



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
5 2009
Số 383

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM GẶP MẶT THÂN MẬT ĐẦU XUÂN 2009



Thử sức trước kì thi

GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM NĂM 2008

Nhân dịp đầu Xuân Kỷ Sửu, tại Hội trường 19 Lê Thánh Tông, Hà Nội. Hội Toán học Việt Nam đã tổ chức gặp mặt các nhà Toán học và trao Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2008 cho các giáo viên và học sinh sau đây.

I. Giáo viên

Ông *Trịnh Văn Hoa*, sinh ngày 28.5.1968, giáo viên trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa.

Thành tích: Tham gia giảng dạy THPT chuyên từ năm 1992. Từ năm 2001 đến nay đã đào tạo được 12 học sinh đoạt giải Quốc gia, đặc biệt năm 2008 có 2 học sinh đoạt Huy chương Vàng Olympic Toán Quốc tế lần thứ 49.

II. Học sinh

1. *Hoàng Đức Ý*, Trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa. Hiện nay là Sinh viên lớp Tiên tiến, khoa Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

Thành tích: Đoạt nhiều giải thưởng trong các kì thi học sinh giỏi các cấp (trong đó có giải về môn Vật lí và Văn), giải Ba Quốc gia môn Toán năm 2008, Huy chương Vàng Olympic Toán Quốc tế lần thứ 49.

2. *Đỗ Thị Thu Thảo*, Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương. Hiện là Sinh viên lớp Tiên tiến, khoa Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

Thành tích: Giải Nhì Quốc gia môn Toán 2008, Huy chương Bạc Olympic Toán Quốc tế lần thứ 49.

3. *Nguyễn Thanh Thảo*, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Ninh Thuận.

Thành tích: Là nữ học sinh ở một địa phương còn nhiều khó khăn nhưng đã đạt nhiều thành tích xuất sắc: Giải Nhất học sinh giỏi Toán cấp tỉnh (lớp 9), Huy chương Vàng Olympic 30/4 (lớp 10), Huy chương Bạc Olympic 30/4 (lớp 11), giải Khuyến khích học sinh giỏi Toán Quốc gia năm 2008, giải Ba học sinh giỏi Toán Quốc gia năm 2009.

HÀ HUY KHOÀI

(Viện Toán học Việt Nam)

Lễ kí chương trình phối hợp thực hiện phong trào thi đua "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỀN, HỌC SINH TÍCH CỰC" giai đoạn 2009 - 2013

Ngày 22.4. 2009, tại Hội trường Bộ GD&ĐT đã diễn ra Lễ kí chương trình phối hợp thực hiện phong trào thi đua «Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực» giữa Bộ GD&ĐT, Hội Khuyến học Việt Nam và Hội Liên hiệp Phụ nữ Việt Nam. Tham dự buổi lễ có Phó Thủ tướng kiêm Bộ trưởng Bộ GD&ĐT GS. *Nguyễn Thiện Nhân*, Chủ tịch Hội Khuyến học Việt Nam *Nguyễn Mạnh Cẩm*, Chủ tịch Hội Liên hiệp Phụ nữ Việt Nam *Nguyễn Thị Thanh Hòa*, Ban Chỉ đạo Phong trào thi đua, lãnh đạo của các Vụ trong BGD&ĐT, Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh, các phóng viên báo và tạp chí. Trước đó, vào ngày 19.8.2008 đã diễn ra Lễ kí kế hoạch liên ngành triển khai thực hiện phong trào thi đua này giữa Bộ GD&ĐT, Bộ Văn hóa, Thể thao và Du lịch, Trung ương Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh.

Phó Thủ Tướng, Bộ trưởng Bộ GD&ĐT *Nguyễn Thiện Nhân* đã chỉ đạo Bộ GD&ĐT, Hội Khuyến học Việt Nam, Hội Liên hiệp Phụ nữ Việt Nam cùng ngành Văn hóa, Thể thao và Du lịch, Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh cùng phối hợp



các hoạt động nhằm triển khai, nâng cao chất lượng và hiệu quả của phong trào thi đua «Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực». Mỗi ngành, đoàn thể cần đóng góp vào phong trào thi đua phù hợp với thế mạnh của mình, thông qua chương trình phối hợp để phát huy sức mạnh tổng hợp toàn bộ hệ thống chính trị, toàn xã hội chăm lo cho sự nghiệp "trồng người", vì tương lai của mỗi gia đình và tương lai của Tổ quốc.



BẤT ĐẲNG THỨC VỀ TÍNH CHẤT CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

TRẦN HÀ

(GV THCS Tam Đa, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Như các bạn đã biết, các bài toán về bất đẳng thức (BĐT) rất đa dạng và khá phức tạp. Không ngoại lệ, các BĐT về tính chất các nghiệm của phương trình đại số cũng làm không ít các bạn học sinh lúng túng. Trong bài viết này, chúng ta sẽ sử dụng một công cụ khá đơn giản nhưng hiệu quả, đó là công thức nghiệm của phương trình.

★ **Bài toán 1.** Cho x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ và y_1, y_2 là các nghiệm của phương trình $cy^2 + by + a = 0$ ($a \neq 0, c \neq 0$). Chứng minh rằng

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 \geq 4.$$

Lời giải. Theo giả thiết $ax_i^2 + bx_i + c = 0$ ($i = 1, 2$).

Do $c \neq 0$ nên $x_i \neq 0$, suy ra $a + b \frac{1}{x_i} + c \frac{1}{x_i^2} = 0$

($i = 1, 2$). Vậy $\frac{1}{x_i}$ là nghiệm của phương

trình $cy^2 + by + a = 0$, do đó $y_i = \frac{1}{x_i}$. Sử dụng

BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geq 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = y_1 = \pm 1$, $x_2 = y_2 = \pm 1$. □

Lời bình.

- Quan sát hai PT đã cho ta thấy các hệ số của chúng có liên quan với nhau, vì vậy nghiệm của chúng rất có thể cũng liên quan với nhau.
- Trong lời giải trên ta đã sử dụng định nghĩa nghiệm của phương trình.

- Các bạn có thể sử dụng công thức nghiệm hoặc hệ thức Vietè.

★ **Bài toán 2.** Cho phương trình

$$x^2 - m(m+1)x + m^3 = 0.$$

Xác định các giá trị của tham số m để nghiệm lớn nhất của phương trình trên không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $\Delta = m^2(m+1)^2 \geq 0, \forall m$, suy ra PT đã cho luôn có nghiệm với mọi m . Hơn nữa sử dụng công thức nghiệm ta tìm được hai nghiệm đó là $x_1 = m^2, x_2 = m$.

• Nếu $x_1 \geq x_2 \Leftrightarrow m^2 \geq m \Leftrightarrow m \geq 1$ hoặc $m \leq 0$ thì $x_1 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Kết hợp với điều kiện ở trên suy ra $m \geq 1$ hoặc $m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• Nếu $x_1 < x_2 \Leftrightarrow m^2 < m \Leftrightarrow 0 < m < 1$, khi đó ta có $x_2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$, do đó $\frac{1}{2} \leq m < 1$.

Tóm lại, với $m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $m \geq \frac{1}{2}$ thì nghiệm lớn nhất của PT đã cho không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$. □

★ **Bài toán 3.** Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Đặt

$$M = \max \left\{ \left| \frac{b}{a} \right|, \left| \frac{c}{a} \right| \right\}.$$

Chứng minh rằng

$$|x_0| < 1 + M.$$

Lời giải. Vì x_0 là nghiệm của PT đã cho nên

$$ax_0^2 + bx_0 + c = 0.$$

Do $a \neq 0$ suy ra $x_0^2 = -\left(\frac{b}{a}x_0 + \frac{c}{a}\right).$

Ta có

$$|x_0|^2 = \left| -\left(\frac{b}{a}x_0 + \frac{c}{a}\right) \right| \leq \left| \frac{b}{a}x_0 \right| + \left| \frac{c}{a} \right| \leq M(|x_0| + 1).$$

Suy ra $|x_0|^2 - 1 < M(|x_0| + 1) \Rightarrow |x_0| < M + 1. \square$

Lời bình. Ở trên ta đã sử dụng định nghĩa nghiệm của phương trình và tính chất của giá trị tuyệt đối.

★ Bài toán 4. Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình $x^2 + bx + c = 0$. Chứng minh rằng $|x_0| \leq \sqrt{1+b^2+c^2}$.

Lời giải. Vì x_0 là nghiệm của PT đã cho nên $x_0^2 + bx_0 + c = 0$, dẫn đến $-x_0^2 = bx_0 + c$. Bình phương hai vế và sử dụng BĐT Bunyakovski ta được

$$x_0^4 = (bx_0 + c)^2 \leq (b^2 + c^2)(x_0^2 + 1)$$

$$\Rightarrow x_0^4 - 1 < (b^2 + c^2)(x_0^2 + 1)$$

$$\Rightarrow x_0^2 - 1 < b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow x_0^2 < 1 + b^2 + c^2.$$

Vậy $|x_0| \leq \sqrt{1+b^2+c^2}. \square$

★ Bài toán 5. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm thì $a^2 + (b-2)^2 > 3$.

Lời giải. Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của PT đã cho, ta có $x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + ax_0 + 1 = 0$ (1)

Để thấy $x_0 \neq 0$, chia cả hai vế của đẳng thức (1) cho x_0^2 ta được

$$x_0^2 + ax_0 + b + \frac{a}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b - 2 = 0 \quad (2)$$

Đặt $y_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}$, sử dụng BĐT Cauchy suy ra

$y_0^2 \geq 4$ (3). Hơn nữa, từ (2) và sử dụng BĐT Bunyakovski ta có

$$-y_0^2 = ay_0 + (b-2)$$

$$\Rightarrow y_0^4 = (ay_0 + b-2)^2 \leq (a^2 + (b-2)^2)(y_0^2 + 1)$$

$$\Rightarrow y_0^4 - 1 < (a^2 + (b-2)^2)(y_0^2 + 1)$$

$$\Rightarrow y_0^2 - 1 < a^2 + (b-2)^2.$$

Từ đây, kết hợp với (3) suy ra

$$a^2 + (b-2)^2 > 3. \square$$

Sau đây là một số bài toán dành cho các bạn tự giải. Chúc các bạn thành công.

1. Chứng minh rằng nếu $\frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm. *(Chú ý: $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$)*

2. Xác định giá trị của tham số m để phương trình $3x^2 - 4x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt đều nhỏ hơn 2.

3. Chứng minh rằng nếu x_0 là nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ thì $|x_0| < \sqrt{1+a^2+b^2+c^2}$. *(Chú ý: $x_0^3 \leq (x_0^2 + x_0 + 1)x_0$)*

4. Chứng minh rằng nếu phương trình $(x+y)^2 + (x+a)^2 + (y+b)^2 = c^2$ (ẩn x và y) có nghiệm thì $|a+b| \leq |c|\sqrt{3}$.

5. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$

có nghiệm thì

a) $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$;

b) $2a^2 + b^2 \geq 4$.

ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ DÀI HẠN VÀ CÁC SẢN PHẨM CỦA TẠP CHÍ TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC

Lời giải đề thi vào lớp 10

KHỐI THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, NGHỆ AN

NĂM HỌC 2008 - 2009

(Đề thi đã đăng trên THPT số 382, tháng 4 năm 2009)

VÒNG 1

Câu 1. Ta có $x+y=\frac{5}{2}$; $xy=\frac{1}{4}$. Suy ra

$$A = \frac{x-y+2y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} = -\frac{x+y}{\sqrt{xy}} = -5.$$

Câu 2. Đặt $x^2 + x + 1 = t$ ($t > 0$). PT đã cho trở thành $t(t+1) = 12 \Leftrightarrow (t-3)(t+4) = 0$
 $\Leftrightarrow t = 3$ (do $t > 0$).

Ta có $x^2 + x + 1 = 3 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$.

Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -2$.

Câu 3. Ta có

$$\Delta' = m^2 - 2m + 2 = (m-1)^2 + 1 > 0, \forall m.$$

Do đó PT đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo định lý Viète ta có

$$x_1 + x_2 = 2m, x_1 x_2 = 2m - 2.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 &= 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 10 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 6(m-1) = 10 \\ &\Leftrightarrow m = 2 \text{ hoặc } m = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 4. Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

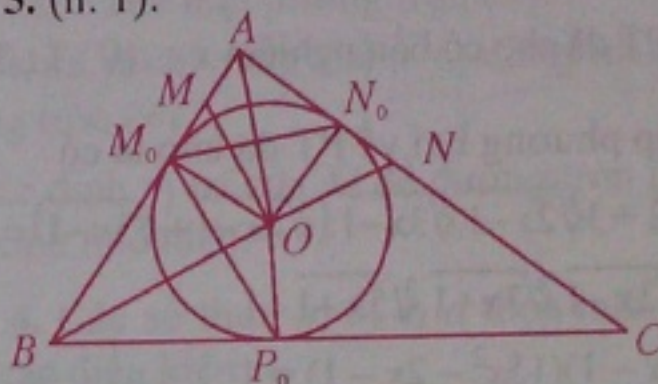
$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \sqrt{2 \cdot \frac{a}{b}}, \sqrt{b^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{2 \cdot \frac{b}{a}}.$$

Suy ra

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \geq 2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Câu 5. (h. 1).



Hình 1

a) Tứ giác AM_0ON_0 nội tiếp, suy ra

$$\widehat{OM_0N_0} = \widehat{ON_0M_0} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} \quad (1)$$

Tứ giác BM_0OP_0 nội tiếp nên

$$\widehat{OM_0P_0} = \widehat{OP_0M_0} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{P_0M_0N_0} = \widehat{OM_0P_0} + \widehat{OM_0N_0} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}).$$

b) Theo tính chất tiếp tuyến có

$$BM_0 + CN_0 = BP_0 + CP_0 = BC = BM + CN.$$

Suy ra $M_0M = N_0N$. Hơn nữa $OM_0 = ON_0$ nên $\triangle OM_0M = \triangle ON_0N$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = ON$, tức là tam giác OMN cân tại O .

c) Ta có $\widehat{MOM_0} = \widehat{NON_0} \Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{M_0ON_0}$.

Suy ra $\triangle MON \sim \triangle M_0ON_0$, nên

$$\frac{MN}{M_0N_0} = \frac{ON}{ON_0} \geq 1.$$

Dẫn đến $MN \geq M_0N_0$.

Vậy độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng M_0N_0 khi và chỉ khi $M \equiv M_0, N \equiv N_0$.

Câu 6. a) Đặt $t = x^2 - 4x + 5$, PT đã cho trở thành

$$t - 5 + \frac{10}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = 5.$$

• Với $t = 2$ ta có $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 3.$

• Với $t = 5$ ta có $x^2 - 4x + 5 = 5$
 $\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4.$

Vậy PT đã cho có bốn nghiệm $x \in \{0; 1; 3; 4\}.$

b) Lập phương hai vế PT đã cho ta có

$$5x - 2 + 3\sqrt[3]{2x-1} \cdot \sqrt[3]{3x-1} \cdot (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{3x-1}) = 5x + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x-1} \cdot \sqrt[3]{3x-1} \cdot \sqrt[3]{5x+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(15x^2-2x-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 30x^3 - 19x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{19}{30}.$$

Thử lại ta được PT đã cho có nghiệm $x = \frac{19}{30}.$

Câu 7. a) Ta có $x_1^2 - 18x_1 + 1 = 0$ nên

$$x_1^{n+2} - 18x_1^{n+1} + x_1^n = 0 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự có } x_2^{n+2} - 18x_2^{n+1} + x_2^n = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$x_1^{n+2} + x_2^{n+2} - 18(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) + (x_1^n + x_2^n) = 0$$

$$\Leftrightarrow S_{n+2} = 18S_{n+1} - S_n.$$

b) Ta có $S_0 = 2, S_1 = x_1 + x_2 = 18, S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 322$ là các số nguyên dương và không chia hết cho 17.

Giả sử S_k không chia hết cho 17 với $k = 1, 2, \dots, n+2, n \in \mathbb{N}.$ Ta có

$$\begin{aligned} S_{n+3} &= 18S_{n+2} - S_{n+1} \\ &= 17S_{n+2} + (18S_{n+1} - S_n) - S_{n+1} \\ &= 17(S_{n+2} + S_{n+1}) - S_n. \end{aligned}$$

Suy ra S_{n+3} là số nguyên dương và không chia hết cho 17. Theo phương pháp quy nạp suy ra S_n là số nguyên dương và không chia hết cho 17 với mọi $n.$

Câu 8. Sử dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có $a + b + c + d \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd} \geq 4\sqrt[4]{abcd}.$ Từ đó suy ra $abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4.$

Do đó với $a, b, c, d \in [0; 1]$ ta có $0 \leq a + b + c + d \leq 4, 0 \leq 4 - a - b - c - d \leq 4,$

suy ra

$$\sqrt[3]{abcd} \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^{\frac{4}{3}} \leq \frac{a+b+c+d}{4} \quad (1)$$

$$\text{và } \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}$$

$$\leq \left(\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)+(1-d)}{4}\right)^{\frac{4}{3}} \leq \frac{4-a-b-c-d}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy $P \leq 1.$ Vậy giá trị lớn nhất của P là 1, đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = d = 0$ hoặc $a = b = c = d = 1.$

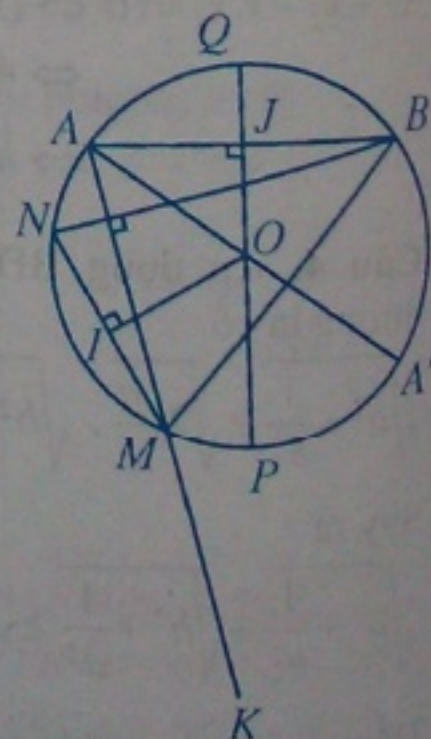
Câu 9. (h. 2). Gọi A' là giao điểm thứ hai của AO với đường tròn $(O), J$ là trung điểm của đoạn $AB.$ Ta có $\widehat{MN} = \widehat{A'B} = 180^\circ - \widehat{AB}.$ Suy ra

$$IM = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}A'B = JO. \text{ Suy ra}$$

$$OI = \sqrt{OM^2 - IM^2} = \sqrt{OA^2 - JO^2} = a.$$

b) Gọi P, Q lần lượt là điểm chính giữa của hai cung lớn, nhỏ $AB.$ Trên tia AM lấy điểm K sao cho $MB = MK.$ Ta có $MA + MB = AK.$

Vì MQ là đường phân giác của góc AMB và $MP \perp MQ$ nên MP là đường phân giác của góc $BMK.$ Do $MK = MB$ suy ra $PK = PB = PA.$ Do đó K thuộc đường tròn tâm P bán kính $PB = PA$ không đổi.



Hình 2

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 KHỐI THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

NĂM HỌC 2008 - 2009

VÒNG 1

DÙNG CHO MỌI THÍ SINH VÀO KHỐI CHUYÊN

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. Cho biểu thức

$$P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b-\sqrt{ab}} + \frac{a}{\sqrt{ab}+a} \right) - \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2}$$

với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

1) Rút gọn biểu thức P .

2) Tìm a và b sao cho $b = (a+1)^2$ và $P = -1$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2 + (m^2 + 1)x + m = 2$, với m là tham số.

1) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , phương trình có hai nghiệm phân biệt.

2) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình, tìm tất cả các giá trị của m sao cho

$$\frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1 x_2 + \frac{55}{x_1 x_2}.$$

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại C . Trên cạnh AB lấy điểm M tùy ý ($M \neq A, M \neq B$). Kí hiệu O, O_1, O_2 lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMC, BMC .

1) Chứng minh rằng bốn điểm C, O_1, M, O_2 cùng nằm trên một đường tròn ($\mathcal{C}$).

2) Chứng minh rằng điểm O cũng nằm trên đường tròn ($\mathcal{C}$).

3) Xác định vị trí của M để đường tròn ($\mathcal{C}$) có bán kính nhỏ nhất.

Câu 4. Các số thực a, b, c, d thỏa mãn đồng thời các điều kiện

i) $ac - a - c = b^2 - 2b$;

ii) $bd - b - d = c^2 - 2c$;

iii) $b \neq 1, c \neq 1$.

Chứng minh đẳng thức $ad + b + c = bc + a + d$.

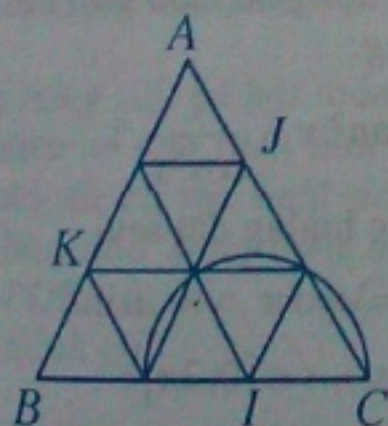
Câu 5. Các số thực không âm x, y, z đôi một khác nhau và thỏa mãn $(z+x)(z+y) = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{1}{(z+y)^2} \geq 4.$$

LUU XUÂN TÌNH

(GV trường ĐHSPT Hà Nội) giới thiệu

Trong đường tròn ($P; PA$), dây cung AK lớn nhất khi nó là đường kính của đường tròn. Lúc đó M trùng với P .



Hình 3

Câu 10. (h. 3). Giả sử ΔABC là tam giác đều có cạnh bằng 3. Chia mỗi cạnh tam giác ABC thành ba phần bằng nhau. Nối các điểm chia bởi các đoạn thẳng song song với các cạnh. Tam giác ABC được

chia thành 9 tam giác đều có cạnh bằng 1. Gọi I, J, K lần lượt là ba điểm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $IC = JA = KB = 1$. Ba đường tròn bán kính 1, tâm tương ứng là I, J, K sẽ phủ kín được tam giác ABC (mỗi hình tròn sẽ phủ kín được ba tam giác nhỏ). Như vậy dùng ba tấm bìa sẽ phủ kín được tam giác ABC .

Số tấm bìa ít nhất phải dùng cũng là 3, vì nếu ngược lại sẽ có hai trong ba đỉnh của tam giác ABC thuộc một hình tròn bán kính 1. Điều này không thể xảy ra do cạnh của tam giác ABC bằng 3.

LÊ QUỐC HÁN

(GV trường ĐH Vinh) giới thiệu



**Chuẩn bị
cho kì thi
tốt nghiệp THPT
và thi vào
Đại học**

Trong các đề thi tuyển sinh vào đại học những năm gần đây, bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất khá phổ biến. Một kĩ năng quan trọng để giải những bài toán dạng này là đổi biến số để đưa bài toán ban đầu về bài toán đơn giản hơn. Chúng tôi xin giới thiệu kĩ năng này để bạn đọc cùng trao đổi.

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN MINH NHIÊN
(GV THPT Quế Võ Số 1, Bắc Ninh)

★ **Thí dụ 1.** Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $M = 2(x^3 + y^3) - 3xy$.

(Đề thi Cao đẳng 2008)

Lời giải. Rõ ràng các biểu thức tham gia trong bài toán gợi cho ta liên hệ đến hệ đối xứng loại 1, từ đó định hướng đặt $S = x + y$; $P = xy$ (với $S^2 \geq 4P$).

Từ giả thiết ta có $S^2 - 2P = 2$ nên $P = \frac{S^2 - 2}{2} \leq \frac{S^2}{2}$, dẫn đến $|S| \leq 2$.

Từ đó $M = 2(S^3 - 3SP) - 3P = -S^3 - \frac{3}{2}S^2 + 6S + 3$.

Xét hàm số $f(S) = -S^3 - \frac{3}{2}S^2 + 6S + 3$,

khi đó $f'(S) = -3S^2 - 3S + 6 = 0$

$\Leftrightarrow S = 1$ hoặc $S = -2$.

Từ đó tìm được $\max M = f(1) = \frac{13}{2} \Leftrightarrow S = 1$ và

$P = -\frac{1}{2}$ hay $(x; y) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

hoặc $(x; y) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\min M = f(-2) = -7 \Leftrightarrow \begin{cases} S = -2 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \square$

★ **Thí dụ 2.** Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}.$$

(Đề thi Đại học khối B năm 2008)

Lời giải. Đặt $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($t \in [0; 2\pi]$) ta được

$$P = \frac{2(\cos^2 t + 6\sin t \cos t)}{1 + 2\sin t \cos t + 2\sin^2 t} = \frac{\cos 2t + 6\sin 2t + 1}{2 + \sin 2t - \cos 2t}$$

nên $P(2 + \sin 2t - \cos 2t) = \cos 2t + 6\sin 2t + 1$

$$\Leftrightarrow (P - 6)\sin 2t - (P + 1)\cos 2t = 1 - 2P.$$

Phương trình ẩn t có nghiệm khi và chỉ khi

$$(P - 6)^2 + (P + 1)^2 \geq (1 - 2P)^2$$

$$\Leftrightarrow P^2 + 3P - 18 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq P \leq 3.$$

Do đó $\max P = 3$ và $\min P = -6$, phần còn lại xin dành cho độc giả. $\square$

Lưu ý. Đây chính là phương pháp lượng giác hóa. Ta có thể nhận biết dạng này khi gặp các biểu thức lượng giác dạng:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \dots$$

Từ đó có thể nghĩ đến các hướng đặt sau

• $x^2 + y^2 = a^2$ thì đặt $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ (hoặc $x = a \sin t$, $y = a \cos t$), $t \in [0; 2\pi]$;

• $|x| \leq a$ thì đặt $x = a \cos t$, $t \in [0; \pi]$;

• $x \in \mathbb{R}$ thì đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

• $|x| \geq a$ hoặc bài toán chứa biểu thức $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì đặt $t = \frac{a}{\cos x}$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Khi đó, bài toán sẽ đưa về việc tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số lượng giác đơn giản hoặc sử dụng điều kiện có nghiệm của PT bậc nhất đối với $\sin nx$ và $\cos nx$.

★ **Thí dụ 3.** Cho các số $x, y, z \in (0; 1)$ thỏa mãn $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$.

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có $xyz = 1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx) - xyz$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx = 2xyz - 1 + (x+y+z)$,

mà $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2 - 2(x+y+z) + (x+y+z)^2 - 4xyz$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta được

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq$$

$$\geq 2 - 2(x+y+z) + (x+y+z)^2 - 4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3.$$

Đặt $t = x+y+z$ ($0 < t < 3$) ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2 - 2t + t^2 - \frac{4t^3}{27}.$$

Đến đây có thể khảo sát và tìm được giá trị nhỏ nhất của hàm $f(t) = 2 - 2t + t^2 - \frac{4t^3}{27}$ là $\frac{3}{4}$,

đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$. $\square$

Trong một số bài toán, việc đánh giá trực tiếp đưa về một biến như trên gặp khó khăn. Khi đó, ta có thể nghĩ đến việc chuyển các biến ban đầu sang biến mới sau đó sử dụng các BĐT cơ bản như Cauchy, Bunyakovsky để đánh giá.

★ **Thí dụ 4.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$P = \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c} \geq 26.$$

Lời giải. Đặt $x = b+c-a$, $y = c+a-b$, $z = a+b-c$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). Khi đó

$$a = \frac{y+z}{2}, \quad b = \frac{z+x}{2}, \quad c = \frac{x+y}{2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} 2P &= \frac{4(y+z)}{x} + \frac{9(z+x)}{y} + \frac{16(x+y)}{z} \\ &= \left(\frac{4y}{x} + \frac{9x}{y}\right) + \left(\frac{4z}{x} + \frac{16x}{z}\right) + \left(\frac{9z}{y} + \frac{16y}{z}\right). \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta được

$$2P \geq 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{9x}{y}} + 2\sqrt{\frac{4z}{x} \cdot \frac{16x}{z}} + 2\sqrt{\frac{9z}{y} \cdot \frac{16y}{z}} = 52.$$

Phân dấu bằng xảy ra dành cho bạn đọc. $\square$

★ **Thí dụ 5.** Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$M = \frac{bc}{a^2b+a^2c} + \frac{ca}{b^2c+b^2a} + \frac{ab}{c^2a+c^2b}.$$

Lời giải. Đặt $x = bc$, $y = ca$, $z = ab$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) thì $xyz = 1$ và

$$M = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = x \quad (1)$$

$$\text{Tương tự} \quad \frac{y^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} \geq y \quad (2)$$

$$\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z \quad (3)$$

Cộng theo vế các BĐT (1), (2), (3) ta được

$$M \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$, khi đó $a = b = c = 1$. $\square$

★ **Thí dụ 6.** Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \quad (1)$$

Lời giải

Ta có $ab+bc+ca=abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

và (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{bc}} + \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{ca}} + \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{1}{ab}} \geq 1 + \sqrt{\frac{1}{bc}} + \sqrt{\frac{1}{ca}} + \sqrt{\frac{1}{ab}}$

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ thì $x+y+z=1$.

Ta phải chứng minh

$$\sqrt{x+yz} - \sqrt{yz} + \sqrt{y+zx} - \sqrt{zx} + \sqrt{z+xy} - \sqrt{xy} \geq 1 \quad (2)$$

Thật vậy $x+yz = yz+1-y-z = (1-y)(1-z)$
 $= (x+y)(x+z)$. Từ đó ta thấy

$$\sqrt{x+yz} - \sqrt{yz} = \frac{x}{\sqrt{x+yz} + \sqrt{yz}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)} + \sqrt{yz}}$$

$$\geq \frac{x}{\left(\frac{x+y+x+z}{2}\right) + \left(\frac{y+z}{2}\right)} = x$$

(theo BĐT Cauchy).

Tương tự $\sqrt{y+zx} - \sqrt{zx} \geq y; \sqrt{z+xy} - \sqrt{xy} \geq z$

Cộng theo vế các BĐT trên ta được BĐT (2).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hay $a=b=c=3$. $\square$

★ **Thí dụ 7.** Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \geq 36$

Lời giải

Đặt $x = \frac{a}{a+b+c}; y = \frac{b}{a+b+c}; z = \frac{c}{a+b+c}$

($a > 0, b > 0, c > 0$).

Khi đó, ta phải chứng minh

$$\frac{a+b+c}{a} + 4 \cdot \frac{a+b+c}{b} + 9 \cdot \frac{a+b+c}{c} \geq 36$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + 4 \cdot \frac{a}{b} + 4 \cdot \frac{c}{b} + 9 \cdot \frac{a}{c} + 9 \cdot \frac{b}{c} \geq 22.$$

Thật vậy áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\left(\frac{b}{a} + 4 \cdot \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + 9 \cdot \frac{a}{c}\right) + \left(4 \cdot \frac{c}{b} + 9 \cdot \frac{b}{c}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot 4 \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot 9 \cdot \frac{a}{c}} + 2\sqrt{4 \cdot \frac{c}{b} \cdot 9 \cdot \frac{b}{c}} = 22.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$(x; y; z) = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right). \square$$

BÀI TẬP

1. Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

2. Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x^3+2}{3y+4z} + \frac{y^3+2}{3z+4x} + \frac{z^3+2}{3x+4y}$$

3. Cho x, y là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức.

$$P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2},$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn

$$xy + yz + zx = 1.$$

5. Cho a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{b^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{c^2}} \geq 2\sqrt{3}.$$

6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian làm bài: 180 phút)

I. PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 điểm)

Cho hàm số

$$y = x^3 - (4m + 3)x^2 + (15m + 1)x - 9m - 3 \quad (1)$$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 0$.

2) Tìm m sao cho đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt A, B, C có hoành độ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Biết rằng hoành độ điểm A nhỏ hơn 3, hoành độ điểm C lớn hơn 3.

Câu 2 (2 điểm)

1) Giải bất phương trình

$$\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} \leq 2x + 2.$$

2) Giải phương trình

$$\tan^2 x + \cot^2 x + \frac{1}{\sin 2x} = 3.$$

Câu 3 (1 điểm)

Tính tích phân $I = \int_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{\frac{7+\sqrt{53}}{2}} \frac{(x^2+1)(x^2+2x-1)}{x^6+14x^3-1} dx.$

Câu 4 (1 điểm)

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, biết bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện ACB_1D_1 là r . Hãy tính thể tích hình lập phương theo r .

Câu 5 (1 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = |x| + \left| \frac{x^2 - 2}{x + 2} \right|.$$

II. PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ làm một trong hai phần)

THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

Câu 6a (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}; \quad d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}.$$

1) Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d_1 và d_2 .

2) Viết phương trình đường thẳng d_3 đi qua $A(2; 3; 1)$ và tạo với hai đường thẳng d_1, d_2 một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của d_1, d_2 .

Câu 7a (1 điểm)

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=0$.

Chứng minh bất đẳng thức

$$27^a + 27^b + 27^c \geq 3^a + 3^b + 3^c.$$

THEO CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

Câu 6b (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho

$$\text{đường thẳng } d_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Đường thẳng d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 2x - y - 1 = 0$

và $(Q): 2x + y + 2z - 5 = 0$.

1) Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d_1 và d_2 .

2) Gọi I là giao điểm của d_1 và d_2 . Viết phương trình đường thẳng d_3 đi qua $A(2; 3; 1)$ và tạo với hai đường thẳng d_1, d_2 một tam giác cân tại đỉnh I .

Câu 7b (1 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{\log_3 xy} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ \log_4(x^2 + y^2) + 1 = \log_4 2x + \log_4(x + 3y). \end{cases}$$

NGUYỄN THANH GIANG

(GV trường THPT chuyên Hưng Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

(Đề thi đã đăng trên THPT số 380, tháng 2/2009)

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Xét hai điểm E và F trên đồ thị (C) .

Ta có $E\left(a-1; 2-\frac{6}{a}\right), F\left(b-1; 2-\frac{6}{b}\right), (a < b)$.

Gọi J là trung điểm đoạn EF , ta có

$$J\left(\frac{a+b}{2}-1; 2-\frac{3(a+b)}{ab}\right).$$

PT đường thẳng MN có dạng $x+2y+3=0$.

Hai điểm E và F đối xứng nhau qua MN khi

$$\begin{cases} EF \perp MN \\ J \in MN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{EF} // \vec{n}(1;2) \\ J \in MN. \end{cases}$$

Đáp số. $E(0; -4)$ và $F(2; 0)$.

Câu 2. 1) PT đã cho tương đương với

$$(1+\cos 2x)^2 - \cos 2x - \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) + \cos \frac{3x}{4}$$

$$= \frac{7}{2} \Leftrightarrow \cos 2x + \cos \frac{3x}{4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos \frac{3x}{4} = 1. \end{cases}$$

Đáp số. $x = 8k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

2) Đưa PT đã cho về dạng $3^x = \frac{2x+1}{2x-1}$ (*)

(vì $x = \frac{1}{2}$ không là nghiệm của PT).

Hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-1}$ nghịch biến trên mỗi

khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và hàm số $y = 3^x$ luôn đồng biến.

PT (*) có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 1$.

Câu 3. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + e^x \tan \frac{x}{2} \right) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x \tan \frac{x}{2} \right) dx = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Câu 4. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC thì $SO \perp (ABC)$.

+ Gọi O_1 và r lần lượt là tâm và bán kính khối cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$, ta có $O_1 \in SO$.

+ Gọi I là trung điểm đoạn AB . Kẻ $O_1H \perp SI$ thì $O_1H = O_1O = r$. Suy ra O_1 nằm trên phân giác của $\widehat{SIO} = \alpha$.

Ta có $O_1O = OI \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$. Gọi a là độ dài cạnh đáy, từ mối liên hệ $SC^2 = SO^2 + OC^2$ ta thu

$$\text{được } a = \frac{2I\sqrt{3}}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}.$$

$$\text{Từ đó } r = \frac{I \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}. \text{ Vậy } V = \frac{4}{3} \frac{\pi^3 \tan^3 \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{(\tan^2 \alpha + 3)^3}}.$$

Câu 5. Nhận xét rằng $AB // l$. Kẻ $AH \perp l, H \in l$ thì $H(2+3t, 2t, 4+2t)$. Từ $\overline{AH} \perp l$ suy ra $H(-1; 2; 2)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua l khi đó $A'(-3; 2; 5)$. Ta có với $M \in l$ thì $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Đáp số. $M(2; 0; 4)$.

Câu 6a. 1) Số phần tử của không gian mẫu là $C_3^3 = 10$. Gọi A là biến cố "ba đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác". Các khả năng chọn được ba đoạn thẳng lập thành một tam giác là $\{3; 5; 7\}; \{3; 7; 9\}, \{5; 7; 9\}$.

Số trường hợp thuận lợi của biến cố A là 3.

Suy ra xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{3}{10}$.

2) Điều kiện $x \geq 0$ và $y \geq 0$. PT thứ nhất của hệ tương đương với $\sqrt{x}(x-1) = \sqrt{y}(y+8)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x(x-1)^2 = y(y+8)^2 \end{cases} \quad (1)$$

Từ PT thứ hai suy ra $y = x - 5$ thế vào (1), ta được $3x^2 - 22x - 45 = 0$.

Kết luận. Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (9; 4)$.

Câu 7a. Với $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$ thì $0 < \tan x \leq \sqrt{3}$ nên $2\cos x - \sin x > 0$.

(Xem tiếp trang 31)

Hướng dẫn ôn tập môn Vật lý

THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2009

Chủ đề: LƯỢNG TỬ ÁNH SÁNG

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV trường ĐHSP Hà Nội)

Trong cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học - Cao đẳng năm 2009 của Bộ Giáo dục và Đào tạo, phần chung cho tất cả thí sinh về chủ đề Lượng tử ánh sáng có 6 câu trắc nghiệm. Nội dung kiến thức chủ đề này gồm: Hiện tượng quang điện ngoài; Định luật về giới hạn quang điện; Thuyết lượng tử ánh sáng; Lương tính sóng hạt của ánh sáng; Hiện tượng quang điện trong; Quang điện trở; Pin quang điện; Hiện tượng quang - phát quang; Sơ lược về laze; Mẫu nguyên tử Bo và quang phổ vạch của nguyên tử hiđrô.

Dưới đây là một số thí dụ câu trắc nghiệm về chủ đề này.

★ **Thí dụ 1.** Lân lượt chiếu vào catôt của một tế bào quang điện các bức xạ điện từ gồm bức xạ có bước sóng $\lambda_1 = 0,26\mu\text{m}$ và bức xạ có bước sóng $\lambda_2 = 1,2\lambda_1$ thì vận tốc ban đầu cực đại của các electron quang điện bứt ra từ catôt lần lượt là v_1 và v_2 với $v_2 = \frac{3}{4}v_1$. Giới hạn quang điện λ_0 của kim loại làm catôt này là

- A. $0,35\mu\text{m}$. B. $0,42\mu\text{m}$.
C. $1,35\mu\text{m}$. D. $1,42\mu\text{m}$.

Hướng dẫn. Ta có $\frac{hc}{\lambda_1} = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{1}{2}mv_1^2$ (1)

$$\frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), thay $\lambda_2 = 1,2\lambda_1$, $v_2 = \frac{3}{4}v_1$, rút ra $\lambda_0 = 0,42\mu\text{m}$.

Chọn B. □

★ **Thí dụ 2.** Phát biểu nào sau đây là sai?

- A. Trong pin quang điện, quang năng biến đổi trực tiếp thành điện năng.
B. Điện trở của quang trở giảm mạnh khi có ánh sáng thích hợp chiếu vào.
C. Nguyên tắc hoạt động của tất cả các tế bào quang điện đều dựa trên hiện tượng quang dẫn.
D. Có một số tế bào quang điện hoạt động khi được kích thích bằng ánh sáng nhìn thấy.

Hướng dẫn. Các tế bào quang điện hoạt động dựa trên hiện tượng quang điện ngoài chứ không phải hiện tượng quang dẫn. Câu C sai.

Chọn C. □

★ **Thí dụ 3.** Biết hằng số Plăng $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ và độ lớn của điện tích nguyên tố là $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Khi nguyên tử hiđrô chuyển từ trạng thái dừng có năng lượng $-1,514 \text{ eV}$ sang trạng thái dừng có năng lượng $-3,407 \text{ eV}$ thì nguyên tử phát ra bức xạ có tần số

- A. $4,572 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. B. $3,527 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.
C. $6,185 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. D. $8,527 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Hướng dẫn. Ta có $hf = E_n - E_m$, suy ra

$$f = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{-1,514 - (-3,407)}{6,625 \cdot 10^{-34}} = 4,572 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Chọn A. □

★ **Thí dụ 4.** Công thoát electron ra khỏi kim loại là $A = 1,88 \text{ eV}$. Biết hằng số Plăng $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$, vận tốc ánh sáng trong chân không $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ và $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Giới hạn quang điện của kim loại đó là

- A. $0,25\mu\text{m}$. B. $0,73\mu\text{m}$.
C. $0,57\mu\text{m}$. D. $0,66\mu\text{m}$.

Hướng dẫn. Ta có

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,88 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,66 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,66\mu\text{m}.$$

Chọn D. □

★ **Thí dụ 5.** Trong nguyên tử hiđrô, bán kính Bo là $r_0 = 5,3.10^{-11}m$. Bán kính quỹ đạo ở trạng thái dừng N là

- A. $7,25.10^{-10}m$. B. $2,57.10^{-10}m$.
C. $8,48.10^{-10}m$. D. $4,57.10^{-10}m$.

Hướng dẫn. Áp dụng công thức tính bán kính quỹ đạo ở các trạng thái dừng của Bo: $r_n = n^2 r_0$, quỹ đạo N ứng với $n = 4$ nên có bán kính $r_4 = 4^2.5,3.10^{-11} = 8,48.10^{-10}m$.

Chọn C. ☐

★ **Thí dụ 6.** Khi chiếu lần lượt hai bức xạ có tần số là f_1, f_2 ($f_1 < f_2$) vào một quả cầu kim loại đặt cô lập thì đều xảy ra hiện tượng quang điện với điện thế cực đại của quả cầu lần lượt là V_1, V_2 . Nếu chiếu đồng thời hai bức xạ trên vào quả cầu này thì điện thế cực đại của nó là

- A. $V_1 + V_2$. B. V_2 . C. V_1 . D. $|V_1 - V_2|$.

Hướng dẫn. Ta có $hf_1 = A + eV_1$, $hf_2 = A + eV_2$; vì $f_1 < f_2$ nên $V_1 < V_2$. Khi chiếu đồng thời hai bức xạ vào quả cầu kim loại đặt cô lập thì điện thế cực đại của quả cầu có giá trị lớn nhất là V_2 .

Chọn B. ☐



Dưới đây là một số câu trắc nghiệm về chủ đề **Lượng tử ánh sáng**, các bạn tự làm.

Câu 1. Giới hạn quang điện của một kim loại làm catôt của tế bào quang điện là $\lambda_0 = 0,50\mu m$. Biết vận tốc ánh sáng trong chân không và hằng số Plăng lần lượt là $c = 3.10^8 m/s$ và $h = 6,625.10^{-34} J.s$. Chiếu vào catôt của tế bào quang điện này bức xạ có bước sóng $\lambda = 0,35\mu m$ thì động năng ban đầu cực đại của electron quang điện là

- A. $1,70.10^{-19}J$. B. $1,70.10^{-18}J$.
C. $1,70.10^{-20}J$. D. $1,70.10^{-17}J$.

Câu 2. Trong quang phổ vạch của nguyên tử hiđrô, bước sóng của vạch thứ nhất trong dãy

Laiman ứng với sự chuyển của electron từ quỹ đạo L về quỹ đạo K là $0,1217\mu m$, vạch thứ nhất của dãy Banme ứng với sự chuyển của electron từ quỹ đạo M về quỹ đạo L là $0,6563\mu m$. Bước sóng của vạch quang phổ thứ hai trong dãy Laiman ứng với sự chuyển của electron từ quỹ đạo M về quỹ đạo K là

- A. $0,1537\mu m$. B. $0,1458\mu m$.
C. $0,2572\mu m$. D. $0,1027\mu m$.

Câu 3. Một chùm ánh sáng đơn sắc tác dụng lên bề mặt một kim loại và làm bật các electron ra khỏi kim loại này. Nếu tăng cường độ chùm sáng lên ba lần thì

- A. Động năng ban đầu cực đại của electron quang điện tăng ba lần.
B. Động năng ban đầu cực đại của electron quang điện giảm ba lần.
C. Số lượng electron thoát ra khỏi bề mặt kim loại đó trong mỗi giây tăng ba lần.
D. Công thoát của electron giảm ba lần.

Câu 4. Chiếu lên bề mặt catôt của một tế bào quang điện chùm sáng đơn sắc có bước sóng $0,485\mu m$ thì thấy có hiện tượng quang điện xảy ra. biết hằng số Plăng $h = 6,625.10^{-34} J.s$, vận tốc ánh sáng trong chân không $c = 3.10^8 m/s$, khối lượng nghỉ của electron là $9,1.10^{-31} kg$ và vận tốc ban đầu cực đại của electron quang điện là $4.10^5 m/s$. Công thoát electron của kim loại làm catôt bằng

- A. $3,37.10^{-18}J$. B. $3,37.10^{-19}J$.
C. $5,25.10^{-18}J$. D. $5,25.10^{-19}J$.

Câu 5. Gọi λ_α và λ_β lần lượt là hai bước sóng ứng với các vạch đỏ H_β và vạch lam H_γ của dãy Banme, λ_1 là bước sóng dài nhất của dãy Pasen trong quang phổ vạch của nguyên tử hiđrô. Biểu thức liên hệ giữa $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_1$ là

- A. $\lambda_1 = \lambda_\alpha - \lambda_\beta$. B. $\lambda_1 = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$.
C. $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_\beta} - \frac{1}{\lambda_\alpha}$. D. $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta}$.

Đáp án kì trước (THTT số 382, tháng 4 năm 2009)

Câu 1: Chọn B; Câu 2: Chọn A; Câu 3: Chọn D; Câu 4: Chọn C; Câu 5: Chọn D.



ĐA THỨC VÀ ỨNG DỤNG TRONG CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

TRẦN NAM DŨNG
(GV trường ĐHKHTN TP. Hồ Chí Minh)

Đa thức là một trong các khái niệm quan trọng của toán học, có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau: đại số, số học, hình học đại số, lý thuyết hàm ... Trong bài viết này, chúng tôi đề cập đến những ứng dụng của đa thức trong các bài toán tổ hợp.

I. Đa thức và các bài toán về tổng con

Quy tắc nhân đơn thức $x^{a_1} \dots x^{a_2} \dots x^{a_n} = x^{a_1+a_2+\dots+a_n}$, trong nhiều trường hợp, cho chúng ta những ứng dụng bất ngờ của đa thức vào các bài toán liên quan đến tổng con. Ta xem xét một số thí dụ.

★ **Bài toán 1.** (IMO 1995) Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp $\{1, 2, \dots, 2p\}$, biết rằng

- (i) A chứa đúng p phần tử;
- (ii) Tổng các phần tử của A chia hết cho p .

Lời giải. Xét đa thức

$$P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1.$$

Đa thức này có $p-1$ nghiệm phức phân biệt. Gọi α là một nghiệm bất kì của $P(x)$. Chú ý rằng $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-1}$ là $p-1$ nghiệm phân biệt của $P(x)$ và $\alpha^p = 1$.

Do đó, theo định lý Viète, ta có

$$x^p - 1 = (x - \alpha)(x - \alpha^2) \dots (x - \alpha^{p-1})(x - \alpha^p).$$

Xét đa thức $Q(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2) \dots (x - \alpha^{2p})$.

Gọi $H = \{A \subset \{1, 2, \dots, 2p\} : |A| = p\}$ và

$S(A)$ là tổng các phần tử của A $\left(S(A) = -\sum_{x \in A} x \right)$.

Giả sử $Q(x) = \sum_{i=0}^{2p} a_i x^i$, khi đó $a_p = -\sum_{A \in H} \alpha^{S(A)}$.

Vì nếu $S(A) \equiv i \pmod{p}$ thì $\alpha^{S(A)} = \alpha^i$ nên $a_p = -\sum_{i=0}^{p-1} n_i \alpha^i$, trong đó n_i là số các tập con A của H sao cho $S(A) \equiv i \pmod{p}$.

Mặt khác $Q(x) = (x^p - 1)^2$, suy ra $a_p = -2$.

Thành thử có $\sum_{i=0}^{p-1} n_i \alpha^i = 2$ (*)

Xét đa thức $R(x) = \sum_{i=1}^{p-1} n_i x^i + n_0 - 2$.

Từ (*) suy ra α là một nghiệm của $R(x)$. Vì $\deg P = \deg R$ ($\deg G$ là kí hiệu bậc của đa thức $G(x)$ và α là một nghiệm bất kì của $P(x)$ nên $P(x)$ và $R(x)$ chỉ sai khác nhau hằng số nhân. Từ đó

$$n_{p-1} = n_{p-2} = \dots = n_1 = n_0 - 2,$$

suy ra

$$n_0 - 2 = \frac{n_{p-1} + n_{p-2} + \dots + n_1 + n_0 - 2}{p} = \frac{C_{2p}^p - 2}{p}.$$

Vậy đáp số của bài toán là $n_0 = 2 + \frac{C_{2p}^p - 2}{p}$. □

Với mỗi đa tập hợp (các phần tử có thể trùng nhau) $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ta đặt

$$A^{(2)} = \{x_i + x_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Tập hợp $A^{(2)}$ có nhiều tính chất thú vị, chẳng hạn, khi $n = 3$, biết $A^{(2)}$ thì có thể biết được A , nhưng với $n = 4$ thì điều này không còn đúng nữa, chẳng hạn

với $A = \{1, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 7\}$

thì $A^{(2)} = B^{(2)} = \{5, 6, 7, 9, 10, 11\}$.

Vì thế nếu biết $A^{(2)} = \{5, 6, 7, 9, 10, 11\}$ thì không thể biết được A .

Một câu hỏi thú vị đặt ra là, với những giá trị nào của n thì nếu biết $A^{(2)}$, ta có thể tìm được A ? Kết quả bài toán dưới đây sẽ trả lời một phần câu hỏi đó.

❖ Bài toán 2. • Với $n = 2^k$, chứng minh rằng tồn tại các đa tập hợp A, B thoả mãn các điều kiện:

1) $|A| = |B| = n$; 2) $A \neq B$; và 3) $A^{(2)} = B^{(2)}$.

• Ngược lại nếu tồn tại các đa tập hợp A, B thoả mãn các điều kiện 1), 2) và 3) thì $n = 2^k$.

Lời giải. • Ta chứng minh phần đầu bằng phương pháp quy nạp toán học. Với $k = 1$, có thể chọn $A = \{1, 4\}$, $B = \{2, 3\}$. Giả sử ta đã xây dựng được hai đa tập hợp A, B sao cho

1) $|A| = |B| = 2^k$; 2) $A \neq B$; 3) $A^{(2)} = B^{(2)}$.

Khi đó đặt $A^* = A \cup (B + s)$

và $B^* = (A + s) \cup B$.

Trong đó $A + s = \{a + s | a \in A\}$.

Khi đó $|A^*| = |B^*| = 2^{k+1}$, $A^{*(2)} = B^{*(2)}$

và với s đủ lớn thì $A^* \neq B^*$.

• Để chứng minh phần thứ hai ta giả sử tồn tại hai đa tập hợp A và B thoả mãn các điều kiện 1), 2) và 3).

Đặt $f(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_n}$,
 $g(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \dots + x^{b_n}$

Khi đó, từ điều kiện $A^{(2)} = B^{(2)}$ suy ra

$$f^2(x) - f(x^2) = g^2(x) - g(x^2).$$

Từ đó $f(x^2) - g(x^2) = (f(x) - g(x))(f(x) + g(x))$.

Do $f(1) = g(1) = n$ nên $f(x) - g(x)$ chia hết cho $x-1$. Đặt $f(x) - g(x) = (x-1)^{k+1}h(x)$ ($h(1) \neq 0$) và thay vào PT trên ta được

$$(x^2-1)^{k+1}h(x^2) = (x-1)^{k+1}h(x)(f(x)+g(x)).$$

Suy ra $(x+1)^{k+1}h(x^2) = h(x)(f(x)+g(x))$.

Thay $x = 1$, chú ý $h(1) \neq 0$ và $f(1) = g(1) = n$, ta được $n = 2^k$ (đpcm). $\square$

Định nghĩa 1. Dãy phủ đầy đủ là các cặp sắp thứ tự $(a_i; b_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) các số nguyên không âm, sao cho với mọi số nguyên không

âm n , tồn tại duy nhất một chỉ số i , $1 \leq i \leq k$ sao cho $n \equiv a_i \pmod{b_i}$.

Ví dụ với mọi số nguyên không âm n thì n hoặc đồng dư 1 (mod 2), hoặc đồng dư 0 hoặc 2 (mod 4). Do đó $(1; 2), (0; 4), (2; 4)$ là một dãy phủ đầy đủ.

Bài toán dưới đây cung cấp một số tính chất thú vị của dãy phủ đầy đủ, cũng là những điều kiện cần để một dãy là dãy phủ đầy đủ.

❖ Bài toán 3. Nếu $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ lập thành một dãy phủ đầy đủ thì

$$1) \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} = 1.$$

$$2) \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{n-1}{2}.$$

Lời giải. Xét tổng $\sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} x^{a_i + kb_i}$, $|x| < 1$.

Theo định nghĩa của dãy phủ đầy đủ thì với mọi N , tồn tại duy nhất một chỉ số i sao cho N đồng dư $a_i \pmod{b_i}$, tức là $N = a_i + kb_i$. Như vậy, x^N xuất hiện đúng một lần trong tổng nói trên. Vậy ta có

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} x^{a_i + kb_i} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i.$$

Từ công thức tính tổng cấp số nhân, ta được

$$\sum_{i=1}^n \frac{x^{a_i}}{1 - x^{b_i}} = \frac{1}{1 - x} \quad (\text{chú ý } |x| < 1).$$

Ta sẽ khai thác đẳng thức quan trọng này để chứng minh các tính chất 1), 2). Để chứng minh 1), ta viết lại đẳng thức trên dưới dạng

$$\sum_{i=1}^n \frac{x^{a_i} (1 - x)}{1 - x^{b_i}} = 1$$

$$\text{hay} \quad \sum_{i=1}^n \frac{x^{a_i}}{1 + x + \dots + x^{b_i-1}} = 1 \quad (*)$$

Cho $x \rightarrow 1$ ta được $\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} = 1$.

Để chứng minh 2), ta lấy đạo hàm hai vế đẳng thức (*) thì được

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i x^{a_i-1} (1+x+\dots+x^{b_i-1}) - x^{a_i} (1+2x+\dots+(b_i-1)x^{b_i-2})}{(1+x+\dots+x^{b_i-1})^2} = 0.$$

Cho $x \rightarrow 1$, chú ý rằng $1 + 2 + \dots + b_i - 1 = \frac{(b_i - 1)b_i}{2}$

$$\text{ta được } \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i - \frac{(b_i - 1)b_i}{2}}{b_i^2} = 0$$

$$\text{hay } \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2b_i} \right) = 0.$$

Từ kết quả câu 1) suy ra đpcm. $\square$

Bài toán 4. Chứng minh rằng từ $2n-1$ số nguyên bất kì luôn tìm được n số có tổng chia hết cho n .

Lời giải. Với n nhỏ, bài toán có thể chứng minh dễ dàng bằng cách xét các trường hợp. Ví dụ, với $n = 3$, ta chia 5 số nguyên vào 3 ô, ô chia 3 dư 0, ô chia 3 dư 1 và ô chia 3 dư 2. Nếu mỗi ô đều chứa ít nhất 1 số thì chọn từ 3 ô, mỗi ô một số, ta được 3 số cần tìm. Nếu có 1 ô nào đó rỗng thì sẽ có ít nhất 1 ô có 3 số và đó chính là 3 số cần tìm.

Với $n = 5$, ta có thể lặp lại cách chứng minh tương tự, tuy nhiên số trường hợp cần xét sẽ nhiều hơn.

Nếu n là hợp số, chẳng hạn $n = 9$, ta có thể sử dụng cách làm sau: áp dụng kết quả với $n = 3$, từ 17 số $\{a_1, a_2, \dots, a_{17}\}$, dĩ nhiên có thể chọn ra 3 số có tổng chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là $a_1 + a_2 + a_3$. Tiếp theo, từ 13 số $\{a_4, a_5, \dots, a_{17}\}$, có thể chọn ra 3 số có tổng chia hết cho 3, giả sử đó là a_4, a_5, a_6 . Tiếp tục như vậy, ta được các bộ ba số có tổng chia hết cho 3, mà bằng cách đánh số lại nếu cần, giả sử đó là $(a_7, a_8, a_9), (a_{10}, a_{11}, a_{12}), (a_{13}, a_{14}, a_{15})$.

$$\text{Xét các số } s_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, s_2 = \frac{a_4 + a_5 + a_6}{3}, \dots, s_5 = \frac{a_{13} + a_{14} + a_{15}}{3}.$$

Theo cách xây dựng, 5 số $s_1, s_2, \dots, s_5$ là các số nguyên. Áp dụng kết quả với $n = 3$, ta suy ra tồn tại 3 số trong 5 số này có tổng chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là s_1, s_2, s_3 . Khi đó $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 3(s_1 + s_2 + s_3)$ chia hết cho 9 (đpcm).

Bằng cách làm tương tự, ta thấy rằng nếu bài toán đã đúng với $n = p$ và $n = q$ thì nó cũng đúng với $n = pq$. Vậy chỉ cần chứng minh bài toán đúng với $n = p$ là số nguyên tố. Ta sẽ chứng minh điều này.

Giả sử ngược lại, tồn tại $2p - 1$ số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_{2p-1}$ sao cho mọi tổng con gồm p phần tử của nó đều không chia hết cho p . Khi đó, theo định lý nhỏ Fermat ta có

$$(a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ip})^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Từ đó

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq 2p-1} (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ip})^{p-1} \equiv C_{2p-1}^p \pmod{p}$$

(do có C_{2p-1}^p tổng ở vế trái).

Do C_{2p-1}^p không chia hết cho p . Vì thế, sẽ suy ra điều mâu thuẫn nếu chứng minh được rằng vế trái chia hết cho p . Ta chứng minh điều này bằng cách chứng minh, trong khai triển tổng vế trái, hệ số của $a_{i1}^{s_1} \dots a_{ik}^{s_k}$ (với $s_1 + \dots + s_k = p-1$) chia hết cho p .

Để có những số hạng như vậy, cần chọn thêm $p - k$ phần tử $i_{k+1}, \dots, i_p$ để bổ sung thành p số và xét $(a_{i1} + \dots + a_{ik} + \dots + a_{ip})^{p-1}$. Khai triển biểu thức này, ta sẽ được hệ số của $a_{i1}^{s_1} \dots a_{ik}^{s_k}$ là $\frac{(p-1)!}{s_1! \dots s_k!}$.

Có C_{2p-1-k}^{p-k} cách bổ sung, do đó hệ số của $a_{i1}^{s_1} \dots a_{ik}^{s_k}$ trong khai triển ở vế trái là $C_{2p-1-k}^{p-k} \frac{(p-1)!}{s_1! \dots s_k!}$. Chú ý rằng $1 \leq k \leq p-1$ nên C_{2p-1-k}^{p-k} chia hết cho p . Từ đó, tất cả các số hạng $a_{i1}^{s_1} \dots a_{ik}^{s_k}$ trong khai triển ở vế trái đều có hệ số chia hết cho p , tức là vế trái chia hết cho p . Mâu thuẫn. Chứng tỏ điều giả sử là sai. Bài toán được chứng minh cho $n = p$ và như vậy cho n bất kì. $\square$

(Kì sau đăng tiếp)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/283. (Lớp 6) Cho a, b, c là các số nguyên sao cho

$$A = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{2}$$

là số chính phương. Chứng minh rằng
 $a = b = c$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T2/383. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = 75^\circ$. Kẻ đường cao AH , biết $AH = \frac{BC}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/383. Cho hai số nguyên dương x, y với $x > 1$ và thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 1 = y^{15}$. Chứng minh rằng x chia hết cho 15.

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/383. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên nửa mặt phẳng bờ CD không chứa điểm B vẽ tia Dx vuông góc với DC tại D . Trên tia Dx lấy điểm E sao cho $DE = DC$. Vẽ tam giác BEF vuông cân tại F sao cho F, D nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ BC . Kẻ EH vuông góc với BC tại H . Chứng minh ba điểm F, D và H thẳng hàng.

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/383. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông có cạnh huyền là a . Chứng minh rằng phương trình $-ax^2 + bx + c = 0$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $-\sqrt{2} < x_1 < x_2 < \sqrt{2}$.

TRƯƠNG QUANG LƯƠNG
(GV THCS Hương Thủy, Hương Khê, Hà Tĩnh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/383. Trong đa giác lồi 2009 đỉnh người ta cắt theo tất cả các đường chéo của đa giác chia đa giác thành các phần, mỗi phần là một đa giác lồi nhỏ. Hỏi rằng trong những đa giác con thu được bằng cách này, số đỉnh của đa giác có nhiều cạnh nhất là bao nhiêu?

VŨ ĐÌNH HOÀ
(GV Trường ĐH Sư phạm Hà Nội)

Bài T7/383. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{ab + bc}{a^2 - b^2 + c^2} + \frac{bc + ca}{b^2 - c^2 + a^2} + \frac{ca + ab}{c^2 - a^2 + b^2}$$

trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác ABC và $abc = 1$.

TRẦN ĐÌNH QUẾ
(GV THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

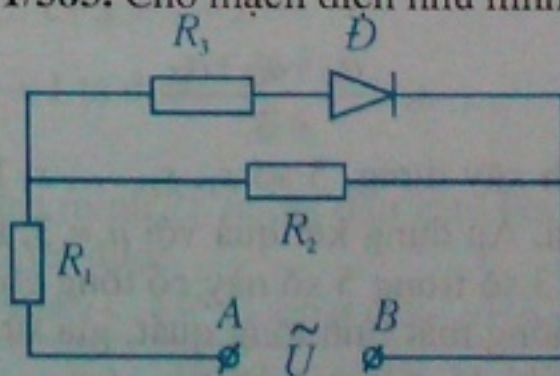
Bài T8/383. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trên ba cạnh đôi một chéo nhau của hình lập phương thứ tự lấy ba điểm M, N, P . Xác định vị trí M, N, P để tam giác MNP có

- 1) Chu vi nhỏ nhất.
- 2) Diện tích nhỏ nhất.

LỤC BÌNH
(GV THPT Nguyễn Huệ, TX Quảng Trị
Quảng Trị)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/383. Cho mạch điện như hình vẽ.



(xem tiếp trang 27)

KỶ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

THE M&Y 45th ANNIVERSARY CONTEST

Bài T5/THCS. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$1 < \frac{b}{\sqrt{a+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{b+c^2}} + \frac{a}{\sqrt{c+a^2}} < 2.$$

VÕ QUỐC BÁ CẦN

(SV lớp YY0647A1, khoá 32, ĐHY Dược Cần Thơ)

Bài T6/THCS. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Điểm C thuộc đường tròn (C khác A và B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C kẻ tia Ay tiếp xúc với (O) . Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AC . Tia BC cắt Ay tại Q , tia AM cắt BC tại N . Hãy xác định vị trí của điểm C để đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với đường tròn (O) .

KIỀU ĐÌNH PHÚ

(GV THCS Tr Sông Thao, Cẩm Khê, Phú Thọ)

Bài T5/THPT

- 1) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương a luôn tồn tại vô số số nguyên dương lẻ n để $a^n + 2009^n$ không chia hết cho n .
- 2) Tìm tất cả các số nguyên dương a thỏa mãn điều kiện : Có vô số số nguyên dương lẻ n để $a^n + 2009^n$ chia hết cho n .

ĐẶNG HÙNG THẮNG

(GV ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T6/THPT. Cho tam giác ABC với BC là cạnh nhỏ nhất. Trên AB, AC thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $BM = BC$ và $CN = CB$. Chứng minh rằng

$$\frac{MN}{BC} = \sqrt{3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)}.$$

NGUYỄN BÁ ĐĂNG

(Hà Nội)

T5/Junior. Let a, b, c be the three sides of a triangle such that $a + b + c = 1$. Prove the inequality

$$1 < \frac{b}{\sqrt{a+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{b+c^2}} + \frac{a}{\sqrt{c+a^2}} < 2.$$

T6/ Junior. Let (O) be a circle where $AB = 2R$ is a diameter. C is another point (different from A and B) on the circle. Let Ay be the ray out from A which is tangent to (O) and lies on the half-plane containing C divided by AB . Let M be the midpoint of the (smaller) arc AC . BC meets Ay at Q , AM meets BC at N . Determine the position of the point C such that the circumcircle of the triangle MNQ is tangent to (O) .

T5/Senior

- 1) Prove that for each positive integer a there exists infinitely many positive odd integers n such that $a^n + 2009^n$ is not a multiple of n .
- 2) Find all positive integers a such that there exists infinitely many positive odd integers n such that $a^n + 2009^n$ is divisible by n .

T6/ Senior. In a triangle ABC , BC is the smallest edge. Choose M and N on AB and AC respectively such that $BM = BC$ and $CN = CB$. Prove that

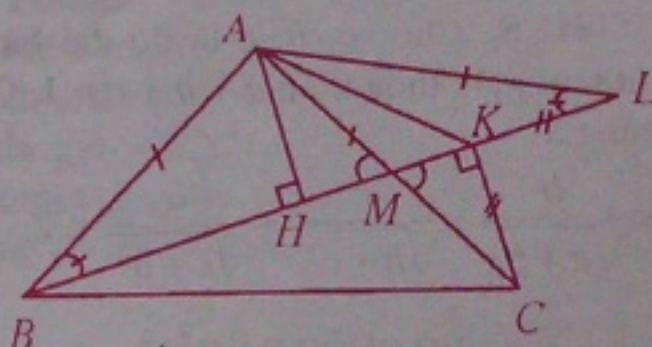
$$\frac{MN}{BC} = \sqrt{3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)}.$$

Translated by LE MINH HA



★ **Bài T2/379.** Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} \geq 90^\circ$. Lấy điểm M nằm giữa A và C , hạ AH và CK cùng vuông góc với BM (H, K thuộc BM) sao cho $BH = HK + KC$. Tính độ lớn của góc BAC .

Lời giải. (hình vẽ)



• Xét $\triangle ABM$ có $\widehat{BAM} \geq 90^\circ$ (gt) nên $\widehat{ABM}$ và $\widehat{AMB}$ là các góc nhọn, suy ra H nằm giữa B và M (1)

$\widehat{BMC}$ tù (vì kề bù với $\widehat{AMB}$ nhọn) nên K nằm trên tia đối của tia MB (2)

Từ (1), (2) suy ra H nằm giữa B và K ; M nằm giữa H và K .

• Trên tia đối của tia KH lấy điểm L sao cho $KL = KC$. Khi đó ta có $BH = HK + KC = HK + KL = HL$ suy ra H là trung điểm của BL . Như vậy, AH vừa là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến của $\triangle ABL \Rightarrow \triangle ABL$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ALK}$ (3) và $AB = AL = AC$.

Để thấy $\triangle AKC = \triangle AKL$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{MCK} = \widehat{ALK}$ (4)

Từ (3), (4) suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{MCK}$. Mặt khác, $\widehat{AMB} = \widehat{KMC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CKM} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{BAC} = 90^\circ$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Tất cả các bạn tham gia giải bài đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên một số bạn thiếu lập luận về vị trí sắp xếp của các điểm B, H, M, K .

2) Ngoài lời giải như trên đây, có thể lấy điểm N trên tia HB sao cho $HN = HK$, lập luận tương tự cũng dẫn đến kết quả đã biết.

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Bác Giang: Hoàng Thu Vân, 7A1, THCS Ngô Sĩ Liên, TP. Bắc Giang; **Phú Thọ:** Nguyễn Hữu Dũng, Vũ Tuấn Linh, Trịnh Hồng Ngọc, 7A3, THCS Lâm Thao; Hà

★ **Bài T1/379.** Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + ab + b^2 = a^2b^2$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $a^2 + 2ab + b^2 = a^2b^2 + ab$
 $\Leftrightarrow (a+b)^2 = ab(ab+1)$ (1)

Xét hai trường hợp sau:

1) Nếu $a+b=0$ thì $ab(ab+1)=0$.

• Với $ab=0$, kết hợp với $a+b=0$ suy ra $a=b=0$.

• Với $ab+1=0 \Leftrightarrow ab=-1$, kết hợp với $a+b=0$ suy ra hoặc $a=1, b=-1$, hoặc $a=-1, b=1$.

2) Nếu $a+b \neq 0$. Từ (1) suy ra hai số nguyên liên tiếp ab và $ab+1$ đều dương hoặc đều âm.

• Với ab và $ab+1$ đều dương thì $|ab| < |a+b| < |ab+1|$, mâu thuẫn.

• Với ab và $ab+1$ đều âm thì $|ab+1| < |a+b| < |ab|$, mâu thuẫn.

Vậy bài toán có ba nghiệm $(a; b)$ là $(0; 0)$, $(1; -1)$ và $(-1; 1)$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn không xét trường hợp 2) nêu trên, một số bạn xét trường hợp 1) chỉ rút ra một nghiệm $a=b=0$.

2) Cách khác: Xét $|a| \geq |b|$ thì $a^2b^2 \leq 3a^2$. Từ đó hoặc có $a=0$ hoặc có $a \neq 0$ thì $b^2 \leq 3$, cũng suy ra kết quả.

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Hà Ngô Hùng, 6A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Lê Thị Việt Hà, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Dũng, 6A, THCS Tiên Du; **Nghệ An:** Hồ Thanh Minh, Phạm Văn Quyển, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Phan Hoàng Thanh Tùng, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

VIỆT HẢI

Nam: Lê Thanh Hải, 7A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; Hà Nội: Hoàng Phương Linh, 7B, Trường Hà Nội - Amsterdam; Hải Phòng: Lê Việt Anh, 7C1A, THPT Trần Phú, Q. Lê Chân; Thanh Hóa: Lê Thị Khanh, Nguyễn Minh Tâm, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; Nghệ An: Hoàng Thị Nguyệt Hà, Phan Thanh Tùng, 7D, THCS Cao Xuân Huy, Nguyễn Hoàng Tâm, 7B, THCS Diễn Xuân, Diễn Châu, Nguyễn Thế Anh, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; Hà Tĩnh: Bùi Thị Phương Mai, 7A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; Quảng Ngãi: Nguyễn Bảo Trâm, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T3/379. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}} + 4x = 3\sqrt{2} - 1 \quad (1)$$

Lời giải. Ta có PT (1) tương đương với

$$\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}} + 4(x+1) = 3(\sqrt{2}+1) \quad (2)$$

Điều kiện $x > -1$ (*). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương và chú ý rằng

$$5\sqrt{2}+7 = (\sqrt{2}+1)^3, \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned} \text{VT}(2) &= \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}} + \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}} + 4(x+1) \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)} \cdot 4(x+1)} \\ &= 3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} = 3(\sqrt{2}+1) = \text{VP}(2). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}} &= 4(x+1) = \sqrt{2}+1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\sqrt{2}-3}{4} \text{ (thỏa mãn (*))}. \end{aligned}$$

Vậy PT (1) có nghiệm $x = \frac{\sqrt{2}-3}{4}$. □

◀ Nhận xét. Bài toán có nhiều cách giải, tuy nhiên nếu sử dụng bất đẳng thức Cauchy như ở lời giải trên (theo đa số các bạn) sẽ cho lời giải gọn gàng hơn. Tất cả các bạn tham gia giải đều có lời giải đúng. Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: Đỗ Công Huân, Nguyễn Thế Bảo, 9A1, THCS Yên Lạc; Hà Trung Hiếu, 8A, THCS Tam Dương; Bắc Ninh: Chu Hương Giang, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; Nghệ An: Nguyễn Văn Hoàng,

Nguyễn Văn Thắng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Võ Duy Văn, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Hoàng Trọng Đường, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; Hà Tĩnh: Nguyễn Thị Cẩm Nhung, 9/1, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; Khánh Hòa: Vũ Ngọc Cương, 8^h, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T4/379. Tìm a, b để giá trị lớn nhất của biểu thức $\|x+1|-2|-(ax+b)$ với $-3 \leq x \leq 4$ là nhỏ nhất.

Lời giải. Kí hiệu $f(x) = \|x+1|-2|-(ax+b)$, ta có $f(-1) = 2+a-b$; $f(1) = -a-b$;
 $f(4) = 3-4a-b$.

Do đó $3f(-1)-5f(1)+2f(4)$
 $= 3(2+a-b)-5(-a-b)+2(3-4a-b) = 12$.

Đặt $M = \max_{-3 \leq x \leq 4} |f(x)|$, suy ra

$$\begin{aligned} 10M &\geq 3|f(-1)|+5|f(1)|+2|f(4)| \\ &\geq |3f(-1)-5f(1)+2f(4)| = 12 \text{ nên } M \geq \frac{6}{5} \quad (1) \end{aligned}$$

$M = \frac{6}{5}$ khi $f(-1) = -f(1) = f(4)$, tức là

$$\begin{cases} a+b = 2+a-b \\ a+b = 3-4a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = 1. \end{cases}$$

Thử lại, với $a = \frac{1}{5}$, $b = 1$, thì

$$f(x) = \|x+1|-2| - \left(\frac{1}{5}x+1\right).$$

• Với $-3 \leq x \leq -1$ thì

$$f(x) = |-x-1-2| - \frac{1}{5}x-1 = \frac{4}{5}x+2$$

$$\text{nên } -\frac{6}{5} \leq f(x) \leq \frac{6}{5} \text{ hay } |f(x)| \leq \frac{6}{5} \quad (2)$$

• Với $-1 \leq x \leq 1$ thì

$$f(x) = |x+1-2| - \frac{1}{5}x-1 = -\frac{6}{5}x$$

$$\text{nên } -\frac{6}{5} \leq f(x) \leq \frac{6}{5} \text{ hay } |f(x)| \leq \frac{6}{5} \quad (3)$$

• Với $1 \leq x \leq 4$ thì

$$f(x) = |x+1-2| - \frac{1}{5}x-1 = \frac{4}{5}x-2$$

$$\text{nên } -\frac{6}{5} \leq f(x) \leq \frac{2}{5} \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{6}{5} \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4) suy ra $|f(x)| \leq \frac{6}{5}$ khi $-3 \leq x \leq 4$, đẳng thức xảy ra khi $x = 1$ hoặc $x = -1$.

$$\text{Do đó } M = \max_{-3 \leq x \leq 4} |f(x)| = \frac{6}{5} \quad (5)$$

Từ (1) và (5) ta có $M \geq \frac{6}{5}$ và dấu bằng xảy ra với hàm số $f(x) = ||x+1|-2| - \left(\frac{1}{5}x+1\right)$ tại $x = 1$ hoặc $x = -1$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức

$$||x+1|-2| - (ax+b)| \text{ với } -3 \leq x \leq 4 \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{6}{5} \text{ khi } a = \frac{1}{5}; b = 1. \square$$

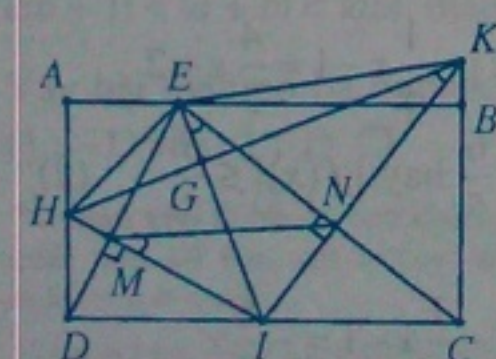
◀ **Nhận xét.** Dạng bài toán hơi lạ với các bạn bậc THCS nên tòa soạn không nhận được lời giải của bạn nào. Các bạn có thể tham khảo thêm cách làm dạng toán này ở bài toán T7/368 (tháng 6-2008).

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/379.** Cho hình chữ nhật ABCD, I là trung điểm của CD, E thuộc cạnh AB. Qua I kẻ IM vuông góc với DE, cắt AD ở H. Qua I kẻ IN vuông góc với CE, cắt BC ở K. Gọi G là giao điểm của EI và HK. Chứng minh rằng

a) Năm điểm E, G, N, K, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Năm điểm E, G, M, H, A cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông IDH và ICK, ta có $IM.IH = ID^2$ và $IN.IK = IC^2$ mà $IC = ID$

$$\text{nên } IM.IH = IN.IK. \text{ Từ đó } \frac{IM}{IK} = \frac{IN}{IH}, \text{ do đó}$$

$$\triangle IMN \sim \triangle IKH \text{ (c.g.c). Suy ra } \widehat{IMN} = \widehat{IKH} \quad (1)$$

Lại có tứ giác EMIN nội tiếp (do $\widehat{N} = \widehat{M} = 90^\circ$) nên $\widehat{IMN} = \widehat{IEN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IEN} = \widehat{IKH}$, do đó tứ giác EGNK nội tiếp. Suy ra $\widehat{EGK} = \widehat{ENK} = 90^\circ$.

Kết hợp với $\widehat{EBK} = 90^\circ$, ta suy ra E, G, N, B, K cùng nằm trên đường tròn đường kính EK.

Từ $\widehat{EMH} = \widehat{EGH} = \widehat{EAH} = 90^\circ$, suy ra A, E, G, M, H cùng nằm trên đường tròn đường kính EH. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn giải bài toán theo cách trên hoặc tương tự như trên. Có một số bạn đưa ra lời giải bằng cách sử dụng "Định lý bốn điểm".

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn hơn cả:

Phú Thọ: Đào Quốc Hiếu, 9A₁, THCS Lâm Thao, Trần Thị Tuyết Nhung, 9A₂, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** Lê Trung Hiếu, 9C, THCS Vĩnh Tường; Phạm Mỹ Linh, 9A₁, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Chu Hương Giang, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; Nguyễn Thị Xuân, 9₁, Song Hồ, Thuận Thành; **Hà Nội:** Lý Phụng Hoàng, 9A₁, THPTDL Nguyễn Siêu, Cầu Giấy; **Hải Dương:** Nguyễn Thị Thanh Yên, Bùi Huy Hoàng, 9A₂, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Nghe An:** Phạm Văn Quyến, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Vũ Hồng Ái, Hoàng Trọng Đường, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nguyễn Văn Thắng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Thái Doãn Minh, 9B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Khánh Hòa:** Vũ Ngọc Cương, 8^h, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh. **Quảng Ngãi:** Phạm Quốc Việt, 9A, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn; **Đồng Nai:** Trần Quang Sang, 9/4, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Biên Hoà; **Đà Nẵng:** Võ Hồng Chương, 9¹⁰, THCS Trưng Vương; **TP Hồ Chí Minh:** Nguyễn Ngọc Quang, 9P2, THCS Ngô Sĩ Liên, Tân Bình; **Bình Định:** Trần Minh Bảo, 9A₁, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Quy Nhơn.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/379.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8} \cos(B-C) \cos(C-A) \cos(A-B).$$

Lời giải. Ta xét các trường hợp sau:

• **Trường hợp 1.** Tam giác ABC có một góc tù. Giả sử $A > 90^\circ$.

BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \cos A (\cos(B+C) + \cos(B-C)) \\ & \leq \frac{1}{8} \cos(B-C) \cos(C-B) + \cos(C+B-2A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 8\cos A (-\cos A + \cos(B-C)) \\
&\leq \cos(B-C)(\cos(B-C) - \cos 3A) \\
&\Leftrightarrow -8\cos^2 A + 8\cos A \cos(B-C) \\
&\leq \cos^2(B-C) - \cos(B-C)(4\cos^3 A - 3\cos A) \\
&\Leftrightarrow \cos A \cos(B-C)(4\cos^2 A + 5) \\
&\leq \cos^2(B-C) + 8\cos^2 A.
\end{aligned}$$

BĐT đúng vì với $A > 90^\circ$ thì $\cos A < 0$;

$\cos(B-C) > 0 \Rightarrow VT < 0 < VP$ (đẳng thức không xảy ra).

• Trường hợp 2. Tam giác ABC không tù.

Ta có $2\cos(B-C)\sin(B+C) = \sin 2B + \sin 2C$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm, ta có

$$\begin{aligned}
2\cos(B-C)\sin A &= \sin 2B + \sin 2C \\
&\geq 2\sqrt{\sin 2B \sin 2C}.
\end{aligned}$$

$$\text{Vì } \sin A > 0 \text{ nên } \cos(B-C) \geq \frac{\sqrt{\sin 2B \sin 2C}}{\sin A}.$$

Tương tự, có

$$\begin{aligned}
\cos(C-A) &\geq \frac{\sqrt{\sin 2C \sin 2A}}{\sin B}, \\
\cos(A-B) &\geq \frac{\sqrt{\sin 2A \sin 2B}}{\sin C}.
\end{aligned}$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên (các vế không âm), ta được

$$\begin{aligned}
&\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B) \\
&\geq \frac{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}{\sin A \sin B \sin C}.
\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}{\sin A \sin B \sin C} = 8\cos A \cos B \cos C,$$

từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
&\cos A \cos B \cos C \\
&\leq \frac{1}{8} \cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B). \quad (\text{Đpcm}).
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin 2A = \sin 2B = \sin 2C \Leftrightarrow A = B = C$, hay tam giác ABC đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn đã bỏ qua trường hợp tam giác ABC tù, hoặc ngộ nhận bất đẳng thức đúng! Lưu ý rằng khi tam giác ABC tù, cả hai vế của bất đẳng thức có thể cùng âm.

Số đông các bạn sử dụng một trong các phép đặt x, y, z tương ứng với: $\cos A, \cos B, \cos C$ hoặc $\tan A, \tan B, \tan C$

hoặc $\frac{\cos A}{\cos(B-C)}, \frac{\cos B}{\cos(C-A)}, \frac{\cos C}{\cos(A-B)}$. Tuy nhiên lời giải theo cách này cũng khá phức tạp.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Quảng Ninh: Phan Nam Phi, 10D, THPT Văn Lang, TP Hạ Long; **Phú Thọ:** Hạ Hồng Việt, 10 Toán, chuyên Hùng Vương; **Thanh Hoá:** Lê Văn Kiên, 10C8, THPT Bim Sơn; **Nghệ An:** Thái Đình Hiếu, 11A2, THPT Đô Lương 3, Đô Lương; **Quảng Trị:** Nguyễn Đức Lâm, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị; **Đà Nẵng:** Nguyễn Tăng Thành, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T7/379. Giải phương trình

$$3^x(4^x + 6^x + 9^x) = 25^x + 2 \cdot 16^x.$$

Lời giải. Giả sử α là một nghiệm của PT đã cho, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
&(27^\alpha - 14^\alpha) + (18^\alpha - 16^\alpha) \\
&= (25^\alpha - 12^\alpha) + (16^\alpha - 14^\alpha) \\
&\Leftrightarrow f(14) = f(12) \quad (1)
\end{aligned}$$

trong đó

$$f(t) = ((t+13)^\alpha - t^\alpha) + ((t+4)^\alpha - (t+2)^\alpha), t > 0$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \alpha((t+13)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) + ((t+4)^{\alpha-1} - (t+2)^{\alpha-1}).$$

• Nếu $\alpha > 1$ hoặc $\alpha < 0$ thì $f'(t) > 0, \forall t > 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow f(14) > f(12)$ (mâu thuẫn với (1)).

• Nếu $0 < \alpha < 1$ thì $f'(t) < 0, \forall t > 0$, suy ra $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow f(14) < f(12)$ (mâu thuẫn với (1)).

Suy ra α chỉ có thể là 0 hoặc 1. Thử lại dễ thấy $x = 0$ và $x = 1$ là hai nghiệm của PT đã cho. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Mâu chốt của bài toán là sử dụng tính đồng biến nghịch biến của hàm số. Có bạn sai lầm khi đưa PT đã cho về dạng sau và coi là PT bậc 2 ẩn $4'$:

$$2(4')^2 - 3 \cdot 4' + 25 = 3(6' + 9') = 0,$$

từ đó suy ra PT trên có nhiều nhất hai nghiệm $4'$, dẫn đến nhiều nhất hai nghiệm x (1).

2) Nhiều bạn khi giải phải sử dụng đến định lý Lagrange "Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a; b)$ sao cho $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ ".

3) Các bạn có lời giải tốt là:

Bình Định: Ngô Đặng Tuấn, 11A1, THPT Hoài Ân; Nguyễn Đồng Tiến, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Bến Tre:** Lê Phúc Lữ, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Lập, 11A3, THPT Tam Nông; **Quảng Nam:** Nguyễn Hoài Phương, Trường Văn Tường, 11Toán, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Tam Kỳ; **Đồng Tháp:** Nguyễn Đức Tuấn, 12T, THPT Thị Xã Cao Lãnh; **Hải Dương:** Lê Văn Huỳnh, 12T1 THPT Nguyễn Trãi; **Vĩnh Phúc:** Phạm Hữu Đức, 10A10, Phan Quốc Khánh, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Vũ Đình Long, 10A1 Toán, khối THPT chuyên Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Đào Trọng Anh**, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiệu, Long Biên; **Đà Nẵng:** Lê Văn Tấn Quyền, 11A2, Nguyễn Tấn Thành, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T8/379.** Chứng minh rằng hình hợp bởi sáu hình cầu có đường kính là sáu cạnh của một tứ diện thì chứa tứ diện đó.

Lời giải. Trước hết, xin lỗi bạn đọc về sai sót trong đề bài: thuật ngữ "nửa hình cầu" cần được thay bởi thuật ngữ "hình cầu".

Trở lại với lời giải bài toán.

Giả sử $ABCD$ là tứ diện. Lấy M bất kì trong $ABCD$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M , vuông góc với AM . Mặt phẳng (P) chia không gian thành hai phần: phần chứa điểm A được gọi là nửa không gian bờ (P) -chứa A ; phần không chứa điểm A được gọi là nửa không gian bờ (P) -không chứa A .

Vì M nằm trong tứ diện $ABCD$ nên các điểm B, C, D không thể cùng thuộc nửa không gian bờ (P) -chứa A . Không mất tính tổng quát giả sử, B thuộc nửa không gian bờ (P) -không

chứa A . Đương nhiên, $\widehat{AMB} > 90^\circ$. Suy ra M thuộc hình cầu đường kính AB . Do đó, M thuộc hình hợp bởi sáu hình cầu có đường kính là sáu cạnh của tứ diện $ABCD$ (đpcm). ◻

◀ **Nhận xét.** 1) Rất ít bạn tham gia giải, nhiều bạn giải sai.

2) Một vài bạn giải đúng nhờ việc sử dụng (có chứng minh) kết quả quen thuộc sau:

$$\widehat{AMB} + \widehat{AMC} + \widehat{AMD} + \widehat{BMC} + \widehat{BMD} + \widehat{CMD} > 540^\circ.$$

3) Bạn Nguyễn Tấn Thành, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** sử dụng (có chứng minh) đẳng thức quen thuộc

$$V_{MBCD} \overrightarrow{MA} + V_{MCDA} \overrightarrow{MB} + V_{MDAB} \overrightarrow{MC} + V_{MABC} \overrightarrow{MD} = \vec{0},$$

nhờ khái niệm tích vô hướng, suy ra trong sáu góc $\widehat{AMB}, \widehat{AMC}, \widehat{AMD}, \widehat{BMC}, \widehat{BMD}, \widehat{CMD}$, phải có ít nhất một góc có cosin nhỏ hơn không. Từ đó suy ra đpcm.

3) Bạn Lê Văn Huỳnh, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương** đề xuất và giải đúng bài toán tổng quát hơn: Chứng minh rằng, tứ diện $ABCD$ nằm trong hình hợp bởi bốn hình cầu có đường kính là các cạnh AB, BC, CD, DA .

4) Lời giải trên cũng chính là lời giải của bài toán tổng quát hơn: Chứng minh rằng, tứ diện $ABCD$ nằm trong hình hợp bởi ba hình cầu có đường kính là các cạnh AB, AC, AD .

5) Bạn đọc hãy khẳng định hoặc phủ định kết quả thú vị sau: Tứ diện $ABCD$ nằm trong hình hợp bởi bốn hình cầu có đường tròn lớn là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC .

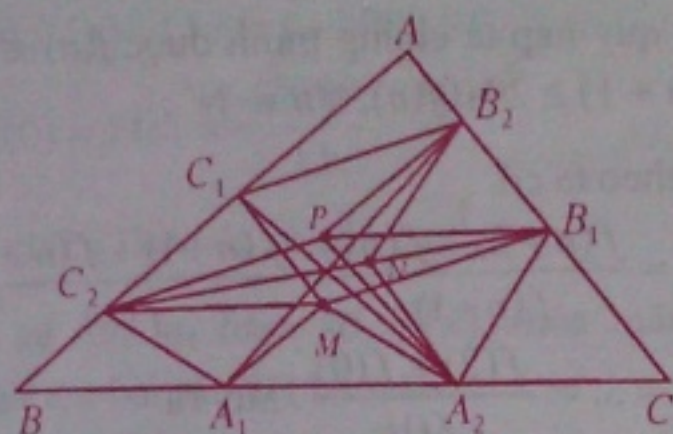
6) Xin nêu tên các bạn có lời giải tốt:

Hà Nội: Đào Trọng Anh, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiệu, Q. Long Biên; **Thanh Hóa:** Đào Quang Hòa, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Phú Yên:** Phan Minh Trí, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hoà; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Tam Kỳ.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T9/379.** Cho tam giác ABC . Lấy các cặp điểm $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho lục giác $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ lồi, có các cặp cạnh đối diện bằng nhau và diện tích của các tam giác $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$ bằng nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 đồng quy.

Lời giải. Dựng các hình bình hành $A_1A_2MC_2, B_1B_2NA_2$ và $C_1C_2PB_2$.



Từ giả thiết đề ra ta có

$$\frac{S_{AA_1A_2}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BB_1B_2}}{S_{BAC}} = \frac{S_{CC_1C_2}}{S_{CAB}}.$$

Suy ra $\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{B_1B_2}{CA} = \frac{C_1C_2}{AB} \quad (*)$

Lại vì $A_1A_2 = C_2M$ và $\widehat{C_1C_2M} = \widehat{ABC}$, nên từ (*) ta thấy $\triangle C_1C_2M \sim \triangle ABC$. Từ đó

$$\widehat{C_2C_1M} = \widehat{BAC} \text{ và } \frac{C_1M}{AC} = \frac{C_1C_2}{AB} = \frac{B_1B_2}{AC}.$$

Dẫn đến $C_1M \parallel AC$ và $C_1M = B_1B_2$. Vậy tứ giác $B_1B_2C_1M$ là hình bình hành. Hoàn toàn tương tự ta cũng thấy các tứ giác $A_1A_2B_1P$, $C_1C_2A_1N$ là hình bình hành. Do đó $PB_2 = C_1C_2$; $B_2N = A_2B_1$; $A_1P = A_2B_1$; $A_1N = C_1C_2$. Kết hợp với $C_1C_2 = A_2B_1$, ta thu được $PB_2 = B_2N = A_1P = A_1N$, nghĩa là tứ giác A_1PB_2N là hình thoi. Ta thấy A_1B_2 là đường trung trực của đoạn NP . Tương tự ta cũng chứng minh được B_1C_2 là đường trung trực của đoạn MP , C_1A_2 là đường trung trực của đoạn MN . Do vậy A_1B_2 , B_1C_2 và C_1A_2 đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP . $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài T9/379 là bài toán khái quát hóa của bài toán 1 trong Kỳ thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 46 (IMO 2005) tại Mexico (xem THPT số 343, tháng 1 năm 2006).

2) Một số bạn sử dụng phép quay, kết hợp với định lý Ceva dạng lượng giác hoặc dùng các phép tịnh tiến theo các vectơ $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$ cũng cho lời giải đúng.

3) Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Vũ Đình Long, Nguyễn Văn Quý, 10A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Phú Thọ:** Hạ Hồng Việt, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Bắc Ninh:** Trần Anh Tuấn, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Nam Định:** Trần Trọng Huy, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định;

Thái Bình: Tạ Bá Trung, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Hà Tĩnh:** Phạm Hồng Linh, 10A1, THPT Mai Thúc Loan, Lộc Hà; **Đà Nẵng:** Nguyễn Tăng Thành, 11A1, Lê Văn Tấn Quyền, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T10/379.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn

$$\sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} + abc = 3.$$

Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3}{b^2 + c^2} + \frac{b^3}{c^2 + a^2} + \frac{c^3}{a^2 + b^2} \text{ bằng } \frac{m}{2\sqrt[3]{2}},$$

trong đó m là nghiệm của phương trình

$$t^3 + 54t - 162 = 0.$$

Lời giải. Đặt $k = \sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3}$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ba số dương ta có

$$\begin{aligned} k &\geq \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{a^3 b^3}} + \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{b^3 c^3}} + \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{c^3 a^3}} \\ &= \sqrt[3]{2} (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

Do đó $k^3 \geq 54 \cdot abc = 54(3 - k)$.

$$\text{Suy ra } k^3 + 54k - 162 \geq 0 \quad (1)$$

Do vai trò của a, b, c là như nhau trong bài toán, không giảm tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó ta có $a^3 \geq b^3 \geq c^3$ và

$$\frac{1}{b^2 + c^2} \geq \frac{1}{c^2 + a^2} \geq \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

Bởi vậy theo BĐT hoán vị ta nhận được

$$\begin{aligned} 2P &= \frac{2a^3}{b^2 + c^2} + \frac{2b^3}{c^2 + a^2} + \frac{2c^3}{a^2 + b^2} \\ &\geq \frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + a^2} + \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Với các số thực dương bất kỳ u, v , từ BĐT Bunyakovski ta có

$$\begin{aligned} (u^2 + v^2)^2 &\leq (u^3 + v^3)(u + v) \leq (u^3 + v^3)\sqrt{2(u^2 + v^2)} \\ \Rightarrow (u^2 + v^2)^3 &\leq 2(u^3 + v^3)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u^2 + v^2 \leq \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{(u^3 + v^3)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{u^3 + v^3}{u^2 + v^2} \geq \frac{\sqrt[3]{u^3 + v^3}}{\sqrt[3]{2}}$$

Do đó, kết hợp với (2), ta nhận được

$$2P \geq \frac{k}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow P \geq \frac{k}{2\sqrt[3]{2}} \quad (3)$$

Ta thấy hàm $t^3 + 54t - 162$, $t \in \mathbb{R}_+$ là hàm số đồng biến suy ra phương trình $t^3 + 54t - 162 = 0$ có duy nhất một nghiệm dương m và do k thỏa mãn (1) nên $k \geq m$. Kết hợp với (3) suy ra

$$P \geq \frac{m}{2\sqrt[3]{2}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = b = c \\ a^3 + 3\sqrt[3]{2} \cdot a - 3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = b = c = \alpha$, trong đó α là nghiệm dương của PT $X^3 + 3\sqrt[3]{2} \cdot X - 3 = 0$.

Bất đẳng thức đã được chứng minh. $\square$

◀ **Nhận xét.** Do sơ suất, đề bài đã in nhầm $\frac{m}{2\sqrt[3]{2}}$ thành

$\sqrt[3]{32}m$, thành thật xin lỗi bạn đọc. Đây là bài toán bất đẳng thức hay, có nhiều phép biến đổi đẹp. Rất đáng khen ngợi các bạn lớp 9, lớp 10 sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Mai Anh Bằng, Đỗ Vũ Thạch, 10T1, Nguyễn Ngọc Sơn, 10T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Nguyễn Văn Quý, 10A1, Trần Minh Vương, 10A2, THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vinh Phúc:** Nguyễn Mạnh Quân, 10A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Nam Định:** Trần Trọng Huy, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hoàng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Hồ Phạm Thiệu, 10A1, THPT Lê Hữu Trác 1, Hương Sơn; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T11/379.** Cho hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(0) = 0, f(1) = 1$ và

$$f(n+2) - 2011f(n+1) + f(n) = 0.$$

Lấy ngẫu nhiên n từ tập các số tự nhiên $\{0, 1, 2, \dots, 2008\}$. Tính xác suất sao cho $f(n)$ là một số nguyên tố.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Đồng Tiến, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định).

Bằng quy nạp ta chứng minh được $f(n) \in \mathbb{N}^*$ và $f(n+1) \geq 2010f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tiếp theo ta có

$$\begin{aligned} 2011 &= \frac{f(n+2) + f(n)}{f(n+1)} = \frac{f(n+1) + f(n-1)}{f(n)} \\ &= \dots = \frac{f(2) + f(0)}{f(1)}. \text{ Suy ra} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(n+2)f(n) - f^2(n+1) \\ &= f(n+1)f(n-1) - f^2(n) = \dots \end{aligned}$$

$$= f(0)f(2) - f^2(1) = -1. \text{ Vậy}$$

$$f(n+2)f(n) = (f(n+1)-1)(f(n+1)+1) \quad (1)$$

• Với $n = 2$ thì $f(2) = 2011$ là số nguyên tố.

• Ta chứng minh với mọi $n \geq 3$ thì $f(n)$ là hợp số. Thật vậy, giả sử $f(n)$ là số nguyên tố ($n \geq 3$).

Vì $f(n-1) + 1 < f(n-1) \cdot 2010 \leq f(n)$ nên $f(n-1) + 1$ không chia hết cho $f(n)$.

Từ (1) ta có

$$f(n)f(n-2) = (f(n-1)-1)(f(n-1)+1)$$

do đó $f(n-1) - 1$ chia hết cho $f(n)$.

Với $n \geq 3$ thì $f(n-1) - 1 > 0$ nên

$$f(n-1) - 1 \geq f(n) > f(n-1) + 1. \text{ Mâu thuẫn.}$$

Vậy với mọi $n \in \{0, 1, 2, \dots, 2008\}$ thì $f(n)$ là số nguyên tố khi và chỉ khi $n = 2$. Do đó xác suất để $f(n)$ là số nguyên tố là $\frac{1}{2009}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Tất cả các bạn tham gia giải bài toán này đều có lời giải đúng và tương tự như cách giải trên của bạn Tiến. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nam: Trần Trung Kiên, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Hà Nội:** Trần Minh Vương 10A2 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nghệ An:** Nguyễn Quang Phú, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Bình Thuận:** Phí Thái Thuận, 11 Toán, THPT Trần Hưng Đạo, TP. Phan Thiết; **Đà Nẵng:** Nguyễn Tăng Thành, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vinh Long:** Hồ Diên Tuấn Anh, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T12/379.** Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0; 1]$, có đạo hàm trong $(0; 1)$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

a) $20f'(x) + 11f(x) + 2009 \leq 0, \forall x \in (0; 1);$

b) $f(0) = f(1) = -\frac{2009}{11}.$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện bài ra. Xét hàm số

$$g(x) = e^{\frac{11}{20}x} \left(f(x) + \frac{2009}{11} \right) \text{ trên } [0; 1].$$

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và có đạo hàm trong $(0; 1)$, suy ra $g(x)$ là hàm số liên tục trên $[0; 1]$ có đạo hàm trong $(0; 1)$. Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{11}{20} e^{\frac{11}{20}x} \left(f(x) + \frac{2009}{11} \right) + e^{\frac{11}{20}x} f'(x) \\ &= \frac{1}{20} e^{\frac{11}{20}x} (20f'(x) + 11f(x) + 2009). \end{aligned}$$

Từ điều kiện a) suy ra $g'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 1)$.

Vậy $g(x)$ là hàm đơn điệu giảm trong khoảng

$(0; 1)$. Mặt khác, ta có $f(0) = f(1) = -\frac{2009}{11}$,

nên $g(0) = g(1) = 0$.

Suy ra $g(x) \equiv 0$ trên $[0; 1]$ và $f(x) \equiv -\frac{2009}{11}$.

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các điều kiện bài ra. $\square$

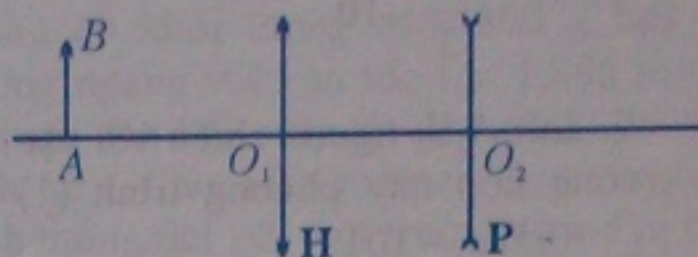
◀ **Nhận xét.** Do sơ xuất nên đề bài đã in nhầm $20f'(x)$ thành $20f(x)$. Thành thật xin lỗi bạn đọc. Đa số các bạn đã sửa lại đề như trên để giải bài toán. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nam: Trần Trung Kiên, 11T, Tăng Hồ Phát, 12T2, THPT Chuyên Hà Nam; **Hải Dương:** Dương Đức Hữu, 11A, THPT Kim Thành; **Hà Nội:** Nguyễn Sơn Tùng 12A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì. **Đà Nẵng:** Nguyễn Tăng Thành, Lê Văn Tấn Quyền, 11A2 THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài L1/379.** Một thấu kính hội tụ **H**, tiêu cự $f_1 = 10\text{cm}$ đặt trước và đồng trục với một thấu kính phân kì **P**, tiêu cự $f_2 = -5\text{cm}$. Hai thấu kính đặt cách nhau một khoảng $O_1O_2 = a = 15\text{cm}$ (hình vẽ). Một vật sáng **AB** đặt trước **H**, qua hệ **H + P** cho ảnh ảo A_2B_2 lớn gấp đôi

vật. Hãy xác định vị trí của vật **AB** (tức là tính $O_1A = d_1$).



Lời giải. Sơ đồ tạo ảnh qua hệ hai thấu kính **H** và **P**

$$AB \xrightarrow{H} A_1B_1 \xrightarrow{P} A_2B_2$$

Gọi k_1, k_2, k là độ phóng đại tương ứng của các thấu kính **H**, **P** và của hệ thấu kính (**H + P**). Dễ dàng chứng minh được:

$$k = -\frac{d'}{d} = \frac{f - d'}{f} = \frac{f}{f - d'}.$$

Suy ra

$$k = k_1 \cdot k_2 = \frac{f_1 - d'_1}{f_1} \cdot \frac{f_2}{f_2 - d'_2} = \frac{f_1 - d'_1}{f_1} \cdot \frac{f_2}{f_2 - (a - d'_1)},$$

(vì $a = d'_1 + d'_2$).

Thay số ta có

$$\pm 2 = \frac{10 - d'_1}{10} \cdot \frac{-5}{-5 - 15 + d'_1} = \frac{0,5(d'_1 - 10)}{d'_1 - 20} \quad (1)$$

Xét hai trường hợp

1) $k = 2 > 0$, ảnh A_2B_2 cùng chiều với vật **AB**. Trong trường hợp này phương trình (1) trở thành

$$2 = \frac{0,5(d'_1 - 10)}{d'_1 - 20} \quad (2)$$

Giải phương trình (2) ta được $d'_1 = \frac{70}{3}\text{cm}$ và

$$d_2 = a - d'_1 = 15 - \frac{70}{3} = -\frac{25}{3}\text{cm} < f_2; \text{ nghĩa là}$$

$$\frac{25}{3} > |f_2| \Rightarrow O_2A_1 > O_2F_2. \text{ Như vậy, qua thấu}$$

kính **P** vật ảo A_1B_1 cho ảnh ảo A_2B_2 . Trường hợp $k = 2$ thỏa mãn các điều kiện của bài ra.

Vị trí của vật **AB** là

$$d_1 = \frac{d_1' f_1}{d_1' - f_1} = \frac{\frac{70}{3} \cdot 10}{\frac{70}{3} - 10} = 17,5(\text{cm}).$$

2) $k = -2$, ảnh A_2B_2 ngược chiều với vật AB . Trong trường hợp này phương trình (1) trở thành $-2 = \frac{0,5(d_1' - 10)}{d_1' - 20}$ (3)

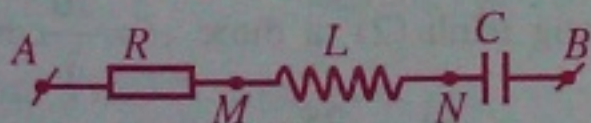
Giải phương trình (3) ta được $d_1' = 18\text{cm}$ và $d_2 = a - d_1' = 15 - 18 = -3\text{cm}$. Như vậy $d_2 > f_2$ vì $(-3\text{cm} > -5\text{cm})$, do đó $O_2A_1 < O_2F_2$, qua thấu kính P vật ảo A_1B_1 cho ảnh thật A_2B_2 (loại). $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bác Kạn: Ngô Việt Hùng, 12T, THPT chuyên Bắc Kạn; **Phú Thọ:** Hà Văn Minh, 12A2, THPT Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Văn Đông, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Bắc Ninh:** Nghiêm Trang, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** Nguyễn Sơn Tùng, 12A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, 9C, THCS Trần Phú, Phú Lý; **Hải Dương:** Phạm Đình Tuấn, 12A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang, Đỗ Ngọc Linh, 11Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thái Bình:** Trần Quốc Hoàng, THPT Thái Ninh, Thái Thụy; **Thanh Hoá:** Lê Văn Giang, 12F, THPT Lam Sơn, Mai Chí Đạt, 11E, THPT Hà Trung, Lê Thị Lý, 10B10, THPT Hậu Lộc 2, Đàm Triệu Đạt, 11B1, THPT Triệu Sơn 3; **Nghệ An:** Lê Đình Tuấn, Hồ Trọng Hùng, 10A3K37, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Trọng Hiệp, 10 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** Nguyễn Nhân Đức, 11Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Long An:** Trần Thuỷ Anh, 11A, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Tạ Việt Ý, 11Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN VĂN THUẬN

★ **Bài L2/379.** Cho mạch điện xoay chiều gồm điện trở R , cuộn dây có độ tự cảm L , tụ điện có điện dung C mắc nối tiếp (hình vẽ).



Điện áp tức thời giữa hai đầu đoạn mạch AB là $u = 175\sqrt{2}\cos 100\pi$ (V), các điện áp hiệu dụng

$$U_{AM} = 25\text{ V}; U_{MN} = 25\text{ V}; U_{NB} = 175\text{ V}.$$

a) Xác định hệ số công suất của đoạn mạch AB .

b) Cho $R = 25\Omega$, tính công suất tiêu thụ trung bình của đoạn mạch AB trong khoảng thời gian từ $t_1 = \frac{T}{8}$ đến $t_2 = \frac{T}{4}$ (Với T là chu kỳ của dòng điện trong mạch).

Lời giải

a) Giả sử cuộn dây không có điện trở thuần. Khi đó ta có

$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 \Leftrightarrow 175^2 = 25^2 + (25 - 175)^2$ vô lí. Vậy cuộn dây phải có điện trở thuần r . Theo bài ra ta có

$$U^2 = (U_R + U_r)^2 + (U_L - U_C)^2 \quad (1)$$

$$U_{MN}^2 = U_d^2 = U_r^2 + U_L^2 \quad (2)$$

Thay số vào hai biểu thức trên rồi giải hệ phương trình ta tìm được $U_L = 7\text{V}; U_r = 24\text{V}$.

Hệ số công suất của đoạn mạch AB là

$$\cos \varphi = \frac{U_R + U_r}{U} = \frac{7}{25}.$$

b) Do $U_L < U_C$ nên dòng điện sớm pha hơn điện áp giữa hai đầu đoạn mạch. Do $R = 25\Omega$ nên $I_0 = \sqrt{2}\text{ A}$, $r = 24\Omega$.

Biểu thức cường độ dòng điện trong mạch là: $i = \sqrt{2}\cos(100\pi t + \varphi)$

Công suất tiêu thụ trung bình của đoạn mạch AB trong khoảng thời gian từ $t_1 = \frac{T}{8}$

đến $t_2 = \frac{T}{4}$ (với T là chu kỳ biến đổi của dòng điện) là:

$$\bar{P} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2 (R + r) dt.$$

Thay biểu thức của i vào rồi lấy tích phân ta được kết quả $P \approx 58,5\text{ W}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hải Dương: Phạm Đình Tuấn, 12A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Đông, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN XUÂN QUANG

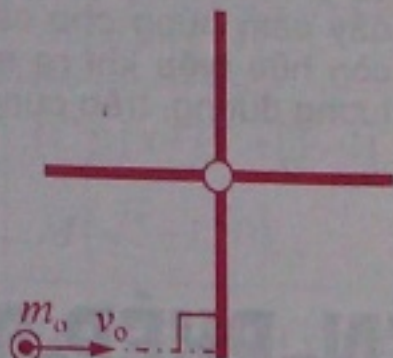
ĐỀ RA... (Tiếp trang 16)

Các điện trở $R_1 = R_2 = R_3 = R$, diôt D coi là lí tưởng. Đặt vào A, B một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng U . Tìm điện áp hiệu dụng ở hai đầu điện trở R_1 .

NGUYỄN MINH TUẤN

(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

Bài L2/383. Một chiếc thước thợ mỏng, đồng chất hình dấu cộng được đặt trên sàn ngang nhẵn. Thước có thể quay tự do quanh trục cố định là trục đối



xứng của thước. Chiều dài mỗi cạnh của thước là $l = 30$ cm, khối lượng mỗi cạnh là $m = 600$ g. Thước đang nằm yên thì một hòn bi nhỏ có khối lượng $m_0 = 800$ g bay theo phương ngang với vận tốc $v_0 = 1,885$ m/s đến va chạm đàn hồi với một đầu cạnh của thước (hình vẽ). Cho biết mômen quán tính của thanh mỏng đối với một trục đi qua đầu thanh và vuông góc với thanh là $\frac{1}{3} ml^2$. Tính thời gian và góc quay của thước.

NGUYỄN VĂN HẠNH

(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Tp. Vinh, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/283. (For 6th grade) Let a, b, c be integers such that

$$A = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{2}$$

is a perfect square. Prove that

$$a = b = c.$$

T2/383. (For 7th grade) Let ABC be a triangle in which $\widehat{BAC} = 75^\circ$. Given that the altitude AH has length $AH = \frac{BC}{2}$. Prove that ABC is an isosceles triangle.

T3/383. Let x, y be two nonnegative integers where $x > 1$ and $2x^2 - 1 = y^{15}$. Prove that x is divisible by 15.

T4/383. Let $ABCD$ be a parallelogram. The ray Dx from D is perpendicular to DC and lies on the half-plane divided by CD which does not contain B . Choose a point E on Dx such that $DE = DC$. Draw an isosceles right triangle BEF (right angle at F) such that F and D are on the same half-plane divided by BC . EH is the altitude onto BC . Prove that F, D and H are collinear.

T5/383. Let a, b, c be three sides of a right triangle, a is the hypotenuse. Prove that the

equation $-ax^2 + bx + c = 0$ has two distinct roots x_1, x_2 such that $-\sqrt{2} < x_1 < x_2 < \sqrt{2}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/383. Consider a convex polygon with 2009 vertices. A scissor is used to cut along all of its diagonals, thereby dividing the original polygon into smaller convex polygons. How many vertices are there of a resulting polygon with the greatest number of edges?

T7/383. Determine the smallest value of the expression

$$T = \frac{ab+bc}{a^2-b^2+c^2} + \frac{bc+ca}{b^2-c^2+a^2} + \frac{ca+ab}{c^2-a^2+b^2}$$

where a, b, c are three sides of a triangle ABC and $abc = 1$.

T8/383. Let $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ be a cube. On its three skew edges, choose three points M, N, P . Determine the positions of the points M, N, P such that the triangle MNP has

- 1) The smallest perimeter possible.
- 2) The smallest area possible.

Translated by LE MINH HA



Góp phần chống tiêu cực, chống quay cóp cho học sinh trong giờ kiểm tra, người dạy Toán cần ra nhiều đề cùng lúc. Một trong những cách đó là dùng *phép tịnh tiến, phép đối xứng* để ra nhiều đề mà vẫn bảo đảm tính khách quan, tính công bằng cho mỗi đề. Ngoài ra với phương pháp này, từ một thí dụ hay một bài tập trong sách giáo khoa (SGK), giáo viên chủ động ra bài tập ở dạng tương đương ngay trên lớp (khi đã biết trước đáp số); tạo giờ dạy thanh thoát, đầy cảm hứng cho cả thầy và trò. Đặc biệt nó còn hữu hiệu khi ra nhiều câu hỏi trắc nghiệm tương đương, trên cùng một nội dung bài học.

DÙNG PHÉP TỊNH TIẾN, PHÉP ĐỐI XỨNG để sáng tạo ra nhiều đề toán mới

NGUYỄN PHI HÙNG

(GV trường THPT Trần Quốc Tuấn, huyện Phú Hòa, tỉnh Phú Yên)

1. Dùng phép tịnh tiến

Trong hệ trục Oxy cho điểm $M(x; y)$ và vector $\vec{u}(a; b)$. Nếu điểm $M'(x'; y')$ là ảnh $M(x; y)$ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}(a; b)$ thì ta có

$$\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b. \end{cases}$$

Đặc biệt:

- Nếu $\vec{u}(a; 0)$ thì $\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' \end{cases}$

- Nếu $\vec{u}(0; b)$ thì $\begin{cases} x = x' \\ y = y' - b. \end{cases}$

Trên cơ sở này, từ những thí dụ và những bài tập đã có trong SGK chúng ta có thể thay đổi giả thiết đề toán để tạo ra bài toán mới. Hơn nữa, chúng ta vẫn suy luận biết trước được đáp số của bài toán mới để làm cơ sở kiểm tra lời giải của học sinh.

★ Thí dụ 1

(Bài 67b, trang 151, Đại số 10 nâng cao)

Giải bất phương trình $\sqrt{2x-1} \leq 2x-3$.

Thực hiện một số phép tịnh tiến ta được đề mới và đáp số tương ứng sau:

	Bất phương trình	Nghiệm
Đề gốc	$\sqrt{2x-1} \leq 2x-3$	$x \geq \frac{5}{2}$
Tịnh tiến theo $\vec{u}(1; 0)$	$\sqrt{2x-3} \leq 2x-5$	$x \geq \frac{7}{2}$
Tịnh tiến theo $\vec{u}(-1; 0)$	$\sqrt{2x+1} \leq 2x-1$	$x \geq \frac{3}{2}$

Trong thí dụ 1, từ đề gốc ta thay x bởi $x-a$ (với a thứ tự là 1 và -1).

★ Thí dụ 2

(Bài toán 1, trang 93, Hình học 10 nâng cao)

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$, biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $M(\sqrt{5}-1; 1)$

Thực hiện một số phép tịnh tiến ta được đề mới và đáp số tương ứng sau đây.

	Phương trình đường tròn (C) và tọa độ điểm M	Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua M
Đề gốc	$(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ $M(\sqrt{5}-1; 1)$	$\Delta_1: x - \sqrt{5} + 1 = 0$ $\Delta_2: 2x - \sqrt{5}y + 2 - \sqrt{5} = 0$
Tịnh tiến theo $\vec{u}(2; 0)$	$(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ $M(\sqrt{5}+1; 1)$	$\Delta_1: x - \sqrt{5} - 1 = 0$ $\Delta_2: 2x - \sqrt{5}y - 2 - \sqrt{5} = 0$
Tịnh tiến theo $\vec{u}(0; -1)$	$(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ $M(\sqrt{5}-1; 0)$	$\Delta_1: x - \sqrt{5} + 1 = 0$ $\Delta_2: 2x - \sqrt{5}y + 2 - 2\sqrt{5} = 0$
Tịnh tiến theo $\vec{u}(2; 1)$	$(C): (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$ $M(\sqrt{5}+1; 2)$	$\Delta_1: x - \sqrt{5} - 1 = 0$ $\Delta_2: 2x - \sqrt{5}y - 2 = 0$

Trong thí dụ 2, từ đề gốc ta thay x bởi $x - a$, y bởi $y - b$ (với $(a; b)$ thứ tự là $(2; 0)$, $(0; -1)$, $(2; 1)$).

2. Dùng phép đối xứng

Ta biết trong hệ trục Oxy , hai điểm:

- $M(x; y)$ và $N(-x; y)$ đối xứng nhau qua trục tung;
- $M(x; y)$ và $P(x; -y)$ đối xứng nhau qua trục hoành;
- $M(x; y)$ và $Q(-x; -y)$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ;
- $M(x; y)$ và $R(y; x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$;
- $M(x; y)$ và $S(-y; -x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = -x$.

Trên cơ sở này, xin nêu một số thí dụ sau đây.

★ Thí dụ 3

(Bài 31, trang 59, Đại Số 10 nâng cao)

Hàm số $y = -2x^2 - 4x + 6$ có đồ thị là Parabol (P).

Tìm tọa độ đỉnh và phương trình trục đối xứng của (P)

Đáp số. (P) có tọa độ đỉnh $I(-1; 8)$ và phương trình trục đối xứng $x = -1$.

- Thực hiện phép đối xứng qua trục tung: Thay x bởi $-x$ ta được hàm số $y = -2x^2 + 4x + 6$ có đồ thị là parabol (P_1) với tọa độ đỉnh $I_1(1; 8)$ và trục đối xứng $x = 1$.

- Thực hiện phép đối xứng qua trục hoành: Thay y bởi $-y$ ta được hàm số $y = 2x^2 + 4x - 6$ có đồ thị là parabol (P_2) với tọa độ đỉnh $I_2(-1; -8)$ và trục đối xứng $x = -1$.

- Thực hiện phép đối xứng qua gốc tọa độ: Thay x bởi $-x$, y bởi $-y$ ta được hàm số $y = 2x^2 - 4x - 6$ có đồ thị là parabol (P_3) với tọa độ đỉnh $I_3(1; -8)$ và trục đối xứng $x = 1$.

★ Thí dụ 4

(Bài 31, trang 93, Đại Số 10 nâng cao)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. Nghiệm } (x; y) = (\sqrt{3}; -2\sqrt{2}).$$

Với mỗi phép đối xứng qua trục tung, qua trục hoành, qua gốc tọa độ, qua đường $y = x$, qua đường $y = -x$ ta được đề mới và đáp số tương ứng sau:

Hệ phương trình	Nghiệm
$\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 1 \\ 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$
$\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}$
$\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 1 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}$
$\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = -1 \\ \sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$
$\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 1 \\ \sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$

★ **Thí dụ 5.**

(Bài 13, trang 85, Hình học 10 nâng cao)

Trên đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$, tìm điểm M cách đều hai điểm $E(0; 4)$ và $F(4; -9)$.

Đáp số. Điểm $M\left(-\frac{133}{18}; -\frac{97}{18}\right)$.

Thực hiện một số phép đối xứng như thí dụ 4 ta được đề mới và đáp số tương sau đây.

Đường thẳng d , hai điểm E và F	Tọa độ điểm M cách đều E, F
$d: x + y - 2 = 0$, $E(0; 4), F(-4; -9)$	$M\left(\frac{133}{18}; -\frac{97}{18}\right)$
$d: x + y + 2 = 0$, $E(0; -4), F(4; 9)$	$M\left(-\frac{133}{18}; \frac{97}{18}\right)$
$d: x - y - 2 = 0$, $E(0; -4), F(-4; 9)$	$M\left(\frac{133}{18}; \frac{97}{18}\right)$
$d: -x + y + 2 = 0$, $E(4; 0), F(-9; 4)$	$M\left(-\frac{97}{18}; -\frac{133}{18}\right)$
$d: x - y + 2 = 0$, $E(-4; 0), F(9; -4)$	$M\left(\frac{97}{18}; \frac{133}{18}\right)$

(Xem tiếp trang 31)

HƯỚNG DẪN GIẢI... (Tiếp trang 10)

Hàm số có dạng

$$y = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x (2 - \tan x)} = \frac{1 + \tan^2 x}{2 \tan^2 x - \tan^3 x}$$

Đặt $t = \tan x$ ($0 < t \leq \sqrt{3}$).

Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{1+t^2}{2t^2-t^3}$ trên $(0; \sqrt{3})$ ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2, đạt được khi $t = 1$ tức là khi $x = \frac{\pi}{4}$.

Câu 6b

1) Ta có $C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$).

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n + 14 = 0 \Rightarrow n = 7.$$

$$\text{Mặt khác } C_7^5 \left(\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} \right)^2 \left(\sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}} \right)^5 = 21$$

$$\Leftrightarrow 21 \cdot 2^{\lg(10-3^x)} \cdot 2^{(x-2)\lg 3} = 21$$

$$\Leftrightarrow 2^{\lg(10-3^x) + (x-2)\lg 3} = 1 \Leftrightarrow (10-3^x)3^{x-2} = 1.$$

Đáp số. $x = 0, x = 2$.

2) Đặt $\beta = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ thì

$$\beta^3 = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi). \text{ Ta có}$$

$$r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

$$\text{Suy ra } r = \sqrt[3]{3} \text{ và } \varphi = \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) (k \in \mathbb{Z}).$$

Cho $k = 0; 1; 2$ ta tìm được các giá trị khác nhau của β .

Câu 7b. Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương $1-a, 1-b, 1-c$ ta thấy

$$0 < (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow 1 < ab + bc + ca - abc \leq \frac{28}{27}$$

$$\Leftrightarrow 2 < (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + 2abc) \leq \frac{56}{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{52}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{2}{3}$.

HUỖNH DUY THỦY

(GV THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định)

KÌ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC

LẦN THỨ 18 - NĂM 2009

NGUYỄN VĂN MẬU
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Trong thời gian từ 15.4 đến 20.4.2009 tại trường Đại học Quảng Bình đã diễn ra kì thi Olympic Toán học Sinh viên toàn quốc lần thứ 18. Kì thi lần này thu hút nhiều sinh viên của 59 trường Đại học và Cao đẳng trong cả nước tham gia. Một điều rất thú vị là song hành với kì thi Olympic Toán học Sinh viên toàn quốc của nước ta, kì thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 17 cho sinh viên các trường Đại học trên thế giới cũng được tổ chức vào tháng bảy năm nay tại Budapest, Hungary.

Thi Olympic Toán học Sinh viên toàn quốc là sáng kiến của ba trường ĐHTH Hà Nội (nay là ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội), ĐHBK Hà Nội và ĐHSP1 Hà Nội. Kì thi lần đầu tiên được tổ chức tại ĐHTH Hà Nội năm 1993. Những năm gần đây, Kì thi Olympic Toán học Sinh viên toàn quốc được Hội Toán học Việt Nam, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Hội Sinh viên Việt Nam phối hợp đồng tổ chức, với mục tiêu nhằm góp phần nâng cao chất lượng dạy và học toán, thúc đẩy phong trào thi đua học tập của sinh viên, tạo sân chơi, giao lưu học hỏi, hội nhập với khu vực và quốc tế, phát hiện bồi dưỡng các năng khiếu toán học và tài năng trẻ ở các trường Đại học và Cao đẳng trong cả nước.

Kì thi Olympic Toán học Sinh viên toàn quốc thi hai môn: *Giải tích* (chủ yếu phép tính vi phân và tích phân hàm biến thực) và *Đại số* (chủ yếu là đại số tuyến tính và đa thức). Mỗi môn thi thí sinh làm bài trong thời gian là 180 phút gồm 6 bài toán từ dễ đến khó. Ban tổ chức đã trao 20 giải Nhất, 39 giải Nhì và 54 giải Ba đối với môn Giải tích và 19 giải Nhất, 41 giải Nhì và 55 giải Ba đối với môn Đại số cùng một số giải Khuyến khích.

Đặc biệt có hai sinh viên đạt điểm tối đa (30/30) trong kì thi này là *Nguyễn Trọng Nghĩa* (ĐHBK TP Hồ Chí Minh) môn *Giải tích* và *Nguyễn Trần Thuận* (ĐH Vinh) môn *Đại số*.

Có hai sinh viên đoạt đồng thời cả hai giải Nhất hai môn *Giải tích* và *Đại số* là Nguyễn Hữu Tình (ĐHKHTN Hà Nội) và Lê Hồng Kỳ (ĐHBK Hà Nội).

Sinh viên *Lê Phi Hùng* (ĐHKHTN Hà Nội), người đoạt huy chương Bạc Olympic Toán sinh viên Quốc tế năm 2007 tại Bulgaria đoạt giải Nhất môn *Giải tích* và giải Nhì môn *Đại số*.

Hai trường Cao đẳng sư phạm cũng có sinh viên đạt giải cao (giải Nhì) là các trường CĐSP Bắc Ninh và CĐSP Hà Nội.

Trường Đại học Quảng Bình là trường đang cai đã có nhiều cố gắng và nỗ lực cao tổ chức thành công Kì thi Olympic Toán học Sinh viên toàn quốc và Hội thảo về đổi mới Phương pháp giảng dạy toán ở khối các trường kĩ thuật.

Kì thi Olympic Toán học Sinh viên toàn quốc lần thứ 19 (năm 2010) sẽ được tổ chức tại trường Đại Học Khoa học Huế.

Các bạn muốn biết thêm thông tin chi tiết và tiếp cận các đề thi chính thức, các đề dự tuyển, các đề thi và đáp án Olympic Toán học Sinh viên Quốc tế và các Kì thi Olympic Toán Hà Nội mở rộng (bằng tiếng Anh) xin mời xem trang web:

<http://www.hms.org.vn>

.....

DÙNG PHÉP TÍNH TIẾN...

(Tiếp trang 30)

Trong thí dụ 5 từ đề gốc ta lần lượt thay x bởi $-x$; y bởi $-y$; x bởi $-x$ và y bởi $-y$; x bởi y và y bởi x ; x bởi $-y$ và y bởi $-x$.

Với hệ trục $Oxyz$, phép tính tiến theo vectơ $\vec{u}$ ($a; b; c$), phép đối xứng qua trục tọa độ, qua mặt phẳng tọa độ, qua mặt phẳng phân giác phong phú hơn, nên từ một bài toán hình trong không gian hay từ một hệ phương trình bậc nhất ba ẩn ... ta càng sáng tạo ra nhiều đề toán tương tự hơn.

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,

TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,

PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,

TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,

GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY,

GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**

Trần Hà – Bất đẳng thức về tính chất các nghiệm của phương trình đại số.

- 3 **Lời giải đề thi vào lớp 10 khối THPT chuyên ĐH Vinh, Nghệ An, năm học 2008 – 2009.**

- 5 **Đề thi vào lớp 10 khối THPT chuyên trường Đại học Sư phạm Hà Nội, năm học 2008 – 2009.**

- 6 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**

Nguyễn Minh Nhiên – Phương pháp đổi biến trong bài toán chứng minh bất đẳng thức.

- 9 **Thử sức trước kì thi**

Nguyễn Thanh Giang – Đề số 5.

- 10 **Huỳnh Duy Thủy – Hướng dẫn giải Đề số 2.**

- 11 **Nguyễn Văn Thuận – Hướng dẫn ôn tập môn Vật lí thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2009. Chủ đề: Lượng tử ánh sáng.**

- 13 **Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**

Trần Nam Dũng – Đa thức và ứng dụng trong cái bài toán tổ hợp (kì 1).

- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/383, ..., T8/383, L1/383, L2/383.

- 17 **Cuộc thi giải toán Kỷ niệm 45 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ – The M&Y 45th Anniversary Contest**
T5/THCS, T6/THCS, T5/THPT, T6/THPT.

- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 379.

- 28 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Nguyễn Phi Hùng – Dùng phép tịnh tiến, phép đối xứng để sáng tạo ra nhiều đề toán mới.

- 31 **Nguyễn Văn Mậu – Kì thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc lần thứ 18 – năm 2009.**

Bìa 2. - Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2008.
- Lễ kỉ chương trình phối hợp thực hiện phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực" giai đoạn 2009 - 2013

Bìa 3. Sai lầm ở đâu – *Where's Mistake?*

Bìa 4. Giải trí toán học – *Math Recreation*



Tôi xem một bài toán trong một quyển sách tham khảo. Sau khi đọc lời giải của cuốn sách, tôi thử tìm kiếm lời giải khác, và thật kì lạ, cách giải của tôi có kết quả khác. Tôi suy nghĩ và thấy bối rối quá. Các bạn hãy giúp tôi với. Sau đây là đề bài, lời giải trong sách và lời giải của tôi:

Đề bài. Cho hyperbol (H) có phương trình $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$.

Viết phương trình tiếp tuyến của (H) biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm A(3 ; 1).

• **Lời giải trong sách như sau:**

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến và (H), khi đó PT tiếp tuyến với (H) tại M có dạng

$$d: \frac{xx_0}{9} - \frac{yy_0}{1} = 1.$$

Vì $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và d đi qua A(3 ; 1), nên ta có hệ PT

$$\begin{cases} \frac{x_0}{3} - y_0 = 1 \\ \frac{x_0^2}{9} - y_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 0 \\ x_0 = 3. \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $d: x = 3$.



• **Lời giải của tôi như sau:**

Nhận thấy qua A(3 ; 1) có một tiếp tuyến không có hệ số góc thỏa mãn bài toán là $d_1: x = 3$. Giả sử các tiếp tuyến còn lại đi qua A(3 ; 1) và có hệ số góc là k. Khi đó PT tiếp tuyến có dạng

$$d: y = k(x - 3) + 1 \Leftrightarrow kx - y + 1 - 3k = 0.$$

Vì d là tiếp tuyến của (H) nên $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$

$$\Leftrightarrow 9k^2 - 1 = (1 - 3k)^2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}.$$

Thay $k = \frac{1}{3}$ ta được PT tiếp tuyến còn lại là

$$(d_2): y = \frac{1}{3}x.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn bài toán:

$$d_1: x = 3; \quad d_2: y = \frac{1}{3}x.$$

PHAN QUANG SƠN

(GV THPT Nam Khoái Châu, Hưng Yên)

Giải đáp bài: Người chơi thông minh

(Đề đăng trên THPT số 379, tháng 1.2009)

Rõ ràng xác suất chọn đúng hộp có quà tặng bằng $\frac{1}{2}$ là không đúng(!). Có thể nhận thấy rằng xác suất để chiếc hộp có chứa quà mà người chơi chọn ở thời điểm ban đầu (khi có 3 chiếc hộp) là $\frac{1}{3}$. Xác suất để một trong hai chiếc hộp còn lại có chứa quà là $\frac{2}{3}$.

Khi người dẫn chương trình loại đi một chiếc hộp rỗng thì chiếc hộp còn lại (mà người chơi không chọn) có xác suất chứa quà là $\frac{2}{3}$. Do đó xác suất có chứa quà trong hai chiếc hộp còn lại là khác

nhau. Vì vậy, nếu người chơi đồng ý đổi chiếc hộp đã chọn với chiếc hộp còn lại thì xác suất chọn đúng hộp có chứa quà của người chơi sẽ tăng lên (bằng $\frac{2}{3}$).

Như vậy, nếu người dẫn chương trình tạo một cơ hội như trên thì người chơi không nên bỏ lỡ!

Những bạn sau có đáp án đúng: Phan Đức Minh, 10A7, THPT Thái Phiên, Quận Ngô Quyền, Hải Phòng; Phạm Hồ Nghĩa, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi; Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, Phú Yên; Võ Trọng Hiếu, 10A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, Nghệ An.

NGỌC HIỂN



Giải đáp:

TÍNH TOÁN

NĂM KỶ SỬU

(Đề đăng trên THPT số 379 tháng 1.2009)

Theo giả thiết có $U = 2^3 = 8$.

Trong phép toán $KY \times SUU = TOÁN$, các chữ số đều khác nhau nên chúng lấy đủ các giá trị từ 1 đến 9.

Chữ số $Y \neq 1$ (vì $U \neq N$) nên chỉ xảy ra Y bằng 4 hoặc bằng 9.

1) Giả sử $Y = 4$ ta có $K4 \times S8U = TOÁN$ (1)

N là chữ số tận cùng của $4 \times U$ và N khác 4, 8, U nên $(U; N)$ chỉ có thể là $(3; 2), (9; 6)$.

- Xét $(U; N)$ bằng $(3; 2)$. Thử với K bằng 1, 5, 6, 7, 9 đều không có giá trị của S thỏa mãn (1).

- Xét $(U; N)$ bằng $(9; 6)$. Thử với K bằng 1, 2, 3, 5, 7 đều không có giá trị của S thỏa mãn (1).

2) Giả sử $Y = 9$ ta có $K9 \times S8U = TOÁN$ (2)

N là chữ số tận cùng của $9 \times U$ và N khác 9, 8, U nên $(U; N)$ chỉ có thể là $(3; 7), (4; 6), (6; 4), (7; 3)$.

- Xét $(U; N)$ bằng $(3; 7)$. Thử với K bằng 1, 2, 5, 4, 6 đều không có giá trị nào của S thỏa mãn (2).

- Xét $(U; N)$ bằng $(4; 6)$. Thử với K bằng 1, 2, 3, 5, 7 đều không có giá trị nào của S thỏa mãn (2).

- Xét $(U; N)$ bằng $(6; 4)$. Thử với K bằng 1, 2, 3, 5, 7 thì chỉ có một giá trị S thỏa mãn (2) tương ứng với $(K; S)$ bằng $(3; 1)$.

- Xét $(U; N)$ bằng $(7; 3)$. Thử với K bằng 1, 2, 5, 4, 6 đều không có giá trị nào của S thỏa mãn (2).

Đáp số duy nhất là: $39 \times 186 = 7254$.

Các bạn có lời giải đúng, đầy đủ là:

1) Nguyễn Đình Thi, 284 Nguyễn Công Trứ, TP. Tuy Hòa, Phú Yên.

2) Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, Phú Yên.

3) Nguyễn Văn Dũng, Đường 6, Thôn Tân Trại 1, Vĩnh Giang, Vĩnh Linh, Quảng Trị.

4) Nguyễn Ngọc Yên, 62/7 Lê Văn Tám, KP 6, Liên Nghĩa, Đức Trọng, Lâm Đồng.

5) Kiều Minh Tuấn, 11 Lí, THPT chuyên, TP. Phù Lý, Hà Nam.

AN MINH

ĐƯỜNG CÀY

Một người nông dân dắt trâu đi cày trên một thửa ruộng như hình bên. Đường cày phải đi qua tất cả các điểm ghi trên hình (mỗi điểm đi qua một lần) theo chiều dọc hoặc chiều ngang (không đi chéo). Vì mỗi lần cho trâu quay một góc vuông tốn nhiều thời gian nên người nông dân muốn số lần quay là ít nhất. Thêm nữa, đường đi từ Đông sang Tây bị chói nắng nên đi theo hướng này càng ít càng tốt. Bạn lập được bao nhiêu sơ đồ đường cày giúp người nông dân đó?

HOÀNG NGUYỄN

