



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
11 2009
Số 389

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



Tập thể sư phạm Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương
năm học 2009 - 2010



Chào mừng

Ngày Nhà giáo Việt Nam 20-11

<http://tieulun.hopto.org>

Thư chúc mừng

NHÂN DỊP KỶ NIỆM 45 NĂM XUẤT BẢN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



**Kính gửi: Cán bộ, Phóng viên, Biên tập viên, Cộng tác viên
và bạn đọc Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ**

Trong hệ thống Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ là tờ báo có bề dày truyền thống và lịch sử phát triển lâu nhất, đạt nhiều thành tích nhất. Phát hành số đầu tiên vào năm 1964, trong 45 năm qua, Tạp chí đã không ngừng nâng cao chất lượng nội dung, mở rộng các chuyên mục, đổi mới hình thức, phong phú hóa các hoạt động để đáp ứng nhu cầu dạy - học bộ môn Toán trong nhà trường và tạo một "sân chơi" kiến thức bổ ích, lí thú cho bạn đọc yêu thích toán học.

Gần nửa thế kỉ qua, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã trở thành người bạn đồng hành thân thiết, tin cậy, đối với nhiều thế hệ thầy cô giáo, phụ huynh, bạn đọc và học sinh, sinh viên yêu môn Toán. Có nhiều lí thuyết, quan điểm, định nghĩa khác nhau về toán học và tác dụng của toán học; riêng Tạp chí luôn phấn đấu bền bỉ với mục tiêu chuẩn bị hành trang cho tuổi trẻ là: - Giúp cho học sinh phát triển trí thông minh, vận dụng tốt khả năng suy luận; - Đặt nền tảng cho các ngành khoa học tự nhiên khác; - Rèn luyện cho học sinh tính kiên trì và tự lập; - Thông qua vẻ đẹp của toán học, học sinh có thể cảm thụ những cái đẹp tồn tại chung quanh, từ đó góp phần tạo nên vẻ đẹp mạnh giàu của đất nước.

Với hành trang này và nhờ sự dạy dỗ tận tâm của các thầy cô giáo, sự nỗ lực của bản thân, nhiều thế hệ trẻ tuổi đã trở thành những nhà toán học ưu tú, những nhà khoa học nổi tiếng, những doanh nhân thành đạt... Là bạn đọc trung thành của Tạp chí, cộng hưởng với sự thông minh, sáng tạo và kiên trì, nhiều học sinh đã vượt qua những Kỳ thi toán học Quốc gia, Khu vực và Quốc tế một cách xuất sắc; nhiều bạn trẻ đã có chìa khóa vàng, mở cánh cửa các trường Đại học trong nước, trong Khu vực và Quốc tế một cách tự tin. Đó là điều tự hào của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ! Xứng đáng với tâm huyết và kì vọng của những người đã khai sinh ra Tạp chí như: GS. Tạ Quang Bửu, GS. Lê Văn Thiêm, GS. Nguyễn Cảnh Toàn, GS. Hoàng Tụy, GS. Hoàng Chúng và nhiều nhà toán học, thầy cô giáo khác nữa.

Nhân dịp Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tròn 45 tuổi, xin gửi lời cảm ơn chân thành đến các nhà khoa học, các tác giả, cộng tác viên, thầy cô giáo, phụ huynh và các bạn sinh viên, học sinh đã luôn ủng hộ, hỗ trợ tờ Tạp chí yêu quý của chúng ta.

Kính chúc các Ủy viên Hội đồng biên tập, Cán bộ, Phóng viên, Biên tập viên, Cộng tác viên cùng anh chị em tòa soạn Tạp chí nhiều sức khỏe, bút lực và sức sáng tạo luôn dồi dào.

Chúc Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tiếp tục đạt nhiều thành tích trên chặng đường phát triển mới; luôn xem sự tiến bộ và thành công của bạn đọc là niềm vui và hạnh phúc của chính mình.

Xin trân trọng kính chào!

Hà Nội, ngày 2 tháng 11 năm 2009

**CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG QUẢN TRỊ -
TỔNG GIÁM ĐỐC NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM**

NGÔ TRẦN ÁI

Ba "KHÔNG" chụm lại THÀNH HÒN NÚI CAO

NGUYỄN CẢNH TOÀN
(Hà Nội)

Học sinh rất sợ điểm "Không". Trong toán học số 0 lại có công lớn. Sau đây là câu chuyện về ba số 0 đã dùng cách gây trở ngại nhằm kích thích người làm toán phải sáng tạo để phức phục sự trở ngại, nhờ vậy mà đẩy toán học lên cao.

1) Số mũ "Không".

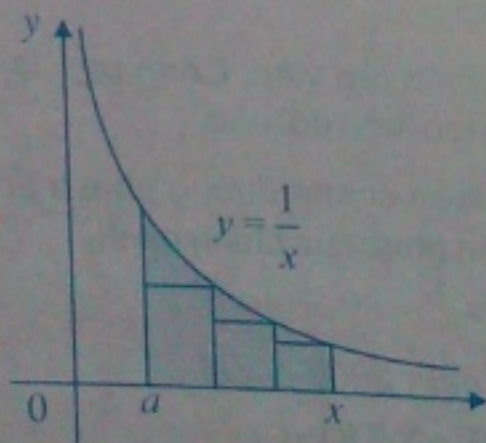
Theo định nghĩa của lũy thừa thì a^0 là vô nghĩa. Nhưng người làm toán không chịu coi nó là vô nghĩa, bởi nếu thế thì sẽ phải chấp nhận nhiều hạn chế khác về sau. Vì $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(m, n là số tự nhiên và $m > n$), còn khi $m = n$ thì vế trái thành 1 và vế phải thành a^0 nên thật là hợp lí nếu quy ước $a^0 = 1$. Từ đây trở đi, coi như đường đã mở thông để lần lượt chấp nhận các số mũ âm, các số mũ hữu tỉ rồi vô tỉ và cuối cùng đi đến hàm số mũ $y = a^x$. Ta hãy tạm dừng để giới thiệu một số 0 khác.

2) Nguyên hàm của $\frac{1}{x}$.

Nguyên hàm của x^m là $\frac{x^{m+1}}{m+1}$, sai khác nhau

là một hằng số bất kì. Nhưng vẫn bế tắc nếu $m + 1 = 0$. Số 0 ở vế phải gây trở ngại



những người làm toán đâu có chịu thua.

Họ xoay sang tính diện tích của hình giới hạn bởi đường

cong $y = \frac{1}{x}$,

trục hoành và hai đường

thẳng vuông góc với trục hoành ở hai điểm có hoành độ là a (hằng số) và x (biến số lớn hơn a). Theo lí thuyết chung thì diện tích đó là một hàm của x có đạo hàm bằng $\frac{1}{x}$. Chia

đoạn $[a; x]$ ra n phần bằng nhau rồi tính tổng diện tích các hình chữ nhật ở hình vẽ, sau đó cho $n \rightarrow +\infty$ thì được diện tích cần tìm. Nó là một hàm logarit với cơ số là giới hạn của

$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, khi $m \rightarrow +\infty$. Đó là một số siêu việt xấp xỉ bằng 2,71828 được kí hiệu là e .

Như vậy, lần này $m + 1 = 0$, tưởng là đưa tới điều vô nghĩa, lại làm xuất hiện số với logarit cơ số e của x được kí hiệu là $\ln x$. Xin hãy tạm dừng để giới thiệu nốt số 0 thứ ba.

3) Giải phương trình bậc ba.

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ sẽ có 0 nghiệm nếu $b^2 - 4ac < 0$. Điều này không làm ai thất vọng vì những phương trình 0 nghiệm lại ứng với những chuyện vô lí, ví như đòi xây một cái phòng có chu vi 20m nhưng diện tích là $30m^2$. Nhưng hướng sang việc giải các phương trình bậc ba thì lại gặp việc bế tắc khi một phương trình bậc hai tham gia vào cách giải có 0 nghiệm.

Ta hãy lấy phương trình $x^3 - x = 0$ làm ví dụ. Rõ ràng nó có ba nghiệm là 0, -1, 1. Nhưng nếu giải phương trình đó bằng cách sau đây thì bế tắc mặc dù cách giải rất hợp lí:

Ta đổi ẩn số x thành tổng của hai ẩn số y và z lệ thuộc vào nhau; lệ thuộc như thế nào, hạ hồi phân giải. Thay x bằng $y + z$, ta có

$$(y+z)^3 - (y+z) = 0$$

$$\text{hay } y^3 + z^3 + 3yz(y+z) - (y+z) = 0$$

$$\text{hay } y^3 + z^3 + (y+z)(3yz-1) = 0.$$

Vì y và z không phải là hai ẩn số độc lập nên đến đây ta buộc cho chúng một liên hệ $3yz-1=0$.

Vậy y và z phải nghiệm đúng hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 + z^3 = 0 \\ yz = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy y^3 và z^3 có tổng và tích theo thứ tự bằng 0 và $\frac{1}{27}$ nên là hai nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 + \frac{1}{27} = 0$.

Nhưng phương trình này có 0 nghiệm (!). Trong tình hình đó, đã có ý kiến táo bạo là chấp nhận căn bậc hai của -1 , qua đó mà có căn bậc hai của các số âm. Với kí hiệu $i = \sqrt{-1}$, việc giải phương trình $X^2 + \frac{1}{27} = 0$ cho ta hai

$$\text{nghiệm là } X_1 = y^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}i, X_2 = z^3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}i.$$

Còn phải tìm căn bậc ba của i và $-i$. Chúng sẽ có dạng $m+ni$, trong đó m và n là hai số thực.

$$(m+ni)^3 = m^3 + 3m^2ni - 3mn^2 - n^3i = \pm i.$$

$$\text{Với dấu +, ta được } m^3 - 3mn^2 = 0 \quad (a)$$

$$3m^2n - n^3 = 1 \quad (b)$$

Từ (a) có $m=0$ hoặc $m^2=3n^2$.

• Với $m=0$, từ (b) có $n^3=-1$, nên $n=-1$.
và ta có một căn bậc ba của i là $-i$.

• Với $m^2=3n^2$ thì từ (b) có $8n^3=1$ nên $n=\frac{1}{2}$

$$\text{và } m = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy ngoài $-i$ ra, i còn có hai căn bậc ba là

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2} \text{ và } \frac{-\sqrt{3}+i}{2}.$$

Do đó y có ba giá trị là

$$\frac{1}{\sqrt{3}}i; \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}; \frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}.$$

Phải lấy $y+z$ để có x , nhưng lấy y nào cộng với z nào? Do tích yz phải bằng $\frac{1}{3}$ nên chỉ có

ba cách chọn y và z , đó là

• $\frac{1}{\sqrt{3}}i$ và $-\frac{1}{\sqrt{3}}i$; thế thì $x=y+z=0$.

• $\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}$ và $-\frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}$; thế thì $x=y+z=1$.

• $\frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}$ và $-\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}$; thế thì $x=y+z=-1$.

Vậy số vô nghĩa đã giải quyết được bế tắc để tìm được đúng ba nghiệm 0, 1, -1 . Thật cứ y như trong chuyện thần thoại, cô tiên i đã hóa phép cho việc giải phương trình $x^3-x=0$ được thông suốt.

Sau khi ba số 0 đã ra mắt độc giả, ta hãy thử xem nếu chúng chụm lại với nhau thì toán học sẽ được cái gì?

Đã có hàm a^x thì bây giờ có thể nghĩ đến hàm e^x . Nó có gì lạ? Đặt $y=e^x$ thì $\ln y=x$;

đạo hàm cả hai vế, ta có $\frac{y'}{y}=1$ tức $y'=y$. Vậy

đạo hàm của e^x lại là e^x . Bây giờ ta hãy tìm các hàm số y thỏa mãn điều kiện sau đây: $y+y''=0$.

Do $(e^x)'=e^x$ nên ta nghĩ đến hàm số $y=e^{Kx}$; khi đó $y''=K^2e^{Kx}$ và $y+y''=(1+K^2)e^{Kx}$.

Để vế phải bằng 0 ta phải lấy $K=\pm i$. Vậy bước đầu ta tìm được hai hàm số $y=e^{ix}$ và $y=e^{-ix}$ thỏa mãn điều kiện $y+y''=0$.

Nhưng một điều lạ lại xuất hiện; số mũ 0 rồi lần lượt các số mũ âm, hữu tỉ, vô tỉ còn quan niệm được; bây giờ lại đến lượt cái số i lạ lùng kia vất vẻo ngồi vào vị trí số mũ thì thật là quá lạ. Hãy cứ dần lên xem. Ta thấy ngay rằng $Ae^{ix}+Be^{-ix}$ trong đó A và B là hai hằng số bất kì cũng thỏa mãn điều kiện $y+y''=0$. Ta đã đi hơi xa với e và i . Hãy trở về gần. Các hàm $y=\sin x$ và $y=\cos x$ cũng thỏa mãn điều kiện $y+y''=0$. Rộng ra thì hàm $y=C\sin x+D\cos x$ trong đó C và D là hai hằng số bất kì cũng thỏa mãn điều kiện $y+y''=0$.

Để xác định được A, B, C, D thì phải chọn cho điều kiện ban đầu nghĩa là cho một giá trị x_0 của x và yêu cầu các giá trị tương ứng của y và y' phải là những số y_0, y'_0 cho trước. Theo một lí thuyết chung thì khi đó, hàm y là duy nhất. Ta hãy lấy $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = i$ để xem A, B rồi C, D bằng bao nhiêu. Thay $x = 0$ vào trong $y = Ae^{ix} + Be^{-ix}$ và vào trong $y' = iAe^{ix} - iBe^{-ix}$, ta được $1 = A + B, i = iA - iB$, từ đó suy ra $A = 1, B = 0$. Vậy hàm $y = e^{ix}$ thỏa mãn điều kiện ban đầu (khi $x = 0$) là $y = 1, y' = i$. Thay $x = 0$ vào trong $y = C\sin x + D\cos x$ và $y' = C\cos x - D\sin x$, ta được $D = 1, i = C$.

Vậy hàm $y = \cos x + i\sin x$ cũng thỏa mãn điều kiện ban đầu (khi $x = 0$) là $y = 1, y' = i$. Do tính duy nhất của y khi đã xác định các điều kiện ban đầu, nên ta có

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \text{ và do đó } e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\text{rồi suy ra } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Thật lạ lùng! Không ai ngờ các hàm lượng giác $\sin x, \cos x$ rất thực tế lại có thể diễn tả thành hàm lũy thừa với sự giúp đỡ của e và i . Nếu lấy công thức $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ và cho $x = \pi$ thì ta được $e^{i\pi} = -1$, hay $e^{i\pi} + 1 = 0$. Thật tuyệt vời và lạ lùng. Năm số đặc biệt là $1, 0, \pi, e, i$ ra đời ở những thời đại rất khác nhau, với gốc tích rất khác nhau bỗng nhiên tụ hội lại trong công thức trên. Có thể ví công thức trên với một bản hòa tấu thật hay của năm nhạc cụ rất khác nhau: $1, 0, \pi, e, i$. Toán học thật là đẹp và nên thơ. Chưa hết đâu. Còn nhiều, nhiều lắm với e , với i . Xin hãy chờ học lên Đại học và cao hơn nữa. Xin tạm dừng ở đây với những bài học cần rút ra cho "cách học" nói chung và "cách học toán" nói riêng.

* Không nên chỉ quan tâm đến kiến thức, dù cho kiến thức là cần, thậm chí là hay, là lạ (như e và i).

* Nên chú ý rèn luyện tư duy. Học được gì về tư duy ở bài này? Đó là bài học dân gian: "Thất bại là mẹ đẻ của thành công", trong thất bại đã có mầm mống của sự thành công. Nói một cách bác học hơn thì: "Thất bại và thành công là một cặp phạm trù đối lập" cần khéo

léo vận dụng để tránh bi quan khi thất bại, tránh chủ quan khi thành công.

* Nên chú ý rèn luyện nhân cách. Nhân cách nói đến trong bài này là "Bản lĩnh kiên trì chân lí". Sau khi đã giải quyết được vấn đề giải phương trình bậc ba, nhiều người vẫn chưa chịu. Họ bảo " i " là cái gì? Nó là số hay không phải là số? Là số sao được khi nó không phải là kết quả của sự cân, đo, đong, đếm. Không phải là số sao nó dám trà trộn vào các số rồi nhảy múa như các số? Người đề xướng ra i vẫn kiên trì chân lí và chiến thắng khi mà trong toán học đã có khái niệm toán tử. Ví dụ $2\vec{V}$ thì 2 ở đây không phải là số (hai vectơ $\vec{V}$) mà là một kí hiệu để chỉ việc phải xây dựng một vectơ mới cùng phương, cùng hướng với $\vec{V}$ và dài gấp đôi $\vec{V}$; $i\vec{V}$ cũng chỉ việc phải xây dựng một vectơ mới bằng cách quay $\vec{V}$ đi một góc 90° , ngược chiều kim đồng hồ; $i^2\vec{V}$ sẽ chỉ việc phải quay liên tiếp hai lần, vị chỉ quay 180° nên có $-\vec{V}$ tức $(-1)\vec{V}.i^2 = -1$ là thế. Toán học nhờ vậy mà đi xa.

Thăm thầy giáo cũ

Về thăm trường cũ ngày xưa
 Bàng xanh, phượng đỏ đung đưa nắng vàng.
 Khang trang trường mới ba tầng
 Thay nhà vách lá liền hàng tránh bom.
 Thăm Thầy, Thầy có nhớ Con
 Ba mươi năm ấy... phấn mồn Thầy ơi.
 Con đi khắp bốn phương trời
 "Đánh tan lũ giặc" vàng lời Thầy trao
 Quân hàm hai gạch ba sao
 Trước Thầy, Con vẫn năm nào nhỏ nhoi.
 Một điều thật dễ hiểu thôi
 Thầy là chân lí cuộc đời của Con.

ĐÀO QUANG ĐIỀN
 (Sở GD-ĐT Hưng Yên)



TRUNG HỌC CƠ SỞ

Một phong cách HỌC TOÁN

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Có được lời giải của một bài toán khó, chúng ta chờ vội vàng thoả mãn, mà hãy tiếp tục phân tích mối liên hệ giữa giả thiết và kết luận đã được vận dụng trong lập luận của lời giải bài toán. Xoay sở, tìm tòi nhiều khi lại giúp chúng ta có được một lời giải khác, lời giải hay hơn, ngắn gọn hơn. Từ đó giúp học toán hứng thú hơn và đạt được những thành công trong học toán. G. Polya (1887 – 1985), nhà toán học và là nhà sư phạm Hoa Kỳ, gốc Hungary đã khuyên rằng: "Ngay khi lời giải mà ta đã tìm được đã là tốt rồi thì tìm được một lời giải khác vẫn có lợi. Thật là sung sướng khi kết quả tìm được xác nhận nhờ hai lí luận khác nhau. Có được một chứng cứ rồi, chúng ta còn muốn tìm thêm một chứng cứ nữa cũng như chúng ta muốn sờ vào một vật mà ta đã trông thấy."

Chúng tôi cho rằng đây là một phong cách học tốt toán mà các bạn học sinh phải cần thường xuyên rèn luyện. Dưới đây là các thí dụ minh hoạ.

★ Bài toán 1. Giải phương trình

$$x^4 + \sqrt{x^2 + 3} = 3 \quad (1)$$

(Đề thi chọn HSG Q1, TP. HCM 2005–2006)

Một số sách toán và đáp án cho lời giải như sau.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3}$ ($t > 0$). Suy ra $t^2 = x^2 + 3$.

Khi đó PT (1) trở thành

$$x^4 + t = t^2 - x^2 \Leftrightarrow x^4 - t^2 + x^2 + t = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + t)(x^2 - t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{hoặc } x^2 + t = 0 \text{ (vô nghiệm) hoặc } x^2 - t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 - t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ (loại) hoặc } t = 2.$$

$$\text{Vậy } t = 2, \text{ ta có } \sqrt{x^2 + 3} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy PT (1) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -1$. □

Từ lời giải trên, với nhận xét rằng $x^4 \geq 0$, $x^2 \geq 0$ và $1 + \sqrt{1+3} = 3$, ta có lời giải khác như sau:

- Xét $x^2 > 1$, ta có $x^4 + \sqrt{x^2 + 3} > 1 + \sqrt{1+3} = 3$.
- Xét $x^2 < 1$, ta có $x^4 + \sqrt{x^2 + 3} < 1 + \sqrt{1+3} = 3$.
- Xét $x^2 = 1$, ta có $x^4 + \sqrt{x^2 + 3} = 3$ (đúng).

Từ đó suy ra PT (1) có hai nghiệm là 1 và -1. □

★ Bài toán 2. Tìm tất cả các số nguyên x thoả mãn $x^3 + 8 = 7\sqrt{8x+1}$ (2)

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM 2001 – 2002).

Lời giải. Điều kiện $8x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{8}$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$, do đó $x \geq 0$. Ta có

$$(2) \Leftrightarrow (x^3 + 8)^2 = 49(8x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^6 + 16x^3 + 64 = 392x + 49$$

$$\Leftrightarrow x^6 + 16x^3 - 392x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 43x^2 + 129x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{hoặc } x = 3$$

$$\text{hoặc } x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 43x^2 + 129x - 5 = 0 \quad (3)$$

Để thấy $x = 0$ không là nghiệm của PT (3), suy ra $x \geq 1$. Do đó Vế trái của (3) lớn hơn 0, hay PT (3) không có nghiệm nguyên.

Vậy PT (2) chỉ có một nghiệm nguyên $x = 3$. □

Cách khác. Đề ý rằng với $x \geq 5$ ta có

$$7\sqrt{8x+1} < 7\sqrt{8x+x} = 21\sqrt{x} < 21x < x^3 < x^3 + 8.$$

Từ đó suy ra x chỉ có thể là các giá trị nguyên 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4. Thử lại ta nhận được $x = 3$ thoả mãn PT (2). □

★ Bài toán 3. Cho a, b là hai số không âm. Chứng minh rằng

$$3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2 \quad (4)$$

Một số sách toán về bất đẳng thức có lời giải như sau.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI

NĂM HỌC 2009 - 2010

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (3,5 điểm)

1) Tính $P = \sqrt{15a^2 - 8a\sqrt{15} + 16}$ khi $a = \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}$.

2) Giải phương trình $\sqrt{25-x^2} - \sqrt{10-x^2} = 3$.

3) Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$. Tìm m và n để hiệu các nghiệm của phương trình bằng 5 và hiệu các lập phương của các nghiệm đó bằng 35.

Câu 2. (2 điểm)

1) Chứng minh rằng nếu b là số nguyên tố khác 3 thì số $A = 3n + 1 + 2009b^2$ là hợp số với mọi $n \in \mathbb{N}$.

2) Tìm các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 18n + 2020$ là số chính phương.

Câu 3. (1 điểm)

Cho $x > 0$. Tìm giá trị của x để biểu thức

$$N = \frac{x}{(x+2010)^2} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Gọi (O) là đường tròn thay đổi đi qua hai điểm B và C . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AE, AF với đường tròn (O) (E, F là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC ; FI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K . Chứng minh rằng

1) Hai điểm E, F nằm trên một đường tròn cố định khi (O) thay đổi.

2) EK song song với AB .

Câu 5. (2 điểm)

1) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với AD là đường kính. Biết $AB = BC = 2\sqrt{5}$ cm; $CD = 6$ cm. Tính bán kính của đường tròn (O) .

2) Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B nằm bên ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Tìm điểm M trên đường tròn $(O; R)$ để tổng $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

TRẦN VĂN HẠNH

(GV DH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi) giới thiệu

• Khi $a = 0$ thì BĐT (4) có dạng $7b^3 \geq 0$ (luôn đúng do $b \geq 0$).

• Khi $a > 0$, chia cả hai vế BĐT (4) cho a^3 ta có

$$(4) \Leftrightarrow 3 + 7\left(\frac{b}{a}\right)^3 \geq 9\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 7\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 9\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \geq 0 \quad (5)$$

Xét hàm số $f(x) = 7x^3 - 9x^2 + 3$, với $x \geq 0$.

Ta có

$$7f(x) = 49x^3 - 63x^2 + 21$$

$$= (49x^3 - 84x^2 + 36x) + \left(21x^2 - 36x + \frac{108}{7}\right) + \frac{39}{7}$$

$$= x(7x - 6)^2 + \frac{(7x - 18)^2}{7} + \frac{39}{7} > 0, \text{ với } \forall x \geq 0.$$

Vậy $f(x) > 0, \forall x \geq 0$, suy ra BĐT (5) đúng, hay BĐT (4) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0$. $\square$

Việc chứng minh BĐT (5) là không đơn giản. Tuy nhiên, bằng kỹ thuật "làm giảm" ta có được lời giải mới sau đây.

Vì $b \geq 0$ nên $3a^3 + 7b^3 \geq 3a^3 + 6b^3$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho các số không âm ta có

$$3a^3 + 6b^3 = 3a^3 + 3b^3 + 3b^3$$

$$\geq 3\sqrt[3]{3a^3 \cdot 3b^3 \cdot 3b^3} = 9ab^2.$$

Vậy $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0$. $\square$

Các bạn hãy suy nghĩ xem, các bài toán trên còn lời giải nào khác nữa chăng?

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10

KHỐI THPT CHUYÊN, ĐẠI HỌC VINH

NĂM HỌC 2009 - 2010

(Đề thi đã đăng trên THPT số 388, tháng 10 năm 2009)

VÒNG 1

Câu 1. 1) Ta có $\Delta = 9 > 0$ nên PT đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $u = m, v = m - 3$.

2) Ta có $u^2 + v^2 = 17 \Leftrightarrow m^2 + (m - 3)^2 = 17$
 $\Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = 4$.

Câu 2. 1) Đặt $u = x + y; v = xy$. HPT đã cho trở thành

$$\begin{cases} u^2 + 2u - 2v = 23 \\ u + v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 4u - 45 = 0 \\ v = 11 - u. \end{cases}$$

Từ đó tìm được hai nghiệm $(u; v)$ là $(5; 6)$, $(-9; 20)$.

• Với $(u; v) = (5; 6)$, tìm được hai nghiệm $(x; y)$ là $(2; 3)$ và $(3; 2)$.

• Với $(u; v) = (-9; 20)$, tìm được hai nghiệm $(x; y)$ là $(-4; -5)$ và $(-5; -4)$.

Kết luận. HPT đã cho có bốn nghiệm.

2) Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$$P = (x - 8y) + 8y + \frac{1}{y(x - 8y)} \geq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x - 8y = 8y \\ 8y = \frac{1}{y(x - 8y)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16y \\ y^3 = \frac{1}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy $\min P = 6$, đạt được khi $(x; y) = \left(4; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 3. (h. 1)

1) Vì IE, IF thứ tự là đường kính đường tròn (O_1) và (O_2)

nên $\widehat{IPE} = \widehat{IPF} = 90^\circ$.

Suy ra

$\widehat{EPF} = 180^\circ$ hay E, P, F thẳng hàng.

2) Ta có $\Delta O_1IO_2 = \Delta O_1PO_2$ (c.c.c) nên

$$\widehat{O_1IO_2} = \widehat{O_1PO_2} \quad (1)$$

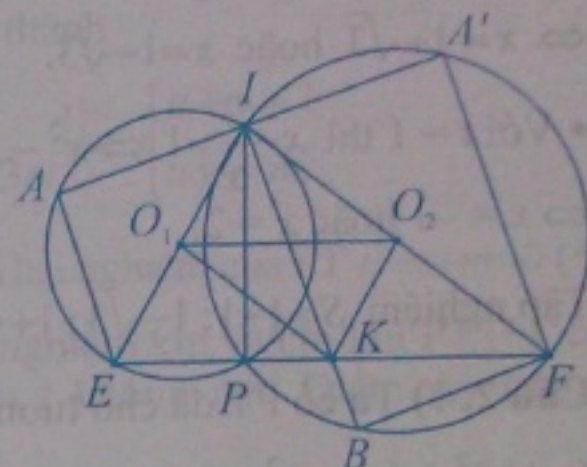
Mặt khác, vì O_1K, O_2K là các đường trung bình của ΔIEF nên tứ giác IO_1KO_2 là hình bình hành. Do đó $\widehat{O_1IO_2} = \widehat{O_1KO_2}$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{O_1PO_2} = \widehat{O_1KO_2}$. Do đó tứ giác O_1PKO_2 nội tiếp.

3) Kéo dài AI cắt (O_2) tại A' (khác I). Ta có tứ giác $IBFA'$ là hình chữ nhật nên $BF = IA'$ (3)

Mặt khác, $IK \parallel AE, IK \parallel A'F$ và K là trung điểm của EF nên I là trung điểm của AA' (4)

Từ (3) và (4) suy ra $IA = BF$.



Hình 1

VÒNG 2

Câu 1. 1) ĐK $x \geq 7$. Ta có PT đã cho tương đương với

$$3x + 1 = 2x - 7 + 2\sqrt{x(x-7)}$$

$$\Leftrightarrow x + 8 = 2\sqrt{x^2 - 7x}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 44x - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 16 \text{ (vì } x \geq 7\text{)}.$$

2) Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm của PT đã cho. Xét $x \neq 0$, chia hai vế PT cho x^2 ta được

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 3\left(x - \frac{2}{x}\right) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{2}{x}\right) + 2 = 0.$$

Đặt $t = x - \frac{2}{x}$, khi đó PT trên có dạng

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = 1.$$

• Với $t = 2$ thì $x - \frac{2}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3} \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{3}.$$

• Với $t = 1$ thì $x - \frac{2}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 2.$$

Tập nghiệm $S = \{-1; 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}; 2\}$.

Câu 2. 1) Ta có PT đã cho tương đương với

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 - 2 \cdot 13(x-y) + 13^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (13-x+y)^2 = 169 = 12^2 + 5^2.$$

Vì x, y là các số nguyên dương nên dễ thấy

$$0 < x+y < 13; 0 < 13-x+y < 13. \text{ Suy ra}$$

$$\begin{cases} x+y=12 \\ 13-x+y=5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+y=5 \\ 13-x+y=12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x; y) = (3; 2) \text{ hoặc } (x; y) = (10; 2).$$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm nguyên dương $(x; y)$ là $(3; 2)$ và $(10; 2)$.

2) Giả sử tồn tại số nguyên tố lẻ p sao cho

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow m^2 n^2 = p(m^2 + n^2) \quad (1)$$

Suy ra $m^2 n^2 : p$. Do p là số nguyên tố nên $mn : p$, suy ra $m : p$ hoặc $n : p$. Kết hợp với (1) suy ra $m^2 + n^2 : p$. Do đó $m : p$ và $n : p \Rightarrow m \geq p, n \geq p$. Khi đó

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2} \Rightarrow p \leq 2.$$

Mâu thuẫn với giả sử.

Câu 3. Đặt $P = \frac{2y+3z+5}{1+x} + \frac{3z+x+5}{1+2y} + \frac{x+2y+5}{1+3z}$

$$\Rightarrow P + 3 = 24 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+3z} \right).$$

Áp dụng BĐT quen thuộc với các số dương

$$\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{d} \geq \frac{(a+c)^2}{b+d}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, suy ra

$$P + 3 \geq 24 \left(\frac{4}{2+x+2y} + \frac{1}{1+3z} \right) \geq 24 \cdot \frac{9}{3+x+2y+3z} = \frac{72}{7}.$$

Suy ra $P \geq \frac{51}{7}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$1+x = 1+2y = 1+3z \text{ và } x+2y+3z = 18$$

$$\Leftrightarrow (x; y; z) = (6; 3; 2).$$

Câu 4. (h. 2)

1) Ta có

$$MA' = MB'$$

$$= \frac{1}{2} AB \quad (1)$$

$$NA' = NB'$$

$$= \frac{1}{2} CH \quad (2)$$

Mặt khác,

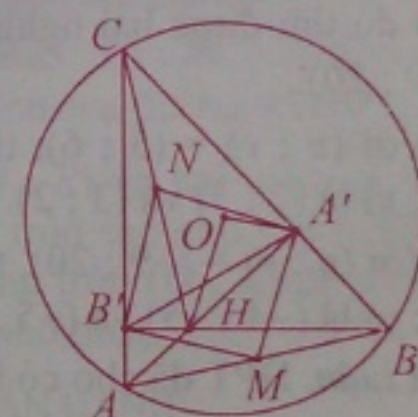
vì $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nên $\triangle CAA'$ và $\triangle BA'H$ vuông cân. Suy ra $\triangle CA'H = \triangle AA'B$ (c.g.c), do đó

$$CH = AB \quad (3)$$

Lại có $\widehat{NA'C} = \widehat{NCA'} = \widehat{MAA'} = \widehat{MA'A}$ nên $\widehat{MA'N} = \widehat{AA'C} = 90^\circ \quad (4)$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $A'MB'N$ là hình vuông.

2) Do O và A' thuộc đường trung trực cạnh AC nên $A'O \perp AC \Rightarrow OA' \parallel B'H$. Tương tự có $OB' \parallel A'H$, suy ra $A'HB'O$ là hình bình hành. Do đó $A'B', OH, MN$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



Hình 2

LÊ QUỐC HÁN

(GV ĐH Vinh) giới thiệu



**Chuẩn bị
cho kì thi
tốt nghiệp THPT
và thi vào
Đại học**

Trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng chúng ta thường thấy có bài toán giải một hệ phương trình hoặc các bài toán giải phương trình (PT) mà để giải được nó ta phải dẫn về hệ phương trình. Vì vậy, để chuẩn bị tốt cho kì thi Đại học và Cao đẳng sắp tới, chúng ta cần ôn tập kĩ các bài toán thuộc loại này.

Trong bài báo này chúng ta quan tâm đến cách giải một số hệ *cơ bản và đơn giản*.

1. HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI MỘT

Một hệ hai PT hai ẩn x và y được gọi là *đối xứng loại một* nếu khi đổi vai trò x cho y thì các PT trong hệ được giữ nguyên.

Đối với hệ dạng này, thông thường chúng ta đưa hệ đã cho về hệ dạng cơ bản $\begin{cases} x+y=A \\ xy=B \end{cases}$

(A, B là các số thực cho trước).

★Thí dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8. \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$8 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 - xy + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt{5} \\ xy=1. \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x+y=-\sqrt{5} \\ xy=1. \end{cases}$$

Từ đó suy ra hệ đã cho có tất cả bốn nghiệm. $\square$

★Thí dụ 2. (Khối D/2004). Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m. \end{cases}$$

Một số chủ ý

KHI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHẠM VĂN HÙNG

(GV Khối THPT chuyên ĐHKHTN,
ĐHQG Hà Nội)

Lời giải. Đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$, $u \geq 0$, $v \geq 0$.

Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^3=1-3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ u.v=m. \end{cases}$$

Do đó u và v là hai nghiệm của PT $t^2 - t + m = 0$ (*)

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi PT (*) có cả hai nghiệm t không âm. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4m \geq 0 \\ S = 1 \geq 0 \\ P = m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}. \quad \square$$

★Thí dụ 3. (Khối D/2007). Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $x + \frac{1}{x} = u$, $y + \frac{1}{y} = v$

($|u| \geq 2$, $|v| \geq 2$). Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u^3+v^3-3(u+v)=15m-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv=8-m. \end{cases}$$

Do đó u, v là nghiệm của PT $t^2 - 5t + 8 - m = 0$ (*)

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi PT (*) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $|t_1| \geq 2$ và $|t_2| \geq 2$.

Từ đó suy ra $\frac{7}{4} \leq m \leq 2$ hoặc $m \geq 22$. $\square$

★Thí dụ 4. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 1 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Lời giải. Đây là hệ đối xứng loại một, tuy nhiên rất khó đưa được về hệ PT tổng và tích.

Trước hết, từ (2) có $|x| \leq 1$ và $|y| \leq 1$. Hơn nữa $0 \leq x \leq 1$ và $0 \leq y \leq 1$. Thật vậy, nếu chẳng hạn $-1 \leq x < 0$ thì $x^5 + y^5 < 1$, trái với (1). Lấy (1) trừ đi (2) theo vế ta được

$$x^5(1-x) + y^5(1-y) = 0 \quad (3)$$

Để thấy trong (3) mỗi số hạng đều không âm vậy phải có
$$\begin{cases} x^5(1-x) = 0 \\ y^5(1-y) = 0. \end{cases}$$

Hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(0; 1), (1; 0)$. $\square$

★ **Thí dụ 5.** Giải phương trình

$$\sqrt[4]{8x-1} + \sqrt[4]{9x+1} = 3\sqrt[4]{x}.$$

Lời giải. ĐK $x \geq \frac{1}{8}$. Chia cả hai vế của PT

cho $\sqrt[4]{x} > 0$ ta được PT tương đương

$$\sqrt[4]{8-\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{9+\frac{1}{x}} = 3.$$

$$\text{Đặt } \sqrt[4]{8-\frac{1}{x}} = u; \quad \sqrt[4]{9+\frac{1}{x}} = v,$$

$$\text{ta được hệ } \begin{cases} u+v=3 \\ u^4+v^4=17. \end{cases}$$

$$\text{Hệ này cho hai nghiệm } \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} u=2 \\ v=1. \end{cases}$$

Do đó nghiệm của PT đã cho là $x = \frac{1}{7}$. $\square$

BÀI TẬP

1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4, \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^3+y^3+10=0 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^3+x^3y^3+y^3=17 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{2} \\ xy+\frac{1}{xy}=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ xy(x+1)(y+1)=m. \end{cases}$$

3. Tìm m để hệ sau có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x+y+xy=2m+1 \\ x^2y+y^2x=m^2+m. \end{cases}$$

4. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:

$$\text{a) } \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = m; \quad \text{b) } \sqrt[4]{1-\sin x} + \sqrt[4]{1+\sin x} = m.$$

II. HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI HAI

Một hệ hai PT hai ẩn x và y được gọi là hệ *đối xứng loại hai* nếu khi đổi vai trò x cho y thì PT này biến thành PT kia và ngược lại.

Đối với hệ dạng này, thông thường chúng ta lấy một PT trừ đi PT kia và dẫn về dạng

$$(x-y).F(x, y) = 0.$$

★ **Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = y^3 - 4y^2 + 8y \\ y^2 = x^3 - 4x^2 + 8x \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Lời giải. Lấy PT (1) trừ đi PT (2) theo vế ta được

$$x^2 - y^2 = y^3 - x^3 + 4(x^2 - y^2) + 8(y - x)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + y^2 - 3(x+y) + xy + 8) = 0.$$

Để thấy $x^2 + y^2 - 3(x+y) + xy + 8$

$$= (x-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2 = 5 > 0.$$

Do đó $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$, thế vào (1) ta được $x=0; y=0$.

Vậy hệ đã cho chỉ có một nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 0)$. $\square$

★ **Thí dụ 2.** Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 1 \\ x^3 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

Lời giải. Lấy PT (1) trừ PT (2) theo vế ta được

$$x^2(1-x) - y^2(1-y) = 0$$

$$\Rightarrow (1-y^3)(1-x) - (1-x^3)(1-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(1+y+y^2)(1-x) - (1-x)(1+x+x^2)(1-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(1-y)(y-x)(1+x+y) = 0.$$

• Với $1-x=0$ thì hệ có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 0)$.

• Với $1-y=0$ thì hệ có nghiệm $(x; y)$ là $(0; 1)$.

• Với $y-x=0$ thì $x=y$, thế vào PT (1) ta được $x^3 + x^2 - 1 = 0$.

Xét hàm $F(x) = x^3 + x^2 - 1$, dễ thấy đồ thị của hàm $F(x)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất, nên hệ có nghiệm $x = y = x_0$ trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $x^3 + x^2 - 1 = 0$.

• Với $1 + x + y = 0$, trường hợp này hệ không có thêm nghiệm nào.

Vậy hệ có đúng ba nghiệm phân biệt $(x; y)$ là $(0; 1)$, $(1; 0)$ và $(x_0; x_0)$, với x_0 là nghiệm của PT $x^3 + x^2 - 1 = 0$. $\square$

★ Thí dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y & (1) \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Hiển nhiên $x = y = 0$ là một nghiệm của hệ. Dưới đây xét $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Cộng theo vế hai PT trong hệ ta được

$$2xy \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2 + 8}} \right) = x^2 + y^2.$$

$$\text{Chú ý rằng } \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 8}} \leq \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2 + 8}} \leq \frac{1}{2}$$

• Với $xy > 0$ ta có

$$2xy \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2 + 8}} \right) \leq xy \leq x^2 + y^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

• Với $xy < 0$. Khả năng này không thể xảy ra, thật vậy, không mất tổng quát giả sử $x < 0$, $y > 0 \Rightarrow$ đẳng thức (1) không thể xảy ra.

Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$ và $(1; 1)$. $\square$

★ Thí dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{x-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{y-1} + 1. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v \\ v + \sqrt{v^2 + 1} = 3^u \end{cases} \quad \text{với } x-1 = u, y-1 = v.$$

Xét hàm $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ có $f'(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0$,

$\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $u = v$.

Xét phương trình $u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^u$.

$$\text{Ta có } 3^u = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1} - u}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \sqrt{u^2 + 1} - u = 3^{-u} & (1) \\ \sqrt{u^2 + 1} + u = 3^u & (2) \end{cases}$$

Lấy PT (2) trừ PT (1) theo vế ta có

$$2u = 3^u - 3^{-u} \Leftrightarrow 3^u - 3^{-u} - 2u = 0.$$

Xét hàm số $F(u) = 3^u - 3^{-u} - 2u$.

$$\text{Ta có } F'(u) = 3^u \ln 3 + 3^{-u} \ln 3 - 2 = \ln 3 \cdot (3^u + 3^{-u}) - 2 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$$

(do $\ln 3 > 1$ và $3^u + 3^{-u} \geq 2$).

Do đó $F(u)$ luôn luôn đồng biến. Vậy $u = 0$ là nghiệm duy nhất của PT $F(u) = 0$.

Suy ra PT đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ là $(1; 1)$. $\square$

★ Thí dụ 5. Giải phương trình

$$(x^2 + 2x - 5)^2 + 2(x^2 + 2x - 5) = x + 5.$$

Lời giải. Đặt $x^2 + 2x - 5 = t$, ta được hệ PT

$$\begin{cases} t^2 + 2t = x + 5 \\ x^2 + 2x = t + 5. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được bốn nghiệm của PT đã

$$\text{cho là } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}. \quad \square$$

BÀI TẬP

1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{6-y} = 3 \\ \sqrt{y-1} + \sqrt{6-x} = 3 \end{cases}$$

2. Chứng minh rằng hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0, y > 0$.

$$\begin{cases} e^x = 2007 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \\ e^y = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}. \end{cases}$$



nhau và từ đó thu được số họ nghiệm cũng như hình thức các họ nghiệm rất khác nhau. Bài viết này giới thiệu với các thầy cô giáo và các em học sinh một số kỹ thuật (phương pháp) đối chiếu điều kiện để kết luận nghiệm của phương trình lượng giác có điều kiện thông qua một số thí dụ cụ thể.

Phương trình (PT) lượng giác có điều kiện (chủ yếu là phương trình có chứa ẩn ở mẫu số hoặc chứa ẩn trong hàm số tang, cotang) là dạng toán cơ bản, hay và khá phức tạp, thường xuyên được đề cập trong các đề thi Tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng. Đối với giáo viên, việc dạy cho học sinh hiểu và có cách diễn đạt rõ cách đối chiếu nghiệm tìm được với điều kiện không hề dễ dàng. Điều khó khăn cơ bản là số nghiệm của PT lượng giác thường là vô hạn và được biểu diễn dưới dạng hay $\alpha + \frac{k2\pi}{n}$ ($k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$).

Hơn nữa, cùng một PT lượng giác, nếu dùng các phép biến đổi khác nhau có thể thu được các PT cơ bản khác

KỸ THUẬT TÌM NGHIỆM của PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ ĐIỀU KIỆN

PHAN TUẤN CỘNG

(GV THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương)

1. Phương pháp biểu diễn điều kiện và nghiệm thông qua cùng một hàm số lượng giác

★ **Thí dụ 1.** Giải phương trình

$$\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $\cos x \neq 0$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - \tan^2 x = 1 - \cos x - 1 - \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu với ĐK $\cos x \neq 0$ ta thấy cả hai giá trị trên đều thỏa mãn.

Vậy PT (1) có nghiệm là

$$x = \pi + 2k\pi; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Trong PT (1), ta đã biến đổi ĐK và nghiệm tìm được thông qua hàm số $y = \cos x$. Từ đó chuyển việc đối chiếu điều kiện của x về đối chiếu điều kiện của y đơn giản hơn nhiều (giống như trong PT đại số).

★ **Thí dụ 2.** Giải phương trình

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x} \quad (2)$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \pm 1 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Khi đó PT (2) $\Leftrightarrow 4\sin x \cos 2x + 2\cos 2x = 2$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin^2 x + \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \in \left\{ -1; 0; \frac{1}{2} \right\}.$$

Đối chiếu với ĐK, ta chọn được $\sin x = \frac{1}{2}$.

Vậy PT (2) có nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

2. Phương pháp sử dụng phép biến đổi lượng giác

★ **Thí dụ 3.** Giải phương trình

$$\tan^4 x + 1 = \frac{(2 - \sin^2 2x)\sin 3x}{\cos^4 x} \quad (3)$$

Lời giải. ĐK: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$. Ta có

$$(3) \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = (2 - \sin^2 2x)\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow (2 - \sin^2 2x)\sin(1 - 2\sin 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{2} \quad (*) \quad (\text{Do } 2 - \sin^2 2x \geq 1 \text{ với mọi } x).$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = \frac{1}{2} \quad (**)$$

Thay $\sin x = \pm 1$ vào (**) đều không thỏa mãn nên các nghiệm của (*) chính là nghiệm của PT (3). Vậy nghiệm của PT (3) là

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Trong PT (3), ĐK $\cos x \neq 0$ biến đổi thành $\sin x \neq \pm 1$, rồi thay $\sin x = \pm 1$ vào PT (**) đều không thỏa mãn dẫn đến nghiệm của PT (**) chính là nghiệm của PT (3). Như vậy, không cần phải tìm nghiệm cụ thể, ta vẫn có thể đối chiếu được với điều kiện.

3. Phương pháp thử trực tiếp

Đối với những PT mà ĐK và nghiệm tìm được khó đưa về cùng một hàm số lượng giác, ta có thể tìm nghiệm cụ thể, rồi thay vào ĐK để kiểm tra lại.

★ Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\cos 3x \tan 5x = \sin 7x \quad (4)$$

Lời giải. ĐK: $\cos 5x \neq 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} \text{PT (4)} &\Leftrightarrow 2 \sin 5x \cos 3x = 2 \sin 7x \cos 5x \\ &\Leftrightarrow \sin 8x = \sin 12x. \end{aligned}$$

$$\text{Tìm được } x = \frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Với } x = \frac{k\pi}{2} \text{ thì } \cos 5x &= \cos \frac{5k\pi}{2} = \cos \frac{k\pi}{2} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow k = 2m (m \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Với } x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \text{ thì } \cos 5x = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) \neq 0.$$

Vậy PT (4) có nghiệm là

$$x = m\pi; x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} (m, k \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

★ Thí dụ 5. Giải phương trình

$$\frac{1}{\tan x + \cot 2x} = \frac{\sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{\cot x - 1} \quad (5)$$

$$\text{Lời giải. ĐK: } \begin{cases} \tan x + \cot 2x \neq 0 \\ \cot x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x - \cos x \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (5)} \Leftrightarrow \sin 2x = -\sqrt{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2 \cos x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

• Rõ ràng $\sin x = 0$ vi phạm ĐK của bài toán.

$$\bullet \text{ Với } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x = x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi. \end{cases}$$

Dễ thấy ĐK $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0$ thỏa mãn.

Thay trực tiếp các nghiệm x_1, x_2 vào hệ

$$\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin x - \cos x \neq 0, \end{cases} \text{ ta thấy chỉ có } x_1 \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{Vậy nghiệm của PT (5) là } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi. \quad \square$$

4. Phương pháp biểu diễn trên đường tròn lượng giác

Ta biểu diễn trên đường tròn những điểm không thỏa mãn ĐK (đánh dấu "x") và những điểm nghiệm tìm được (được đánh dấu "o"). Những điểm đánh dấu "o" mà không trùng với điểm đánh dấu "x" chính là những điểm thỏa mãn ĐK. Phương pháp này có hiệu quả khi số điểm không thỏa mãn ĐK là ít và ở vị trí đặc biệt, đồng thời các phương pháp đã nêu tỏ ra không hiệu quả.

◀ **Nhận xét.** Mỗi cung (hoặc góc) lượng giác được biểu diễn bởi một điểm trên đường tròn lượng giác (quy định gọi tắt là đường tròn).

i) $x = \alpha + 2k\pi$ được biểu diễn trên đường tròn bởi một điểm.

ii) $x = \alpha + k\pi$ được biểu diễn trên đường tròn bởi hai điểm đối xứng nhau qua gốc O .

iii) $x = \alpha + \frac{k2\pi}{3}$ biểu diễn trên đường tròn bởi ba điểm cách đều nhau, tạo thành ba đỉnh một tam giác đều nội tiếp đường tròn.

Tổng quát. $x = \alpha + \frac{k2\pi}{n}$ ($n \geq 3$) biểu diễn trên đường tròn bởi n điểm cách đều nhau, tạo thành n đỉnh một đa giác đều nội tiếp đường tròn.

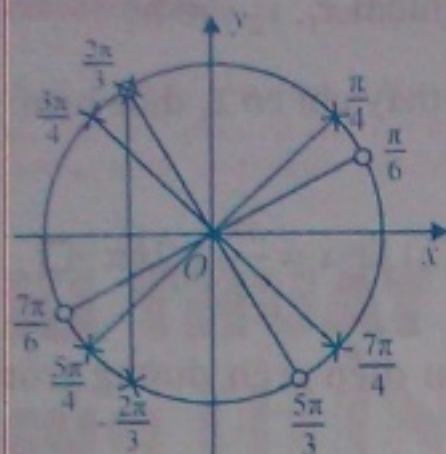
★ Thí dụ 6. Giải phương trình

$$\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3} \quad (6)$$

Lời giải. ĐK: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x \neq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{Khi đó}$$

PT (6) $\Leftrightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2} (n \in \mathbb{Z})$.



Hình 1

bởi 6 điểm (đánh dấu "x") (h. 1). Ta thấy có 3 điểm đánh dấu "o" không trùng với dấu "x". Vậy PT (6) có nghiệm là

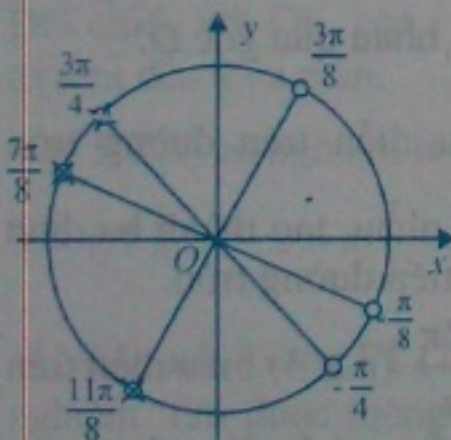
$$x = \frac{\pi}{6} + n\pi; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi. \quad \square$$

★Thí dụ 7. Giải phương trình

$$|\cos x| + \sin 3x = 0 \quad (7)$$

Lời giải. • Khi $\cos x \geq 0$ thì

$$(7) \Leftrightarrow \cos x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (*)$$



Hình 2

Biểu diễn (*) trên đường tròn lượng giác ta được 6 điểm đánh dấu "o", trong đó chỉ có 3 điểm nằm bên phải trục Oy ($\cos x \geq 0$) (h. 2) ứng với

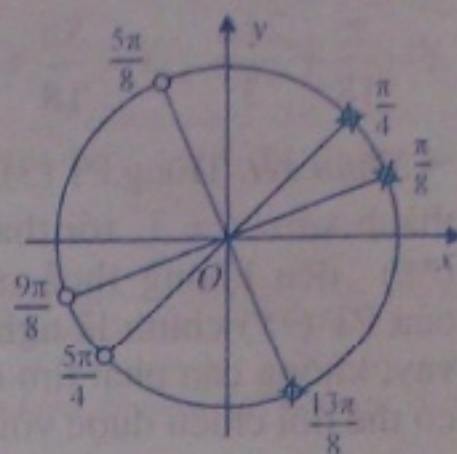
$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \quad x_2 = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi;$$

$$x_3 = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

• Khi $\cos x < 0$ thì (7) $\Leftrightarrow -\cos x + \sin 3x = 0$ tìm được

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (**)$$

Biểu diễn (**) trên đường tròn lượng giác ta được 6 điểm trong đó chỉ có 3 điểm nằm bên trái trục Oy



Hình 3

($\cos x < 0$) (h. 3) ứng với

$$x_4 = \frac{5\pi}{8} + 2k\pi; \quad x_5 = \frac{9\pi}{8} + 2k\pi; \quad x_6 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi.$$

Vậy PT (7) có nghiệm là $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ như trên. $\square$

5. Phương pháp tổng hợp

Khi từng phương pháp riêng khó thực hiện, ta có thể phối hợp các phương pháp lại để đối chiếu điều kiện với nghiệm tìm được làm cho bài toán đỡ phức tạp hơn.

★Thí dụ 8. Giải phương trình

$$\log_3 \left(\sin \frac{x}{2} - \sin x \right) + \log_{\frac{1}{3}} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos 2x \right) = 0 \quad (8)$$

Lời giải

$$\text{PT}(8) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{2} - \sin x = \sin \frac{x}{2} + \cos 2x & (*) \\ \sin \frac{x}{2} - \sin x > 0 & (**) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = x_3 = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases}$$

Nhận thấy

$$\bullet \sin \frac{x_1}{2} - \sin x_1 < 0 \text{ (không thỏa mãn (**))}$$

(Xem tiếp trang 28)

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY VIETNAM CALCULATOR THÁNG 11/2009

Trưởng ban tổ chức: Trần Minh Thế
 Chuyên viên Toán học sinh giỏi máy tính cầm tay
VIETNAM CALCULATOR



VN-570RS



VN-500RS

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức (ghi kết quả gần đúng đến 5 chữ số thập phân).

$$N = \sqrt{20 + 11\sqrt{20112008}} + \sqrt{20 + 11\sqrt{20112009}} + \sqrt{20 + 11\sqrt{20112010}}$$

Bài 2. Hãy dùng thuật toán trên máy tính **VIETNAM CALCULATOR VN-570RS** để xác định số nguyên tố trong các số sau đây: 3571 ; 4681 ; 5281.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + x}{x^2 + 3}$.

Tính tổng (trình bày thuật toán và ghi kết quả gần đúng đến 5 chữ số thập phân).

$$S = f(\cot^2 1) + f(\cot^2 2) + f(\cot^2 3) + \dots + f(\cot^2 99) + f(\cot^2 100)$$

Bài 4. Cho tam giác ABC , E là trung điểm của BC , trên cạnh AC lấy điểm D thỏa $AD = 3DC$, cho biết góc $\hat{A} = 40^\circ$ và góc $\hat{BDC} = 65^\circ$. Tính số đo (độ, phút, giây) của các góc $\hat{BCA}$ và $\hat{EAC}$.

Bài 5. Tìm x biết $A_{x+2}^x + C_{2x+1}^x - P_{x+1} - x^{x-2} - (2x+3)^{x-5} = 33772562$, với P_n là số hoán vị của n phần tử, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử.

HẾT

Thời gian gửi bài dự thi: Từ ngày 15 đến 30 hàng tháng.

Công bố kết quả: Ngày 8 hàng tháng.

Cơ cấu giải thưởng:

- 1 Giải nhất mỗi giải gồm 01 máy tính VN-570RS + 150.000 đồng + Giấy khen.
- 2 Giải nhì mỗi giải gồm 01 máy tính VN-570RS + 50.000 đồng + Giấy khen.
- 3 Giải ba mỗi giải gồm 01 máy tính VN-500RS + 50.000 đồng + Giấy khen.
- 3 Giải triển vọng mỗi giải là 01 máy tính VN-500RS + Giấy khen.

Nội dung bài dự thi bao gồm:

- Tên, ngày, tháng, năm sinh, địa chỉ; Lớp; Trường.
- Lời giải chi tiết, trình bày các quy trình ấn phím rõ ràng.

Bài dự thi xin gửi về:

- Bảng thư xin gửi: CÔNG TY CỔ PHẦN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ VIỆT NAM.
Địa chỉ: 63/117 - Thái Hà Quận Đống Đa Hà Nội. Điện thoại: 04.35378736.
- Bảng email xin gửi: btc_hocsinhgioitoan@maytinhdientu.com.vn

Mọi thông tin về cuộc thi và danh sách người trúng thưởng sẽ được đăng tại website:
www.maytinhdientu.com.vn.

Thí sinh tham dự cuộc thi lưu ý: Được phép dùng máy CASIO fx-500MS và fx-570MS để tham dự cuộc thi vì 2 máy này có cách sử dụng và chức năng tương tự với VN-500RS và VN-570RS. Không được dùng máy fx-500ES và fx-570ES vì trình tự bấm phím của dòng máy này khác với máy VN-500RS và VN-570RS.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/389. (Lớp 6). Chứng minh rằng số các chữ số của hai số $2008^{2009} + 2^{2009}$ và 2008^{2009} bằng nhau.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/389. (Lớp 7). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 1 - xy$; trong đó x và y là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$x^{2009} + y^{2009} = 2x^{1004}y^{1004}.$$

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/389. Có tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho $n^6 + 26^n = 21^{2009}$?

PHẠM MINH PHƯƠNG
(GV THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)

Bài T4/389. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên các cạnh AB, BC, CA theo thứ tự lấy các điểm D, E, F sao cho $DE \perp BC$ và $DE = DF$. Gọi M là trung điểm của EF . Chứng minh rằng $\widehat{BCM} = \widehat{BFE}$.

THÁI NHẬT PHƯƠNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/389. Cho x, y, z là các số thực thuộc khoảng $(0; 1)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x(1-y)} + \frac{1}{y(1-z)} + \frac{1}{z(1-x)} \geq \frac{3}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Phan Thúc Trực, Yên Thành, Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/389. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^2 + 4x + 3} + \sqrt[3]{4x^2 - 9x - 3} = \sqrt[3]{3x^2 - 2x + 2} + \sqrt[3]{2x^2 - 3x - 2}.$$

NGUYỄN SANG
(Hà Nội)

Bài T7/389. Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$) ngoại tiếp đường tròn tâm J . Chứng minh rằng với điểm M bất kì thì

$$\sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} (MA_i - JA_i) \geq 0.$$

ĐẬU THANH KỲ
(GV THPT Diễn Châu IV, Nghệ An)

Bài T8/389. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy + f(z)) = \frac{xf(y) + yf(x)}{2} + z$$

với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{R}$.

TRẦN NAM DŨNG
(GV Khoa Toán, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/389. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2}.$$

NGUYỄN MẠNH TUẤN
(SV Khoa Điện, K49, ĐHBK Hà Nội)

Bài T10/389. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Trên DE lấy điểm K sao cho $DK = DH$. Trên DH lấy điểm I sao cho $\widehat{IKD} = 90^\circ$. Chứng minh rằng đường tròn tâm I , bán kính IK tiếp xúc với đường tròn đường kính BC .

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)

Bài T11/389. Cho (u_n) là một dãy số dương. Đặt $S_n = u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \dots + u_n^3$ với $n = 1, 2, \dots$

Giả sử $u_{n+1} \leq ((S_n - 1)u_n + u_{n-1}) \frac{1}{S_{n+1}}$, với mọi $n = 2, 3, \dots$. Tìm $\lim u_n$.

NGUYỄN HOÀNG NAM
(GV THPT K'Bang, Gia Lai)

Bài T12/389. Cho p là một số nguyên tố, và các số tự nhiên m, n, q thỏa mãn $2 \leq n \leq m$ và $(p, q) = 1$. Chứng minh rằng $C_{qp^m}^n$ chia hết cho p^{m-n+1} (trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

TRẦN MINH HIỂN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/389. Một đoạn mạch điện AC có các linh kiện: các điện trở thuần, các cuộn thuần cảm và các tụ điện mắc nối tiếp. B là một điểm trên AC .

a) Cho biết:

$$u_{AB} = 1 \cdot \sin(1000t) \text{ (V)}$$

$$u_{BC} = \sqrt{3} \sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (V)}$$

$$i = 10^{-3} \sin(1000t) \text{ (A)}$$

Tìm biểu thức của u_{AC} .

b) Giữ nguyên các linh kiện của mạch điện, tăng tần số góc của dòng điện lên $2000s^{-1}$ thì biểu thức của i', u'_{AB}, u'_{BC} như sau:

$$i' = 10^{-3} \sin(2000t) \text{ (A)}$$

$$u'_{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(2000t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (V)}$$

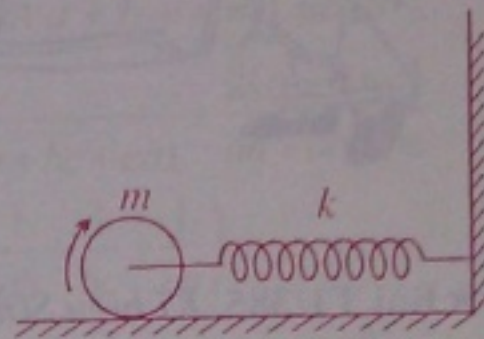
$$u'_{BC} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(2000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (V)}$$

Tìm biểu thức của u'_{AC} .

c) Trên AB và BC có các linh kiện gì? Xác định độ lớn của chúng.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội) (st)

Bài L2/389. Một hình trụ đặc được gắn với một lò xo không khối lượng, nằm ngang, sao cho nó có thể lăn không trượt trên một mặt phẳng ngang (hình vẽ).



Lò xo có độ cứng $k = 3,0 \text{ N/m}$. Hệ được thả từ nghỉ ở một vị trí mà lò xo bị kéo giãn $0,25\text{m}$.

a) Hãy tính động năng tịnh tiến và động năng quay của hình trụ khi nó đi qua vị trí cân bằng.

b) Chứng minh rằng, trong các điều kiện ấy, khối tâm của hình trụ thực hiện một chuyển

động điều hòa với chu kỳ $T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{2k}}$ trong đó m là khối lượng của hình trụ.

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV ĐHSP Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/389. (For 6th grade). Prove that the number of decimal digits in $2008^{2009} + 2^{2009}$ and 2008^{2009} are equal.

T2/389. (For 7th grade). Find the least value of the expression $A = 1 - xy$, where x and y are real numbers satisfying the following condition:

$$x^{2009} + y^{2009} = 2x^{1004}y^{1004}$$

T3/389. Does there exist a positive integer number n such that $n^6 + 26^n = 21^{2009}$?

T4/389. Let ABC be a right triangle with right angle at A . On the sides AB, BC and CA , choose D, E and F respectively such that $DE \perp BC$ and $DE = DF$. M is the midpoint of EF . Prove that $\widehat{BCM} = \widehat{BFE}$.

T5/389. Let x, y, z be real numbers in the interval $(0; 1)$. Prove that

$$\frac{1}{x(1-y)} + \frac{1}{y(1-z)} + \frac{1}{z(1-x)} \geq \frac{3}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}$$

When does the equality occur?

(Xem tiếp trang 28)



★ **Bài T1/385.** *Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của n . Tìm số nguyên dương n sao cho*

$$S(n) = n^2 - 2009n + 11.$$

Lời giải. Với số nguyên dương n bất kì viết trong hệ thập phân thì

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ \geq a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 + a_0 = S(n).$$

Giả sử $S(n) = n^2 - 2009n + 11$ thì từ $S(n) \leq n$ ta có

$$n^2 - 2009n + 11 \leq n \Rightarrow n^2 + 11 \leq 2010n \\ \Rightarrow n + \frac{11}{n} \leq 2010 \Rightarrow n < 2010 \quad (1)$$

Mặt khác $S_n > 0$ nên

$$n^2 - 2009n + 11 > 0 \Rightarrow n^2 + 11 > 2009n \\ \Rightarrow n + \frac{11}{n} > 2009 \Rightarrow n \geq 2009 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) phải xảy ra $2009 \leq n < 2010$.

Thử với $n = 2009$ ta thấy

$$2009^2 - 2009 \cdot 2009 + 11 = 11 = 2 + 9 = S(2009).$$

Đáp số. $n = 2009$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn giải đến (1) và (2) đã kết luận ngay $n = 2009$ mà không thử xem $n = 2009$ có thỏa mãn đề bài hay không. Nhiều bạn chia ra hai trường hợp $n \leq 2008$, $n \geq 2010$ và sử dụng $0 < S(n) < n$ để lập luận cũng dẫn đến kết quả.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Bùi Công Cường, 6A1, THCS Lâm Thao;
Vĩnh Phúc: Nguyễn Việt Anh, Phạm Thị Vân Anh, Đại Thị Hoàng Yến, Tạ Thanh Xuân, 6A1, THCS Yên Lạc, Vũ Minh Chiến, 6B, THCS Liên Bảo, TP. Vĩnh Yên, Khổng Trọng Quang, 6A, THCS Đồng Quế, Sông Lô,

Lê Thảo Anh, Nguyễn Thị Ngọc Ánh, Trương Thủy Dương, Hoàng Hải Đăng, Nguyễn Thủy Linh A, Bùi Minh Phương, 6A1, THCS Hải Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Sơn La:** Trần Công Minh, 5A, TH Mộc Ly, Mộc Châu; **Hải Phòng:** Nguyễn Hữu Bảo Minh, 6A1, THCS Hồng Bàng; **Ninh Bình:** Tô Minh Hiến, 6A, THCS Phát Diệm, Kim Sơn; **Nghệ An:** Đào Mỹ Linh, Đinh Thị Hồng Ngọc, Lê Hồ Minh Tuấn, Nguyễn Đăng Nguyên, 6A, Nguyễn Bá Khánh Hòa, Phạm Văn Quyển, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Đậu Hồng Quân, 6D, Phạm Lương Tùng Dương, 6C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Đoàn Xuân Quý, 6A2, THCS Trà Lân, Con Công; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Hồng Nam, 6B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Thừa Thiên – Huế:** Nguyễn Xuân Ngọc, 6/1, THCS Phú Thanh, Phú Vang; **Quảng Ngãi:** Đỗ Tuấn Kiệt, Phạm Trung Anh, 6, THCS Trần Hưng Đạo, Quảng Ngãi; **Bình Định:** Phạm Phương Thảo, 6A5, THCS TTr. Phù Mỹ.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/385.** *Trong hình vuông ABCD lấy hai điểm P, Q sao cho BP song song với DQ và $BP^2 + DQ^2 = PQ^2$. Hãy tính độ lớn góc PAQ.*

Lời giải. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A lấy điểm E sao cho $BE \perp BP$ và $BE = DQ$. Ta có $BP^2 + BE^2$

$$= BP^2 + DQ^2 = PE^2 \text{ (giả thiết), suy ra } PE = PQ \quad (1)$$

Gọi F là giao điểm của BP với AD, do $BP \parallel DQ$ suy ra $\widehat{ADQ} = \widehat{AFB}$.

$$\text{Mà } \widehat{AFB} + \widehat{ABF} = 90^\circ = \widehat{PBA} + \widehat{ABE} \\ \Rightarrow \widehat{ADQ} = \widehat{ABE}.$$

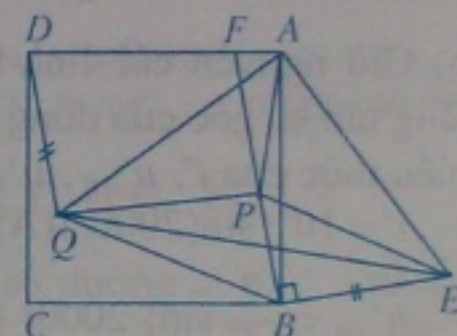
Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADQ$ có $AB = AD$, $\widehat{ABE} = \widehat{ADQ}$, $BE = DQ$ nên $\triangle ABE = \triangle ADQ$ (c.g.c).

$$\text{Suy ra } \begin{cases} AE = AQ \\ \widehat{BAE} = \widehat{DAQ} \Rightarrow \widehat{QAE} = 90^\circ \end{cases} \quad (2) \quad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle APQ = \triangle APE$ (c.c.c)
 $\Rightarrow \widehat{PAQ} = \widehat{PAE} \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{PAQ} = 45^\circ$. □

◀ **Nhận xét.** Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải đúng với phương pháp vẽ thêm đường phụ. Các bạn sau đây có lời giải tốt:



Hải Dương: Trần Xuân Thắng, 7/1, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương; **Nghệ An:** Văn Sĩ Kiên, Hoàng Minh Tuấn, Nguyễn Đình Quý, Hồ Thị Hà Phương, Hoàng Hồ Khánh Linh, Hoàng Minh Tú, Lê Đức Tuấn, Trần Đức Long, Nguyễn Thị Hương, Phạm Thị Thảo Nguyên, Bạch Thị Lương Huyền, 7A, Nguyễn Hoài Anh, Bùi Thị Trâm, 7C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Phạm Thị Thảo Anh, Nguyễn Thị Nga, Đậu Hoàng Hồng Quân, Võ Thị Thu Thảo, 7D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/385.** So sánh 2008 với tổng S gồm 2009 số hạng sau:

$$S = \frac{2008+2007}{2009+2008} + \frac{2008^2+2007^2}{2009^2+2008^2} + \dots + \frac{2008^{2009}+2007^{2009}}{2009^{2009}+2008^{2009}}.$$

Lời giải. Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\frac{2008^n+2007^n}{2009^n+2008^n} - \frac{2008^n}{2009^n} = \frac{(2009 \cdot 2007)^n - 2008^{2n}}{2009^n(2009^n+2008^n)} = \frac{(2008^2-1)^n - (2008^2)^n}{2009^n(2009^n+2008^n)} < 0.$$

$$\text{Do đó } \frac{2008^n+2007^n}{2009^n+2008^n} < \frac{2008^n}{2009^n} < \frac{2008}{2009}.$$

Vậy với $n = 1, 2, \dots, 2009$, ta có

$$S < \frac{2008}{2009} \cdot 2009 = 2008. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn đã chứng minh rằng:

Với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $\frac{2008^n+2007^n}{2009^n+2008^n} < \frac{2008+2007}{2009+2008}$, từ đó dẫn đến $S < 2009 \cdot \frac{2008+2007}{2009+2008}$, và cũng dẫn đến $S < 2008$.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: Phạm Thị Khánh Linh, 7A1, Lê Tùng Lâm, Nguyễn Thị Thơm, Nguyễn Minh Hiếu, Nguyễn Thị Huệ, 8A1, Lê Văn Tú, 9A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Hương Lý, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Nghệ An:** Phạm Văn Quyển, 6B, Nguyễn Thị Hương, 7A, Đặng Văn Hoàng, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** Hà Khánh Uyên, 6A, THCS Lê Ninh, Đức Thọ; **Quảng Trị:** Nguyễn Hữu Anh, 9I, THCS Thành Cổ.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/385.** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{9}{1-2(ab+bc+ca)} + \frac{2}{abc}.$$

Lời giải. Theo giả thiết $a + b + c = 1$ ta có

$$P = \frac{9}{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)} + \frac{2(a+b+c)}{ab+ac+bc} = \frac{9}{a^2+b^2+c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right).$$

Sử dụng BĐT quen thuộc $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ (*) trong đó a, b là các số dương (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$), (THTT số 328, 10/2004) ta có

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{4}{ab+bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Vậy, lại sử dụng BĐT (*) cho các số dương ta có

$$P \geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2} + \frac{36}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{9^2}{(a+b+c)^2} = 81.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là 81, đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Đa số các bạn tham gia đều cho lời giải đúng. Một số bạn không chỉ ra các số dương khi sử dụng BĐT (*). Bạn Đinh Uýt Nây, 9B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Thanh Hoá đã nêu và giải bài toán tổng quát dưới đây. Có thể sử dụng liên tiếp BĐT (*) để chứng minh, xin dành cho bạn đọc:

Cho $a, n \in \mathbb{N}^*$ và n số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{n^2}{1-a\left(\frac{x_1x_2\dots x_n}{x_1} + \frac{x_1x_2\dots x_n}{x_2} + \dots + \frac{x_1x_2\dots x_n}{x_n}\right)} + \frac{a}{x_1x_2\dots x_n}.$$

Đáp số: $\min P = (a+1)^2 n^2$, đạt được khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$.

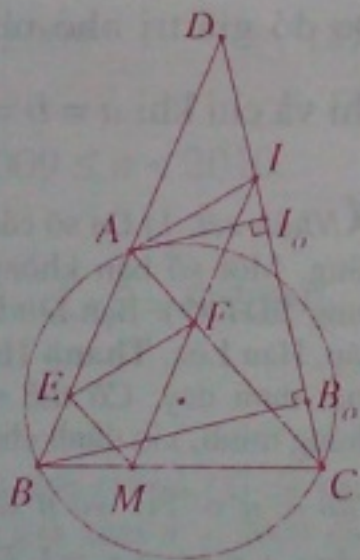
2) Ngoài bạn **Đình Uýt Nây**, các bạn sau đây có lời giải tốt: **Bác Ninh**: Chu Hương Giang, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Nguyễn Văn Thanh**, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc**: Đỗ Xuân Việt, 9A, THCS Lập Thạch; **Nguyễn Thị Thơm**, **Nguyễn Thị Huệ**, **Lê Tùng Lâm**, 8A1, **Phạm Thị Khánh Linh**, 7A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ**: **Đình Anh Hoàng**, 9A3, **Đào Khánh Linh**, **Vũ Anh Tuấn**, 9A1, THCS Lâm Thao; **Nghệ An**: **Trần Đại Dương**, 9A, THCS Diễn Hùng, Diễn Châu; **Võ Duy Văn**, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Ngô Sĩ Thanh**, **Nguyễn Thế Tiến**, 8E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Hà Tĩnh**: **Trần Tiến Đạt**, **Lương Anh Vũ**, 8A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Thái Bình**: **Trương Việt Trinh**, 9A2, **Phân hiệu học sinh giỏi Thanh Nê**, Kiến Xương; **Quảng Trị**: **Nguyễn Hữu Ánh**, 9I, THCS Thành Cổ, Tx. Quảng Trị; **Quảng Ngãi**: **Huỳnh Sĩ Đan**, 8C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Mỹ; **Thanh Hoá**: **Trần Minh Hoàng**, 8D, THCS Ngọc Trạo, Tx. Bim Sơn; **Bình Phước**: **Đương Tuấn Anh**, 8A9, THCS Tân Xuân, Tx. Đồng Xoài.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/385.** Cho đường tròn (ω) và B, C là hai điểm cố định trên đường tròn sao cho BC không đi qua tâm của (ω) . A là điểm bất kỳ nằm trên cung lớn BC (A không trùng với B và C). M là điểm di động trên đoạn thẳng BC . Các đường thẳng qua M lần lượt song song với AB và AC cắt các đường thẳng AC và AB tại F và E tương ứng. Khi M thay đổi trên đoạn BC , với mỗi điểm A ta đặt x là độ dài ngắn nhất của đoạn EF . Xác định vị trí của A và M để x đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. • Với mỗi điểm A , ta đi xác định x .

Gọi D là điểm đối xứng với B qua A . Kéo dài MF cắt CD tại I thì F là trung điểm của MI . Mặt khác, $AEMF$ là hình bình hành nên AE song song và bằng FM . Từ đó AE song song và bằng IF hay $AEFI$ là hình bình hành, suy ra $EF = AI$. Nếu gọi I_0 là hình chiếu của A trên CD thì $EF = AI \geq AI_0$. Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của BC với đường thẳng qua I_0 và song song với AB (lưu ý vì BC không là đường kính của (ω) và A thuộc cung lớn BC



nên góc BAC nhọn, do đó góc CAD tù, suy ra I_0 nằm trên đoạn CD , do đó M nằm trên đoạn BC). Vậy $x = AI_0$.

• **Xác định vị trí của A để $x = AI_0$ lớn nhất**
Gọi B_0 là hình chiếu của B trên CD . Ta có

$$x = AI_0 = \frac{1}{2} BB_0 \leq \frac{1}{2} BC.$$

Đẳng thức xảy ra khi A là điểm chính giữa cung BC .

• **Kết luận:** x đạt giá trị lớn nhất (bằng $\frac{1}{2} BC$) khi A là điểm chính giữa cung lớn BC và M là trung điểm của đoạn BC . $\square$

◀ **Nhận xét.** Bài toán này đi tìm “cực trị lồng trong cực trị” nên khá hay và khó. Có ít bạn tham gia giải bài này và rất tiếc không có bạn nào giải đúng.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/385.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{y^2}{25} + \frac{t^2}{144}$ với x, y, z, t thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0 \\ t^2 + z^2 - 2t - 143 = 0 \\ xt + yz - x + t + 2z - 61 \geq 0. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ PT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 = 25 & (1) \\ (t-1)^2 + z^2 = 144 & (2) \\ (x+1)(t-1) + z(y+2) \geq 60 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra tồn tại các góc α, β thoả mãn

$$x+1 = 5 \cos \alpha, \quad y+2 = 5 \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi;$$

$$t-1 = 12 \cos \beta, \quad z = 12 \sin \beta, \quad 0 \leq \beta < 2\pi.$$

Thay vào BPT (3) ta được

$$60 \cos \alpha \cos \beta + 60 \sin \alpha \sin \beta \geq 60$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) \geq 1.$$

Do đó $\cos(\alpha - \beta) = 1$, mà $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi \Rightarrow \alpha = \beta$.

$$\text{Ta có } A = \frac{1}{25} (5 \sin \alpha - 2)^2 + \frac{1}{144} (12 \cos \alpha + 1)^2.$$

Sau khi biến đổi, ta được

$$1 - \frac{4201}{3600} - \frac{4}{5} \sin \alpha + \frac{1}{6} \cos \alpha.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski, ta có

$$\left(-\frac{4}{5} \sin \alpha + \frac{1}{6} \cos \alpha \right)^2 \leq \frac{601}{900},$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{601}}{30} \leq -\frac{4}{5} \sin \alpha + \frac{1}{6} \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{601}}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{4201}{3600} - \frac{\sqrt{601}}{30} \leq A \leq \frac{4201}{3600} + \frac{\sqrt{601}}{30}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $-\frac{5}{4} \sin \alpha = 6 \cos \alpha$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{601}}; \sin \alpha = \mp \frac{24}{\sqrt{601}}. \text{ Vậy}$$

$$\text{Max } A = \frac{4201}{3600} + \frac{\sqrt{601}}{30} \text{ khi } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{601}} \\ \sin \alpha = -\frac{24}{\sqrt{601}} \end{cases};$$

$$\text{Min } A = \frac{4201}{3600} - \frac{\sqrt{601}}{30} \text{ khi } \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{601}} \\ \sin \alpha = \frac{24}{\sqrt{601}} \end{cases}.$$

Từ đó dễ dàng chỉ ra (x, y, z, t) tương ứng với giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của A . $\square$

◀ **Nhận xét.** Có rất nhiều bạn tham gia gửi lời giải và làm theo cách trên. Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hai Dương: Nguyễn Xuân Khánh, 10A4, THPT Nam Sách; **Quảng Ninh:** Nguyễn Xuân Hồng, 10T, THPT chuyên Hạ Long; **Nghệ An:** Nguyễn Duy Hải, 10A7, THPT Đô Lương I, Nguyễn Huy Tài, 10A2, THPT Nghi Lộc I; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Tuấn Vũ, 10A1, THPT Hương Sơn; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hoà; **Bình Định:** Nguyễn Danh Nhân, 10A1, THPT Phù Cát II, Nguyễn Hùng Cường, 10A2, THPT An Nhơn II; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T7/385.** Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_0 = 9, u_1 = 161$ và $u_n = 18u_{n-1} - u_{n-2}$ với $n = 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng $\frac{u_n^2 - 1}{5}$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n .

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Nhận xét rằng mọi số hạng của dãy đã cho đều nguyên. Với $n = 0$, ta có

$$\frac{u_0^2 - 1}{5} = \frac{9^2 - 1}{5} = 16 = 4^2.$$

Với $n = 1$, ta có

$$\frac{u_1^2 - 1}{5} = \frac{161^2 - 1}{5} = 5184 = 72^2.$$

Vậy bài toán đúng với $n = 0, 1$. Xét $n \geq 2$, ta có

$$u_n = 18u_{n-1} - u_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow u_n - 9u_{n-1} = 9u_{n-1} - u_{n-2}.$$

Từ đây suy ra

$$(u_n - 9u_{n-1})^2 = (9u_{n-1} - u_{n-2})^2,$$

$$\text{hay } u_n^2 - 18u_n u_{n-1} = u_{n-2}^2 - 18u_{n-1} u_{n-2} \quad (1)$$

Lần lượt thay $n = 2, 3, \dots, n$ vào (1), ta được

$$\begin{cases} u_2^2 - 18u_2 u_1 = u_0^2 - 18u_1 u_0 \\ u_3^2 - 18u_3 u_2 = u_1^2 - 18u_2 u_1 \\ \dots \\ u_n^2 - 18u_n u_{n-1} = u_{n-2}^2 - 18u_{n-1} u_{n-2}. \end{cases}$$

Cộng theo vế $n - 1$ đẳng thức trên, ta thu được

$$u_n^2 + u_{n-1}^2 - 18u_n u_{n-1} = u_1^2 + u_0^2 - 18u_1 u_0 \quad (2)$$

Thay giá trị $u_0 = 9, u_1 = 161$ vào (2) được

$$u_n^2 + u_{n-1}^2 - 18u_n u_{n-1} = -80,$$

$$\text{hay } \frac{(9u_n - u_{n-1})^2}{80} = u_n^2 - 1.$$

Do các số hạng của dãy đều nguyên nên $(9u_n - u_{n-1})^2 : 4^2 \cdot 5$ nên $9u_n - u_{n-1} : 4 \cdot 5$ và vì vậy $9u_n - u_{n-1} = 20a, a \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Suy ra } \frac{u_n^2 - 1}{5} = a^2, \text{ đpcm. } \square$$

◀ **Nhận xét.** Đây là một bài toán về dãy số nguyên quen biết nên có rất nhiều bạn tham gia giải và đa số đều có lời giải đúng. Ngoài cách giải đã trình bày ở trên, một số bạn còn sử dụng phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 18\lambda + 1 = 0$ của dãy sai phân để viết dãy dưới dạng

$$\text{tương minh } u_n = \frac{1}{2} \left((9 + \sqrt{80})^{n+1} + (9 - \sqrt{80})^{n+1} \right).$$

Từ đó suy ra $\frac{u_n^2 - 1}{5} = \frac{1}{5} \left((9 + \sqrt{80})^{n+1} - (9 - \sqrt{80})^{n+1} \right)^2$.

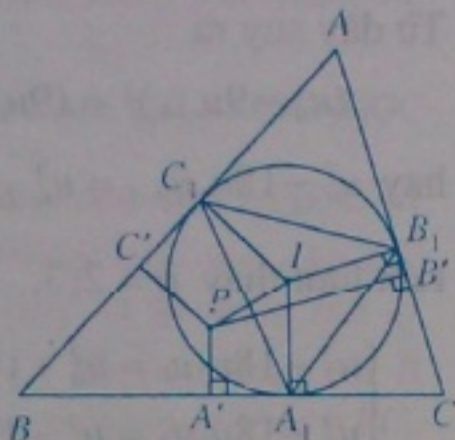
Tiếp theo, sử dụng khai triển nhị thức Newton, ta thu được điều cần chứng minh.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T8/385.** Cho tam giác ABC và điểm P bất kì nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của P xuống đoạn BC, CA, AB . Gọi I và r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$PA' + PB' + PC' + \frac{PI^2}{2r}.$$

Lời giải. Gọi A_1, B_1 và C_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm I lên BC, CA và AB . Trong tam giác $A_1B_1C_1$ có



$$\begin{aligned} \widehat{B_1A_1C_1} &= \frac{B+C}{2} < 90^\circ; \quad \widehat{C_1B_1A_1} = \frac{A+C}{2} < 90^\circ; \\ \widehat{A_1C_1B_1} &= \frac{A+B}{2} < 90^\circ. \end{aligned}$$

Suy ra tam giác $A_1B_1C_1$ nhọn, từ đó trực tâm H của $\Delta A_1B_1C_1$ nằm trong $\Delta A_1B_1C_1$, nghĩa là H nằm trong ΔABC . Cũng lưu ý rằng I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$ nên $\overline{IA_1} + \overline{IB_1} + \overline{IC_1} = \overline{IH}$.

$$\text{Đặt } T = PA' + PB' + PC' + \frac{PI^2}{2r}.$$

Từ công thức hình chiếu ta có

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{r} \left(\overline{PA'} \cdot \overline{IA_1} + \overline{PB'} \cdot \overline{IB_1} + \overline{PC'} \cdot \overline{IC_1} + \frac{PI^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\overline{PA_1} \cdot \overline{IA_1} + \overline{PB_1} \cdot \overline{IB_1} + \overline{PC_1} \cdot \overline{IC_1} + \frac{PI^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left((\overline{PI} + \overline{IA_1}) \overline{IA_1} + (\overline{PI} + \overline{IB_1}) \overline{IB_1} + \right. \\ &\quad \left. + (\overline{PI} + \overline{IC_1}) \overline{IC_1} + \frac{PI^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left((\overline{IA_1} + \overline{IB_1} + \overline{IC_1}) \overline{PI} + 3r^2 + \frac{PI^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 3r + \frac{1}{2r} (IP^2 - 2\overline{IP} \cdot \overline{IH}) \\ &= 3r + \frac{1}{2r} (\overline{IP} - \overline{IH})^2 - \frac{IH^2}{2r} \geq 3r - \frac{IH^2}{2r}. \end{aligned}$$

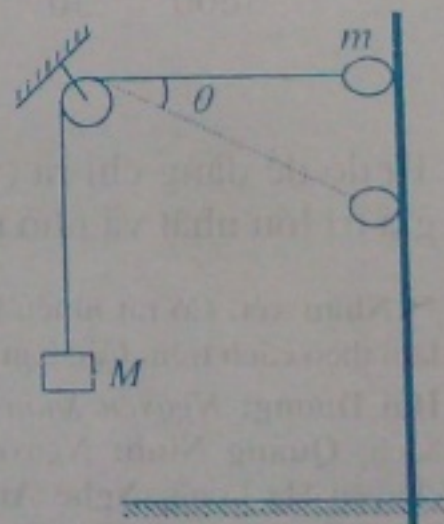
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overline{IP} = \overline{IH}$, hay P trùng H (thỏa mãn điều kiện P nằm trong tam giác ABC). Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T bằng $3r - \frac{IH^2}{2r}$, đạt được khi và chỉ khi P là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải đúng và gọn hơn cả:

Vinh Phúc: Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Bắc Ninh:** Trần Anh Tuấn, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Hải Dương:** Lê Văn Huỳnh, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hà Nam:** Trần Trung Kiên, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Hà Tĩnh:** Phạm Hồng Linh, 10A1, THPT Mai Thúc Loan, Lộc Hà; **Quảng Nam:** Đinh Thị Thu Trang, 10/1 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Quảng Ngãi:** Tô Đình Dương, 12A3, THPT số 1 Đức Phổ; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Bến Tre:** Lê Phúc Lễ, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài L1/385.** Một chiếc vòng khối lượng $m = 30g$ trượt không ma sát trên một thanh thẳng đứng. Vòng được buộc vào đầu một sợi dây nhẹ vắt qua một ròng rọc li tường cố định ở khoảng cách $l = 0,8m$ đến thanh. Đầu còn lại của dây buộc vào một trọng vật khối lượng $M = 50g$. Ban đầu vòng được giữ ở cùng độ cao với ròng rọc (như hình vẽ). Thả nhẹ vòng, hãy xác định



1) Quỹ đạo mà vòng đã trượt cho đến khi nó dừng lại lần thứ nhất.
2) Vận tốc của vòng khi nó đi qua vị trí cân bằng.

Lời giải. 1) Khi vận tốc của vòng bằng 0 thì vận tốc của vật M cũng bằng 0. Theo định luật bảo toàn cơ năng thì độ tăng thế năng của vật M bằng độ giảm thế năng của vòng. Khi

2) Vận tốc của vòng khi nó đi qua vị trí cân bằng.

vòng đi xuống được một đoạn x thì vật M đi lên một đoạn $h = \sqrt{l^2 + x^2} - l$.

Ta có $Mgh = mgx$ hay $M(\sqrt{l^2 + x^2} - l) = m.x$

$$\Rightarrow l^2 + x^2 = \left(\frac{m}{M}x + l \right)^2.$$

$$\text{Thay số ta được } l^2 + x^2 = \frac{9}{25}x^2 + \frac{6}{5}xl + l^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{8}l = 1,5m.$$

2) Gọi lực căng dây là T . Tại vị trí cân bằng của vòng thì dây hợp với phương ngang góc θ , ta có $T \sin \theta = mg$ và $T = Mg$, suy ra

$$\sin \theta = \frac{m}{M} = \frac{3}{5}.$$

Độ cao của vòng bị giảm một lượng:

$$h_1 = l \tan \theta = \frac{3}{4}l = 0,6m.$$

Độ cao của vật tăng một lượng:

$$h_2 = \frac{l}{\cos \theta} - l = \frac{l}{4} = 0,2m.$$

Độ giảm thế năng của hệ: $\Delta W_t = mgh_1 - Mgh_2$ (1)

Gọi v_1 và v_2 lần lượt là vận tốc của vật M và vòng khi đi qua vị trí cân bằng. Do dây không

$$\text{dãn nên } v_1 = v_2 \sin \theta = \frac{3v_2}{5} \quad (2)$$

Độ tăng động năng của hệ:

$$\Delta W_d = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta tìm được } v_2 = \sqrt{\frac{10}{3}} \text{ m/s. } \square$$

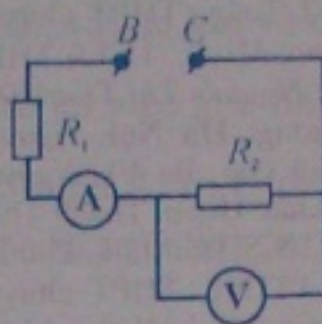
◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Vũ Quang Minh 11 Lí, THPT chuyên;
Nghệ An: Nguyễn Bá Dũng, A3K37, Vũ Đình Hải, A3K36, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh.

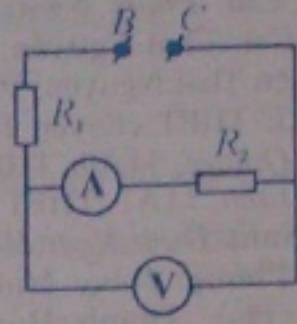
NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/385.** Cho hai điện trở R_1, R_2 , vôn kế V , ampe kế A và một hiệu điện thế U_{BC} không thay đổi. Lần lượt mắc các linh kiện điện trên theo ba sơ đồ như hình vẽ.

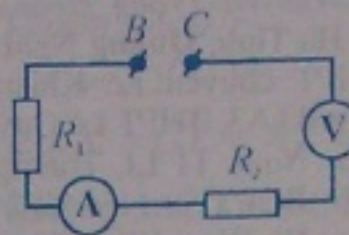
Các số chỉ trên ampe kế A và vôn kế V là:



Sơ đồ 1



Sơ đồ 2



Sơ đồ 3

• Ở sơ đồ 1: ampe kế A chỉ 12,6A, vôn kế V chỉ 42V.

• Ở sơ đồ 2: ampe kế A chỉ 12A, vôn kế V chỉ 48V.

• Ở sơ đồ 3: ampe kế A chỉ 1A, vôn kế V chỉ 96,5V.

Hãy tính điện trở r của ampe kế A .

Lời giải. Ở sơ đồ 1:

$$I_1 = I_{R_2} + I_V = \frac{U_1}{R_2} + \frac{U_1}{R_V} = U_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_V} \right) \quad (1)$$

$$\text{Ở sơ đồ 2: } U_2 = I_2 (R_2 + r) \quad (2)$$

$$\text{Ở sơ đồ 3: } U_3 = I_3 R_V \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} - r \quad (4); \quad R_V = \frac{U_3}{I_3} \quad (5)$$

Thay (4) và (5) vào (1) ta được

$$I_1 = \frac{U_1 I_2}{U_2 - r I_2} + \frac{U_1 I_3}{U_3},$$

$$\text{hay } \frac{U_1 I_2}{U_2 - r I_2} = I_1 - \frac{U_1 I_3}{U_3} = \frac{U_3 I_1 - U_1 I_3}{U_3}$$

$$U_1 U_3 I_2 = U_2 U_3 I_1 - U_1 U_2 I_3 - r I_2 (U_3 I_1 - U_1 I_3).$$

$$\text{Suy ra } r = \frac{U_2 U_3 I_1 - U_1 U_2 I_3 - U_1 U_3 I_2}{I_2 (U_3 I_1 - U_1 I_3)}$$

$$= \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_1 U_3}{U_3 I_1 - U_1 I_3} \text{ hay } r = \frac{1}{\frac{I_2}{U_2} - \frac{I_1}{U_1} + \frac{I_3}{U_3}}.$$

$$\text{Thay số ta có } r = 0,547\Omega. \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Lào Cai: *Phạm Ngọc Diệp*, 12 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Thái Nguyên:** *Vũ Quang Minh*, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thị Thu Hiền*, 10 Lí, THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Nội:** *Nguyễn Bảo Quang*, 11A9, THPT Quảng Oai, Ba Vì, *Nguyễn Thị Hạnh*, 11A1, THPT Phùng Khắc Hoan, Thạch Thất; **Hà Nam:** *Đinh Ngọc Hải*, 9C, THCS Trần Phú, Phú Lễ; **Hải Phòng:** *Đặng Minh Đức*, 12TN1, THPT chuyên Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Minh Hiền*, 11A3, THPT Hậu Lộc 1, *Mai Chí Đạt*, 11E, THPT Hà Trung; **Nghe An:** *Trần Thị Ngọc An*, 12A1, Khối THPT chuyên, ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Trọng Hoàng Hiệp*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Đông*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hữu Trang*, 11A3, THPT Lê Quý Đôn; **TP Hồ Chí Minh:** *Lê Đại Nam*, 11 Lí, Trường PTNK, ĐHQG TP Hồ Chí Minh; **Bến Tre:** *Liên Khắc Vũ*, 10 Lí, THPT chuyên Bến Tre; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phùng Thanh Huy*, 12TA7, THPT Vũng Tàu; **Bình Định:** *Nguyễn Đức Toàn*, 11A1, Huỳnh Kim Linh, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Trần Thế Tấn*, *Nguyễn Long Phước Đường*, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN VĂN THUẬN



CUỘC THI GIẢI TOÁN

KỈ NIỆM 45 NĂM

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

★ Bài T9/THCS. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 + 9x - 4} + x\sqrt{11 - 3x} = 2x + 3.$$

Lời giải. (Theo bạn *Phạm Quốc Việt*, 9A, THCS Nguyễn Tự Tân, Bìn Sơn, **Quảng Ngãi**).

$$\text{Tập xác định của phương trình } \begin{cases} x^2 + 9x - 4 \geq 0 \\ 11 - 3x \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x^2 + 9x - 4}, b = \sqrt{11 - 3x} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a + xb &= 2x + 3 \Rightarrow a = 2x + 3 - xb \\ \Rightarrow x^2 + 9x &= a^2 + 1 = (2x + 3 - xb)^2 + 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} &(2x + 3 - xb)^2 + 1 - (x^2 + 9x) \\ &= (4x^2 + 9 + x^2b^2 + 12x - 4x^2b - 6xb) + 1 - (x^2 + 9x) \\ &= x^2(b^2 - 4b + 3) + 3x(1 - 2b) + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x^2(b - 1)(b - 3) + (11 - b^2)(1 - 2b) + 10 \\ & \quad (\text{vì } 3x = 11 - b^2) \\ &= x^2(b - 1)(b - 3) + 2b^3 - b^2 - 22b + 21 \\ &= x^2(b - 1)(b - 3) + (b - 1)(2b^2 + b - 21) \\ &= x^2(b - 1)(b - 3) + (b - 1)(b - 3)(2b + 7) \\ &= (b - 1)(b - 3)(x^2 + 2b + 7) \end{aligned} \quad (2)$$

Chú ý $x^2 + 2b + 7 > 0$ do $b \geq 0$. Từ (1), (2) có

$$\begin{cases} b = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11 - 3x = 1 \\ 11 - 3x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Thử lại:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x = \frac{10}{3} & \text{ có } \begin{cases} a = \sqrt{x^2 + 9x - 4} = \frac{19}{3} \\ 2x + 3 - xb = \frac{19}{3} \end{cases} \\ \bullet \quad x = \frac{2}{3} & \text{ có } \begin{cases} a = \sqrt{x^2 + 9x - 4} = \frac{7}{3} \\ 2x + 3 - xb = \frac{7}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{10}{3} \text{ và } x = \frac{2}{3}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Ngoài cách giải trên còn cách giải khác: dùng kĩ thuật nhân liên hợp của căn thức hoặc bình phương đưa về phương trình bậc bốn. Ngoài bạn *Việt*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Hà Quang Nhận*, 8B, THCS Như Thụy, Sông Lô, *Nguyễn Thế Bảo*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Nghe An:** *Trương Đình Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Ánh*, 9I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị; **Bình Định:** *Nguyễn Danh Nhân*, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/THCS.** Các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho $BX = CY = AZ$. Chứng minh rằng, tam giác XYZ đều khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Lời giải

■ **Bổ đề 1.** Nếu các tam giác ABC và $A'B'C'$ thỏa mãn điều kiện $AB = A'B'$; $AC = A'C'$ và $BC \geq B'C'$ thì $\widehat{BAC} \geq \widehat{B'A'C'}$.

Phép chứng minh Bổ đề 1 dành cho độc giả.

■ **Bổ đề 2.** Nếu các tam giác ABC và $A'B'C'$ thoả mãn điều kiện $AB = A'B' \geq AC = A'C'$ và $BC \geq B'C'$ thì $\widehat{ACB} \leq \widehat{A'C'B'}$.

Chứng minh. Có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1. $BC = B'C'$.

Khi đó $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.c.c).

Do đó $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

Trường hợp 2. $BC > B'C'$.

Khi đó $\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$ (theo bổ đề 1).

Do đó, tồn tại điểm C'' nằm trong góc $\widehat{BAC}$ sao cho $\widehat{BAC''} = \widehat{B'A'C'}$ và $AC'' = A'C'$. Dễ thấy $\triangle ABC'' = \triangle A'B'C'$ (c.g.c) (1).

Vì $AB \geq AC$ nên trên đoạn BC tồn tại điểm C_1 sao cho $AC_1 = AC$.

Do đó có ba khả năng cần xem xét.

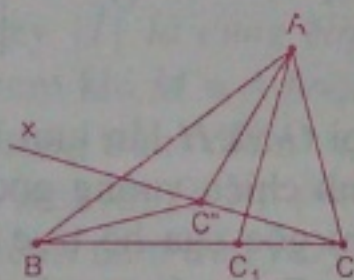
Khả năng 1. Tia AC'' trùng tia AC_1 . Khi đó C'' trùng C_1 (vì $AC'' = A'C' = AC = AC_1$).

Do đó $\widehat{ACB} < \widehat{AC_1B} = \widehat{AC''B}$ (vì C'' trùng C_1)
 $= \widehat{A'C'B'}$ (theo (1)).

Khả năng 2. Tia AC'' nằm trong góc $\widehat{BAC_1}$ (h.1).

Gọi $C''x$ là tia đối của tia $C''C$. Ta có

$\widehat{ACB} = \widehat{ACC''} + \widehat{BCC''}$
 $< \widehat{AC''x} + \widehat{BC''x}$
 $= \widehat{AC''B} = \widehat{A'C'B'}$ (theo (1)).



Hình 1

Khả năng 3. Tia AC'' nằm trong góc $\widehat{CAC_1}$ (h. 2).

Vì $AC'' = AC = AC_1$ nên C''

nằm ngoài tam giác ACC_1 (2). Do đó

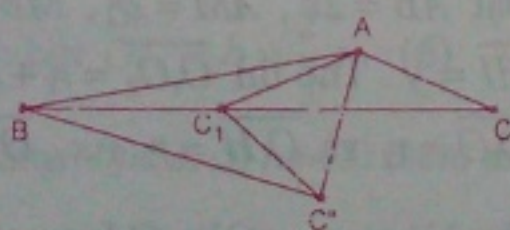
$\widehat{ACB} = \widehat{AC_1C}$ (vì $AC = AC_1$)

$< \widehat{AC_1C''}$ (theo (2)).

$= \widehat{AC''C_1}$ (vì $AC_1 = AC = A'C' = AC''$)

$< \widehat{AC''B}$ (theo (2))

$= \widehat{A'C'B'}$ (theo (1)).



Hình 2

Tóm lại, ta luôn có $\widehat{ACB} \leq \widehat{A'C'B'}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BC = B'C'$.

Trở lại việc giải bài toán.

Kí hiệu A, B, C theo thứ tự chỉ số đo của các góc $\widehat{BAC}, \widehat{CBA}, \widehat{ACB}$ của tam giác ABC .

Vì tam giác XYZ đều nên $ZX = XY = YZ$. Có hai trường hợp xảy ra.

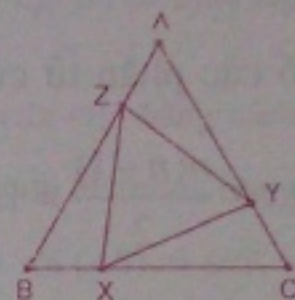
Trường hợp 1

$ZX = XY = YZ$

$\geq BX = CY = AZ$ (h. 3).

Không mất tính tổng quát giả sử $A \geq B \geq C$ (1)

Khi đó $BC \geq CA \geq AB$.



Hình 3

Từ đó, với chú ý rằng $BX = CY = AZ$, ta có $XC \geq YA \geq ZB$. Từ bổ đề 2 có $C \leq A \leq B$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A = B$.

Vì $A = B$ nên $BC = CA \Rightarrow XC = YA$ (vì $BX = CY$) $\Rightarrow \triangle XCY = \triangle YAZ$ (c.c.c). Do đó $C = A$. Tóm lại, tam giác ABC đều.

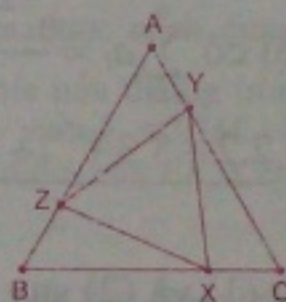
Trường hợp 2

$ZX = XY = YZ$

$\leq BX = CY = AZ$ (h. 4).

Không mất tính tổng quát giả sử $A \geq B \geq C$ (3)

Tương tự như trường hợp 1: $XC \geq YA \geq ZB$.



Hình 4

Vậy, theo bổ đề 2, suy ra $\widehat{YXC} \leq \widehat{ZYA} \leq \widehat{XZB}$.

Từ đó, với chú ý rằng $\widehat{YXZ} = \widehat{ZYX} = \widehat{XZY}$ ($= 60^\circ$), ta có $\widehat{ZXB} \leq \widehat{XYC} \leq \widehat{YZA}$.

Vậy theo bổ đề 1, ta có $BZ \geq CX \geq AY$.

Chú ý rằng $AZ = BX = CY$ suy ra $AB \geq BC \geq CA \Rightarrow C \geq A \geq B$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $A = B = C$. đpcm. $\square$

◀ **Nhận xét.** Đây là một bài toán khó, rất tiếc không bạn nào giải đúng bài toán này.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T9/THPT.** Với bộ các số thực $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ta gọi bộ các 2 - tổng của nó là bộ tất cả các số có dạng $a_i + a_j$ với $1 \leq i < j \leq n$ và kí hiệu là $A^{(2)}$. Với bộ số thực A , biết rằng $A^{(2)} = (2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6)$. Hãy tìm tổng bình phương các phần tử của A .

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Thế Nam Huy, 10A, THPT Yên Phong, Bắc Ninh).

Số các phần tử của $A^{(2)}$ là $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Vậy

$$\text{ta có } \frac{n(n-1)}{2} = 15 \Rightarrow n = 6.$$

Ta có $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ và

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 6} (a_i + a_j)^2 = \left(\sum_{i=1}^6 a_i \right)^2 + 4 \left(\sum_{i=1}^6 a_i^2 \right).$$

$$\text{Vế trái là } 2.2^2 + 3.3^2 + 5.4^2 + 3.5^2 + 2.6^2 = 262.$$

$$\text{Vậy } \left(\sum_{i=1}^6 a_i \right)^2 + 4 \left(\sum_{i=1}^6 a_i^2 \right) = 262 \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \sum_{i=1}^6 a_i = \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq 6} (a_i + a_j)}{5}$$

$$= \frac{2.2 + 3.3 + \dots + 3.5 + 2.6}{5} = \frac{60}{5} = 12 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sum_{i=1}^6 a_i^2 = \frac{262 - 12^2}{4} = \frac{59}{2} = 29,5. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Có nhiều cách giải bài toán trên. Đặc biệt có một số bạn đã chỉ ra rằng tập A đã cho là tập sau

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right\} \text{ (và chỉ có duy nhất tập này).}$$

Một câu hỏi đặt ra là: Có phải tương ứng $A \rightarrow A^{(2)}$ luôn luôn là một đơn ánh hay không?

2) Ngoài bạn Huy, các bạn sau đây có lời giải tốt:

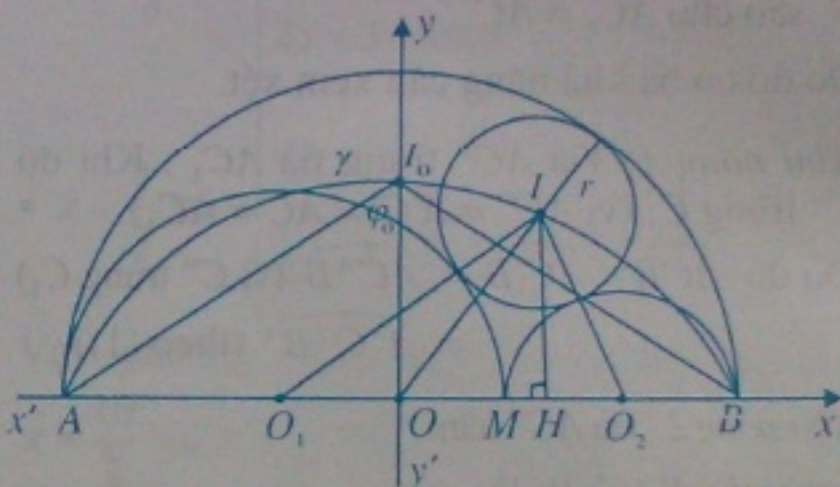
Hà Nam: Trần Trung Kiên, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Thanh Hóa:** Lê Sỹ Bảo, 11A1, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân; **Đào Quang Hòa,** 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Hải Dương:** Vũ Minh Hải, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thừa Thiên - Huế:** Đinh Quang Tuấn, 12 Toán, ĐHKH Huế; **Bến Tre:** Cao Thành Chương, Phạm Đăng Duy Quang, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng

Phong, Tây Hòa; **Đồng Nai:** Nguyễn Thị Thanh Hòa, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/THPT.** Giả sử M là một điểm nằm trên đoạn thẳng AB cho trước. Vẽ một phía của đường thẳng AB dựng ba nửa đường tròn có đường kính lần lượt là AM, BM, AB . Gọi I và r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác cong ABM (có cạnh cong là các nửa đường tròn vừa dựng). Chứng minh rằng khi M chuyển động trên đoạn AB thì quỹ tích của I là một cung elip mà dây cung của nó đi qua một trong hai tiêu điểm của elip đó.

Lời giải



Gọi O và H lần lượt là trung điểm của AB và hình chiếu vuông góc của I trên AB . Chọn O làm gốc của hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy , với trục hoành $x'Ox$ mà $B \in Ox$ và trục tung $y'Oy$ là trung trực của AB .

Đặt $\overline{AB} = 2c$, $\overline{AM} = 2r_1$, $\overline{MB} = 2r_2$ và $\overline{OH} = x$, $\overline{HI} = y$. Thế thì $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2 = c$, $\overline{OO_2} = r_1$, $\overline{O_1O} = r_2$ và $\overline{O_1H} = r_2 + x$, $\overline{O_2H} = -r_1 + x$.

Ngoài ra $c - OI = O_1I - r_1 = O_2I - r_2 (=r)$, và $I(x; y)$.

Từ các tam giác OIH , O_1IH và O_2JH vuông ở H ta được hệ ba PT bậc hai với ba ẩn x, y và r :

$$\begin{aligned} (r+r_1)^2 - (x+r_2)^2 &= (c-r)^2 - x^2 = (r+r_2)^2 - (x-r_1)^2 \\ &= y^2 \text{ (trong đó } c=r_1+r_2) \end{aligned} \quad (*)$$

Khai triển rồi rút gọn hệ hai PT đầu của hệ (*) ta được hệ hai PT bậc nhất sau:

$$\begin{cases} (c+r_1)r = r_2x + cr_2 \\ (c+r_2)r = -r_1x + cr_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{T}(cr_1r_2) = \frac{c(4c^2-t^2)}{t^2+3c^2} & (1) \\ x = \frac{1}{T}c^2(r_1-r_2) = \frac{4c^2t}{t^2+3c^2} & (2) \end{cases}$$

trong đó $T = r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 = \frac{1}{4}(t^2 + 3c^2)$
và $t = r_1 - r_2$.

Từ (1), (2) và (*) suy ra $y = 2r$,

với $r = \frac{c(c^2-t^2)}{t^2+3c^2}$ (3), và $t = \frac{2cx}{y+2c}$ (4)

Đặt $x_0 = x$, $y_0 = y + \frac{2}{3}c$. Sau khi khử tham số t

từ (2) và (3), ta thu được PT $\frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b_0^2} = 1$ (**)

trong đó $a_0 = \frac{2}{3}c\sqrt{3}$, $b_0 = \frac{2}{3}a_0\sqrt{3} = \frac{4}{3}c$; và

$$-c \leq x \leq c, \quad 0 \leq y \leq \frac{2}{3}c \quad (5)$$

Với (**) và ĐK (5) ta thấy $\{I\}$ là cung elip A_1B có dây cung là AB (xem khi $M \equiv A$ hoặc $M \equiv B$ thì A và B là hai đường tròn "điểm" và khi đó $I \equiv A$ hoặc B) của elip (ε) có PT (**) với trục lớn (chứa 2 tiêu điểm) nằm trên $y'Oy$.

Để thấy $x=c \Leftrightarrow y=0, x=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}c \Leftrightarrow M \equiv O$

$$\Leftrightarrow I \equiv I_0, \text{ xác định bởi } \overline{OI_0} = h = \frac{2}{3}c \quad (6)$$

Cuối cùng, ta thấy rằng elip (ε) có tâm là điểm ω $\left(0; -\frac{2}{3}c\right)$ và các tiêu điểm $F_1(0; 0)$, tức là $F_1 \equiv O$

và $F_2\left(0; -\frac{4}{3}c\right)$ với tiêu cự $F_1F_2 = 2c_0 = \frac{4}{3}c$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Với hệ thức (1) được chỉ ra ở lời giải trên ta còn tính được bán kính r của đường tròn (I) nội tiếp tam giác cong AMB theo c , r_1 và r_2 dưới dạng $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{c}$; ($r_1 + r_2 = c$).

2) Một số bạn sử dụng định lý Stewart và sử dụng phép nghịch đảo $N(A, p = \mathcal{P}_A/(O_2) = \overline{AB} \cdot \overline{AM})$ để thiết lập đẳng thức $y = 2r$ (trước khi sử dụng tọa độ để thiết lập PT của $\{I\}$).

3) Một vài bạn sử dụng định nghĩa của elip bằng cách chứng minh $IO + IO' = \frac{4}{3}AB$, trong đó O' thuộc trung trực của AB , nằm khác phía với I đối với (AB) và $OO' = \frac{2}{3}AB$ hoặc sử dụng tính chất đặc trưng về tâm sai của elip liên quan đến đường chuẩn. Theo hướng này, bạn Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, Phú Yên) dựng đường thẳng $\Delta // AB$, Δ cùng phía với I đối với AB và $d(\Delta, (AB)) = AB$ rồi chứng minh được $\frac{IO}{IH'} = \frac{1}{2}$, trong đó $IH' \perp \Delta$ và $IH' = D(I, \Delta)$. Từ đó suy ra $\{I\}$ là một cung elip A_1B như lời giải trên.

4) Bạn Đặng Cảnh Thiện, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An sử dụng phép nghịch đảo cực A , phương tích $p = \mathcal{P}_A/(O_2)$ đã chỉ ra được cách dựng điểm I khá đơn giản như sau. Về phía nửa đường tròn (O) đường kính AB , dựng hai hình vuông $ACDM$ và $BEFM$ và gọi K, I lần lượt là trung điểm của EF, CD ; thế thì $I = AK \cap BI$.

5) Ngoài hai bạn Huy và Thiện, các bạn sau đây xứng đáng được biểu dương:

Phú Thọ: Hạ Hồng Việt, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Ninh:** Trần Anh Tuấn, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Vĩnh Phúc:** Kim Đình Sơn, Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** Hồ Phạm Thiệu, 10A1, THPT Lê Hữu Trác 1, Hương Sơn; **Thừa Thiên - Huế:** Đinh Quang Tuấn, 12 Toán, ĐHKH Huế; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bến Tre:** Phạm Vũ Hoàng, 10/10, THPT Nguyễn Đình Chiểu, Lê Phúc Lữ, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

THÔNG BÁO

Bắt đầu từ tháng 11 năm 2009, địa chỉ trang Web của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ có điều chỉnh như sau: <http://www.nxbgd.vn/toanhocvatuotre>. Xin thông báo tới các bạn đọc.

THTT

PROBLEMS.... (Tiếp trang 17)

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/389. Solve the equation

$$\sqrt[3]{x^3 + 4x + 3} + \sqrt[3]{4x^2 - 9x - 3} = \sqrt[3]{3x^2 - 2x + 2} + \sqrt[3]{2x^2 - 3x - 2}.$$

T7/389. Let $A_1 A_2 \dots A_n$ be a convex polygon ($n \geq 3$) circumscribed around the circle centered at J . Prove that for any point M ,

$$\sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} (MA_i - JA_i) \geq 0.$$

T8/389. Find all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the condition

$$f(xy + f(z)) = \frac{xf(y) + yf(x)}{2} + z,$$

for all x, y, z in $\mathbb{R}$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/389. Let a, b, c be positive numbers. Prove that

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2}.$$

T10/389. Let ABC be an acute triangle and the altitudes AD, BE, CF meet at H . On DE , choose a point K such that $DK = DH$. On DH , choose a point I such that $\widehat{IKD} = 90^\circ$. Prove that the circle centered at I with radius IK touches the circle whose diameter is BC .

T11/389. Let (u_n) be a sequence of positive numbers. Put $S_n = u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \dots + u_n^3$ for $n = 1, 2, \dots$

Assume that $u_{n+1} \leq ((S_n - 1)u_n + u_{n-1}) \frac{1}{S_{n+1}}$, for any $n = 2, 3, \dots$. Find $\lim u_n$.

T12/389. Let p be a prime number and m, n, q be natural numbers satisfying $2 \leq n \leq m$ and $(p, q) = 1$. Prove that $C_{qp^m}^n$ is divisible by p^{m-n+1} (The binomial coefficient C_n^k is the number of ways of picking k unordered elements from a set of n elements).

Translated by LE MINH HA

KỸ THUẬT TÌM NGHIỆM...

(Tiếp trang 14)

$$\bullet \sin \frac{x_2}{2} - \sin x_2 = \sin \left(-\frac{\pi}{12} + k\pi \right) + \frac{1}{2}.$$

Biểu diễn

$$\alpha = -\frac{\pi}{12} + k\pi$$

trên đường tròn lượng giác ta được 2 điểm đều có

$$\sin \alpha > -\frac{1}{2} \text{ (h. 4).}$$

Do đó x_2 thỏa mãn (**).

$$\bullet \sin \frac{x_3}{2} - \sin x_3 = \sin \left(\frac{7\pi}{12} + k\pi \right) + \frac{1}{2}.$$

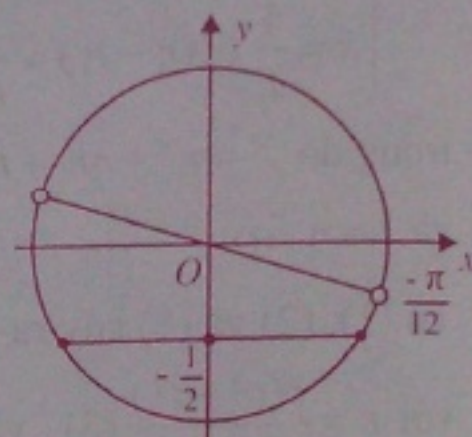
Biểu diễn $\beta = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ trên đường tròn ta được hai điểm (h. 5).

Tại điểm $\frac{7\pi}{12} + \pi$ không thỏa mãn

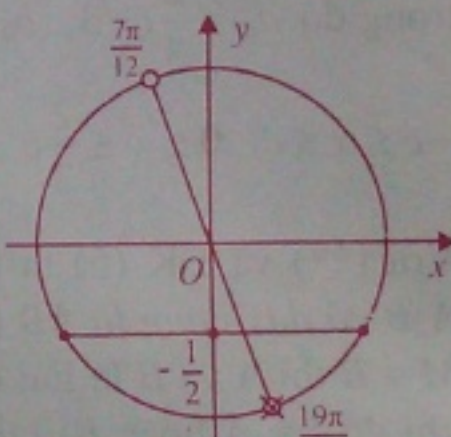
$$\sin \beta > -\frac{1}{2}.$$

Vậy x_3 không thỏa mãn ĐK khi k lẻ. Tóm lại, PT (9) có nghiệm là

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \quad x = \frac{7\pi}{6} + 4n\pi (k, n \in \mathbb{Z}).$$



Hình 4



Hình 5

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Giải các phương trình sau:

$$1. 2 \tan x + \cot 2x = 2 \sin 2x + \frac{1}{2 \sin 2x}.$$

$$2. \frac{3(\sin x + \tan x)}{\tan x - \sin x} - 2 \cos x = 2.$$

$$3. 2 \sin x + \cot x = 2 \sin 2x + 1.$$

$$4. 3 \tan^3 x - \tan x + \frac{3(1 + \sin x)}{\cos^2 x} - 8 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

$$5. 2 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{1 + 8 \sin 2x \cos^2 2x}.$$

$$6. \frac{\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}}{\cos x} = 4 \sin x.$$

Kết quả cuộc thi Giải TOÁN và VẬT LÝ

TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC và TUỔI TRÉ

Năm học 2008 - 2009

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2008 – 2009 được khởi động từ tháng 9 năm 2008 đến tháng 8 năm 2009. Cuộc thi này cùng song hành với Cuộc thi Giải toán Kỷ niệm 45 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ và được các bạn trẻ yêu toán cấp THCS và THPT trên cả nước hưởng ứng rất sôi nổi. Nhiều bạn học sinh THCS đã giải được những bài toán khó dành cho THPT với những cách giải độc đáo, sáng tạo. Những tỉnh có đông học sinh tham gia và đoạt nhiều giải là Hà Nội, Vĩnh Phúc, Bắc Ninh, Nghệ An, Thanh Hóa. Hai giải Xuất sắc môn Toán lần này thuộc về hai bạn: Nguyễn Văn Thắng và Nguyễn Mạnh Quân. Giải nhất môn Vật lý thuộc về bạn Nguyễn Ngọc Duy. Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi này, và hẹn gặp lại các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2009 – 2010. Dưới đây là danh sách 89 bạn đoạt giải Toán, 17 bạn đoạt giải Vật lý năm học 2008 – 2009 được sắp xếp theo thứ tự điểm và cấp học.

MÔN TOÁN

Giải Xuất sắc (2 giải)

1. Nguyễn Văn Thắng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An.
2. Nguyễn Mạnh Quân, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

Giải Nhất (6 giải)

1. Nguyễn Hữu Dũng, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, Bắc Ninh.
2. Nguyễn Văn Quý, 10A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.
3. Trần Anh Tuấn, 11A, THPT Thuận Thành 1, Bắc Ninh.
4. Nguyễn Tăng Thành, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.
5. Đào Trọng Anh, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên, Hà Nội.
6. Lê Phúc Lữ, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre, TX. Bến Tre, Bến Tre.

Giải Nhì (10 giải)

1. Nguyễn Bảo Trâm, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, Quảng Ngãi.
2. Vũ Ngọc Cương, 8/6, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa.
3. Nguyễn Thế Bảo, 9A1, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc.
4. Lê Văn Tú, 9A1, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc.

5. La Hồng Quân, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa.
6. Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, Phú Yên.
7. Đỗ Vũ Thạch, 10T1, Trường THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội.
8. Lê Văn Tấn Quyền, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.
9. Trần Trung Kiên, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam.
10. Trần Nhật Tân, 12A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

Giải Ba (32 giải)

1. Nguyễn Như Ngọc, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, Bắc Ninh.
2. Nguyễn Thành Công, 6A1, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc.
3. Nguyễn Văn Cường, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An.
4. Nguyễn Kim, 7A, THCS Phan Đình Phùng, Đông Hà, Quảng Trị.
5. Hoàng Minh Phương, 7A1, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc.
6. Nguyễn Thị Hương Lý, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong, Bắc Ninh.
7. Trịnh Hồng Ngọc, 7A1, THCS Lâm Thao, Phú Thọ.

8. Vũ Tuấn Linh, 7A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
9. Nguyễn Văn Hải Như, 8I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị, **Quảng Trị**.
10. Trần Quang Minh, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu, **Bạc Liêu**.
11. Hồ Tấn Vũ, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
12. Phạm Mỹ Linh, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
13. Võ Duy Văn, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.
14. Nguyễn Văn Hoàng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
15. Cao Xuân Bang, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**.
16. Lý Phụng Hoàng, 9A1, PTDL Nguyễn Siêu, Cầu Giấy, **Hà Nội**.
17. Phạm Quang Thịnh, 9I, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa, **Phú Yên**.
18. Nguyễn Hữu Ánh, 9I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị, **Quảng Trị**.
19. Lê Cao Thắng, 10A1, THPT Phan Chu Trinh, Sông Cầu, **Phú Yên**.
20. Trần Trọng Huy, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
21. Quang Tài Anh Phú, 10A1, K37, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An**.
22. Mai Anh Bằng, 10 Toán, Trường THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**.
23. Trần Thế Khải, 11A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
24. Lê Quang Hiếu, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đắk Lắk**.
25. Hoàng Bùi Khánh, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**.
26. Nguyễn Hồng Sơn, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Tam Kỳ, **Quảng Nam**.
27. Lê Đại Thành, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ.
28. Phan Quốc Khánh, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**.
29. Nguyễn Tấn Hưng, 11T, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**.
30. Nguyễn Sơn Tùng, 12A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì, **Hà Nội**.

31. Trần Thị Hồng Vân, 12A, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
 32. Lê Văn Huỳnh, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.
- Giải Khuyến khích (39 giải)**

1. Phạm Thị Vân Anh, 6A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
2. Phạm Văn Quyển, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.
3. Phan Hoàng Thanh Tùng, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**.
4. Hoàng Danh Thắng, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.
5. Nguyễn Ngân Giang, 7A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
6. Phan Thanh Tùng, 7D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**.
7. Nguyễn Minh Hiếu, 7A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
8. Hoàng Anh Tú, 7I, THCS Marie-Curie, **Hà Nội**.
9. Phạm Huy Hoàng, 8A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình, **Hà Nội**.
10. Hà Quang Nhân, 8B, THCS Như Thụy, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**.
11. Chu Hương Giang, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, **Bắc Ninh**.
12. Nguyễn Danh Nhân, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ, **Bình Định**.
13. Hoàng Trọng Đường, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**.
14. Đặng Duy Linh, 9E, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**.
15. Doãn Văn Hùng, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An**.
16. Nguyễn Văn Minh, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An**.
17. Nguyễn Ngọc Trung, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**.
18. Trần Minh Vương, 10A2 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
19. Trịnh Đăng Sơn, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa.

20. *Hà Hồng Việt*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**.
21. *Vũ Đình Long*, 10A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.
22. *Đình Tiến Dũng*, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**.
23. *Phạm Đức Nam*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Cầu Giấy, **Hà Nội**.
24. *Phạm Hữu Đức*, 10A10, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**.
25. *Tạ Hải Nam*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**.
26. *Nguyễn Đồng Tiến*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**.
27. *Ngô Văn Dũng*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.
28. *Kim Đình Sơn*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**.
29. *Vũ Đại Nghĩa*, 11I, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá, **Kiên Giang**.
30. *Lưu Xuân Khôi*, 11T, THPT chuyên **Thái Nguyên**.
31. *Thiếu Đăng Ba*, 11 Toán, THPT chuyên **Hà Tĩnh**.
32. *Lê Nguyên Khánh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**.
33. *Nguyễn An Tịnh*, 11A1, K36, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghe An**.
34. *Nguyễn Thanh Tú*, 11A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghe An**.
35. *Hồ Diên Tuấn Anh*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**.
36. *Trần Bá Trung*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**.
37. *Lương Văn Thiện*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**.
38. *Nguyễn Hoàng Hiệp*, 12 Toán, THPT chuyên **Bắc Giang**.
39. *Quách Đăng Hưng*, 12T, THPT chuyên **Bắc Ninh**.

MÔN VẬT LÝ

Giải Nhất (1 giải)

1. *Nguyễn Ngọc Duy*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**.

Giải Nhì (3 giải)

1. *Nguyễn Tấn Đông*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**.
2. *Nguyễn Văn Đông*, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**.
3. *Phạm Đình Tuấn*, 12A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang, **Hải Dương**.

Giải Ba (6 giải)

1. *Nguyễn Duy Mạnh*, 10A1, THPT Quỳnh Lưu 1, **Nghe An**.
2. *Hồ Trọng Hùng*, 10A3, K37, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghe An**.
3. *Ngô Việt Hùng*, 12 Toán, THPT chuyên **Bắc Kạn**.
4. *Nguyễn Văn Nguyên*, 12A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang, **Hải Dương**.

5. *Lê Thanh Minh*, 12C12, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, **Thanh Hóa**.

6. *Lê Văn Giang*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.

Giải Khuyến Khích (7 giải)

1. *Nguyễn Trung Hưng*, 10A3, K37, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghe An**.
2. *Trần Vy Nhật Quang*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**.
3. *Trần Thủy Anh*, 11A, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Long An**.
4. *Mai Chí Đạt*, 11E, THPT Hà Trung, **Thanh Hóa**.
5. *Nguyễn Hoàng Hiệp*, 12 Toán, THPT chuyên **Bắc Giang**.
6. *Huỳnh Vĩnh Sang*, 12A1, THPT TX. Sa Đéc, **Đồng Tháp**.
7. *Trương Công Thành*, 12T1, THPT Ngô Gia Tự, Eakar, **Đắk Lắk**.

Xin chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải. Các bạn hãy gửi địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận giải thưởng và Giấy Chứng nhận. Riêng các bạn đoạt giải Xuất sắc và giải Nhất môn Toán, môn Vật lý gửi gấp địa chỉ mới để nhận Giấy mời dự Lễ Kỷ niệm 45 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ vào ngày 17.12.2009

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

**Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam**

NGÔ TRẦN ÁI

**Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam**

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THIÊN KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1** Thư chúc mừng nhân dịp Kỷ niệm 45 năm Xuất bản Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
- 2** Nói chuyện với bạn trẻ yêu toán
Nguyễn Cảnh Toàn – Ba "KHÔNG" chụm lại thành hòn núi cao.
- 4** Đào Quang Diễn – Bài thơ "Thăm thầy giáo cũ".
- 5** Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School
Nguyễn Đức Tấn – Một phong cách học toán.
- 6** Đề thi vào lớp 10 chuyên toán Trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, năm học 2009 – 2010.
- 7** Lời giải Đề thi vào lớp 10 Khối THPT chuyên Đại học Vinh, năm học 2009 – 2010.
- 9** Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation
Phạm Văn Hùng – Một số chú ý khi giải hệ phương trình.
- 12** Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum
Phan Tuấn Cộng – Kỹ thuật tìm nghiệm của phương trình lượng giác có điều kiện.
- 16** Đề ra kì này – Problems in This Issue
T1/389, ..., T12/389, L1/389, L2/389.
- 18** Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems
Giải các bài của số 385.
- 24** Cuộc thi giải toán Kỷ niệm 45 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ – The M&Y 45th Anniversary Contest
Giải các bài T9/THCS, T10/THCS, T9/THPT, T10/THPT.
- 29** Kết quả Cuộc thi giải Toán và Vật lí trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm học 2008 – 2009.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, TỈNH HẢI DƯƠNG

25 năm xây dựng và trưởng thành

Trong hai ngày 14 và 15/11/2009. Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, tỉnh Hải Dương long trọng tổ chức Lễ kỷ niệm 25 năm ngày thành lập trường và 45 năm khối phổ thông chuyên Toán - Một ngôi trường hàng đầu về giáo dục và chăm sóc các tài năng trở thành những công dân xuất sắc. Nơi con người được phát triển toàn diện và thích nghi với mọi hoàn cảnh.



Các thầy cô giáo tổ Toán của trường.
Hàng sau đứng giữa: Hiệu trưởng ThS. Phan Tuấn Cộng

Năm 1964, lớp phổ thông chuyên Toán (được gọi là lớp Toán đặc biệt) của Tỉnh Hải Dương được thành lập tại Thôn Mạc Xá, Xã Quang Phục (sau là Xã Tái Sơn) Huyện Tứ Kỳ, Tỉnh Hải Dương. Giữa những năm Đế Quốc Mỹ phá hoại miền Bắc, lớp Toán đặc biệt này đã trải qua biết bao ngày tháng cam go, liên tục phải sơ tán và học ở nhiều nơi khác nhau: Tứ Kỳ, Nam Sách, TX. Hải Dương, Hưng Yên. Các thế hệ học sinh ngày ấy đã trưởng thành và trở thành các nhà lãnh đạo, trí thức, doanh nhân xuất sắc, đặt nền móng cho việc thành lập trường Phổ thông Năng khiếu Tỉnh. Xuất phát từ nhu cầu cần thiết có một môi trường giáo dục toàn diện và đặc biệt đào tạo tài năng trẻ cho Tỉnh nhà, ngày 22/12/1984, trường Năng khiếu Tỉnh Hải Hưng (nay là trường THPT chuyên Nguyễn Trãi) chính thức được thành lập theo Quyết định số 327 QĐ/UB của UBND Tỉnh Hải Hưng.

Trong suốt 25 năm xây dựng và phát triển, thầy và trò nhà trường đã nỗ lực phấn đấu không mệt mỏi cho sự nghiệp trồng người và đã gặt hái được những thành tích đáng tự hào.

HỌC SINH

- ❖ 23 giải Quốc tế và Khu vực trong đó 4 Huy chương Vàng, 7 Huy chương bạc, 9 Huy chương Đồng và 3 Bằng khen.
- ❖ 1068 giải Quốc gia, trong đó 40 Giải Nhất, 225 giải Nhì, 457 giải Ba, 346 giải Khuyến khích.
- ❖ Hàng năm tỉ lệ đỗ tốt nghiệp là 100%, tỉ lệ đỗ Đại học và Cao đẳng trung bình là 95%.

GIÁO VIÊN

- ❖ 6 thầy cô được Nhà nước phong tặng danh hiệu Nhà giáo Ưu tú.
- ❖ 1 cô giáo được Chủ tịch Nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba.
- ❖ 11 thầy cô được Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng Bằng khen.
- ❖ 44 thầy cô được tặng danh hiệu Chiến sĩ Thi đua, Giáo viên Giỏi các cấp (trong đó có 22 thầy cô đạt được từ 5 năm trở lên).

NHÀ TRƯỜNG

- ❖ Được Chủ tịch Nước tặng Huân chương Lao động Hạng Ba (1994), Hạng Nhì (2009).
- ❖ Được Chủ tịch Hội đồng Bộ trưởng tặng Bằng khen năm 1989.
- ❖ Lá cờ đầu khối THPT của Tỉnh 3 năm: 1997, 1998, 2009.
- ❖ Liên tục các năm đạt danh hiệu tập thể Lao động Xuất sắc.
- ❖ Năm học 2008-2009, trường được công nhận đạt chuẩn Quốc gia giai đoạn 2001-2010.
- ❖ Đảng bộ nhà trường liên tục được công nhận là Đảng bộ trong sạch vững mạnh, có thành tích tiêu biểu được Thành ủy và Tỉnh ủy biểu dương.
- ❖ Công đoàn nhà trường liên tục đạt danh hiệu Công đoàn vững mạnh xuất sắc, được Liên đoàn Lao động Tỉnh Hải Dương tặng Cờ Đơn vị dẫn đầu phong trào thi đua khối sự nghiệp năm 1998.
- ❖ Đoàn TNCS Hồ Chí Minh của trường liên tục được công nhận là Đoàn Trường Tiên tiến Xuất sắc được Tỉnh đoàn tặng Cờ và Trung ương Đoàn tặng Bằng khen.