



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
4 2009
SỐ 382

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre



CUỘC THI GIẢI TOÁN

KỶ NIỆM 45 NĂM

TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

PHẢI BIẾT GIẢI TOÁN BẰNG NHIỀU CÁCH





ĐI TÌM NHỮNG BÀI TOÁN THÚ VỊ

từ một bài toán quen thuộc

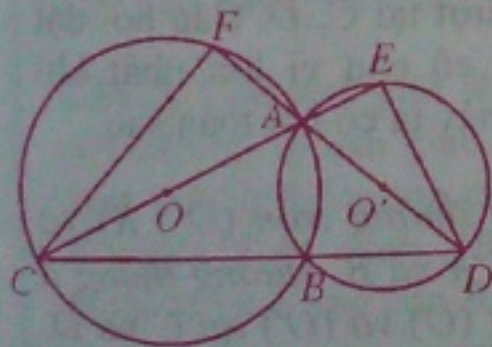
HOÀNG VĂN CHUNG

(GV THCS Cẩm Vũ, Cẩm Giàng, Hải Dương)

Khi giải xong mỗi bài toán các bạn học sinh thường làm gì? Đa số các bạn thường bằng lòng với những gì mình đã làm được. Thực ra học như thế là chưa hiệu quả. Bài viết này tập trung *Đi tìm những bài toán thú vị từ một bài toán quen thuộc*. Thiết nghĩ đó là cách học vô cùng hiệu quả. Ta bắt đầu từ một bài toán sau.

✪ **Bài toán 1.** Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B . Lần lượt kẻ các đường kính AC, AD của (O) và (O') . Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Lời giải. (h. 1) Do AC là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Tương tự do AD là đường kính của đường tròn (O') nên có $\widehat{ABD} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = 180^\circ$ hay ba điểm C, B, D thẳng hàng. $\square$



Hình 1

tam giác ACD . Mặt khác, từ Bài toán 1 suy ra AB là đường cao từ A của tam giác ACD . Vậy ba đường thẳng CF, BA, DE đồng quy. Ta có bài toán sau (các bài toán ở dưới đều giữ các giả thiết của Bài toán 1).

✪ **Bài toán 1.1.** Giả sử CA cắt đường tròn (O') tại E , DA cắt đường tròn (O) tại F . Chứng minh ba đường thẳng CF, BA, DE đồng quy.

• Ta có $\widehat{CFD} = \widehat{CED} = 90^\circ$ nên tứ giác $CDEF$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{FCA} = \widehat{FDE}$ (1)

Theo tính chất của góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung có

$$\widehat{FOA} = 2 \cdot \widehat{FCA} = 2 \cdot \widehat{FBA} \quad (2)$$

$$\widehat{EO'A} = 2 \cdot \widehat{EDA} = 2 \cdot \widehat{EBA} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{EOF} = \widehat{EBF} = \widehat{EO'F}$.

Vậy các điểm F, O, B, O', E cùng thuộc một đường tròn. Ta có bài toán sau.

✪ **Bài toán 1.2.** Với giả thiết như ở Bài toán 1.1, chứng minh rằng các điểm F, O, B, O', E cùng thuộc một đường tròn.

• Theo trên có

$$\widehat{CFD} = 90^\circ,$$

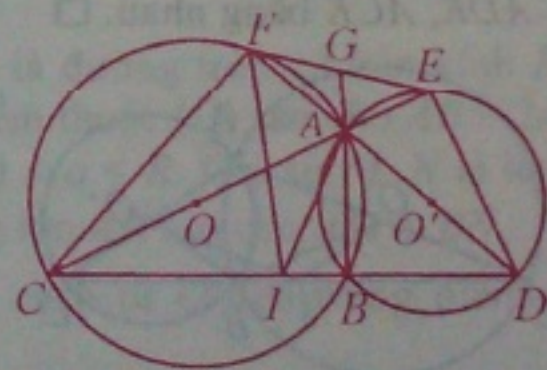
$$\widehat{CED} = 90^\circ,$$

suy ra C, F, E, D cùng thuộc một đường tròn. Do đó $\triangle AFE \sim \triangle ACD$. Gọi G, I lần lượt là trung điểm của FE, CD (h. 2) ta có

$$\frac{FA}{AC} = \frac{FE}{CD} = \frac{2FG}{2CI} = \frac{FG}{CI}$$

Suy ra $\triangle AFG \sim \triangle ACI$. Từ đó ta chứng minh được bài toán sau (lưu ý $FI = CI$).

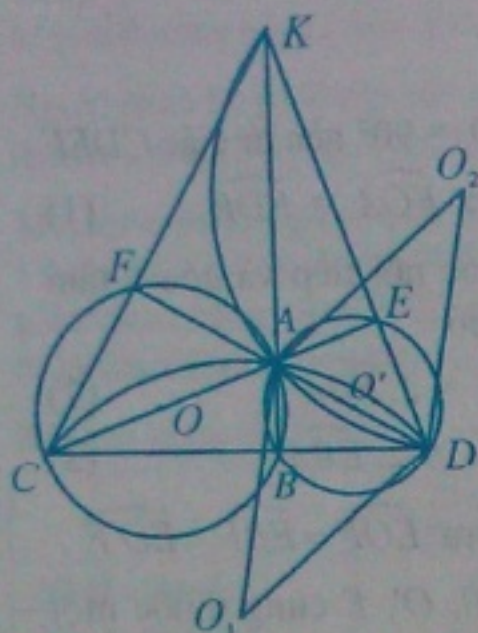
✪ **Bài toán 1.3.** Gọi G, I lần lượt là trung điểm FE, CD . Chứng minh rằng $FG \cdot AI = FI \cdot AG$.



Hình 2

• Theo Bài toán 1.1, ba đường thẳng CF , BA , DE đồng quy tại một điểm K . Xét các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ACD , ADK , ACK ta nhận được bài toán sau.

Bài toán 1.4. Giả sử CA cắt đường tròn (O') tại E , DA cắt đường tròn (O) tại F . Gọi K là giao điểm của CF và DE . Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD , ADK , ACK bằng nhau.



Hình 3

Lời giải. (h. 3)
Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD , ADK , ACK . Ta có

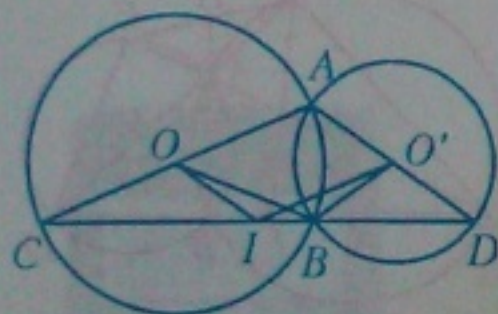
$$\widehat{AO_2D} = 2\widehat{AKD},$$

$$\widehat{AO_1D} = 2\widehat{ACD}.$$

Lại có $\widehat{AKD} = \widehat{ACD}$ (Cùng phụ với $\widehat{CDK}$), do đó $\widehat{AO_1D} = \widehat{AO_2D}$,

suy ra $\triangle AO_1D = \triangle AO_2D$ (g.c.g), dẫn đến $O_1A = O_2A$.

Tương tự ta được $O_3A = O_1A = O_2A$. Vậy các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD , ADK , ACK bằng nhau. $\square$



Hình 4

• Với I là trung điểm của cạnh CD , ta có tứ giác $AOIO'$ là hình bình hành (h. 4), suy ra $\widehat{OAO'} = \widehat{OIO'}$.

Lại có $\widehat{OAO'} = \widehat{OBO'}$, dẫn đến $\widehat{OIO'} = \widehat{OBO'}$, suy ra tứ giác $OIBO'$ nội tiếp trong một đường tròn. Ta có bài toán sau.

Bài toán 1.5. Gọi I là trung điểm của CD . Chứng minh rằng tứ giác $OIBO'$ nội tiếp trong một đường tròn.

• Kéo dài AI cắt đường tròn (O) tại P . Giả sử đường thẳng qua A vuông góc với AI cắt (O') tại điểm thứ hai Q . Ta có bài toán sau.

Bài toán 1.6. Gọi P là giao điểm của tia AI với đường tròn (O) . Đường thẳng d qua A vuông góc với AI cắt đường tròn (O') tại Q . Chứng minh rằng $CP = AQ$.

Lời giải. Giả sử d cắt (O) tại điểm thứ hai G (h. 5).

Do $\widehat{GAP} = \widehat{CPA} = \widehat{CGA} = 90^\circ$ nên tứ giác $CPAG$ là hình chữ nhật, suy ra $CP = GA$ (4)

Mặt khác, tứ giác $CGQD$ là hình thang vuông và có $IA \parallel CG \parallel QD$. Do I là trung điểm của CD , suy ra A là trung điểm của cạnh GQ hay $AG = AQ$ (5)

Từ (4) và (5) ta có điều phải chứng minh. $\square$

• Bây giờ ta xét bài toán đảo của Bài toán 1.

Bài toán 1.7. Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B . Đường thẳng d qua B và vuông góc với AB cắt (O) và (O') lần lượt tại C, D . Chứng minh rằng ba điểm A, C, O thẳng hàng.

Bạn đọc tự chứng minh bài toán này.

• Giả sử d là đường thẳng luôn đi qua điểm B và cắt $(O), (O')$ lần lượt tại C, D . Câu hỏi đặt ra là tam giác ACD có chu vi lớn nhất khi nào? Trả lời câu hỏi này ta có bài toán sau.

Bài toán 1.8. Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B . Đường thẳng d đi qua B lần lượt cắt (O) và (O') tại C và D . Xác định vị trí d để chu vi tam giác ACD là lớn nhất.

Lời giải. Do d luôn đi qua điểm B nên $\triangle ACD$ có $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ và $\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\widehat{AO'B}$ (không đổi). Tam giác ACD có các góc không đổi nên chu vi lớn nhất khi và chỉ khi AC lớn nhất. Lúc đó AC là đường kính của đường tròn (O) và $d \perp AB$. $\square$

(Xem tiếp trang 5)

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

KHỎI THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, NGHỆ AN

NĂM HỌC 2008 - 2009

(Thời gian làm bài: 150 phút)

VÒNG 1

Câu 1. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{2y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)$$

với $x = \frac{5 + \sqrt{21}}{4}, y = \frac{5 - \sqrt{21}}{4}$.

Câu 2. Giải phương trình

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12.$$

Câu 3. Tìm m để phương trình

$$x^2 - 2mx + 2m - 2 = 0.$$

có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 10.$$

Câu 4. Cho a, b là hai số thực dương. Chứng

minh rằng $\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{a^2}} \geq 2\sqrt{2}$.

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Câu 5. Cho tam giác ABC và đường tròn (O) nội tiếp trong tam giác đó. Gọi M_0, N_0, P_0 lần lượt là tiếp điểm của các cạnh AB, AC và BC với (O) . Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $BM + CN = BC$.

a) Chứng minh rằng $\widehat{P_0 M_0 N_0} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC})$.

b) Chứng minh rằng tam giác OMN là tam giác cân.

c) Xác định vị trí của M trên AB sao cho đoạn MN ngắn nhất.

VÒNG 2

Câu 6. Giải các phương trình

a) $x^2 - 4x + \frac{10}{x^2 - 4x + 5} = 2$;

b) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{5x+1}$.

Câu 7. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 18x + 1 = 0$. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n, n \in \mathbb{N}$.

a) Chứng minh rằng $S_{n+2} = 18S_{n+1} - S_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$;

b) Chứng minh rằng S_n là số nguyên dương và không chia hết cho 17 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Câu 8. Cho các số a, b, c, d đều thuộc đoạn $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{abcd} + \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}.$$

Câu 9. Cho (O) là đường tròn có bán kính R và A, B là hai điểm thuộc (O) sao cho $AB = 2a$ không đổi, với $0 < a < R$. Giả sử M, N là hai điểm thuộc cung lớn AB sao cho $AM \perp BN$.

a) Tính khoảng cách từ O đến trung điểm I của MN theo a .

b) Xác định vị trí của M sao cho độ dài $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 10. Cần dùng ít nhất bao nhiêu tấm bìa hình tròn có bán kính bằng 1 để phủ kín một tam giác đều có cạnh bằng 3, với giả thiết không được cắt các tấm bìa?

LÊ QUỐC HÁN

(GV trường ĐH Vinh) giới thiệu

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUNG YÊN

NĂM HỌC 2008 - 2009

(Đề thi đã đăng trên THPT số 381, tháng 3 năm 2009)

Câu 1. Ta có $a_k = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$.

Từ đó suy ra

$$S_{2008} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2008^2} - \frac{1}{2009^2}\right) \\ = 1 - \frac{1}{2009^2} = \frac{2009^2 - 1}{2009^2} = \frac{4036080}{4036081}.$$

Câu 2. 1) Đặt $y = x^2 - 4$, ta có HPT $\begin{cases} x^2 - y = 4 \\ y^2 + x = 4 \end{cases}$

Trừ theo vế hai PT của hệ trên ta được $(x^2 - y^2) - (x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - y - 1) = 0$.

• Nếu $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$, thay vào PT thứ nhất của hệ giải được $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

• Nếu $x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$, thay vào PT thứ nhất của hệ giải được $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của PT là $\left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \right\}$.

2) Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (3x-1)(3y-1) = 10 \\ (3y-1)(3z-1) = 40 \\ (3z-1)(3x-1) = 16 \end{cases} \quad (1)$$

Nhân theo vế ba PT của HPT (1) ta được

$$(3x-1)^2(3y-1)^2(3z-1)^2 = 6400 \\ \Leftrightarrow |(3x-1)(3y-1)(3z-1)| = 80.$$

• Nếu $(3x-1)(3y-1)(3z-1) = 80$, kết hợp với (1) tìm được $(x; y; z) = (1; 2; 3)$.

• Nếu $(3x-1)(3y-1)(3z-1) = -80$, kết hợp với (1) tìm được $(x; y; z) = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 2; 3)$ và $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

Câu 3. Giả sử đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0; a, b, c, d \in \mathbb{Z}$) nhận $3 - \sqrt{2}$ là nghiệm, ta có $a(3 - \sqrt{2})^3 + b(3 - \sqrt{2})^2 + c(3 - \sqrt{2}) + d = 0$
 $\Leftrightarrow 45a + 11b + 3c + d = (29a + 6b + c)\sqrt{2}$.

Do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, suy ra

$$45a + 11b + 3c + d = 29a + 6b + c = 0.$$

Từ đó ta có

$$f(3 + \sqrt{2}) = a(3 + \sqrt{2})^3 + b(3 + \sqrt{2})^2 + c(3 + \sqrt{2}) + d \\ = (45a + 11b + 3c + d) + (29a + 6b + c)\sqrt{2} = 0.$$

Vậy $3 + \sqrt{2}$ cũng là một nghiệm của $f(x)$.

Câu 4. 1) Gọi G, J thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AB và AC (hình vẽ). Đặt $BC = a, CA = b, AB = c, a + b + c = 2p$. Theo tính chất tiếp tuyến, ta có

$$AG = AJ = p - a, \\ BG = BD = p - b, \\ CD = CJ = p - c \text{ và} \\ EK = EG, FK = FJ.$$

Gọi H' là giao điểm của AK với BC . Vì $EF \parallel BC$ nên

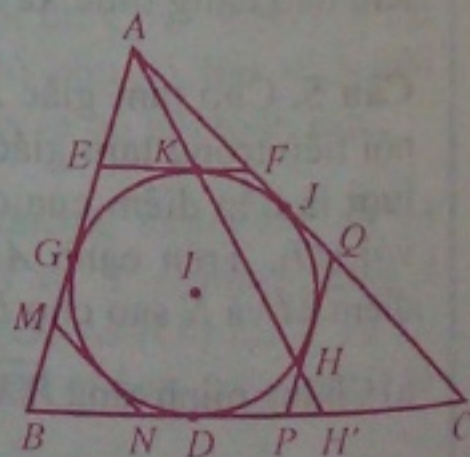
$$\frac{AE}{AB} = \frac{EK}{BH'} = \frac{KF}{CH'} = \frac{AF}{AC}.$$

Theo tính chất tỉ lệ thức ta có

$$\frac{AG}{AB + BH'} = \frac{AE + EK}{AB + BH'} = \frac{AF + KF}{AC + CH'} = \frac{AJ}{AC + CH'}.$$

Mặt khác, $AJ = AG$, suy ra $AB + BH' = AC + CH'$
 $\Rightarrow AB + BC = AC + 2CH' \Rightarrow CH' = p - b = BD$.

Do đó $H' \equiv H$ hay A, K, H thẳng hàng.



2) Do $EF \parallel BC$ nên theo định lý Thalès ta có

$$\frac{EF}{BC} = \frac{KF}{CH} = \frac{AF}{AC} = \frac{AJ}{AC + CH}.$$

$$\text{Suy ra } EF = \frac{BC \cdot AJ}{AC + CH} = \frac{a(p-a)}{p}.$$

$$\text{Tương tự có } MN = \frac{b(p-b)}{p}, PQ = \frac{c(p-c)}{p}.$$

Cộng theo vế ba đẳng thức trên ta được

$$EF + MN + PQ = 2p - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{p}.$$

Sử dụng BĐT quen thuộc

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{4}{3}p^2$$

$$\text{suy ra } EF + MN + PQ \leq 2p - \frac{4p}{3} = \frac{2p}{3}.$$

Vậy $EF + MN + PQ$ đạt giá trị lớn nhất bằng

$$\frac{2p}{3} \text{ khi và chỉ khi } ABC \text{ là tam giác đều.}$$

Bài 5. 1) Với hai số thực dương bất kỳ x, y ta có $(x+y)^2 \geq 4xy$, suy ra

$$\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2} \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

$$\text{Từ đó ta có } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{(a+b)^2} = 2 \quad (1)$$

$$\frac{3}{2ab} + \frac{3}{a^2 + b^2} \geq 3 \cdot \frac{4}{2ab + a^2 + b^2} = 12 \quad (2)$$

Cộng theo vế hai BĐT (1) và (2) ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ

$$\text{khi } a = b = \frac{1}{2}.$$

2) Nhận thấy sau mỗi lần thực hiện theo yêu cầu của bài toán thì số dấu trên bảng giảm đi 1 và số dấu trừ hoặc giữ nguyên hoặc giảm đi 2. Hơn nữa, do ban đầu trên bảng có 2009 dấu trừ nên số dấu trừ trên bảng luôn lẻ.

Mặt khác, trên bảng có $2008 + 2009 = 4017$ dấu nên sau 4016 lần thực hiện như trên thì số dấu còn lại trên bảng là 1. Do đó dấu còn lại trên bảng phải là dấu trừ.

NGUYỄN THANH GIANG

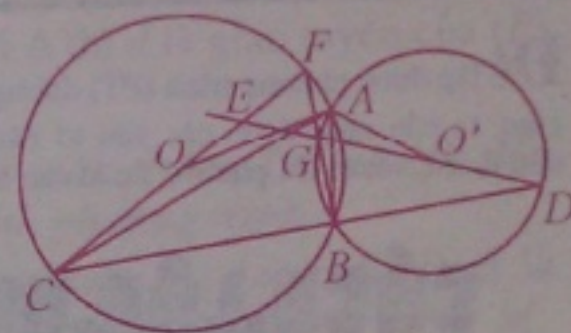
(GV THPT chuyên Hưng Yên) giới thiệu

ĐI TÌM... (Tiếp trang 2)

✪ **Bài toán 1.9.** Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B . Đường thẳng d qua B cắt (O) và (O') lần lượt tại C, D . Tia CO cắt tia DO' tại E . Chứng minh rằng các điểm O, E, A, O' cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

Kẻ đường kính CF của đường tròn (O) , kẻ đường kính DG của đường tròn (O') (h. 6). Ta



Hình 6

có $\widehat{CBF} = \widehat{GBD} = 90^\circ \Rightarrow FB \perp CD, GB \perp CD$, suy ra ba điểm F, G, B thẳng hàng.

Mặt khác ta có

$$\widehat{FOA} = 2 \cdot \widehat{FCA} = 2 \cdot \widehat{FBA}, \widehat{GO'A} = 2 \cdot \widehat{GBA}.$$

Suy ra $\widehat{EOA} = \widehat{EO'A}$. Do đó bốn điểm E, O, O', A cùng thuộc một đường tròn. $\square$

• Kết hợp các bài toán trên ta có bài toán mới.

✪ **Bài toán 1.10.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B . Kẻ đường kính AC, AD lần lượt của (O) và (O') . Giả sử CA cắt (O') tại E , DA cắt (O) tại F , CF cắt DE tại K . Các điểm I, M, N, P lần lượt là trung điểm của CD, KD, KC, KA .

1) Chứng minh rằng các điểm $B, I, O, N, F, P, M, E, O'$ cùng thuộc một đường tròn.

2) Giả sử $AB = R \cdot \sqrt{2}$ và O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK, ACD . Chứng minh rằng tứ giác $AODO_2$ là hình vuông.

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF cắt CE tại P , đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE cắt DF tại Q . Chứng minh rằng tam giác KPQ là tam giác cân.

Chứng minh bài toán trên xin dành cho bạn đọc. Cứ tiếp tục như vậy ta sẽ tìm thấy "Những bài toán thú vị từ một bài toán quen thuộc" phải không các bạn. Chúc các bạn thành công.



Để lập được phương trình (PT) đường thẳng trong không gian, ta cần nắm được các yếu tố xác định đường thẳng như điểm, vector chỉ phương hoặc cặp mặt phẳng chứa nó.

Các điều kiện này thường được ẩn dưới nhiều hình thức khác nhau đòi hỏi học sinh phải biết phát hiện và sử dụng chúng một cách khéo léo trong khi giải toán. Bài viết này sẽ giúp các bạn hệ thống lại một số dạng toán viết PT tổng quát của đường thẳng trong không gian.

Ta biết rằng PT tổng quát của đường thẳng có dạng

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases}$$

Với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, $A'^2 + B'^2 + C'^2 \neq 0$,

$$A : B : C \neq A' : B' : C'.$$

Do đó bài toán viết PT tổng quát của đường thẳng quy về viết PT tổng quát của các mặt phẳng.

CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG trong không gian

TRẦN VĂN XUÂN

(GV trường Đại học Bạc Liêu)

I. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) thực chất là xác định các hệ số a, b, c và d trong PT. Ta có thể tiến hành như sau:

Hướng 1. Coi a, b, c, d là ẩn số để tạo ra một hệ PT nếu các điều kiện của bài toán cho phép chúng ta làm được điều đó.

Các bạn cần lưu ý rằng: Ta chỉ có thể tạo ra được một hệ 3 phương trình, bởi vì ta đã có một điều kiện ràng buộc là $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Vì vậy các hệ số a, b, c, d thường được tìm như sau:

*) Xác định được một ẩn khác 0 rồi gán cho nó giá trị bằng 1.

*) Xác định được ẩn khác 0 biểu thị các ẩn còn lại qua nó.

★Thí dụ 1. Viết phương trình mặt phẳng cách đều bốn điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; 5; 3)$, $C(9; -1; 5)$, $D(5; 3; -3)$.

Lời giải. Với các điều kiện đã cho ta thiết lập được hệ PT

$$\begin{cases} |3a + 5b - c + d| = |7a + 5b + 3c + d| \\ |7a + 5b + 3c + d| = |9a - b + 5c + d| \\ |9a - b + 5c + d| = |3a + 5b - c + d| \\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \end{cases}$$

Khử trị tuyệt đối ta được tám hệ, chẳng hạn

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ d \text{ tùy ý} \\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0. \end{cases}$$

Suy ra $a = -c \neq 0$, $b = 0$, d tùy ý và PT mặt phẳng cần tìm là: $x - z + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$. $\square$

★Thí dụ 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc cho $A(0; 0; 1)$, $B(1; 1; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc φ sao cho $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Lời giải. Giả sử mặt phẳng (α) có PT: $ax + by + cz + d = 0$. Sử dụng các điều kiện đã cho, ta lập được hệ PT

$$\begin{cases} c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \\ \sqrt{6}|c| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -d \neq 0 \\ a = -2d \\ b = d. \end{cases}$$

PT mặt phẳng cần tìm là $-2x + y - z + 1 = 0$. $\square$

Hướng 2. Bộ ba $(a; b; c)$ là tọa độ của một vector pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng (α) và tìm cách xác định vector này.

Nếu mặt phẳng cần tìm vuông góc với một đường thẳng đã cho hoặc song song với một mặt phẳng cho trước thì việc xác định VTPT là đơn giản.

Các trường hợp phức tạp hơn ta thường xác định VTPT bằng cách lấy tích có hướng hai vectơ chỉ phương (VTCP) của mặt phẳng. Do đó khi giải toán ta cần xem xét kỹ giả thiết để phát hiện ra cặp vectơ chỉ phương. Các tình huống thường gặp là:

*) Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B thì $\overline{AB}$ là một VTCP của mặt phẳng (α) .

*) Mặt phẳng (α) chứa hay song song với đường thẳng Δ thì VTCP của Δ cũng là một VTCP của (α) .

*) Mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng (β) thì VTPT của (β) cũng là một VTCP của (α) .

Ngoài ra ta còn có thể xác định PT mặt phẳng thông qua các bài toán quỹ tích.

- Tập hợp các điểm cách mặt phẳng (α) cho trước một khoảng bằng h là các mặt phẳng song song với (α) và cách (α) một khoảng h .
- Tập hợp các đường thẳng đi qua điểm A cho trước và song song với mặt phẳng (α) cho trước là mặt phẳng (β) qua A và song song với (α) .
- Tập hợp các đường thẳng đi qua điểm A cho trước và vuông góc với đường thẳng Δ cho trước là mặt phẳng (β) qua A và vuông góc với Δ .

II. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Để xác định được PT cặp mặt phẳng (α) và (β) giao nhau theo đường thẳng d thì cần phải tách dữ kiện của bài toán thành hai điều kiện, mỗi điều kiện sẽ ứng với một mặt phẳng cần xác định. Có hai dạng toán chủ yếu sau.

Dạng 1. Phương trình mặt phẳng (α) đã cho, chỉ cần xác định phương trình mặt phẳng (β)

★ **Bài toán 1.** Cho phương trình đường thẳng Δ và phương trình mặt phẳng (P) , hãy viết phương trình hình chiếu vuông góc của Δ trên (P) .

Cách giải. Gọi d là hình chiếu của Δ trên (P) thì d là giao tuyến của (P) và (Q) trong đó (Q) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với (P) .

Mặt phẳng (Q) là xác định bởi vì (Q) đi qua M thuộc Δ và có cặp VTCP là VTCP của Δ và VTPT của (P) .

★ **Bài toán 2.** Viết phương trình đường thẳng d đi qua A cho trước, vuông góc với đường thẳng Δ cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước.

Cách giải. Nếu gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và vuông góc với Δ thì d là giao tuyến của (P) và (Q) .

Dạng 2. Cả hai mặt phẳng (α) và (β) đều cần phải xác định phương trình

Để cho gọn trong mục này ta sẽ giả thiết là đường thẳng d_i ($i = 1, 2, \dots$) đi qua điểm M_i và có VTCP $\vec{u}_i$, đồng thời mặt phẳng (α_i) ($i = 1, 2, \dots$) có VTPT là $\vec{n}_i$ ($i = 1, 2, \dots$).

★ **Bài toán 3.** Cho điểm A và các đường thẳng d_1, d_2 . Hãy viết phương trình d đi qua A , cắt cả d_1 và d_2 .

Cách giải. Vì d cắt d_1 nên d và d_1 xác định mặt phẳng (P) , tương tự d và d_2 xác định mặt phẳng (Q) .

Ta có thể lập được PT (P) , vì (P) đi qua A và có một cặp VTCP là $\vec{u}_1$ và $\overline{AM}_1$. Tương tự, (Q) đi qua A và có một cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2$ và $\overline{AM}_2$.

★ **Bài toán 4.** Cho điểm A và các đường thẳng d_1, d_2 . Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , cắt d_1 và song song với d_2 .

Cách giải. Xác định (P) như bài toán 3. Mặt phẳng (Q) chứa hai đường thẳng song song d và d_2 có cặp VTCP là $\vec{u}_2$ và $\overline{AM}_2$.

★ **Bài toán 5.** Cho điểm A và các đường thẳng d_1, d_2 . Viết phương trình đường thẳng d đi qua A cắt d_1 và vuông góc với d_2 .

Cách giải. Xác định (P) như bài toán 3. Mặt phẳng (Q) đi qua A , vuông góc với d_2 nên có VTPT là $\vec{u}_2$.

★ **Bài toán 6.** Cho ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 . Viết phương trình đường thẳng d song song với d_1 , cắt d_2 và cắt d_3 .

Cách giải. Vì d cắt d_2 nên d và d_2 xác định mặt phẳng (P) . Tương tự, d và d_3 xác định mặt phẳng (Q) . Ta có thể lập được PT mặt phẳng (P) , bởi vì (P) đi qua M_2 ($M_2 \in d_2$) và có cặp VTCP là $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$. Tương tự, (Q) đi qua M_3 ($M_3 \in d_3$) có cặp VTCP là $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_3$.

Bài toán 7. Cho điểm A , đường thẳng d_1 , mặt phẳng (α) . Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , cắt d_1 và song song với (α) .

Cách giải. Ta thấy d là giao tuyến của (P) và (Q) , trong đó (P) được xác định bởi A và d_1 . (Q) là mặt phẳng qua A và song song với (α) .

★Thí dụ 3. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình lần lượt là

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}; \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}.$$

Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 .

Lời giải. Ta có d_1 đi qua $M_1(2;3;-4)$ có VTCP $\vec{u}_1(2;3;-5)$; d_2 đi qua $M_2(-1;4;4)$ có VTCP $\vec{u}_2(3;-2;-1)$. Gọi d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 . Vì d cắt d_1 nên d và d_1 xác định mặt phẳng (α) . Tương tự d và d_2 xác định mặt phẳng (β) .

Mặt khác, vì d vuông góc với d_1 và d_2 nên $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-13; -13; -13)$ là một VTCP của d , do đó mặt phẳng (α) có cặp VTCP là $\vec{u}(1;1;1)$ và $\vec{u}_1 \Rightarrow \vec{n} = [\vec{u}, \vec{u}_1] = (8; -7; -1)$ là một VTPT của (α) .

Mặt phẳng (α) chứa d_1 nên chứa M_1 , suy ra PT mặt phẳng (α) là: $8x - 7y - z + 9 = 0$.

Tương tự, PT mp (β) là: $x + 4y - 5z + 5 = 0$.

Vậy PT đường thẳng d là

$$\begin{cases} 8x - 7y - z + 9 = 0 \\ x + 4y - 5z + 5 = 0. \quad \square \end{cases}$$

★Thí dụ 4. Cho mặt cầu (S) có phương trình

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \frac{16}{9}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của (S) , biết tiếp tuyến này đi qua $A(0;0;\frac{1}{3})$ và vuông góc với trục Oz .

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm là $I(-1;1;-1)$ và bán kính $R = \frac{4}{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A , vuông góc với Oz , suy ra $\vec{k}(0;0;1)$ là VTPT của (α) . Từ đó PT của (α) là $3z - 1 = 0$.

Mặt khác, vì khoảng cách từ I đến (α) là $\frac{|3(-1)-1|}{3} = \frac{4}{3} = R$, nên (α) tiếp xúc với (S) tại M .

Do đó, tiếp tuyến cần tìm d là đường thẳng AM , lại vì $IM \perp (\alpha)$ tại M nên IM và d xác định mặt phẳng (β) , mặt phẳng (β) đi qua A, I và vuông góc với (α) nên có cặp VTCP là $\vec{AI}(-1;1-\frac{4}{3})$ và VTPT $\vec{n}_\alpha(0;0;3)$ của (α) , suy ra vector $\vec{n} = [\vec{AI}, \vec{n}_\alpha] = (3; 3; 0)$ là VTPT của (β) .

Vậy PT mặt phẳng (β) là: $x + y = 0$ và PT đường thẳng d là $\begin{cases} 3z - 1 = 0 \\ x + y = 0. \quad \square \end{cases}$

Để kết thúc xin giới thiệu một số bài tập để các bạn luyện tập.

1. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(3;2;1)$ cắt và vuông góc với đường thẳng

$$d: \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{1}.$$

2. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 2z + 1 = 0$, đồng thời cắt hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}; \quad d_2: \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0. \end{cases}$$

3. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 2 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến với (S) đi qua điểm $A(1;1;-2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z + 1 = 0$.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài: 180 phút)

I. PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 điểm)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$y = x^3 - x.$$

2) Dựa vào đồ thị, biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^3 - x = m^3 - m$.

Câu 2 (2 điểm)

1) Giải phương trình

$$\cos^2 x + \cos x + \sin^3 x = 0.$$

2) Giải phương trình

$$(3 + 2\sqrt{2})^x - 2(\sqrt{2} - 1)^x - 3 = 0.$$

Câu 3 (1 điểm)

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Biết $AB = AD = a$, $CD = 2a$, cạnh bên SD vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SD = a$. Tính thể tích tứ diện $ASBC$ theo a .

Câu 4 (1 điểm)

Cho $I = \int_0^{\ln 2} \frac{2 \cdot e^{3x} + e^{2x} - 1}{e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1} dx$. Tính e^I .

Câu 5 (1 điểm)

Cho tam giác ABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{\left(1 + \tan^2 \frac{A}{2}\right) \left(1 + \tan^2 \frac{B}{2}\right)}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}}} + \sqrt{\frac{\left(1 + \tan^2 \frac{B}{2}\right) \left(1 + \tan^2 \frac{C}{2}\right)}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}} + \sqrt{\frac{\left(1 + \tan^2 \frac{C}{2}\right) \left(1 + \tan^2 \frac{A}{2}\right)}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}}}.$$

II. PHẦN RIÊNG (Thí sinh chỉ làm một trong hai phần)

THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

Câu 6a (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua điểm $M \left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5} \right)$.

2) Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $I(1; 5; 0)$ và cắt hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-3}.$$

Câu 7a (1 điểm)

Cho tập hợp $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0\}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x$ trên D .

THEO CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

Câu 6b (2 điểm)

1) Biết elip $(E_1): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và elip

$(E_2): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ có tiêu điểm chung F_1 và

F_2 , cùng đi qua điểm M nằm trên đường thẳng $x - y + 6 = 0$. Tìm vị trí điểm M để trục lớn của (E_1) là nhỏ nhất.

2) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = 3 - 7t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}.$$

Câu 7b (1 điểm). Giải phương trình

$$z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0$$

biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

TRẦN VĂN HẠNH

(GV trường THPT Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

(Đề thi đã đăng trên THPT số 379, tháng 1/2009)

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

Đáp số. $\min AB = 2\sqrt{2}$, đạt được khi và chỉ khi $m = 2$.

Câu 2. 1) lôgarit cơ số 3 hai vế của PT và biến đổi về dạng $(x-1)(2x^2+x-1-\log_3 2)=0$.

Từ đó tìm được $x=1$; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{9+8\log_3 2}}{4}$.

2) ĐK $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$.

Có $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ nên PT đưa về $\sin 3x + \sin x + \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = 0.$$

Tìm được $x = \frac{k\pi}{2}$; $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 3. Trên SA, SB, SC lấy các điểm A', B', C' theo thứ tự sao cho $SA' = SB' = SC' = 1$.

Tam giác A'B'C' vuông tại B; chân đường cao

H là trung điểm AC. Vì thế $S_{AHC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $SH = \frac{1}{2}$

suy ra $V_{S.A'B'C'} = \frac{\sqrt{2}}{12}$; $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = abc$, do đó

$$V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}}{12} abc.$$

Câu 4. Ta có $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\left(\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Do đó

$$I = \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx}{\sin^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 5. Áp dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2}$$

$$> \sqrt{(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (b_1 + b_2 + b_3)^2}$$

$$\text{ta được } P = \sqrt{\log_2^2 x + 1} + \sqrt{\log_2^2 y + 1} + \sqrt{\log_2^2 z + 4}$$

$$\geq \sqrt{\log_2^2(xyz) + 4^2} = 5.$$

Từ đó $\min P = 5$, đạt được khi và chỉ khi

$$\frac{\log_2 x}{1} = \frac{\log_2 y}{1} = \frac{\log_2 z}{2} = \frac{\log_2(xyz)}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \sqrt[4]{8}; z = 2\sqrt{2}.$$

Câu 6a. 1) Do sơ suất, đề bài in nhầm $M(1; 1)$. Xin sửa lại là $M(1; -1)$.

Từ điều kiện $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ tìm được

$A(1; -2)$, $B(1; 1)$, suy ra PT đường thẳng phải tìm là $x = 1$.

2) Gọi (Q) là mặt phẳng qua A, B và vuông góc với mp(P).

$$\overrightarrow{AB} = (3; -5; 1), \overrightarrow{n_p} = (1; 2; -2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_p}] = (8; 7; 11).$$

$$\text{PTmp (Q): } 8x + 7y + 11z - 46 = 0.$$

$$\text{PT } d: \begin{cases} 8x + 7y + 11z - 46 = 0 \\ x + 2y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Câu 7a. Giải PT, ta được

$$x_1 = \frac{1-i}{2} \Rightarrow \frac{1}{x_1^2} = 2i; x_2 = \frac{1+i}{2} \Rightarrow \frac{1}{x_2^2} = -2i.$$

Câu 6b. 1) Giả sử $F(\sqrt{13}; 0)$ là một tiêu điểm của (H).

PT tiếp tuyến (d): $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$).

$$\text{Khi đó } 9A^2 - 4B^2 = C^2 \quad (1)$$

(Xem tiếp trang 30)

Hướng dẫn ôn tập môn Vật lý

THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2009

Các chủ đề: DAO ĐỘNG VÀ SÓNG ĐIỆN TỪ SÓNG ÁNH SÁNG

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV trường ĐHSP Hà Nội)

Theo nội dung cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2009 của Bộ Giáo dục và Đào tạo, trong phần chung cho tất cả thí sinh, chủ đề **Dao động và sóng điện từ** có 4 câu trắc nghiệm, chủ đề **Sóng ánh sáng** có 5 câu trắc nghiệm.

Chủ đề **Dao động và sóng điện từ** gồm các nội dung kiến thức: Dao động điện từ; Mạch dao động LC; Điện từ trường; Sóng điện từ; Truyền thông (thông tin liên lạc) bằng sóng điện từ.

Chủ đề **Sóng ánh sáng** gồm các nội dung kiến thức: Tán sắc ánh sáng; Nhiễu xạ và giao thoa ánh sáng; Bước sóng và màu sắc ánh sáng; Các loại Quang phổ; Tia hồng ngoại, Tia tử ngoại, Tia X; Thang sóng điện từ.

Dưới đây là một số câu trắc nghiệm thuộc nội dung hai chủ đề này.

★ **Thí dụ 1.** Phát biểu nào *sai* khi nói về sóng điện từ?

- A. Sóng điện từ là sự lan truyền trong không gian của điện từ trường biến thiên theo thời gian.
- B. Trong sóng điện từ, điện trường và từ trường biến thiên theo thời gian với cùng chu kỳ.
- C. Sóng điện từ dùng trong thông tin vô tuyến điện gọi là sóng vô tuyến.
- D. Trong sóng điện từ, điện trường và từ trường luôn dao động lệch pha nhau $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Sóng điện từ là trường điện từ biến thiên theo thời gian truyền trong không gian dưới dạng sóng với vận tốc $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$.
Vậy các đáp án A, B, C đúng.

Trong miền sóng điện từ, ở tại mỗi điểm trong không gian, điện trường và từ trường dao động đồng pha với nhau. Đáp án D sai.

Chọn D. ☐

★ **Thí dụ 2.** Một mạch dao động điện từ gồm một tụ điện có điện dung $0,125\mu\text{F}$ và một cuộn cảm có độ tự cảm $50\mu\text{H}$. Điện trở thuần của mạch không đáng kể. Hiệu điện thế cực đại giữa hai bản tụ điện là 3V . Cường độ dòng điện cực đại trong mạch là

- A. 15mA . B. $0,15\text{A}$. C. $1,5\text{A}$. D. $1,5\text{mA}$.

Hướng dẫn. Năng lượng điện từ của mạch

$$W = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

$$\text{Suy ra } I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{0,125}{50}} = 0,15\text{A}.$$

Đáp án B đúng.

Chọn B. ☐

★ **Thí dụ 3.** Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa của ánh sáng đơn sắc, hai khe hẹp cách nhau 1mm , mặt phẳng chứa hai khe cách màn quan sát $1,5\text{m}$. Khoảng cách giữa 5 vân sáng liên tiếp là $3,6\text{mm}$. Bước sóng của ánh sáng dùng trong thí nghiệm này bằng

- A. $0,50\mu\text{m}$. B. $0,55\mu\text{m}$.
- C. $0,60\mu\text{m}$. D. $0,65\mu\text{m}$.

Hướng dẫn. Ta có $4i = 3,6\text{mm}$, suy ra

$$i = \frac{3,6}{4} = 0,9\text{mm}.$$

$$\text{Vậy } \lambda = \frac{ia}{D} = \frac{0,9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{1,5} = 0,60 \cdot 10^{-6}\text{m} = 0,60\mu\text{m}.$$

Đáp án C đúng.

Chọn C. ☐

★ **Thí dụ 4.** Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng, hai khe hẹp cách nhau một khoảng $a = 0,5\text{mm}$. Khoảng cách từ mặt phẳng chứa hai khe đến màn quan sát $D = 1,5\text{m}$. Hai khe được chiếu bằng bức xạ có bước sóng

$\lambda = 0,60\mu\text{m}$. Trên màn thu được hình ảnh giao thoa. Hỏi tại điểm M trên màn cách vân sáng trung tâm một khoảng $5,4\text{mm}$ có vân sáng thứ (bậc) mấy?

A. Thứ 3. B. Thứ 5. C. Thứ 2. D. Thứ 4.

Hướng dẫn. Khoảng vân

$$i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,8 \text{ mm}.$$

Vậy $k = \frac{x_M}{i} = \frac{5,4}{1,8} = 3$. Đáp án A đúng.

Chọn A. ☐

★**Thí dụ 5.** Chiếu một tia sáng đơn sắc từ không khí (chiết suất bằng 1) vào mặt phẳng của một khối thủy tinh với góc tới bằng 60° . Nếu tia phản xạ và tia khúc xạ vuông góc với nhau thì chiết suất của loại thủy tinh này bằng bao nhiêu?

A. $n = 3$. B. $n = \sqrt{3}$.

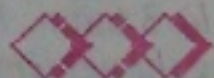
C. $n = \frac{2}{\sqrt{3}}$. D. $n = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i}{\sin(90^\circ - i)} = \frac{\sin i}{\cos i}$$

$$= \tan i = \tan 60^\circ = \sqrt{3}. \text{ Đáp án B đúng.}$$

Chọn B. ☐



Sau đây là một số câu trắc nghiệm thuộc nội dung hai chủ đề trên, các bạn tự làm.

Câu 1. Một mạch dao động LC có điện trở thuần không đáng kể. Dao động điện từ tự do (dao động riêng) của mạch có chu kỳ là $2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. Năng lượng điện trường trong mạch biến đổi điều hoà với chu kỳ là

A. $2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. B. $1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

C. $4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. D. $3 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

Câu 2. Trong mạch dao động LC có dao động điện từ tự do với tần số góc 10^4 rad/s . Điện tích

cực đại trên tụ điện là 10^{-9} C . Khi cường độ dòng điện trong mạch bằng $6 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ thì điện tích trên tụ điện là

A. $8 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

B. $2 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

C. $5 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

D. $7 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

Câu 3. Trong thí nghiệm giao thoa ánh sáng với khe Y-âng, khoảng cách giữa hai khe là 2 mm , khoảng cách từ mặt phẳng chứa hai khe đến màn quan sát là $1,2 \text{ m}$. Chiếu sáng hai khe bằng ánh sáng hỗn hợp gồm hai ánh sáng đơn sắc có bước sóng 500 nm và 660 nm thì thu được hệ vân giao thoa trên màn. Biết vân sáng chính giữa (trung tâm) ứng với hai bức xạ trên trùng nhau. Khoảng cách từ vân chính giữa đến vân gần nhất cùng màu với vân chính giữa là

A. $3,3 \text{ mm}$.

B. $16,5 \text{ mm}$.

C. $23,1 \text{ mm}$.

D. $9,9 \text{ mm}$.

Câu 4. Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng với ánh sáng đơn sắc có bước sóng $\lambda_1 = 540 \text{ nm}$ thì thu được hệ vân giao thoa trên màn quan sát có khoảng vân $i_1 = 0,36 \text{ mm}$. Khi thay ánh sáng trên bằng ánh sáng đơn sắc có bước sóng $\lambda_2 = 600 \text{ nm}$ thì thu được hệ vân giao thoa trên màn quan sát có khoảng vân

A. $i_2 = 0,55 \text{ mm}$.

B. $i_2 = 0,35 \text{ mm}$.

C. $i_2 = 0,40 \text{ mm}$.

D. $i_2 = 0,50 \text{ mm}$.

Câu 5. Hiện tượng đảo sắc của vạch quang phổ (đảo vạch quang phổ) cho phép kết luận rằng

A. Trong cùng một điều kiện, một chất chỉ hấp thụ hoặc chỉ bức xạ ánh sáng.

B. Trong cùng một điều kiện về nhiệt độ và áp suất, mọi chất đều hấp thụ và bức xạ các ánh sáng có cùng bước sóng.

C. Các vạch tối xuất hiện trên nền quang phổ liên tục là do giao thoa ánh sáng.

D. Ở nhiệt độ xác định, một chất chỉ hấp thụ những bức xạ nào mà nó có khả năng phát xạ và ngược lại, nó chỉ phát những bức xạ mà nó có khả năng hấp thụ.

Đáp án kì trước (THTT số 381, tháng 3 năm 2009)

Câu 1: chọn B; Câu 2: chọn D; Câu 3: chọn A; Câu 4: chọn C; Câu 5: chọn B.



SỬ DỤNG TÍNH LỖI, LỖM CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ VÀO CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

LÊ VĂN LỤC

(GV THPT Đoàn Thượng, Gia Lộc, Hải Dương)

Bất đẳng thức (BĐT) là một dạng toán hay và khó, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng và các kì thi chọn học sinh giỏi. Khi gặp bài toán chứng minh BĐT, học sinh thường lúng túng trong việc lựa chọn phương pháp. Bài viết này đưa ra một kĩ thuật đơn giản nhưng có hiệu quả khi giải quyết một lớp bài toán chứng minh BĐT hay tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một biểu thức. Đó là sử dụng tính lỗi, lồm của đồ thị hàm số.

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Nếu đồ thị hàm số $y = f(x)$ lồi trên khoảng $(a; b)$ và $y = f'(c)(x - c) + f(c)$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(c; f(c))$ với $c \in (a; b)$ thì

$$f(x) \leq f'(c)(x - c) + f(c), \forall x \in (a; b) \quad (1)$$

Đối với đồ thị hàm số lõm ta có BĐT với dấu ngược lại.

BĐT (1) cho phép ta đánh giá biểu thức $f(x)$ thông qua một biểu thức bậc nhất. Hơn nữa có thể chọn được c sao cho đẳng thức xảy ra theo đúng yêu cầu của bài toán.

II. ÁP DỤNG

✪ **Bài toán 1 (BĐT Cauchy).** Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Lời giải. Nếu có một số $a_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) thì BĐT đúng. Xét trường hợp $a_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Chia cả hai vế cho $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ta được BĐT tương đương:

$$\frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \dots \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}.$$

Đặt $x_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ thì

$x_i > 0$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. BĐT cần chứng

minh trở thành $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}$, hay

$$\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n \leq n \ln \frac{1}{n} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \ln x$, với $x > 0$. Ta có

$f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, với $\forall x > 0$, suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ lõm trên khoảng $(0; +\infty)$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm

$\left(\frac{1}{n}; \ln \frac{1}{n}\right)$ có PT là $y = nx - 1 + \ln \frac{1}{n}$, suy ra

$$\ln x \leq nx - 1 + \ln \frac{1}{n}, \forall x \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Áp dụng BĐT (1) cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ và cộng theo vế lại ta được

$$\begin{aligned} & \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n \\ & \leq n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n + n \ln \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Kết hợp với $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ta thấy BĐT (*) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$ hay $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. $\square$

Bài toán 2 (BĐT Jensen). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a; b)$.

a) Nếu $f''(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ và $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0; 1]$ thoả mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ ta có

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n) \quad (1)$$

b) Nếu $f''(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì ta có bất đẳng thức với dấu ngược lại.

Lời giải. a) Đặt $\bar{x} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ thì $\bar{x} \in (a; b)$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(\bar{x}; f(\bar{x}))$ có PT là $y = f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x})$.

Do $f''(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ nên đồ thị hàm số lõm trên khoảng $(a; b)$. Bởi vậy tại điểm $(\bar{x}; f(\bar{x}))$ tiếp tuyến nằm dưới đồ thị hàm số. Từ đó $f(x) \geq f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x}), \forall x \in (a; b)$.

Thay $x = x_i$ ta được $f(x_i) \geq f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + f(\bar{x})$. Nhân cả hai vế của BĐT trên với $\alpha_i \geq 0$, ta được $\alpha_i f(x_i) \geq \alpha_i f'(\bar{x})x_i - \alpha_i f'(\bar{x})\bar{x} + \alpha_i f(\bar{x}), \forall i = 1, 2, \dots, n$. Cộng theo vế n BĐT đó ta được

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \geq f'(\bar{x}) \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - f'(\bar{x}) \bar{x} \sum_{i=1}^n \alpha_i + f(\bar{x}) \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Bởi vì $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ và $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ nên ta có

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \text{ đó là đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

b) Chứng minh tương tự.

Trường hợp đặc biệt. Nếu $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$

thì BĐT (1) trở thành

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right). \quad \square$$

Bài toán 3 (BĐT Bernoulli). Cho $x > -1$ và số thực α . Chứng minh rằng

a) $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \forall \alpha \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty);$

b) $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x, \forall \alpha \in (0; 1).$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Ta có $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $(0; 1)$ có PT là $y = \alpha x + 1$.

a) Nếu $\alpha \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ thì $f''(x) > 0, \forall x > -1$, do đó đồ thị hàm số lõm trên khoảng $(-1; +\infty)$. Suy ra $(1+x)^\alpha \geq \alpha x + 1, \forall x > -1$.

b) Nếu $0 < \alpha < 1$ thì $f''(x) < 0, \forall x > -1$, do đó đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Suy ra $(1+x)^\alpha \leq \alpha x + 1, \forall x > -1$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$ hoặc $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$. $\square$

Bài toán 4 (T7/374). Cho các số dương a, b, c thoả mãn $4(a+b+c) - 9 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = (a + \sqrt{a^2 + 1})^b (b + \sqrt{b^2 + 1})^c (c + \sqrt{c^2 + 1})^a$$

Lời giải. Ta có

$$\ln S = b \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) + c \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) + a \ln(c + \sqrt{c^2 + 1}).$$

Xét hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ với $x > 0$ (1)

Dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $a = b = c = \frac{3}{4}$. Vì vậy ta sẽ so sánh vị trí của đồ thị hàm

số trên với tiếp tuyến của nó tại điểm $\left(\frac{3}{4}; \ln 2\right)$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ nên $f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại điểm $\left(\frac{3}{4}; \ln 2\right)$ có PT $y = \frac{4}{5}x + \ln 2 - \frac{3}{5}$.

Lại vì $f''(x) = \frac{-x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} < 0, \forall x > 0$, nên đồ thị hàm số (1) lồi trên khoảng $(0; +\infty)$.

Từ đó ta có

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \leq \frac{4}{5}x + \ln 2 - \frac{3}{5}, \forall x > 0.$$

Áp dụng BĐT này cho số dương a , ta được

$$\ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \leq \frac{4}{5}a + \ln 2 - \frac{3}{5}.$$

Nhân hai vế với $b > 0$, suy ra

$$b \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \leq \frac{4}{5}ab + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)b.$$

Tương tự

$$c \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) \leq \frac{4}{5}bc + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)c;$$

$$a \ln(c + \sqrt{c^2 + 1}) \leq \frac{4}{5}ca + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)a.$$

Cộng theo vế ba BĐT này ta được

$$\ln S \leq \frac{4}{5}(ab + bc + ca) + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)(a + b + c).$$

Sử dụng BĐT $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$ và

giả thiết $a + b + c = \frac{9}{4}$, rút gọn ta thu được

$$\ln S \leq \frac{9}{4} \ln 2.$$

Từ đó $S \leq 4\sqrt[4]{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là $4\sqrt[4]{2}$. $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta có bất đẳng thức

$$2(\sin A + \sin B + \sin C) + (\tan A + \tan B + \tan C) \geq 6\sqrt{3}.$$

2. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x \geq 5; x + y \geq 8. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $xyz \leq 15$.

3. (JMO 1997) Cho a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

4. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC và số $a \geq 2$ ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{\sin A}{a + \cos A} + \frac{\sin B}{a + \cos B} + \frac{\sin C}{a + \cos C} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2a+1}.$$

5. (USAMO 2003). Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2 + (a+b)^2} \leq 8.$$

Lễ phát động cuộc thi truyện ngắn, bút kí, phóng sự về ngành Giáo dục

Chiều ngày 24/3/2009 vừa qua, tại Hội trường lớn Bộ Giáo dục và Đào tạo đã diễn ra buổi lễ phát động cuộc thi truyện ngắn, bút kí, phóng sự về ngành Giáo dục do Bộ Giáo dục và Đào tạo, Hội Nhà văn Việt Nam, Hội Nhà báo Việt Nam, Công đoàn Giáo dục Việt Nam và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đồng tổ chức. Tham dự buổi lễ có Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo Phạm Vũ Luận, Tổng biên tập báo điện tử Đảng Cộng sản Việt Nam Đào Duy Quát, Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam Ngô Trần Ái và đông đảo các nhà báo, nhà giáo, nhà văn trên cả nước. Nội dung của Cuộc thi viết về sự nghiệp đổi mới của ngành Giáo dục mà nhân vật trung tâm là nhà giáo, nhà trường, học sinh, sinh viên; biểu dương kịp thời những điển hình tốt trong phong trào thi đua Hai tốt (Dạy tốt - Học tốt), trong cuộc vận động "Mỗi thầy cô giáo là một tấm gương đạo đức, tự học và sáng tạo" đồng thời phản ánh những mặt còn tồn tại với ý thức xây dựng và nêu hướng giải quyết. Đây là một trong những sự kiện lớn về văn hóa và xã hội được nhiều người trong và ngoài ngành Giáo dục quan tâm.

PV



CÁC LỚP THCS

Bài T1/382. (Lớp 6) Hãy so sánh tổng gồm 2010 số hạng

$$\frac{1}{2009} + \frac{2}{2009^2} + \frac{3}{2009^3} + \dots + \frac{2009}{2009^{2009}} + \frac{2010}{2009^{2010}}$$

với $\frac{2009}{2008^2}$.

VŨ ANH NAM

(GV THCS Từ Liêm, Lâm Hà, Lâm Đồng)

Bài T2/382. (Lớp 7) Tìm một nghiệm của đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết rằng đa thức

đó có nghiệm và $a + 2b + 4c = -\frac{1}{2}$.

PHAN MẠNH HÀ

(GV THPT Phan Thúc Trật, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T3/382. Xét các số thực không âm thay đổi $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ có tổng bằng 1.

Đặt $S_k = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3}$ ($k=1, 2, \dots, 6$). Gọi $M = \max\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của M .

DƯƠNG CHÂU DINH

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T4/382. Cho m, n, a, b, c là các số thực thỏa mãn các đẳng thức

$$m^{1000} + n^{1000} = a; \quad m^{2000} + n^{2000} = \frac{2b}{3};$$

$$m^{5000} + n^{5000} = \frac{c}{36}.$$

Tìm hệ thức giữa a, b, c không phụ thuộc vào m, n .

LƯƠNG VĂN BÁ

(GV THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T5/382. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH . Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A lấy điểm D sao cho $DB = DC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng BD, DH và HA là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/382. Tìm giá trị lớn nhất của $x^2 + y^2$ trong đó x, y là hai số nguyên thuộc $[-2009; 2009]$ và thỏa mãn điều kiện

$$(x^2 - 2xy - y^2)^2 = 4.$$

NGUYỄN NGỌC TIẾN

(Sở GD-ĐT Bình Thuận)

Bài T7/382. Cho đa thức với hệ số thực

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad \text{và} \\ Q(x) = x^2 + x + 2009.$$

Biết rằng đa thức $P(x)$ có n nghiệm thực phân biệt và đa thức $P(Q(x))$ không có nghiệm

thực. Chứng minh rằng $P(2009) > \frac{1}{4^n}$.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T8/382. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi G là trung điểm của BF . Lấy điểm I trên cạnh BC sao cho $BI = BG$, điểm H trên đoạn IG sao cho $\widehat{CDH} = 45^\circ$, điểm K trên cạnh EF sao cho $\widehat{DKE} = 45^\circ$. Chứng minh rằng tam giác DHK là tam giác đều.

PHẠM HUY THÔNG

(Hà Nội)

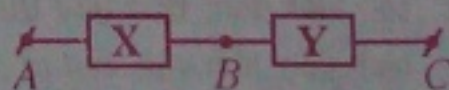
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/382. Một đoạn mạch xoay chiều ABC chứa hai

linh kiện: tụ điện C và cuộn cảm có độ tự cảm L , điện trở thuần r .

Cho dòng điện xoay chiều tần số $f = 1000\text{Hz}$ đi qua thì đo được $U_{AB} = 2\text{V}$, $U_{BC} = \sqrt{3}\text{V}$,

(Xem tiếp trang 27)



CUỘC THI GIẢI TOÁN

KỈ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ THE M&Y 45th ANNIVERSARY CONTEST

Bài T3/THCS. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x^3}{3-4x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}.$$

PHẠM XUÂN THI
(Trường Sĩ quan Lục quân 2,
Long Thành, Đồng Nai)

Bài T4/THCS. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại M, N . Giả sử AB là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) gần điểm M với $A \in (O_1)$, $B \in (O_2)$. Lấy điểm C nằm trên (O_1) và nằm trong (O_2) , điểm D nằm trên (O_2) và nằm trong (O_1) . AC và BD cắt nhau tại K . Chứng minh rằng

Nếu $CD \parallel AB$ thì $\widehat{KMC} = \widehat{KMD}$.

NGUYỄN THỌ TÙNG
(Hà Nội)

Bài T3/THPT. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi G là trọng tâm tam giác đó; G_1, G_2, G_3 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của G lên BC, CA, AB ; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh hệ thức

$$\frac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{ABC}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36R^2}.$$

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

Bài T4/THPT. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy)f(yz)f(zx)f(x+y)f(y+z)f(z+x) = 2009$$

với mọi x, y, z dương.

TẠ HOÀNG THÔNG
(GV THPT Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

T3/Junior. Solve for x

$$\sqrt{\frac{x^3}{3-4x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}.$$

T4/Junior. Two circles (O_1) and (O_2) intersect at M and N . AB is the common tangent to (O_1) and (O_2) which is closer to M than N , and with $A \in (O_1)$, $B \in (O_2)$. Choose a point C on (O_1) which lies inside (O_2) , choose D on (O_2) which lies inside (O_1) . AC and BD intersect at K . Prove that if $CD \parallel AB$ then $\widehat{KMC} = \widehat{KMD}$.

T3/Senior. In a triangle ABC , let $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Let G be its centroid, R is its circumradius and G_1, G_2 , and G_3 are the feet of the altitudes from G onto BC, CA and AB respectively. Prove the identity

$$\frac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{ABC}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36R^2}.$$

T4/Senior. Determine all functions $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that

$$f(xy)f(yz)f(zx)f(x+y)f(y+z)f(z+x) = 2009$$

for all positive numbers x, y, z .

Translated by LE MINH HA



★ **Bài T1/378.** Tìm số tự nhiên a sao cho $a + 593$ và $a - 159$ đều là số chính phương.

Lời giải. Giả sử $a + 593 = m^2$ và $a - 159 = n^2$, trong đó m, n đều là số tự nhiên và $m > n$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } m^2 - n^2 &= 752 \text{ hay} \\ (m - n)(m + n) &= 1.752 = 2.376 = 4.188 \\ &= 8.94 = 16.47 \end{aligned} \quad (*)$$

Do $(m - n) + (m + n) = 2m$ là số chẵn nên hai số $m - n$ và $m + n$ có cùng tính chẵn lẻ; vì vậy xét (*) thì chỉ có ba trường hợp sau xảy ra.

1) $m - n = 2, m + n = 376$, suy ra $m = 189, n = 187$, lúc đó $a + 593 = 189^2$ và $a - 159 = 187^2$, với $a = 35128$.

2) $m - n = 4, m + n = 188$, suy ra $m = 96, n = 92$, lúc đó $a + 593 = 96^2$ và $a - 159 = 92^2$ với $a = 8623$.

3) $m - n = 8, m + n = 43$, suy ra $m = 51, n = 43$, lúc đó $a + 593 = 51^2$ và $a - 159 = 43^2$ với $a = 2008$.

Bài toán có ba nghiệm a là 35128; 8623; 2008. □

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn không xét tính chẵn lẻ của $m - n$ và $m + n$ nên bài giải dài hơn.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Phú Thọ: Hoàng Hải Đăng, Bùi Minh Phương, Lê Thị Việt Hà, Đinh Xuân Việt, Phạm Thị Hồng Duyên, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, Phạm Thị Vân Anh, Nguyễn Thành Công, 6A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Phương, 6A, THCS Yên Phong, Khúc Thị Vân, 6B, THCS Đào Viên, Quế Võ; **Hà Nội:** Nguyễn Thị Ngọc Hà, 6A1, THCS Tế Tiều, Mỹ Đức; **Hòa Bình:** Nguyễn Thị Phương Thảo, 57 Hữu Nghị, TP. Hòa Bình; **Nghệ An:** Đặng Quang Minh Triết, 6C, Phan Hoàng Thanh Tùng, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** Dương Hoài Nam, 6/1, THCS Mỹ Châu, Lộc Hà.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/378.** Cho tam giác ABC vuông tại A với $\widehat{ACB} = 15^\circ$. Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng $a^2 = 4bc$.

Lời giải

Cách 1. Trên cạnh AC lấy điểm D sao

cho $\widehat{CBD} = 15^\circ$ (h. 1). Khi

đó $\widehat{ABD} = 60^\circ$. Tam giác ABD vuông tại A và có $\widehat{ABD} = 60^\circ$ nên $BD = 2AB = 2c$.

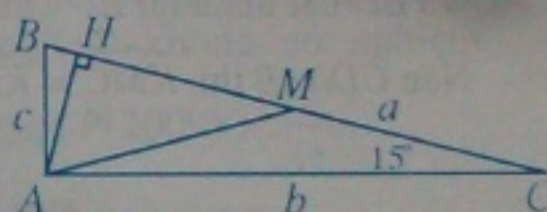
Sử dụng định lý Pythagore trong tam giác ABD tính được $AD = c\sqrt{3}$. Từ đó

$$AC = DC + AD \Rightarrow b = 2c + c\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})c$$

Sử dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông ABC ta có

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 = (2 + \sqrt{3})^2 c^2 + c^2 \\ &= 4(2 + \sqrt{3})c^2 = 4bc \text{ (dpcm).} \end{aligned}$$

Cách 2. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC ($AH = h$). Gọi M là trung điểm của BC (h. 2).



Hình 2

Theo tính chất của tam giác vuông ta có $\triangle AMC$ cân tại M nên $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 15^\circ$ và $\widehat{AMH} = 2\widehat{ACM} = 30^\circ$.

Tam giác AHM vuông tại H và có $\widehat{AMH} = 30^\circ$

$$\text{suy ra } AH = h = \frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} MC = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 = 4ah \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, ta có } 2S_{ABC} = bc = ah \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 = 4bc$. □

◀ **Nhận xét.** Đa số các bạn tham gia gửi bài về toà soạn đều giải theo hai cách trên. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Quách Minh Hằng, 6A, THCS Gia Cẩm, Việt Trì; Vũ Tuấn Linh, 7A1, THCS Lâm Thao; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Giang, 7C, THCS Ngũ Phúc, Kim Thành; **Hà Nội:** Nguyễn Hoàng Nam, 7C, THCS Thạch Thất; **Bắc Ninh:** Hoàng Minh Nguyệt, 7C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Nam Định:** Nguyễn Xuân Trường, 7A,

THCS Lý Tự Trọng; Hà Tĩnh: Nguyễn Công Thịnh, 7A, THCS Hồng Lộc, Lộc Hà; Trần Thị Như Quỳnh, 7C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; Nghệ An: Nguyễn Hoàng Tâm, 7B, THCS Diên Xuân, Diên Châu; Nguyễn Lê Quỳnh Trâm, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Vũ Văn Tuệ, Hoàng Danh Thắng, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; Quảng Trị: Dương Như Bảo Lộc, 7C, THCS Trần Hưng Đạo, TX Đông Hà; Nguyễn Kim, Nguyễn Anh Thư, 7A, THCS Phan Đình Phùng; Quảng Ngãi: Huỳnh Thị Thanh Lan, Nguyễn Bảo Trâm, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ Bài T3/378. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z, t thỏa mãn điều kiện

$$x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} = 2007t^{2008} \quad (1)$$

Lời giải

Nhận xét. 1) Nếu n là số nguyên chẵn thì $n^4 \div 8$.

2) Nếu n là số nguyên lẻ thì $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$, nên $n^2 = 4k(k+1) + 1$ sẽ chia cho 8 dư 1. Suy ra n^4 chia cho 8 dư 1.

Giả sử (1) có nghiệm nguyên $(x_0; y_0; z_0; t_0)$.

Khi đó ta có

$$x_0^{2008} + y_0^{2008} + z_0^{2008} + t_0^{2008} = 2008t_0^{2008} \quad (2)$$

Vì $2008t_0^{2008}$ là số chẵn nên trong bốn số x_0, y_0, z_0, t_0 không thể có một hoặc ba số lẻ. Còn nếu trong chúng có hai hoặc bốn số lẻ thì VT(2) chia 8 dư 2 hoặc 4, trong khi VP(2) chia hết cho 8. Trường hợp này cũng không xảy ra. Vậy cả bốn số x_0, y_0, z_0, t_0 đều là số chẵn.

Đặt $x_0 = 2x_1, y_0 = 2y_1, z_0 = 2z_1, t_0 = 2t_1$ với x_1, y_1, z_1, t_1 là các số nguyên. Thay vào (2) và chia cả hai vế cho 2^{2008} , ta được

$$x_1^{2008} + y_1^{2008} + z_1^{2008} + t_1^{2008} = 2008t_1^{2008}.$$

Do đó $(x_1; y_1; z_1; t_1)$ cũng là nghiệm của (1).

Bằng quy nạp, ta dễ chứng minh được

$\left(\frac{x_0}{2^n}; \frac{y_0}{2^n}; \frac{z_0}{2^n}; \frac{t_0}{2^n}\right)$ là nghiệm của (1) với mọi

$n \in \mathbb{N}$. Điều này chỉ xảy ra khi $(x_0; y_0; z_0; t_0) = (0; 0; 0; 0)$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $(x; y; z; t)$ là $(0; 0; 0; 0)$. □

◀ Nhận xét. Đa số các bạn đều giải theo cách trên (mặc dù cách thể hiện có khác nhau). Các bạn có lời giải tốt là:

Bắc Ninh: Nguyễn Hữu Dũng, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; Phú Thọ: Vũ Thị Mai, 6A1, THCS Lâm

Thao; Vĩnh Phúc: Lê Văn Tú, Phạm Mỹ Linh, 9A1, THCS Yên Lạc; Nghệ An: Nguyễn Văn Thắng, Nguyễn Văn Hoàng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Quảng Trị: Nguyễn Hữu Ánh, 9I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T4/378. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right) \geq 3(a+b+c)^2 \quad (*)$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Lời giải

$$\text{BĐT } (*) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3-a^2}+1\right)\left(\frac{4}{3-b^2}+1\right)\left(\frac{4}{3-c^2}+1\right) \geq 3(a+b+c)^2.$$

Từ điều kiện đã cho suy ra

$$0 < a^2 < 3, 0 < b^2 < 3, 0 < c^2 < 3.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có

$$\frac{4}{3-a^2} + (3-a^2) \geq 2\sqrt{\frac{4}{3-a^2} \cdot (3-a^2)} = 4, \text{ nên}$$

$$\frac{4}{3-a^2} + 1 \geq 2 + a^2.$$

$$\text{Tương tự có } \frac{4}{3-b^2} \geq 2 + b^2; \frac{4}{3-c^2} \geq 2 + c^2.$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right) \geq (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$$(a^2+2)(b^2+2) = (a^2+1)(b^2+1) + a^2 + b^2 + 3 \geq (a+b)^2 + \frac{1}{2}(a+b)^2 + 3 = \frac{3}{2}((a+b)^2 + 2).$$

Suy ra

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq \frac{3}{2}((a+b)^2 + 2)(2+c^2) \geq \frac{3}{2}(\sqrt{2}(a+b) + \sqrt{2}c)^2 = 3(a+b+c)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra BĐT (*) đúng.

Đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1 \\ a, b, c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn đều sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương để chứng tỏ vế trái của (*) không nhỏ hơn 27, còn vế phải của (*) không lớn hơn 27.

2) Một số bạn đã đưa ra nhận xét giả thiết bài toán không cần điều kiện a, b, c là các số dương. Khi đó đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = c = -1$. Riêng bạn Vũ Ngọc Cương, 8⁶, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa đã nêu bài toán tổng quát:

"Chứng minh rằng

$$\left(\frac{4k}{3(a^2 + b^2)} + 1 \right) \left(\frac{4k}{3(b^2 + c^2)} + 1 \right) \left(\frac{4k}{3(c^2 + a^2)} + 1 \right) \geq \frac{9}{k} (a + b + c)^2$$

trong đó a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = k$ ($k > 0$)"

3) Ngoài bạn Cương, các bạn sau đây có lời giải tốt:

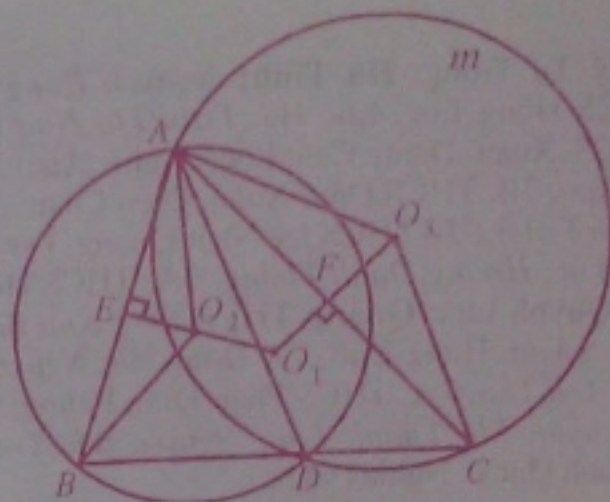
Hà Nội: Doãn Minh Phúc, 8A5, THCS Giảng Võ, Lê Anh Vũ, 9A, trường Hà Nội – Amsterdam, Trần Quang Toàn, 7A0, trường Lương Thế Vinh, Lý Phụng Hoàng, 9A1, THPT DL Nguyễn Siêu; **Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Dũng, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; Trần Thị Ngọc, 9B, THCS Từ Sơn; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Công Hoàn, 9A1, THCS Yên Lạc, Dương Thị Hạnh, 8C, THCS Lập Thạch; **Nghệ An:** Võ Duy Văn, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nguyễn Ngọc Anh, 7H, THCS Tam Hợp, Quỳnh Hợp, Cao Xuân Bang, Vũ Hồng Ái, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nguyễn Văn Hoàng, Nguyễn Văn Thắng, 9B THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** Lê Thiệu Giáp, 9C, THCS Trần Mai Ninh; **Hà Tĩnh:** Lê Thị Mến, 8A, THCS Nguyễn Hằng Chi, Lộc Hà; **Nam Định:** Nguyễn Xuân Trường, 7A1, THCS Lý Tự Trọng, TP. Nam Định; **Thái Bình:** Bùi Công Tiến, 9C, THCS Việt Thuận, Vũ Thư; **Phú Thọ:** Đặng Duy Linh, 9B, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Bình Định:** Nguyễn Danh Nhân, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ, Lê Như Ngọc, 9A1, THCS TTr. Bình Định, An Nhơn; **Đồng Nai:** Trần Quang Sang, 9/4, THCS Nguyễn Văn Trỗi, TX. Biên Hòa; **Bình Phước:** Dương Tuấn Anh, 8A3, THCS Tân Xuân; **Đà Nẵng:** Đỗ Trần Tuấn Anh, 9/5, THCS Nguyễn Khuyến; **Đắk Lắk:** Phạm Trung Hiếu, 9D1, THCS Trần Phú.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/378.** Trên cạnh BC của tam giác nhọn ABC lấy điểm D khác các điểm B và C . Chứng minh rằng điểm A và tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD, ABC cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải. (xem hình vẽ) Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ABD và ACD .

• Nếu $\widehat{ADB} = 90^\circ$ thì O_2, O_3 lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khi đó $\widehat{AO_2O_1} = \widehat{AO_3O_1} = 90^\circ$, suy ra tứ giác $AO_2O_1O_3$ nội tiếp.



• Bây giờ giả sử $\widehat{ADB} < 90^\circ$. Trong trường hợp này ta có D và O_2 nằm cùng phía đối với dây cung AB (trong đường tròn (O_2)); D và O_3 nằm khác phía đối với dây cung AC (trong đường tròn (O_3)). Gọi E là giao điểm của AB và O_1O_2 ; F là giao điểm của AC và O_1O_3 . Ta có O_1O_2 là trung trực của đoạn AB nên

$$\widehat{AO_2E} = \frac{1}{2} \widehat{AO_2B} = \widehat{ADB} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Còn } \widehat{AO_3O_1} &= \frac{1}{2} \widehat{AO_3C} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{ADC} \\ &= \frac{1}{2} (360^\circ - \text{sd} \widehat{AmC}) = 180^\circ - \widehat{ADC} = \widehat{ADB} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AO_2E} = \widehat{AO_3O_1}$, dẫn đến tứ giác $AO_2O_1O_3$ nội tiếp. Vậy bốn điểm A, O_2, O_3, O_1 cùng nằm trên một đường tròn. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bạn Đặng Duy Hiến, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm, Hà Nam còn đề xuất bài toán: Tìm vị trí của D trên BC để bán kính đường tròn $(AO_2O_1O_3)$ nhỏ nhất (khi $\widehat{ADB} = 90^\circ$). Một số bạn phát hiện được bài toán vẫn đúng khi ΔABC vuông hoặc tù.

2) Ngoài bạn Hiến, các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Phan Trần Minh Khuê, 8D, THCS Nguyễn Du, TP. Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** Kim Văn Cương, 9C, THCS Vĩnh Tường, Phan Mỹ Linh, 9A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Khúc Hữu Huy, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, Vũ Phương Thu, 7A, THCS Từ Sơn; **Hà Nội:** Lý Phụng Hoàng, 9A1, THPT DL Nguyễn Siêu, Cầu Giấy; **Hà Nam:** Nguyễn Chí Linh, 9A, THCS Liêm Chính, TP. Phủ Lý; **Thái Bình:** Bùi Công Tiến, 9C, THCS Việt Thuận, Vũ Thư; **Thanh Hóa:** Tào Lê Minh, 70 Tổng Duy Tân, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** Trần Đại Dương, 9A, THCS Diễn Hùng, Diễn Châu, Hoàng Danh Thắng, 7A, Đặng Trung Anh, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Đắk Lắk:** Phạm Trung Hiếu, 9D1, THCS Trần Phú; **Quảng Ngãi:** Văn Thị Hoàng Duyên, Hồ Tấn Vũ, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** Thái Bảo Lộc, 6E, THCS Nguyễn Tất Thành, Tây Hòa; **Khánh Hòa:** Vũ Ngọc Cương, 8⁶, THCS Nguyễn Văn Trỗi; **Quảng Trị:** Nguyễn Kim, 7A, THCS Phan Đình Phùng, Đông Hà;

Bình Định: Nguyễn Danh Nhân, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T6/378. Tìm hệ số của x^2 sau khi khai triển biểu thức

$$(((\dots((x-2)^2-2)^2-\dots-2)^2-2)^2$$

biết rằng trong biểu thức trên có 1004 số 2 và 2008 dấu ngoặc.

Lời giải. Với mỗi số k nguyên dương, ta kí hiệu $Q_k(x) = (((\dots((x-2)^2-2)^2-\dots-2)^2-2)^2$ trong đó có k số 2 và $2k$ dấu ngoặc.

Dễ dàng thấy rằng $Q_k(0) = 4, \forall k \in \mathbb{N}^*$ và giả sử sau khi khai triển, ta được

$$Q_k(x) = P_k(x) + A_k x^2 + B_k x + 4 \quad (1)$$

trong đó $P_k(x)$ là đa thức gồm các số hạng có bậc lớn hơn 2. Với $k > 1$, ta có

$$\begin{aligned} Q_k(x) &= (Q_{k-1}(x) - 2)^2 = (P_{k-1}(x) + A_{k-1}x^2 + B_{k-1}x + 2)^2 \\ &= P_k(x) + (4A_{k-1} + B_{k-1}^2)x^2 + 4B_{k-1}x + 4 \end{aligned} \quad (2)$$

So sánh các vế phải của (1) và (2), ta thấy

$$\begin{cases} A_k = B_{k-1}^2 + 4A_{k-1} \\ B_k = 4B_{k-1}. \end{cases}$$

Mặt khác

$$Q_1(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ B_1 = -4. \end{cases}$$

Do đó $B_2 = -4^2; B_3 = -4^3; \dots; B_{k-1} = -4^{k-1}$.

Ta có

$$\begin{aligned} A_k &= B_{k-1}^2 + 4A_{k-1} = B_{k-1}^2 + 4(4A_{k-2} + B_{k-2}^2) \\ &= B_{k-1}^2 + 4B_{k-2}^2 + 4^2(4A_{k-3} + B_{k-3}^2) = \dots \\ &= B_{k-1}^2 + 4B_{k-2}^2 + \dots + 4^{k-2}B_1^2 + 4^{k-1}A_1 \end{aligned}$$

Thay $A_1 = 1, B_1^2 = 4^2, B_2^2 = 4^4, \dots, B_{k-1}^2 = 4^{2(k-1)}$, ta được

$$A_k = 4^{2k-2} + 4^{2k-3} + \dots + 4^k + 4^{k-1} = \frac{4^{2k-1} - 4^{k-1}}{3}.$$

Thay $k = 1004$, ta được hệ số của x^2 phải tìm là $A_{1004} = \frac{4^{2007} - 4^{1003}}{3}$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Điều mấu chốt của bài toán là đưa ra được công thức truy hồi để tính A_k . Tuy nhiên có rất nhiều bạn đã nhầm khi thay $k = 2008$ trong bài toán trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Hoàng Tuấn Anh, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Mạnh

Quân, Nguyễn Ngọc Trung, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** Tạ Minh Hoàng, 10A1, THPT Khoái Châu; **Thanh Hoá:** La Hồng Quân, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Quang Tài Anh Phú, Nguyễn Văn Minh, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Phạm Hồng Linh, 10A1, THPT Mai Thúc Loan, Lộc Hà; **Quảng Ngãi:** Lê Nguyễn Khánh, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Nguyễn Đồng Tiến, Trần Việt Nghi, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn; **Phú Yên:** Lê Cao Thăng, 10A1, THPT Phan Chu Trinh, Sông Cầu; **Bến Tre:** Lê Phúc Lữ, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Hậu Giang:** Phan Thanh Bình, 11 Lý Hoá, THPT chuyên Vị Thanh, TX Vị Thanh; **Cà Mau:** Nguyễn Phạm Tuấn Anh, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T7/378. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{\sqrt{a_1+2008} + \sqrt{a_2+2008} + \dots + \sqrt{a_n+2008}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}}$$

trong đó n là số nguyên dương cho trước và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$.

Lời giải. Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$$\begin{aligned} & \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{2009 \text{ số } 1} \underbrace{(a_i+1+1+\dots+1)}_{2008 \text{ số } 1} \\ & \geq (\sqrt{a_i} + 1 + 1 + \dots + 1)^2, \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Do đó $2009 \cdot (a_i + 2008) \geq (\sqrt{a_i} + 2008)^2$.

$$\text{Suy ra } \sqrt{a_i} + 2008 \geq \frac{1}{\sqrt{2009}} \cdot (\sqrt{a_i} + 2008).$$

Bởi vậy

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1+2008} + \sqrt{a_2+2008} + \dots + \sqrt{a_n+2008} \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{2009}} \cdot (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} + 2008 \cdot n) \end{aligned} \quad (1)$$

Lại theo BĐT Bunyakovsky

$$\begin{aligned} & \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n \text{ số } 1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ & \geq (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n})^2. \end{aligned}$$

Suy ra $n^2 \geq (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n})^2$.

$$\text{Bởi vậy } n \geq \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1+2008} + \sqrt{a_2+2008} + \dots + \sqrt{a_n+2008} \\ & \geq \frac{2009 \cdot (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n})}{\sqrt{2009}} \\ & = \sqrt{2009} (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}). \end{aligned}$$

Do đó

$$P = \frac{\sqrt{a_1 + 2008} + \sqrt{a_2 + 2008} + \dots + \sqrt{a_n + 2008}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}} \geq \sqrt{2009}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng $\sqrt{2009}$. $\square$

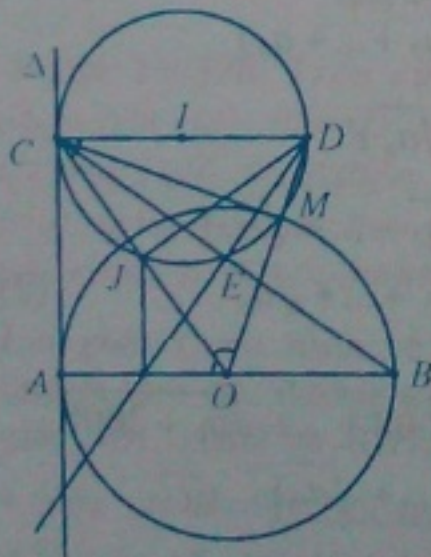
◀ **Nhận xét.** Các bạn học sinh THCS sau có lời giải tốt:

Phủ Thọ: Đặng Duy Linh, 9E, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Hà Nội:** Phạm Huy Hoàng, 8A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Vĩnh Phúc:** Hà Quang Nhân, 8B, THCS Như Thủy, Lập Thạch, Lê Văn Tú, 9A1, THCS Yên Lạc; **Nghe An:** Cao Xuân Bang, Hoàng Trọng Đường, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Hoàng Danh Thắng, 7A, Hồ Khánh Duy, Võ Duy Văn, 8A, Phạm Văn Quân, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nguyễn Văn Hoàng, Nguyễn Văn Thắng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** Nguyễn Hữu Anh, 9I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị; **Bình Định:** Nguyễn Danh Nhân, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ; **TP. Hồ Chí Minh:** Trương Diệu Toàn, 9/2, THCS Chu Văn An, Q.11.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T8/378.** Cho đường tròn (O) tâm O có đường kính AB cố định. Một đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A . Gọi M là điểm thuộc đường tròn (O) và M khác với các điểm A, B . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M cắt đường thẳng Δ tại C . Xét đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại C . Giả sử CD là đường kính của đường tròn (I) . Chứng minh rằng:

- 1) Tam giác DOC là tam giác cân;
- 2) Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn (O) .



Lời giải. 1) Vì CM là tiếp tuyến của (O) và $M \in (I)$ nên $\widehat{CMD} = \widehat{CMO} = 90^\circ$, do đó D, M, O thẳng hàng.

Vì CA và CM là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{MOC} = \widehat{AOC}$ mà $\widehat{AOC} = \widehat{DCO}$ (do $AB \parallel CD$), suy ra $\widehat{DOC} = \widehat{DCO}$ hay tam giác DOC cân tại D .

2) **Cách 1.** (Theo bạn Nguyễn Thông Thắng, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An).

Gọi F là trung điểm của AO , còn E là giao điểm của DF và BC . Ta sẽ chứng minh $DF \perp BC$.

Gọi J là trung điểm của CO thì $DJ \perp CO$ và $JF \perp AO$, suy ra $\widehat{DJF} = \widehat{COB}$ (1)

Mặt khác, dễ thấy $\Delta DJO \sim \Delta JFO$ (g.g), suy ra

$$\frac{DJ}{JF} = \frac{JO}{FO} = \frac{CO}{AO} = \frac{CO}{OB} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta có $\Delta DJF \sim \Delta COB$. Từ đó $\widehat{JDE} = \widehat{JCE}$ suy ra tứ giác $CDEJ$ nội tiếp đường tròn (I) nên $\widehat{CED} = 90^\circ$ hay $DF \perp BC$.

Vậy khi M di động, đường thẳng qua D vuông góc với BC luôn đi qua điểm F cố định, F là trung điểm của OA .

***Trường hợp đặc biệt:** Nếu M là điểm chính giữa của cung $\widehat{AB}$, khi đó $D \equiv M$ và ta cũng suy ra các kết quả trên.

Cách 2. (theo bạn Tạ Minh Hoàng, 10A1, THPT Khoái Châu, Hưng Yên)

Với F là trung điểm của AO và $AB = 2R$ thì

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF}) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= CA^2 + 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} - R^2 \\ &= CA^2 - R^2 + (OD^2 + OA^2 - AD^2) \\ &= CA^2 - R^2 + OD^2 + R^2 - AC^2 - CD^2 \\ &= OD^2 - CD^2 = 0 \quad (\text{vì tam giác } DOC \text{ cân}). \end{aligned}$$

Vậy $DF \perp BC$ hay đường thẳng qua D vuông góc với BC luôn đi qua điểm cố định F . $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Ngoài hai cách giải trên, bài toán còn có nhiều cách giải khác: sử dụng các đường phụ, điểm phụ, phối hợp giữa phương pháp vectơ và phương pháp hình học thông thường. Đặc biệt có một lời giải khá ngắn gọn là lấy điểm G đối xứng với O qua D và chứng minh $GD \perp BC$ (lưu ý lúc này ΔGCO vuông tại O).

2) Các bạn có lời giải tốt hơn cả là:

Đắk Lắk: Phạm Trung Hiếu, 9D1, THCS Trần Phú; **Yên Bái:** Bùi Bích Phượng, 10 Toán, THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bắc Ninh:** Trần Anh Tuấn, 11A1, THPT Thuận Thành, Nguyễn Tuấn Linh, 11 Toán, THPT Chuyên Bắc Ninh; **Bắc Giang:** Nguyễn Hoàng Hiệp, 12T, THPT Chuyên Bắc Giang; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Mạnh Quân, 10A1, THPT Chuyên Vĩnh Phúc. **Tà Hữu Công,** 10A1, THPT Ngô Gia Tự. **Hà Nội:** Trần Minh Vương, 10A2 Toán, THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; Nguyễn Quý Minh, 10T1, Khối THPT

chuyên ĐHSPT Hà Nội; Hà Nam: Nguyễn Đức Vinh, 11 Toán, THPT Chuyên Hà Nam; Hải Phòng: Phan Đức Minh, 10A7, THPT Thái Phiên; Thanh Hóa: Nguyễn Thị Thu Hiền, Ngô Văn Dũng, 10T, THPT Lam Sơn; Nghệ An: Doãn Văn Hùng, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; Nguyễn Văn Hoàng, Nguyễn Văn Thắng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Nguyễn Thế Anh, 10A1, THPT Chuyên ĐH Vinh; Hà Tĩnh: Phạm Hồng Linh, 10A1, THPT Mai Thúc Loan, Hồ Phạm Thiệu, THPT Lê Hữu Trào 1, Hương Sơn; Phú Yên: Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng Phong; Lê Cao Thăng, 10T, THPT Phan Chu Trinh; Quảng Ngãi: Lê Nguyên Khánh, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết, Đặng Đình Đường, 9A, Văn Thị Hoàng Duyên, 8A, THCS Hành Phước; Hậu Giang: Phan Thanh Bình, 11LH, THPT Chuyên Vị Thanh; Đà Nẵng: Nguyễn Tăng Thành, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; Bến Tre: Vũ Hữu Bình, 10/4, THPT Nguyễn Đình Chiểu.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ Bài T9/378. Hỏi có tồn tại hay không dãy hữu hạn các số nguyên dương:

$a_{2003} > a_{2002} > \dots > a_2 > a_1$ với $a_1 = 2003$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1) Bất kì số nguyên nào thuộc khoảng $(2003; a_{2003})$ và không thuộc dãy trên thì đều là hợp số.

2) $A = \frac{2004}{a_1} + \frac{2004}{a_2} + \dots + \frac{2004}{a_{2003}}$ là số nguyên?

Lời giải. Giả sử tồn tại một dãy như vậy. Gọi $S = \{a_i, 1 \leq i \leq 2003 / a_i \text{ là số nguyên tố}\}$. Vì $a_1 = 2003$ là số nguyên tố nên $S \neq \emptyset$. Giả sử a_m là phần tử lớn nhất của S .

Ta chứng minh a_k không chia hết cho a_m , với mọi $k = 1, 2, \dots, 2003, k \neq m$

Thật vậy với $k < m$ thì $a_k < a_m$ nên khẳng định trên đúng.

Giả sử có số a_k ($k > m$) sao cho $a_k : a_m$, khi đó $a_k \geq 2a_m$.

Theo định lý Chebyshev tồn tại số nguyên tố q sao cho $a_m < q < 2a_m$. Vì a_m là số nguyên tố lớn nhất của dãy nên q không thuộc dãy. Lại có $a_1 < q < 2a_m \leq a_k$ nên theo giả thiết của bài toán, q là hợp số, ta có mâu thuẫn. Vậy khẳng định (1) được chứng minh.

Trở lại bài toán ta có

$$A - \frac{2004}{a_m} = \sum_{k \neq m} \frac{2004}{a_k} \Leftrightarrow \frac{Aa_m - 2004}{a_m} = \frac{M}{\prod_{k \neq m} a_k}$$

(trong đó M là số nguyên).

Vì $(Aa_m - 2004, a_m) = 1$, nên suy ra $\prod_{k \neq m} a_k : a_m$.

Vì a_m là số nguyên tố nên tồn tại k để $a_k : a_m$.

Mâu thuẫn với khẳng định (1). Thành thử không tồn tại dãy như vậy. $\square$

◀ Nhận xét. 1) Tất cả các bạn có lời giải đúng đều cần phải dùng tới định lý Chebyshev "Giữa hai số nguyên dương n và $2n$ luôn có ít nhất một số nguyên tố". Định lý này có thể chứng minh được bằng phương pháp sơ cấp (tuy khá dài).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: La Văn Thiện, 11A1 Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; Hải Dương: Lê Văn Huỳnh, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; Nghệ An: Quang Tài Anh Phú, 10A1 K37, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; Bắc Ninh: Trần Anh Tuấn, 11A1, THPT Thuận Thành 1; Bắc Giang: Nguyễn Hoàng Hiệp, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; Đà Nẵng: Hoàng Bùi Khánh, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; Thừa Thiên - Huế: Lê Chí Tâm, 11 Toán, THPT Quốc học Huế; Bến Tre: Lê Phúc Lữ, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; Thanh Hóa: La Hồng Quân, 10T, THPT chuyên Lam Sơn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ Bài T10/378. Tìm tất cả các hàm số f, g, h liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ mà thỏa mãn $f(x+y) = g(x) + h(y)$ (1) với mọi số thực x, y .

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Trong (1) lần lượt cho $y=0$ và $x=0$ ta thu được

$$g(x) = f(x) - a, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ với } a = h(0) \quad (2)$$

$$h(y) = f(y) - b, \forall y \in \mathbb{R}, \text{ với } b = g(0) \quad (3)$$

Thay các giá trị từ (2) và (3) vào (1), ta được $f(x+y) = f(x) + f(y) - (a+b)$

với mọi số thực x, y hay

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$\text{với } \varphi(t) = f(t) - (a+b), \quad (4)$$

Đây là phương trình hàm Cauchy đối với hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên (4) có nghiệm $\varphi(x) = cx$. Suy ra nghiệm của (1) có dạng

$$\begin{cases} f(x) = cx + a + b \\ g(x) = cx + b \\ h(x) = cx + a, \end{cases} \quad (5)$$

trong đó a, b, c tùy ý.

Thử lại, ta thấy các hàm trong (5) thỏa mãn bài ra. $\square$

◀ Nhận xét. Đây là bài toán về phương trình hàm Pexider quen biết đã có trong cuốn sách của Christopher G.Small "Functional Equations and How to Solve them", Springer 2007 (trang 39). Có rất nhiều các bạn giải bài này theo cách đã trình bày (cũng là cách giải trong cuốn sách kể trên) và đều có lời giải đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T11/378.** Cho tam giác ABC với trực tâm H và đường tròn ngoại tiếp tâm O bán kính R . Chứng minh rằng

$$3R - 2OH \leq HA + HB + HC \leq 3R + OH.$$

Lời giải. Gọi O, G, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và trực tâm của tam giác ABC .

Ta có kết quả quen thuộc $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$ (1)

Từ (1) suy ra

$$\bullet OH = 3OG < 3R \text{ (vì } G \text{ nằm trong } (O)) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bullet HA^2 + HB^2 + HC^2 &= (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC})^2 \\ &= 3HO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{HO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= 3HO^2 + 3R^2 + 2\overrightarrow{HO}.3\overrightarrow{OG} \\ &= 3HO^2 + 3R^2 + 2\overrightarrow{HO}.\overrightarrow{OH} = HO^2 + 3R^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\begin{aligned} (3R + OH)^2 &= 9R^2 + 6R.OH + OH^2 \\ &\geq 9R^2 + 2OH^2 + OH^2 \\ &= 3(3R^2 + OH^2) \geq 3(HA^2 + HB^2 + HC^2) \\ &\geq (HA + HB + HC)^2. \end{aligned}$$

Suy ra $HA + HB + HC \leq 3R + OH$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Từ (2) suy ra trong ba số HA, HB, HC có một số không nhỏ hơn R . Không mất tính tổng quát, giả sử $HA \geq R$.

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } HB &> OB - OH = R - OH; \\ HC &> OC - OH = R - OH. \end{aligned}$$

Suy ra $HA + HB + HC \geq 3R - 2OH$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. Bài toán đã được chứng minh. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này, tuy nhiên không ít bạn giải sai. Sai lầm cơ bản của các bạn này là sử dụng đẳng thức sau (chỉ đúng với các tam giác nhọn):

$$HA + HB + HC = 2R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Hà Nội: Đào Trọng Anh, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Gia Lâm; **Thái Bình:** Tạ Bá Trung, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Đồng Tháp:** Huỳnh Vĩnh Sang, 12A1, THPT Sa Đéc, TX Sa Đéc; **Hầu Giang:** Phan Thanh Bình, 11 Lí Hoá, THPT chuyên Vị Thanh, TX Vị Thanh. **Vĩnh Long:** Hồ Diên Anh Tuấn, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T12/378.** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a . Lấy điểm N trên đoạn thẳng AB_1 và điểm M trên đoạn thẳng BC_1 sao cho đường thẳng MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° . Chứng minh rằng $MN \geq 2a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

(Theo bạn Nguyễn Hữu Tú, 12 Toán 1, khối THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội).

Giả sử M' và N' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M và N trên mặt phẳng $(ABCD)$, P là giao điểm của các đường thẳng MN và $M'N'$. Dễ thấy điểm M' thuộc cạnh BC , điểm N' thuộc cạnh AB . Từ giả thiết ta có $\widehat{MPM'} = 60^\circ$.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $MM' < NN'$. Ta có $MM' = BM', NN' = AN' = a - BN'$.

Khi đó

$$\begin{aligned} MN \cdot \sin 60^\circ &= (PN - PM) \sin 60^\circ = NN' - MM' \\ &= a - (BM' + BN') \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MN \cdot \cos 60^\circ &= (PN - PM) \cdot \cos 60^\circ = PN' - PM' \\ &= M'N' = \sqrt{BM'^2 + BN'^2} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta thu được

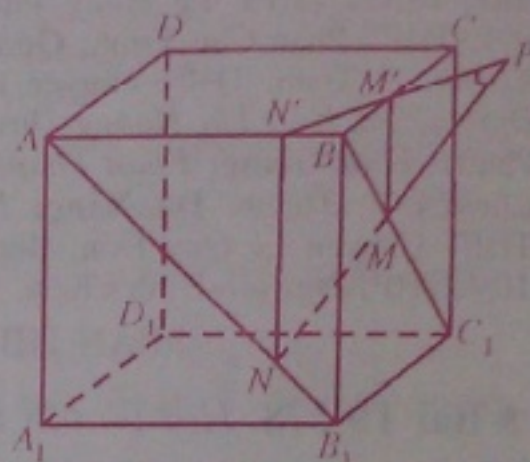
$$\begin{aligned} MN(\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ) &= \sqrt{2(BM'^2 + BN'^2)} + a - (BM' + BN') \\ &\geq (BM' + BN') + a - (BM' + BN') = a. \end{aligned}$$

Do đó $MN \geq 2a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BM' = BN' \Leftrightarrow BM = B_1N = BM'\sqrt{2}$, lúc này $MN \cdot \cos 60^\circ = BN'\sqrt{2}$ và $MN \cdot \sin 60^\circ = a - 2BN'$, suy ra

$$BM' = BN' = \frac{a(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2 + \sqrt{6}}.$$

Tóm lại dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$BM = B_1N = \frac{a}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}. \quad \square$$



◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn khái quát hóa bài toán T12/378 bằng cách thay giả thiết: MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α , sau đó chứng minh bất đẳng thức $MN \geq \frac{a}{\sqrt{2} \cos \alpha + \sin \alpha}$ với cách giải tương tự như trên.

2) Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Ngoài bạn Tú, các bạn sau cũng có lời giải tốt, ngắn gọn:

Hà Nội: Trần Nhật Tân, 12A1 Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; Đào Trọng Anh, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên; Nguyễn Sơn Tùng, 12A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì; **Vĩnh Phúc:** Kim Đình Sơn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Ninh Văn Quý, 11A, THPT Kim Thành, Lê Văn Huân, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương; **Hà Nam:** Trần Trung Kiên, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Nghệ An:** Nguyễn Bá Hữu Đức, 11A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, Nguyễn An Tịnh, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Thừa Thiên - Huế:** Lê Thanh Phúc, 11 Toán, THPT Quốc học Huế, TP. Huế; **Đắk Lak:** Lê Quang Hiếu, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **An Giang:** Trần Thanh Phố, 11A1, THPT Tân Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** Bùi Văn Minh, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài L1/378.** Một quả bóng đàn hồi rơi từ độ cao $h = 2,0\text{m}$ so với mặt sàn nằm ngang. Sau mỗi va chạm với sàn bóng mất 19% cơ năng. Sau thời gian bao lâu thì bóng dừng lại? Trong thời gian đó bóng đã đi được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

Lời giải. (Theo lời giải của một số bạn).

Cơ năng ban đầu của quả bóng là $E_0 = mgh$. Theo đề bài, sau mỗi lần va chạm bóng mất 19% cơ năng, nghĩa là nó chỉ còn 81% cơ năng so với lúc ngay trước va chạm. Nếu gọi E_i và h_i là cơ năng và độ cao bóng đạt được sau lần va chạm thứ i , ta có $E_i = k \cdot E_0$; $h_i = k \cdot h$; (ở đây $k = 81\%$, $i \in \mathbb{N}$).

Thời gian bóng bay ngay từ sau va chạm thứ i

đến va chạm tiếp theo là $t_i = 2\sqrt{\frac{2h_i}{g}} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \sqrt{k}^i$.

Thời gian để bóng dừng là $t = t_0 + \sum_{i=1}^n t_i$, trong

đó $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ là thời gian bóng bắt đầu rơi đến va chạm lần thứ nhất với sàn, n là số lần va chạm. Ta có

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \sum_{i=1}^n \sqrt{k}^i$$

$$\begin{aligned} &= -\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \sqrt{k} + \sqrt{k^2} + \dots + \sqrt{k^n}\right) \\ &= -\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{k^{n+1}}}{1 - \sqrt{k}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{1 + \sqrt{k} - 2\sqrt{k^{n+1}}}{1 - \sqrt{k}}\right). \end{aligned}$$

Do $\sqrt{k} < 1$ nên khi $n \rightarrow +\infty$ thì $\sqrt{k^{n+1}} \rightarrow 0$.

$$\text{Suy ra } t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}}\right) \approx 12\text{s}.$$

Quãng đường bóng đi được là

$$\begin{aligned} S &= h + 2 \sum_{i=1}^n h_i = h + 2h \sum_{i=1}^n k^i \\ &= h + 2h(k + k^2 + \dots + k^n) \\ &= -h + 2h(1 + k + k^2 + \dots + k^n) \\ &= -h + 2h \left(\frac{1 - k^{n+1}}{1 - k}\right) = h \left(\frac{1 + k - 2k^{n+1}}{1 - k}\right). \end{aligned}$$

Do $\sqrt{k} < 1$ nên khi $n \rightarrow +\infty$ thì $k^{n+1} \rightarrow 0$.

$$\text{Suy ra } S = h \left(\frac{1 + k}{1 - k}\right) \approx 19,1\text{m}. \quad \square$$

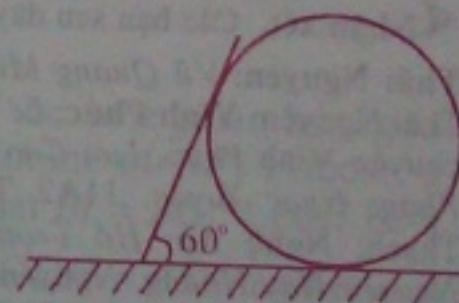
◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thanh Hoá: Lê Thanh Minh, 12C12, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hoá; **Mai Chí Đạt**, 11E, THPT Hà Trung; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Đông, 11Lí, Nguyễn Ngọc Duy, 12Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Bắc Giang:** Nguyễn Hoàng Hiệp, 12Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Bắc Kạn:** Ngô Việt Hùng, 12Toán, THPT chuyên Bắc Kạn; **Vĩnh Phúc:** Lê Đức Diệp, 12A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** Nguyễn Duy Mạnh, 10A1, THPT Quỳnh Lưu 1, Nguyễn Bá Hữu Đức, 11A1, Khối THPT chuyên, ĐH Vinh, Nguyễn Văn Linh, 12A3K35, Hồ Trọng Hùng, Vũ Đình Hải, 10A3 K37, THPT chuyên Phan Bội Châu.

NGUYỄN VĂN THUẬN

★ **Bài L2/378.**

Một khối trụ đặt trên một mặt bàn ráp nằm ngang. Một tấm ván đặt tựa vào khối trụ và nghiêng so với mặt phẳng ngang một góc 60° (xem hình 1). Biết khối lượng và chiều dài của tấm



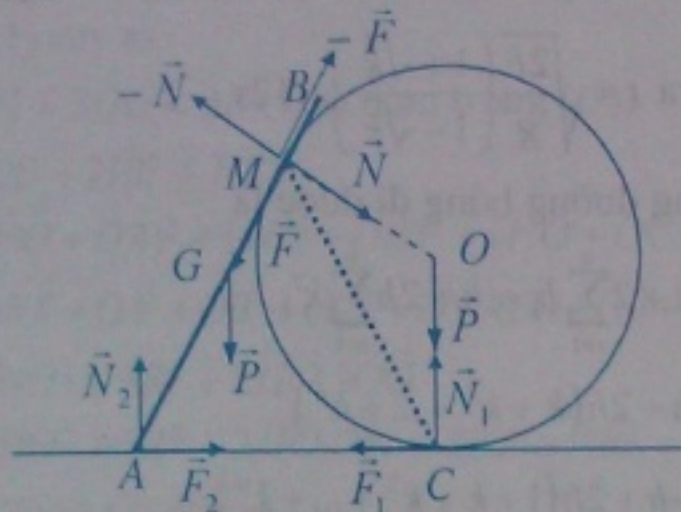
Hình 1

vấn lẫn lượt bằng khối lượng và đường kính của khối trụ. Coi hệ số ma sát tại ba điểm tiếp xúc là như nhau.

a) Chứng tỏ rằng lực ma sát ở ba điểm tiếp xúc bằng nhau.

b) Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hệ số ma sát để đảm bảo sự cân bằng của hệ.

Lời giải. a) Các lực tác dụng lên mỗi vật như hình 2.



Hình 2

M là điểm tiếp xúc giữa thanh với trụ. Theo bài ra ta thấy tam giác AMC đều. Xét cả hệ ta thấy F_1 và F_2 là các ngoại lực theo phương ngang do đó chúng phải có độ lớn bằng nhau. Xét cân bằng mômen của trụ đối với trục quay đi qua O ta được $F = F_1$.

Như vậy $F = F_1 = F_2$.

b) Cũng nhận thấy rằng phản lực vuông góc N nhỏ hơn N_1 và N_2 , do đó để hệ cân bằng chỉ cần hệ số ma sát phải cho thỏa mãn $\mu \geq \frac{F}{N}$.

Xét cân bằng của thanh theo phương ngang

$$F \cos 60^\circ + F_2 = N \cos 30^\circ \Rightarrow F = \frac{N}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do vậy } \mu \geq \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \square$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Vũ Quang Minh, 10 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** Lê Đức Diệp, 12 A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Lưu Cao Cường, Nguyễn Văn Tú, Phạm Ngọc Xuyên, 11A2 THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Nghệ An:** Hồ Trọng Hùng, Hồ Phúc Đạt, Nguyễn Huy Hoàng, Nguyễn Trung Hưng, Mai Trọng Đạt, Nguyễn Bá Dũng, 10A3 THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Đông, 11 Lí, Nguyễn Ngọc Duy, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN XUÂN QUANG

KÌ THI... (Tiếp trang 31)

SENIOR SECTION

Sunday, 29 March 2009.

08h45 – 11h45

The problems from Q1 to Q4 are the same as these in the Junior Section.

Q5. Suppose that $a = 2^b + 19$, where $b = 2^{10n+1}$. Prove that a is divisible by 23 for any positive integer n .

Q6. Determine all positive integral pairs $(u; v)$ for which $5u^2 + 6uv + 7v^2 = 2009$.

Q7. Prove that for every positive integer n there exists a positive integer m such that the last n digits in decimal representation of m^3 are equal to 8.

Q8. Give an example of a triangle whose all sides and altitudes are positive integers.

Q9. Given a triangle ABC with $BC = 5$, $CA = 4$, $AB = 3$ and the points E, F, G lie on the sides BC, CA, AB , respectively, so that EF is parallel to AB and area $(\triangle EFG) = 1$. Find the minimum value of the perimeter of triangle EFG .

Q10. Find all integers x, y, z satisfying the system

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$$

Q11. Let be given three positive numbers α, β and γ . Suppose that four real numbers a, b, c, d

$$\text{satisfy the conditions } \begin{cases} a^2 + b^2 = \alpha \\ c^2 + d^2 = \beta \\ ac + bd = \gamma. \end{cases}$$

Find the set of all possible values the number $M = ab + cd$ can take.

Q12. Let a, b, c, d be positive integers such that $a + b + c + d = 99$. Find the smallest and the greatest values of the following product $P = abcd$.

Q13. Given an acute-angled triangle ABC with area S , let points A', B', C' be located as follows: A' is the point where altitude from A on BC meets the outwards facing semicircle drawn on BC as diameter. Points B', C' are located similarly. Evaluate the sum

$$T = (\text{area } \triangle BCA')^2 + (\text{area } \triangle CAB')^2 + (\text{area } \triangle ABC')^2.$$

Q14. Find all the pairs of the positive integers such that the product of the numbers of any pair plus the half of one of the numbers plus one third of the other number is 7 times less than 2009.

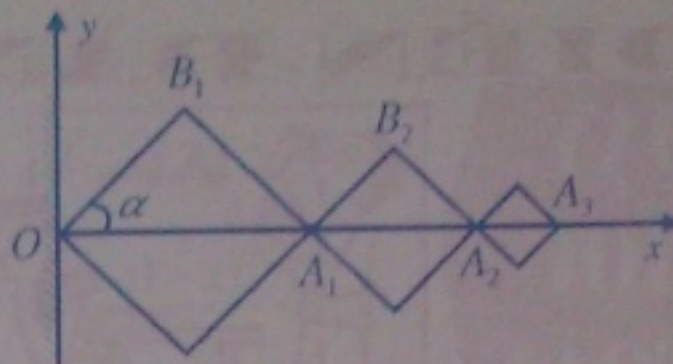
ĐỀ RA... (Tiếp trang 16)

$U_{AC} = 1V$ và $I = 1mA$. Cho biết, nếu giữ cho U_{AC} luôn luôn bằng $1V$, tăng tần số dòng điện lên quá $1000Hz$ thì thấy dòng điện trong mạch giảm. Hỏi

- 1) Đoạn mạch AB chứa linh kiện gì? Đoạn mạch BC chứa linh kiện gì?
- 2) Tính L và C .

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/382. Một hệ thống các bản lề nối các đỉnh của ba hình thoi có tỉ lệ độ dài các cạnh là $3 : 2 : 1$ (như hình vẽ).



Cho đỉnh A_3 chuyển động với vận tốc v theo phương ngang. Tìm vận tốc của các đỉnh A_1 , A_2 , B_1 và B_2 tại thời điểm các cạnh của hình thoi vuông góc với nhau.

ĐỖ TUẤN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/382. (For 6th grade) Compare the sum (consisting of 2010 terms)

$$\frac{1}{2009} + \frac{2}{2009^2} + \frac{3}{2009^3} + \dots + \frac{2009}{2009^{2009}} + \frac{2010}{2009^{2010}}$$

with $\frac{2009}{2008^2}$.

T2/382. (For 7th grade) Find a root of the polynomial $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ given that it has at least one root and $a + 2b + 4c = -\frac{1}{2}$.

T3/382. Let $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ be non negative real numbers whose sum equals 1. Put $S_k = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3}$ ($k = 1, 2, \dots, 6$). Determine the smallest possible value of $M = \max\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$.

T4/382. Let m, n, a, b , and c be real numbers such that the following conditions hold:

$$m^{1000} + n^{1000} = a; \quad m^{2000} + n^{2000} = \frac{2b}{3};$$

$$m^{5000} + n^{5000} = \frac{c}{36}.$$

Find a formula relating a, b and c which does not involve m, n .

T5/382. Let AH be the altitude from A of a triangle ABC . Choose a point D on the half-

plane created by BC which contains A such that $DB = DC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$. Prove that the lengths of the line segments BD, DH and HA are the side lengths of a right triangle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/382. Determine the maximum possible value of $x^2 + y^2$ where x and y are two integers chosen arbitrarily within the interval $[-2009; 2009]$ such that

$$(x^2 - 2xy - y^2)^2 = 4.$$

T7/382. Consider two polynomials with real coefficients:

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad \text{and}$$

$$Q(x) = x^2 + x + 2009.$$

Given that $P(x)$ has n distinct real roots but $P(Q(x))$ does not have any real solution. Prove that $P(2009) > \frac{1}{4^n}$.

T8/382 Let $ABCDEF$ be a regular hexagon and let G be the midpoint of BF . Choose a point I on BC such that $BI = BG$. Let H be a point on IG such that $\widehat{CDH} = 45^\circ$, and K is a point on EF such that $\widehat{DKE} = 45^\circ$. Prove that DHK is an equilateral triangle.

Translated by LE MINH HA



PHẢI BIẾT GIẢI BÀI TOÁN bằng nhiều cách

NGUYỄN NGỌC KHOA

(GV THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Đối với mỗi dạng toán, mỗi câu hỏi khác nhau, mỗi bài toán, ta cần phải chọn lọc từng cách giải thích hợp. Muốn có kĩ năng này, người làm toán cần phải suy nghĩ tìm tòi nhiều phương pháp giải hay, nhiều bài toán mới. Sau đây là một số bài toán minh họa.

Cho x, y, z là các số thực tùy ý thỏa mãn điều

$$\text{kiện } \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad (*)$$

❖ **Bài toán 1.** Với điều kiện (*), hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

1) $P = x^2 + y^2 + z^2$;

2) $Q = (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$.

Lời giải.

1) • **Cách 1**

a) Vai trò x, y, z như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$ suy ra $1 \leq x \leq 2$.

$$\begin{aligned} P &= (x + y + z)^2 - 2(y + z)x - 2yz \\ &= 9 - 2(3 - x)x - 2yz \leq 2x^2 - 6x + 9 = f(x). \end{aligned}$$

Khảo sát hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$ ta dễ dàng tính được $\max_{[1;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 5$.

Do đó $P \leq 5$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2, y = 1, z = 0$. Vậy $\max P = 5$.

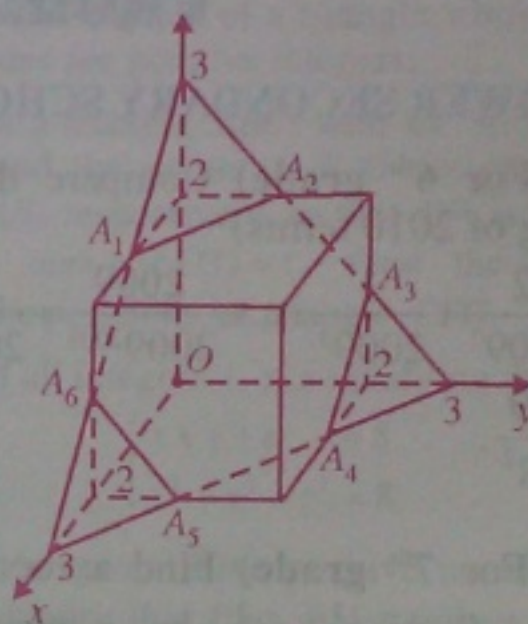
$$\begin{aligned} \text{b) } P &= 2x^2 - 6x + 9 - 2yz \geq 2x^2 - 6x + 9 - \frac{(y+z)^2}{2} \\ &= 2x^2 - 6x + 9 - \frac{(3-x)^2}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 6x + 9) = g(x). \end{aligned}$$

Khảo sát hàm số $g(x)$ trên $[1; 2]$, ta có $\min_{[1;2]} g(x) = g(1) = 3$. Do đó $P \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy $\min P = 3$.

❖ **Nhận xét.** Câu b) có thể giải gọn hơn bằng cách sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky

$$P = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2 = 3.$$

• **Cách 2** (Sử dụng phương pháp hình học)



Trong không gian $Oxyz$ lấy điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn (*). Khi đó $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Tập các điểm M là thiết diện của khối lập phương cạnh bằng 2 với mặt phẳng $(K): x + y + z = 3$ (hình vẽ) thiết diện này là hình lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (kể cả những điểm thuộc miền trong), kí hiệu là (H) với $A_1(1;0;2), A_2(0;1;2), A_3(0;2;1), A_4(1;2;0), A_5(2;1;0), A_6(2;0;1)$.

Bài toán quy về tìm vị trí M trên (H) sao cho OM^2 lớn nhất, bé nhất.

a) OM^2 đạt giá trị lớn nhất khi M trùng với A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Ta có $OA_i = 5$. Vậy $\max P = 5$.

b) Gọi $T(x_0; y_0; z_0)$ là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (K) . Ta có

$$\begin{cases} \frac{x_0}{1} = \frac{y_0}{1} = \frac{z_0}{1} \\ x_0 + y_0 + z_0 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = z_0 = 1$$

suy ra $T(1; 1; 1) \in (H)$.

Vậy $\min P = 3$.

2) Với câu 2 này, tính đối xứng của x, y, z không còn, vì vậy ta không thể giải như cách 1 trong câu 1 để tìm $\max Q$. Sử dụng phương pháp "hình học" ở cách 2 ta tìm được $\max Q$ không có gì thay đổi.

$$\max Q = \max \{AA_1^2, \dots, AA_6^2\} = 17,$$

với $A(4; 1; 1)$.

$Q = 17$ tại $(x; y; z) = (0; 1; 2)$ hoặc $(0; 2; 1)$.

Nhưng việc tìm $\min Q$ đã khác! Vì hình chiếu vuông góc của $A(4; 1; 1)$ lên mặt phẳng (K) không thuộc (H) (bạn đọc hãy kiểm tra lại). Nhận xét rằng bài toán đối xứng đối y, z , vì vậy ta có thể sử dụng cách 1 của Bài toán 1 để tìm $\min Q$ như sau.

$$\begin{aligned} Q &= (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ &= (x+y+z-6)^2 - 2(y+z-2)(x-4) \\ &\quad - 2(y-1)(z-1) \\ &= 9 - 2(1-x)(x-4) - 2(y-1)(z-1) \\ &\geq 9 - 2(1-x)(x-4) - \frac{(y+z-2)^2}{2} \\ &= 9 - 2(1-x)(x-4) - \frac{(1-x)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(3x^2 - 18x + 33) = h(x). \end{aligned}$$

Khảo sát hàm số $h(x)$ trên $[0; 2]$, ta có

$$\min_{[0; 2]} h(x) = h(2) = \frac{9}{2} \text{ nên } Q \geq \frac{9}{2}. \text{ Đẳng thức}$$

xảy ra khi $x = 2, y = z = \frac{1}{2}$. Vậy $\min Q = \frac{9}{2}$.

Nhận xét. Cùng một hướng giải nhưng có thể trình bày gọn hơn bằng cách sử dụng bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \text{ như sau:}$$

$$\begin{aligned} &(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ &\geq (x-4)^2 + \frac{(y+z-2)^2}{2} \\ &= (x-4)^2 + \frac{(1-x)^2}{2} = t(x). \end{aligned}$$

Khảo sát hàm $t(x)$ trên $[0; 2]$ ta có kết quả.

★ Bài toán 2. Với điều kiện (*)

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-4)^2.$$

2) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = (x-1)^2 + 2y^2 + 3(z-4)^2.$$

Lời giải

1) • Cách 1. Rõ ràng bài toán không còn đối xứng với x, y (hoặc y, z hoặc z, x) nên không thể áp dụng trực tiếp cách giải câu 2 của Bài toán 1 vào bài toán này.

Để ý rằng $x-1 = x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$. Vì vậy nếu đặt

$t = x - \frac{1}{2}$ thì điều kiện (*) trở thành

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 \\ t + y + z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{và } E = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-4)^2.$$

Với việc đặt biến phụ trên, biểu thức E đối xứng đối với t, y . Vì vậy có thể áp dụng cách giải trong câu 2 của Bài toán 1 và ta sẽ có một lời giải đẹp.

• Cách 2. Có thể giải bằng phương pháp "đạo hàm theo từng biến" như sau:

Từ $z = 3 - x - y$ và do $0 \leq z \leq 2$ nên $0 \leq 3 - x - y \leq 2 \Leftrightarrow 1 - y \leq x \leq 3 - y$

$$\text{và } E = (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (1+x+y)^2.$$

Xem y là tham số với $0 \leq y \leq 2$, xét hàm

$$f(x) = (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (1+x+y)^2$$

với $1-y \leq x \leq 3-y$.

$$f'(x) = 2(x-1) + 2(1+x+y) = 4x + 2y;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-y}{2} \leq 1-y \quad (\text{do } 0 \leq y \leq 2).$$

Vì $f(x)$ đồng biến trên $(1-y; 3-y)$ nên

$$\min_{[1-y, 3-y]} f(x) = f(1-y) = y^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 4 = g(y)$$

$$g'(y) = 2y + 2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4} \in (0; 2).$$

Lại do $g'(y)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $y = \frac{1}{4}$ nên $\min_{[0; 1]} g(y) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{33}{8}$. Vậy

$$\min E = \frac{33}{8} \text{ đạt tại } x = \frac{3}{4}, y = \frac{1}{4}, z = 2.$$

Nhận xét. Dễ nhận thấy rằng, đối với câu 1 của Bài toán 2 này thì cách 2 vừa nêu trên không hay và có phần dài dòng. Nhưng đến câu 2 vai trò x, y, z không như nhau, thì các phương pháp giải ở Bài toán 1 đã không còn hiệu lực, lúc này cách 2 vừa nêu trên mới phát huy tác dụng.

Trở lại kết quả câu 2 Bài toán 1, $\min Q = \frac{9}{2}$

đạt tại $x = 2, y = z = \frac{1}{2}$. Điểm $M\left(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

là hình chiếu của $A(4; 1; 1)$ lên cạnh A_6A_5 .

Trong câu 1 Bài toán 2, $\min E = \frac{33}{8}$ đạt tại

$x = \frac{3}{4}, y = \frac{1}{4}, z = 2$. Điểm $H\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; 2\right)$ là

hình chiếu vuông góc của điểm $S\left(1; \frac{1}{2}; 4\right)$

lên cạnh A_1A_2 của lục giác $A_1A_2...A_6$. Các bạn hãy suy nghĩ xem, các nhận xét trên có ý nghĩa hình học gì không?!

Thay cho bài tập, các bạn hãy tìm thêm nhiều cách giải khác cho các bài toán trong bài viết này và hoàn thành câu 1 và câu 2 của Bài toán 2. Chúc các bạn thành công.

HƯỚNG DẪN GIẢI... (Tiếp trang 10)

PT đường thẳng qua F và vuông góc với d là

$$d_1: -B(x - \sqrt{13}) + Ay = 0, M = d \cap d_1.$$

Toạ độ M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} Ax + By = -C \\ -Bx + Ay = -\sqrt{13}B. \end{cases}$$

Bình phương hai vế của từng PT rồi cộng lại theo vế, kết hợp với (1), suy ra $x^2 + y^2 = 9$.

2) Gọi H là trực tâm tam giác ABC , chứng minh OH vuông góc với mp(ABC). PT

$$\text{mp}(ABC) \text{ là } \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

$$\text{PT đường thẳng } OH: \begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } H\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right).$$

Câu 7b. Gọi A là biến cố "Ngọc, Thảo có phần thưởng giống nhau".

Nhận thấy có 2 học sinh nhận sách (Toán, Lí); 3 học sinh nhận sách (Toán, Hóa) và 4 học sinh nhận sách (Lí, Hóa).

Số phần tử của không gian mẫu là

$$n(\Omega) = C_9^2 C_7^3 C_4^4 = 1260.$$

TH1. Ngọc, Thảo nhận sách (Toán, Lí), số khả năng là $C_7^3 C_4^4 = 35$.

TH2. Ngọc, Thảo nhận sách (Toán, Hoá), số khả năng là $7C_6^2 C_4^4 = 105$.

TH3. Ngọc, Thảo nhận sách (Lí, Hoá), số khả năng là $C_7^2 C_5^3 C_2^2 = 210$.

$$\text{Suy ra } n(A) = 35 + 105 + 210 = 350.$$

$$\text{Do đó } p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{18}.$$

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Kì thi Olympic Toán học Hà Nội mở rộng

năm 2009

NGUYỄN VĂN MẬU
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Ngày 29.3.2009 tại Giảng đường lớn tầng 7 nhà T5, Trường Đại Học Khoa học Tự nhiên Hà Nội, Hội Toán học Hà Nội đã tổ chức Kì thi Olympic Toán học Hà Nội mở rộng (HOMO) lần thứ IV với sự tham gia của 50 em học sinh lớp 8 (Junior level, sinh sau ngày 01.01.1995) và 70 em học sinh lớp 10 (Senior level, sinh sau ngày 01.01.1993) từ các trường THCS và THPT thuộc Hà Nội, Hải Dương, Quảng Ninh, Bắc Giang, Bắc Ninh, Hòa Bình, Lào Cai, Yên Bái, Phú Thọ, Vĩnh Phúc, Thái Bình, Thái Nguyên.

Sau Kì thi này, Ban Tổ chức sẽ chọn ra 20 em bậc THCS và 20 em bậc THPT tham dự Kì thi Olympic Singapore mở rộng vào cuối tháng 5 năm 2009. Sau đây là đề bài của Kì thi HOMO:

Important:

Answer all 14 questions.

Enter your answers on the answer sheet provided.

No calculators are allowed.

JUNIOR SECTION

Sunday, 29 March 2009.

08h45 – 11h45

Q1. What is the last two digits of the number $1000.1001 + 1001.1002 + 1002.1003 + \dots + 2008.2009$?

- (A) 25; (B) 41; (C) 36; (D) 54;
(E) None of the above.

Q2. Which is largest positive integer n satisfying the inequality

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} < \frac{6}{7}?$$

- (A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6;
(E) None of the above.

Q3. How many integral roots of the inequality

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 2 \text{ are there in } (-10; 10)?$$

- (A) 15; (B) 16; (C) 17; (D) 18;
(E) None of the above.

Q4. How many triples $(a; b; c)$ where $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ and $a < b < c$ such that the number $abc + (7-a)(7-b)(7-c)$ is divisible by 7?

- (A) 15; (B) 17; (C) 19; (D) 21;
(E) None of the above.

Q5. Show that there is a natural number n such that the number $a = n!$ ends exactly in 2009 zeros.

Q6. Let a, b, c be positive integers with no common factor and satisfy the condition

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}. \text{ Prove that } a+b \text{ is a square.}$$

Q7. Suppose that $a = 2^b + 19$, where $b = 2^{10n+1}$. Prove that a is divisible by 23 for any positive integer n .

Q8. Prove that $m^7 - m$ is divisible by 42 for any positive integer m .

Q9. Suppose that four real numbers a, b, c, d satisfy the conditions

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 4 \\ ac + bd = 2. \end{cases}$$

Find the set of all possible values the number $M = ab + cd$ can take.

Q10. Let a, b be positive integers such that $a + b = 99$. Find the smallest and the greatest values of the following product $P = ab$.

Q11. Find all integers x, y such that

$$x^2 + y^2 = (2xy + 1)^2.$$

Q12. Find all the pairs of the positive integers such that the product of the numbers of any pair plus the half of one of the numbers plus one third of the other number is three times less than 15.

Q13. Let be given $\triangle ABC$ with area $(\triangle ABC) = 60\text{cm}^2$. Let R, S lie in BC such that $BR = RS = SC$ and P, Q be midpoints of AB and AC , respectively. Suppose that PS intersects QR at T . Evaluate area $(\triangle PQT)$.

Q14. Let ABC be an acute-angled triangle with $AB = 4$ and CD be the altitude through C with $CD = 3$. Find the distance between the midpoints of AD and BC .

(Xem tiếp trang 26)

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: PGS. TS. PHAN DOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,
TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,
PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,
TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,
GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY,
GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**

Hoàng Văn Chung – Đi tìm những bài toán thú vị từ một bài toán quen thuộc.

- 3 **Đề thi vào lớp 10 khối THPT chuyên ĐH Vinh, Nghệ An, năm học 2008 – 2009.**

- 4 **Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên Toán trường THPT chuyên Hưng Yên, năm học 2008 – 2009.**

- 6 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**

Trần Văn Xuân – Cách lập phương trình đường thẳng trong không gian.

- 9 **Thử sức trước kì thi**

Trần Văn Hạnh – Đề số 4.

- 10 **Nguyễn Anh Dũng – Hướng dẫn giải Đề số 1.**

- 11 **Nguyễn Văn Thuận – Hướng dẫn ôn tập môn Vật lí thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2009.**

Chủ đề: Dao động và sóng điện từ, sóng ánh sáng.

- 13 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**

Lê Văn Lục – Sử dụng tính lẻ, lộn của đồ thị hàm số vào chứng minh bất đẳng thức.

- 15 **Lễ phát động cuộc thi truyện ngắn, bút kí, phóng sự về ngành Giáo dục.**

- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/382, ..., T8/382, L1/382, L2/382.

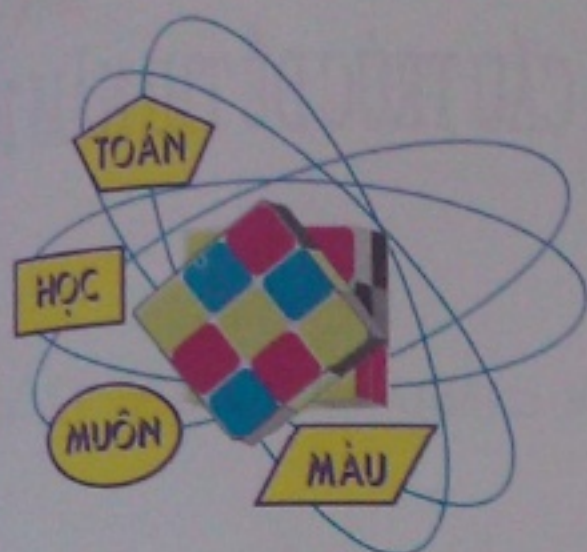
- 17 **Cuộc thi giải toán Kỉ niệm 45 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ – The M&Y 45th Anniversary Contest**
T3/THCS, T4/THCS, T3/THPT, T4/THPT.

- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 378.

- 28 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Nguyễn Ngọc Khoa – Phải biết giải bài toán bằng nhiều cách.

- 31 **Nguyễn Văn Mậu – Kì thi Olympic Toán học Hà Nội mở rộng năm 2009.**

Bìa 3. Toán học muôn màu –
Multifarious Mathematics



Giải đáp:

PHÂN CHIA TAM GIÁC ĐỀU, GHÉP THÀNH HÌNH VUÔNG

(Đề đăng trên THPT số 377, tháng 11, 2008)

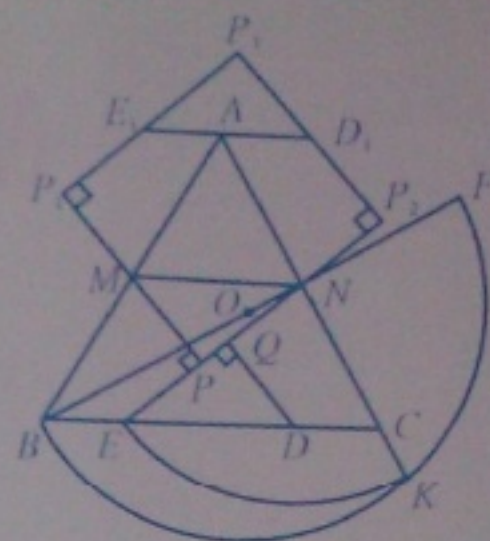
Diện tích tam giác đều ABC cạnh $BC = 2a$ là $S_{ABC} = \sqrt{3}a^2$ và $MN = a$.

1) Theo cách dựng của bạn *Toán* thì $MP_1 = MP$ nên $PP_1 = 2MP = \sqrt{2}a$. Giả sử $PP_1P_3P_2$ là hình vuông thì $S_{PP_1P_3P_2} = PP_1^2 = 2a^2$, không bằng $S_{ABC} = \sqrt{3}a^2$, nên bạn *Toán* làm chưa chuẩn xác. Cách khác: chỉ ra theo cách của bạn *Toán* thì $E_1D_1 > ED$.

2) Cách phân chia và ghép hình đúng như sau (h. 1). Trên tia BN lấy điểm F sao cho $BF > BN$ và $NF = AN = a$. Đường tròn tâm O đường kính BF cắt tia AC tại K . Lúc đó $NK^2 = NF \cdot NB = \sqrt{3}a^2$ nên $NK = \sqrt[4]{3}a$. Đường tròn tâm N bán kính NK cắt

đoạn BC tại E thì $NE = NK = \sqrt[4]{3}a$. Trên tia EC lấy điểm D sao cho $ED = a$. Gọi hình chiếu của M, D trên NE tương ứng là P, Q .

Đặt tứ giác $MPEB$ vào vị trí MP_1E_1A , đặt tứ giác $NQDC$



Hình 1

vào vị trí NP_2D_1A , đặt tam giác vuông QED vào vị trí $P_3E_1D_1$. Xét các góc dễ thấy các bộ ba điểm sau thẳng hàng: P_1, E_1 và P_3 ; P_2, D_1 và P_3 ; E_1, A và D_1 . Ta có $E_1D_1 = BE + DC = a = ED$.

Do $\triangle QED = \triangle PNM$ ($\widehat{EQD} = \widehat{NPM} = 90^\circ$, $ED = NM$, $\widehat{QED} = \widehat{PNM}$) nên $QD = MP$, $QE = PN$.

Từ đó có $EP = QN$ và $P_1P_3 = P_1E_1 + E_1P_3 = PE + EQ = QN + EQ = EN = \sqrt[4]{3}a$.

Từ $MP \cdot \sqrt[4]{3}a = 2S_{MNE} = MN \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ có

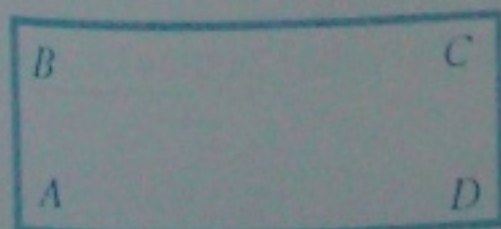
$PP_1 = 2MP = \sqrt[4]{3}a$. Vậy tứ giác $PP_1P_3P_2$ là hình vuông có cạnh bằng $\sqrt[4]{3}a$, do đó $S_{PP_1P_3P_2} = S_{ABC}$.

Nhiều bạn đã phân tích cách làm của bạn *Toán* là chưa chuẩn xác. Chỉ có bạn *Lê Nguyễn Khánh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi đã trình bày cách phân chia và ghép hình đúng.

PHI PHI



TẠO TỨ DIỆN từ tờ giấy hình chữ nhật



Hình 2

Dùng một tờ giấy hình chữ nhật có thể tạo thành một tứ diện, để đựng sữa hoặc chứa tặng phẩm,...

Dành cho bạn đọc

- 1) Hãy trình bày cách dán phần viền với nhau (màu sẫm như ở hình 2) của một hình chữ nhật để tạo thành một tứ diện gần đều (tức là các cặp cạnh đối đều bằng nhau).
- 2) Tính thể tích của khối tứ diện gần đều được tạo thành từ hình chữ nhật $ABCD$ với $AD = 32(\text{cm})$, $AB = 13(\text{cm})$ (không kể phần viền) mà các mặt đều là tam giác cân với đáy bằng $16(\text{cm})$.

ĐAN QUỲNH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
trân trọng giới thiệu bộ sách :



ÔN LUYỆN KIẾN THỨC THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI NĂM 2009

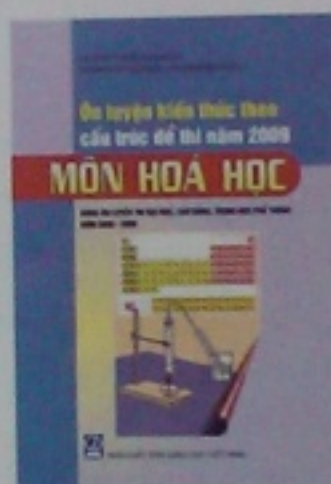
TỰ GIẢI CÁC ĐỀ

ĐỐI CHIỀU HƯỚNG DẪN

Cơ hội tốt củng cố kiến thức, rèn kỹ năng để

thi tốt nghiệp THPT và

Đại học - Cao đẳng



Mọi chi tiết xin liên hệ :

- Công ty CP sách Đại học - Dạy nghề - 25 Hàn Thuyên, Hà Nội. Tel : (04) 39726137.
- Công ty CP sách Giáo dục tại TP. Đà Nẵng - số 78 Pasteur, Đà Nẵng. Tel : (0511) 33889327.
- Công ty CP Học liệu - 240 Trần Bình Trọng, Q5, TP HCM. Tel : (08) 38300472.

ISSN : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT04M9

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2009

Giá : 6000 đồng
Sáu nghìn đồng.
<http://tieulun.hopto.org>