bình); Lê Hoàng Anh (Tp. Hồ Chí Minh); Nguyễn Trương Hoàng Nhật, Lê Chí Tâm (Thừa Thiên - Huế); Lê Duy Dũng, Nguyễn Hoàng Hải (Vĩnh Phúc); Mai Công Hưng, Mai Tiến Khải, Trần Nhật Tân (ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội); Phạm Hy Hiếu (ĐHQG TP. Hồ Chí Minh); Đào Cơ (ĐH Huế); Phan Tiến Dũng, Nguyễn Anh Hoàng, Nguyễn Hữu Hồng Quân (ĐH Vinh).

• **Giải Khuyến khích:** Nguyễn Minh Dương (Bà Rịa - Vũng Tàu); Nguyễn Viết Điệp (Bắc Ninh); Nguyễn Ngọc Hưng, Ngô Thị Mỹ

Liên, Bùi Trọng Trí (Bình Định); Lê Đại Thành (Cần Thơ); Nguyễn Ngọc Sơn (Đà Nẵng); Lê Duy Tùng (Đắk Lắk); Lại Việt An (Hà Nam); Bạch Đình Thắng (Hà Nội); Đặng Thị Bảo Ngọc, Nguyễn Thế Cường (Hà Tĩnh); Lê Văn Nhâm, Bùi Thanh Sơn (Hải Phòng); Phan Thanh Bình (Hậu Giang); Đỗ Thị Thu Trang, Nguyễn Đức Vương (Hưng Yên); Bùi Bình Minh (Khánh Hòa); Phùng Xuân Kiên (Lâm Đồng); Đồng Khau Tú (Nam Định); Nguyễn Thị Hà, Lê Đức Thắng, Lương Văn Thiện (Ninh Bình); Nguyễn Thanh Thảo, Võ Thanh Tuấn (Ninh Thuận); Trần Bảo Trung (Phú Yên); Phạm Quang Huy (Quảng Ninh); Nguyễn Đình Trung (Quảng Ngãi); Phạm Ngọc Thắng, Nguyễn Đức Thiện (Quảng Trị); Trần Xuân Quang, Nguyễn Đức Tài, Nguyễn Cao Tuấn (Thanh Hóa); Phạm Mạnh Cường, Nguyễn Xuân Thiện (Thái Bình); Nguyễn Hoàng Tùng (Thái Nguyên); Nguyễn Hoàng Sơn (Tp. Hồ Chí Minh); Trần Bá Trung (Vĩnh Phúc); Lại Trung Toàn (Yên Bái); Nguyễn Minh Hiếu, Mai Trung Nghĩa, Nguyễn Mạnh Tuấn (ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội); Nguyễn Mạnh Tiến, Võ Văn Tuấn (ĐHQG TP. Hồ Chí Minh); Nguyễn Trung Kiên (ĐHSP Hà Nội); Nguyễn Thanh Tú (ĐH Vinh).

III. MỘT SỐ NHẬN XÉT VÀ ĐÁNH GIÁ

1. Theo đánh giá của Tổ chấm thi, Đề thi đảm bảo tính chính xác khoa học, phân loại được trình độ của học sinh dự thi.

2. Thực tế chấm thi cho thấy không ít thí sinh chưa nắm vững một số kiến thức cơ bản, chưa thực hiện thành thạo một số kỹ năng cần thiết theo yêu cầu của Chương trình môn Toán THPT hiện hành.

3. Có thể thấy, các câu 1, 2 và 3 của Đề thi là các bài toán thuộc loại cơ bản theo nội dung bồi dưỡng học sinh khá, giỏi Toán mà Bộ GD&ĐT đã hướng dẫn. Vì thế, việc có hơn 70% số học sinh dự thi không thể giải quyết trọn vẹn ba bài toán đó trong thời gian 180 phút là một điều đáng để những người có trách nhiệm, quan tâm tới phong trào học sinh khá, giỏi Toán suy ngẫm.



Giải đáp: THỦ KĨ NĂNG SUY LUẬN

(Đề đăng trên THPT số 386, tháng 8.2009)

Gọi a_k là số hạng thứ k ($k = 1, 2, 3, \dots$) của dãy số.

• **Bài 1.** 1, 4, 27, 16, ?, 36, 343.

Ta thấy $a_k = \begin{cases} k^3 & \text{với } k \text{ lẻ} \\ k^2 & \text{với } k \text{ chẵn.} \end{cases}$

Suy ra số cần tìm là $a_5 = 5^3 = 125$.

• **Bài 2.** 4, 6, 12, 14, 28, 30, ?.

Ta coi $a_0 = 2$ thì $a_k = \begin{cases} 2a_{k-1} & \text{với } k \text{ lẻ} \\ 2 + a_{k-1} & \text{với } k \text{ chẵn.} \end{cases}$

Suy ra số cần tìm là $a_7 = 2 \times 30 = 60$.

• **Bài 3.** $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, ?$

Ta thấy $a_k = \frac{2k-1}{2^k}$.

Suy ra số cần tìm là $a_5 = \frac{9}{32}$.

Nhận xét. Rất nhiều bạn đã giải đáp đúng. Xin nêu tên các bạn gửi bài sớm và trình bày rõ ràng:

1) *Lê Nguyên Khánh*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**.

2) *Ngô Thị Thanh Nga*, 9B, THCS Từ Sơn, TX. Từ Sơn, **Bắc Ninh**.

3) *Nguyễn Trọng Hiệp*, 8A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

4) *Đỗ Việt Dũng*, 11A4, THPT Đinh Tiên Hoàng, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa – Vũng Tàu**.

5) *Lê Thị Hương Giang*, Thôn Tân Trại 1, xã Vĩnh Giang, Vĩnh Linh, **Quảng Trị**.

ĐAN QUỲNH

ĐIỀN SỐ CHO ĐÚNG

Bạn hãy điền các số nguyên dương nhỏ hơn 10 vào những ô vuông còn trống trong bảng bên sao cho khi thực hiện các phép tính theo mỗi hàng (từ trái sang phải) và theo mỗi cột (từ trên xuống dưới) đều được kết quả đúng, biết rằng bốn số ở mỗi hàng hoặc mỗi cột đều khác nhau. (kí hiệu $\div$ chỉ phép chia).

PHẠM QUỲNH
(Công ty CP SGD tại Hà Nội)

	$\div$		$\times$		$=$	6
+		-		$\times$		+
	+		-	5	$=$	
$\div$		+		-		$\div$
	$\times$	2	-		$=$	
$=$		$=$		$=$		$=$
3	+		+		$=$	

Ngày 26 tháng 12 năm 2009, tại TP. Nam Định, Bộ GD&ĐT long trọng tổ chức Hội nghị các trường THPT chuyên năm 2009. Đến dự và chủ trì Hội nghị có các Thứ trưởng Bộ GD&ĐT: Thứ trưởng Thường trực *Phạm Vũ Luận*, Thứ trưởng *Nguyễn Vinh Hiển* và Thứ trưởng *Trần Quang Quý*. Hội nghị có khoảng 350 đại biểu tham dự bao gồm đại diện lãnh đạo TP. Nam Định, lãnh đạo các đơn vị trực thuộc Bộ GD&ĐT, đại diện lãnh đạo các Sở GD-ĐT, các khối, trường THPT chuyên trong cả nước, NXBGD Việt Nam, Tạp chí THPT, các phóng viên Báo chí và Truyền hình...

Hội nghị đã khẳng định các trường THPT chuyên có chất lượng giáo dục rất cao; là các nơi phát hiện, nuôi dưỡng nhân tài cho đất nước; nơi thu hút các cán bộ, giáo viên giàu năng lực và kinh nghiệm; cơ sở vật chất được ưu tiên đầu tư xây dựng và hợp tác, trao đổi với các cơ sở giáo dục trong và ngoài nước có hiệu quả... Tuy nhiên, hệ thống trường THPT chuyên phát triển không đồng đều, thiếu quy hoạch; công tác tuyển sinh, chương trình giảng dạy... nhìn chung còn nhiều khó khăn, bất cập. Các đại biểu tham dự đã chia sẻ các kinh nghiệm trong



việc xây dựng trường THPT chuyên đồng thời bày tỏ ý kiến về hoạt động của trường THPT chuyên hiện nay. Tại Hội nghị, Bộ GD&ĐT đã tặng Bằng khen của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT cho 42 tập thể (gồm 21 tập thể các trường và khối chuyên, 21 tổ chuyên môn) và 77 cá nhân đã có thành tích xuất sắc trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi và bồi dưỡng giáo viên.

Để nâng cao chất lượng các trường THPT chuyên, Bộ GD&ĐT đã soạn thảo Đề án Phát triển hệ thống trường THPT chuyên giai đoạn 2010-2020 và công bố, xin ý kiến góp ý của các đại biểu tham dự. Hi vọng các trường THPT chuyên sẽ là mô hình mẫu để các trường THPT noi theo.

THANH LOAN

THÔNG BÁO

- ★ Tạp chí THPT phát hành cuốn **ĐÓNG TẬP TOÁN HỌC & TUỔI TRÈ NĂM 2009**. Tất cả 12 số tạp chí THPT trong năm được đóng thành tập bìa cứng, mạ chữ vàng. Đây là cách để lưu giữ tạp chí tốt nhất, có hệ thống và tiện tra cứu đối với các thư viện, các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán. Số lượng sách có hạn, bạn muốn có trọn bộ THPT năm 2009 hãy liên hệ ngay với Tòa soạn. Giá bán lẻ 88.000 đồng.
- ★ Mời các bạn đặt mua Tạp chí THPT cho quý I năm 2010 tại các cơ sở Bưu điện nơi gần nhất. Mọi chi tiết xin các bạn vui lòng liên hệ tại các cơ sở Bưu điện nơi đặt mua.

THPT



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Trần Quang Quý – Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ – Tài liệu tham khảo quý với các bạn trẻ yêu toán.

2 Quang Phúc - Lễ Kỷ niệm 45 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

3 Phạm Thị Bạch Ngọc – 45 năm Toán học và Tuổi trẻ hành trình cùng bạn trẻ yêu toán.

4 Lời Cảm ơn.

5 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School

Chu Tuấn – Thử nhìn bằng con mắt lượng giác.

6 Lời giải Đề thi vào lớp 10 chuyên toán Trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2009 – 2010.

7 Đề thi vào lớp 10 chuyên toán Trường THPT chuyên Vinh Phúc, năm học 2009 – 2010.

8 Phương pháp giải toán – Math Problem Solving

Võ Quốc Bá Cẩn – Phương pháp "Đồn biến – Thừa trừ" (Tiếp theo kì trước).

10 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation

Đặng Thanh Hải, Trần Tuyết Thanh – Đổi biến trong tích phân hàm lượng giác.

13 Lịch sử toán học – History of Maths

Tạ Duy Phượng – Trò chơi Tháp Hà Nội: Lịch sử và bài toán tổng quát.

16 Đề ra kì này – Problems in This Issue

T1/391, ..., T12/391, L1/391, L2/391.

18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems

Giải các bài của số 387.

28 Nguyễn Khắc Minh – Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia Lớp 12 THPT năm 2009, môn Toán.

30 Giải trí toán học – Math Recreation

31 Tin tức

Hội nghị các trường THPT chuyên.

Bìa 1. Học sinh trường THCS Giảng Võ, Hà Nội biểu diễn Văn nghệ chào mừng Lễ Kỷ niệm 45 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ

Bìa 2, Bìa 3. Một số hình ảnh trong Lễ Kỷ niệm 45 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

LỄ KỶ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



Thư trưởng PGS.TS. Trần Quang Quý
tặng Bằng Khen
của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT
cho Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.



TS. Nguyễn Quý Thao
trao giải thưởng sáng tác
Biểu trưng THPT
cho họa sĩ Tạ Thanh Tùng.



ThS. Hồ Quang Vinh -
Thư ký Tòa soạn.



Ông Hoàng Lê Bạch,
Trưởng ban Tổ chức Nhân sự
NXB Giáo dục Việt Nam.



Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ và các thế hệ bạn đọc trong ngày vui.



DỰ ÁN PHÁT TRIỂN GIÁO VIÊN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG CẤP CHUYÊN NGHIỆP

MỤC TIÊU VÀ TIẾN ĐỘ

I - MỤC TIÊU

1. Mục tiêu chung

Dự án phát triển Giáo viên Trung học phổ thông và Trung cấp chuyên nghiệp (THPT&TCCN) của Bộ Giáo dục và Đào tạo nhằm nâng cao chất lượng giáo dục THPT&TCCN thông qua việc xây dựng, nâng cao chất lượng đội ngũ nhà giáo và cán bộ quản lý giáo dục THPT&TCCN.

2. Mục tiêu cụ thể

a. Nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng giáo viên THPT&TCCN.

b. Mở rộng cơ hội cho đối tượng là người dân tộc thiểu số được đào tạo thành giáo viên THPT&TCCN.

c. Tăng cường năng lực quản lý công tác xây dựng, phát triển nâng cao chất lượng đội ngũ giáo viên THPT&TCCN.

d. Tăng cường cơ sở vật chất, phương tiện và thiết bị dạy học cho các cơ sở đào tạo giáo viên THPT&TCCN.

Tổng nguồn vốn của Dự án là 43,186 triệu đô la Mỹ, trong đó vốn vay của ADB là 34 triệu đô la Mỹ và vốn đối ứng 9,186 triệu đô la Mỹ.

Thời gian thực hiện Dự án từ tháng 1 năm 2007 đến ngày 31 tháng 12 năm 2011.

II - TIẾN ĐỘ THỰC HIỆN CÁC MỤC TIÊU CHỦ YẾU ĐẾN 31/12/2009

1. Xây dựng và trình Bộ Giáo dục và Đào tạo 4 Chuẩn Giáo dục. Hiện nay đã ban hành 02 Chuẩn: Chuẩn Nghề nghiệp Giáo viên THPT và Chuẩn Hiệu trưởng Trường THPT.

2. Đang tiến hành đào tạo 500 Thạc sĩ là giáo viên THPT&TCCN (trên 50% là nữ).

3. Tập huấn được khoảng 10000 cán bộ, giảng viên các trường Đại học thụ hưởng Dự án, cán bộ quản lý và giáo viên cốt cán của 13 Sở Giáo dục và Đào tạo về Phát triển Chương trình đào tạo, quản lý đào tạo, đổi mới nội dung và phương pháp đào tạo giáo viên THPT&TCCN và các Bộ chuẩn giáo dục.

4. Khởi công tất cả các công trình xây dựng cơ bản tại 17 trường Đại học thụ hưởng Dự án, hiện nay có 02 công trình đã hoàn thành và đi vào sử dụng.

5. Cung cấp trang thiết bị cho các trường Đại học và các Sở Giáo dục và Đào tạo thụ hưởng Dự án: đồ gỗ và thiết bị phục vụ dạy và học.

6. Đã và đang tiến hành triển khai cấp 3700 suất học bổng (trong tổng số 5000 suất) hỗ trợ cho sinh viên người dân tộc thiểu số được đào tạo thành giáo viên THPT&TCCN.

7. Đã trao thầu đạt 46% nguồn vốn, giải ngân đạt 26% nguồn vốn.

Trưởng ban điều hành Dự án
PGS.TS. VŨ QUỐC CHUNG

Địa chỉ liên hệ:

DỰ ÁN PHÁT TRIỂN GIÁO VIÊN THPT & TCCN - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
Số 8, phố Trung Kính, phường Trung Hòa, Quận Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam
Telephone: (84-4) 37832795; FAX : (84-4) 37832798