



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
1 2009
Số 379

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự: (04) 35144272, (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre

Happy New Year 2009





TRUNG HỌC CƠ SỞ

Một tính chất của đường tròn NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

THÁI NHẬT PHƯƠNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi
Cam Ranh, Khánh Hòa)

I. TÍNH CHẤT

Tích hai cạnh của một tam giác bằng tích đường cao ứng với cạnh còn lại với đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Chứng minh. (h. 1)

Giả sử $\triangle ABC$ có đường cao AH đường tròn $(O; R)$ đường kính AD ngoại tiếp tam giác. Dễ thấy $\triangle AHB \sim \triangle ACD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD}$$

$$\Rightarrow AH \cdot AD = AC \cdot AB (*) \quad \square$$

Dưới đây, trong tam giác ABC ta kí hiệu a, b, c lần lượt là ba cạnh đối diện với đỉnh A, B, C ; O, R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác; I, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác; h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao l_a, l_b, l_c lần lượt là độ dài đường phân giác trong kẻ từ các đỉnh A, B, C . Hệ thức (*) có dạng $bc = 2R \cdot h_a$.

II. HỆ QUẢ

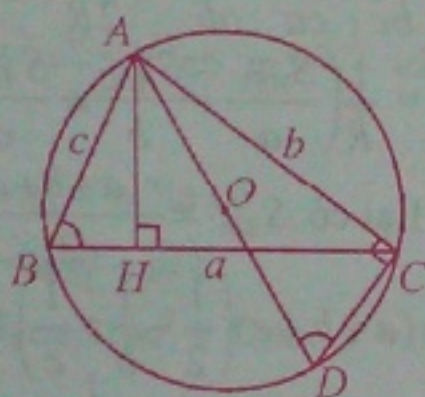
a) Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì $a = 2R$, ta được một hệ thức trong tam giác vuông là $bc = a \cdot h_a$.

b) Nếu góc B nhọn thì $2R = b : \frac{h_a}{c} = \frac{b}{\sin B}$.

Tương tự, nếu các góc A, B, C đều nhọn thì

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

c) Từ $bc = 2R \cdot h_a \Rightarrow abc = 2Rah_a = 4R \cdot S_{ABC}$
 $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$



Hình 1

III. ÁP DỤNG

✪ Bài toán 1. Cho đường tròn $(O; R)$. Hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $\frac{(AD+BC)(AC+BD)}{AB+CD} = 2R$.

Lời giải. (h. 2)

Gọi H là giao điểm của AB và CD . Theo tính chất (*) ta có $AC \cdot AD = 2R \cdot AH$ và $BC \cdot BD = 2R \cdot BH$.

Suy ra

$$AC \cdot AD + BC \cdot BD = 2R(AH + BH) = 2R \cdot AB$$

Tương tự $CA \cdot CB + DA \cdot DB = 2R \cdot CD$.

Do đó $AC \cdot AD + BC \cdot BD + CA \cdot CB + DA \cdot DB = 2R(AB + CD) \Rightarrow \text{đpcm.} \quad \square$

✪ Bài toán 2. Cho A là một điểm cố định trên đường tròn $(O; R)$. Hai dây cung thay đổi AB và AC luôn thoả mãn $AB \cdot AC = 3R^2$.

a) Chứng minh rằng BC luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

b) Xác định vị trí của các dây cung AB và AC để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải. (h. 3)

a) Kẻ $AH \perp BC$,

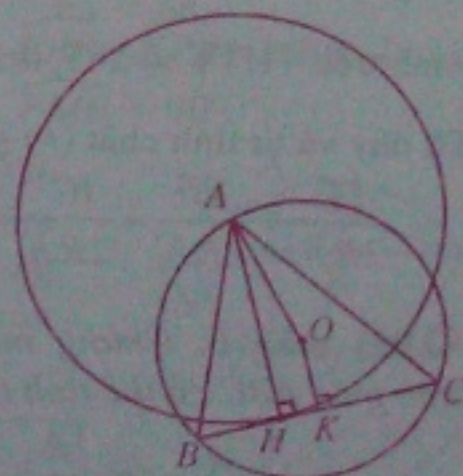
theo (*) ta có

$$AB \cdot AC = 2R \cdot AH$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{3R}{2}$$

Vậy BC luôn tiếp xúc với đường

tròn $\left(A; \frac{3R}{2}\right)$.



Hình 3

b) Ta có $OK + OA \geq AK \geq AH$ nên

$$OK \geq \frac{3R}{2} - R = \frac{R}{2}.$$

Do AH không đổi nên S_{ABC} lớn nhất $\Leftrightarrow BC$ lớn nhất $\Leftrightarrow OK$ bé nhất $\Leftrightarrow OK = \frac{R}{2} \Leftrightarrow BC \perp OA$.

Khi đó ΔABC đều. $\square$

★ **Bài toán 3.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ với đường cao $AH = R\sqrt{2}$. Gọi D và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H xuống AB và AC . Chứng minh rằng

$$S_{ADK} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Lời giải. (h. 4) Ta có $AD \cdot AB = AH^2 = AK \cdot AC$

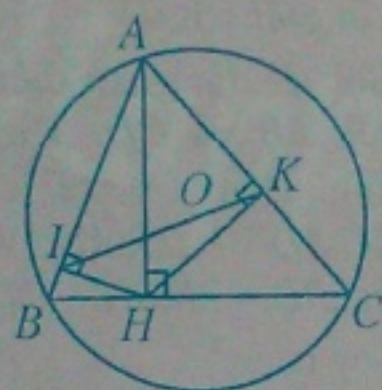
$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AK}{AB}.$$

Từ đó suy ra

$$\Delta ADK \sim \Delta ACB$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADK}}{S_{ACB}} = \left(\frac{AD}{AC} \right)^2$$

$$= \left(\frac{AH^2}{AB \cdot AC} \right)^2 = \left(\frac{AH^2}{2R \cdot AH} \right)^2 = \left(\frac{R\sqrt{2}}{2R} \right)^2 = \frac{1}{2}. \square$$



Hình 4

★ **Bài toán 4.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và ngoại tiếp đường tròn (I) . Chứng minh rằng

$$\frac{IA^2}{h_a} + \frac{IB^2}{h_b} + \frac{IC^2}{h_c} = 2R.$$

Lời giải. Ta có $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$ (xem chứng minh trên THPT số 265, tháng 7/1999).

Từ đây và từ tính chất (*) suy ra

$$\frac{IA^2}{2R \cdot h_a} + \frac{IB^2}{2R \cdot h_b} + \frac{IC^2}{2R \cdot h_c} = 1 \Rightarrow \text{đpcm.} \square$$

★ **Bài toán 5.** Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC có thể tính theo công thức

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{R}{2} h_a h_b h_c}.$$

Lời giải. Theo tính chất (*) ta có $ab = 2R \cdot h_c$, $bc = 2R \cdot h_a$, $ca = 2R \cdot h_b$. Suy ra

$$(abc)^2 = 8R^3 \cdot h_a h_b h_c$$

$$\Rightarrow (4R \cdot S_{ABC})^2 = 8R^3 \cdot h_a h_b h_c$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{\frac{R}{2} h_a h_b h_c}. \square$$

★ **Bài toán 6.** Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có bất đẳng thức

$$\frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab} \geq \frac{9r}{2R}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab} = \frac{1}{2R} (h_a + h_b + h_c)$$

$$= \frac{1}{R} \left(\frac{S_{ABC}}{a} + \frac{S_{ABC}}{b} + \frac{S_{ABC}}{c} \right)$$

Lại có $S_{ABC} = \frac{r(a+b+c)}{2}$ và áp dụng BĐT

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{9}{2}. \text{ Suy ra đpcm. } \square$$

Cuối cùng, mời các bạn cùng luyện tập thông qua một số bài toán sau đây.

1. Tam giác nhọn ABC có chu vi $2p$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp R , chứng minh rằng

a) $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R};$

b) $S_{ABC} = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$

2. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có các bất đẳng thức sau:

a) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq 2R\sqrt{2R h_a h_b h_c};$

b) $IA^2 \cdot IB^2 \cdot IC^2 \leq \frac{8}{27} R^3 \cdot h_a h_b h_c;$

c) $h_a + h_b + h_c \geq \frac{(IA+IB+IC)^2}{2R}.$

3. Chứng minh rằng với tam giác ABC bất kì ta có bất đẳng thức $\frac{ab}{l_c} + \frac{bc}{l_a} + \frac{ca}{l_b} \leq 6R.$

Đã có ĐỒNG TẬP TOÁN HỌC & TUỔI TRÉ
NĂM 2008

Số lượng sách có hạn, mời các bạn đặt mua ngay về tòa soạn.

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG

NĂM HỌC 2008 - 2009

(Đề thi đã đăng trên THPT số 377 tháng 11 năm 2008)

Câu 1. Đặt $y = x^2$ ($y \geq 0$) thì PT (1) trở thành

$$y^2 - 2(2m + 1)y + 4m^2 = 0 \quad (2)$$

1) Với $m = 2$, PT (2) trở thành

$$y^2 - 10y + 16 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ hoặc } y = 8 \text{ (thoả mãn).}$$

Đáp số. PT (1) có bốn nghiệm

$$\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}.$$

2) Để PT (1) có bốn nghiệm phân biệt thì PT (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt y_1, y_2

nghĩa là $\Delta' > 0$, $\frac{c}{a} > 0$ và $-\frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$ và $m \neq 0$.

Giả sử $x_1^2 = x_2^2 = y_1$, $x_3^2 = x_4^2 = y_2$ ta có

$$\begin{aligned} 17 &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(y_1^2 + y_2^2) \\ &= 2(4(2m + 1)^2 - 8m^2) \Rightarrow 16m^2 + 32m - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow m &= -\frac{9}{4} \text{ (loại) hoặc } m = \frac{1}{4} \text{ (thoả mãn).} \end{aligned}$$

Câu 2. • Với $b = \frac{3}{8}$, tính trực tiếp được $A = 1$.

• Với $b > \frac{3}{8}$, lập phương hai vế biểu thức A rồi rút gọn ta được

$$\begin{aligned} A^3 &= 6b - 2 + 3A\sqrt{(3b-1)^2 - b^2(8b-3)} \\ &= 6b - 2 + 3A(1 - 2b). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } A^3 - 3(1 - 2b)A - (6b - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - 1) \left(\left(A + \frac{1}{2} \right)^2 + 6 \left(b - \frac{3}{8} \right) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow A - 1 = 0 \text{ (do thừa số thứ hai dương).}$$

Vậy với $b \geq \frac{3}{8}$ thì $A = 1$.

Câu 3. Điều kiện $-1 \leq x \leq 9, -1 \leq y \leq 9$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{9-y} = \sqrt{y+1} + \sqrt{9-x}.$$

• Nếu $x > y$ thì $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$ và $\sqrt{9-y} > \sqrt{9-x}$, nên $\sqrt{x+1} + \sqrt{9-y} > \sqrt{y+1} + \sqrt{9-x}$, mâu thuẫn.

• Nếu $x < y$ thì tương tự suy ra

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{9-y} < \sqrt{y+1} + \sqrt{9-x}, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy $x = y$, thay vào PT thứ nhất của hệ đã cho

$$\text{ta được } \sqrt{x+1} + \sqrt{9-x} = m \quad (1)$$

1) Với $m = 2\sqrt{5}$ thì PT (1) trở thành

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{9-x} = 2\sqrt{5}.$$

Bình phương hai vế rồi rút gọn ta được

$$\sqrt{(x+1)(9-x)} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

HPT đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 4)$.

2) Giả sử $(x; y) = (x_0; x_0)$ là một nghiệm của

$$\text{HPT đã cho, ta có } \sqrt{x_0+1} + \sqrt{9-x_0} = m$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9-(8-x_0)} + \sqrt{(8-x_0)+1} = m.$$

Suy ra $(8-x_0; 8-x_0)$ cũng là nghiệm của HPT

đã cho. Vậy để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì

$$x_0 = 8-x_0 \text{ hay } x_0 = 4. \text{ Thay vào (1) có } m = 2\sqrt{5}.$$

Thử lại, với $m = 2\sqrt{5}$ thì theo câu 1) HPT đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 4)$.

Câu 4. Điều kiện $x \neq 0$.

$$\text{Đặt } a = x + \sqrt{2009}, b = \frac{16}{x} - \sqrt{2009}.$$

Thay $x = a - \sqrt{2009}$ vào biểu thức b ta có

$$b = \frac{16}{a - \sqrt{2009}} - \sqrt{2009} \Leftrightarrow ab - 2025 = (b - a)\sqrt{2009}.$$

Để $a, b \in \mathbb{Z}$ thì $a = b$, do đó $ab - 2025 = 0$.

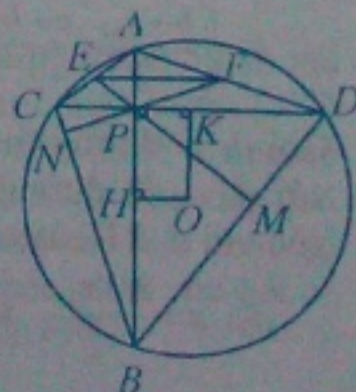
$$\text{Từ đó } a = b = \pm 45 \Rightarrow x = \pm 45 - \sqrt{2009}.$$

Thử lại, với $x = \pm 45 - \sqrt{2009}$ thì thấy a, b là số nguyên.

Câu 5. 1) Ta thấy $\widehat{EAP} = \widehat{EPA} = \widehat{MPB}$. Lại có $\widehat{DCA} = \widehat{DBA}$ nên $\widehat{PMB} = 90^\circ$.

Tương tự ta có $\widehat{PNB} = 90^\circ$. Vậy bốn điểm M, N, B, P cùng thuộc đường tròn đường kính BP .

(Xem tiếp trang 7)



❖❖❖ LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ❖❖❖

CÁC BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA PTTH

NĂM 2008

(Tiếp theo kì trước)

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT)

BÀI 7. Cho tam giác ABC , trung tuyến AD . Cho đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AD . Xét điểm M nằm trên d . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của MB và MC . Đường thẳng đi qua E và vuông góc với d cắt đường thẳng AB tại P , đường thẳng đi qua F và vuông góc với d cắt đường thẳng AC tại Q . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định, khi điểm M di động trên đường thẳng d .

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy có $O \equiv D$, trục Oy trùng với đường thẳng DA . (Bạn đọc tự vẽ hình). Khi đó $Ox \parallel d$.

Đặt $\overline{OA} = a$; do A không trùng D nên $a \neq 0$. Vì $A \in Oy$ nên $A = (0; a)$.

Gọi $(b; c)$ là tọa độ của B ; do $B \notin Oy$ nên $b \neq 0$. Vì B và C đối xứng với nhau qua D nên $C = (-b; -c)$.

Suy ra $\overline{AB} = (b; c-a)$ và $\overline{AC} = (-b; -c-a)$. Do đó, các đường thẳng AB và AC có PT là

$$\begin{aligned} AB: (a-c)x + by - ab &= 0; \\ AC: (a+c)x - by + ab &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Kí hiệu $(x_M; y_M)$ là tọa độ của M ; do $M \in d$ nên $|y_M|$ là khoảng cách giữa d và Ox . Vì thế, khi M di động trên d thì x_M thay đổi và y_M giữ nguyên giá trị. Đặt $y_M = h$, ta có

$$E = \left(\frac{b+x_M}{2}; \frac{c+h}{2} \right) \text{ và } F = \left(\frac{x_M-b}{2}; \frac{h-c}{2} \right).$$

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua E và vuông góc với d ; d_2 là đường thẳng đi qua F và vuông góc với d . PT của các đường thẳng d_1 và d_2 là:

$$d_1: x = \frac{b+x_M}{2} \text{ và } d_2: x = \frac{x_M-b}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$P = d_1 \cap AB = \left(\frac{b+x_M}{2}; a - \frac{(a-c)(b+x_M)}{2b} \right);$$

$$Q = d_2 \cap AC = \left(\frac{x_M-b}{2}; a + \frac{(a+c)(x_M-b)}{2b} \right).$$

Do đó $\overline{PQ} = \left(-b; \frac{a x_M - bc}{b} \right)$. Vì vậy, đường thẳng Δ đi qua $M(x_M; h)$ và vuông góc với đường thẳng PQ có phương trình

$$-b(x-x_M) + \frac{a x_M - bc}{b}(y-h) = 0 \text{ hay}$$

$$b^2 \left(x - \frac{bc}{a} \right) - (a x_M - bc) \left(y - h + \frac{b^2}{a} \right) = 0.$$

Suy ra, khi M di động trên d , đường thẳng Δ luôn đi qua điểm cố định $\left(\frac{bc}{a}; h - \frac{b^2}{a} \right)$. $\square$

• **Lời bàn.** Với việc được chỉ dẫn phương pháp giải trước khi làm bài, bài toán trên chỉ có thể sử dụng để kiểm tra việc thuộc lí thuyết cơ bản trong phạm vi chương trình Hình học lớp 10 THPT (chương trình chuẩn) hiện hành. Trường hợp không được chỉ dẫn phương pháp giải trước khi làm bài, bài toán trên cũng chỉ có thể được xếp vào loại "bài tập SGK Hình học 10 theo chương trình nâng cao môn Toán THPT hiện hành". Vì thế, câu hỏi "Vì sao có tới 81,2% tổng số thí sinh dự thi bị điểm 0 ở bài toán trên?" là một câu hỏi cần được những người có trách nhiệm, tâm huyết với phong trào học sinh giỏi Toán bậc phổ thông, cũng như các học sinh khá, giỏi Toán bậc phổ thông, quan tâm giải đáp thỏa đáng.

BÀI 6. Cho x, y, z là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right) \geq 4.$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào?

Lời giải. Không mất tổng quát, giả sử $z > y > x \geq 0$.

Đặt $y = x + a$, $z = x + a + b$; $a, b > 0$. Khi đó, biểu thức ở vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại dưới dạng

$$P(x, a, b) = (3x^2 + 2(2a+b)x + a(a+b)) \times \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \right).$$

Ta có

$$\begin{aligned} P &\geq a(a+b) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \right) \\ &= \frac{a+b}{a} + \frac{a(a+b)}{b^2} + \frac{a}{a+b} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{a(a+b)}{b^2} + 1 - \frac{b}{a+b} \\ &= 2 + \frac{a(a+b)}{b^2} + \frac{b^2}{a(a+b)} \geq 4. \end{aligned}$$

Dấu bằng ở BĐT cuối cùng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ và $a(a+b) = b^2$. Suy ra, dấu bằng ở BĐT của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ và

$$\frac{y}{z} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

BÀI 5. Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm tối đa 2008 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9?

Lời giải. Giả sử X là tập hợp gồm tất cả các số tự nhiên thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Theo bài ra, ta cần tìm $|X|$. Kí hiệu:

$$A^* = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ có không quá } 2008 \text{ chữ số}\};$$

$$A = \{a \in A^* \mid a \equiv 0 \pmod{9}\};$$

$$A_k = \{a \in A \mid \text{trong các chữ số của } a \text{ có đúng } k \text{ chữ số } 9\}, k=0, 2008.$$

Xét số a bất kì thuộc A^* ; giả sử a có m chữ số. Do khi viết thêm các chữ số 0 vào ngay trước một số tự nhiên ta không làm thay đổi số đó nên bằng cách viết thêm $2008 - m$ chữ số 0 vào ngay trước số a , ta có một biểu diễn của a , mà trong biểu diễn đó có đúng 2008 chữ số. Ta gọi biểu diễn như vậy là biểu diễn

(*). Để kí hiệu biểu diễn (*) của a gồm 2008 chữ số, được kí hiệu lần lượt (từ trái qua phải) bởi $a_1, a_2, \dots, a_{2008}$, ta viết $\overline{a_1 a_2 \dots a_{2008}}$. Khi đó,

$$A_k = \left\{ \overline{a_1 a_2 \dots a_{2008}} \mid \text{trong các chữ số } a_1, a_2, \dots, a_{2008} \text{ có đúng } k \text{ chữ số } 9 \text{ và } \sum_{i=1}^{2008} a_i \equiv 0 \pmod{9} \right\}, k=0, 2008.$$

Có thể tiếp tục giải bài toán theo một trong hai cách sau:

Cách 1. Ta có $X = A \setminus (A_0 \cup A_1)$. Từ đó, vì $A_0, A_1 \subset A$ và $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ nên

$$|X| = |A| - (|A_0| + |A_1|). \quad (1)$$

Ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 1.1. $|A_0| = 9^{2007}$.

Chứng minh. Từ định nghĩa A_0 dễ thấy

$\overline{a_1 a_2 \dots a_{2008}} \in A_0$ khi và chỉ khi $a_i \in \{0; 1; 2; \dots; 8\}$

$\forall i=1, 2007$ và $a_{2008} = 9 - r$, trong đó r là số

nguyên thuộc đoạn $[1; 9]$ mà $r \equiv \sum_{i=1}^{2007} a_i \pmod{9}$.

Suy ra, $|A_0|$ chính bằng số dãy 2007 chữ số có thể lập được từ các chữ số 0, 1, 2, ..., 8. Vì thế $|A_0| = 9^{2007}$.

Nhận xét 1.2. $|A_1| = 2008 \cdot 9^{2006}$.

Chứng minh. Dễ thấy, số (trong dạng biểu diễn (*)) thuộc A_1 có thể được tạo ra từ việc thực hiện liên tiếp hai bước sau:

- **Bước 1.** Từ các chữ số 0, 1, 2, ..., 8, lập dãy gồm 2007 chữ số thỏa mãn tổng các chữ số trong dãy chia hết cho 9;

- **Bước 2.** Với dãy lập được ở bước 1, ghi chữ số 9 vào ngay trước chữ số đầu tiên hoặc vào ngay sau chữ số cuối cùng hoặc vào giữa 2 chữ số liền nhau của dãy.

Lập luận tương tự phần chứng minh Nhận xét 1.1, ta thấy có 9^{2006} cách thực hiện bước 1. Từ đó, do có 2008 cách thực hiện bước 2 nên có $2008 \cdot 9^{2006}$ phương án thực hiện liên tiếp hai bước nêu trên. Mỗi phương án cho một số thuộc A_1 , hai phương án khác nhau cho hai số khác nhau. Vì thế $|A_1| = 2008 \cdot 9^{2006}$.

Từ các nhận xét trên và do $|A| = 1 + \frac{10^{2008} - 1}{9}$

nên từ (1) ta được $|X| = \frac{10^{2008} - 2017 \cdot 9^{2007} + 8}{9}$.

Cách 2. Ta có $X = \bigcup_{k=2}^{2008} A_k$. Từ đó, vì $A_0, A_1, \dots,$

A_{2008} đôi một rời nhau nên $|X| = \sum_{k=2}^{2008} |A_k|$ (2)

Ta có nhận xét sau:

Nhận xét 2. $|A_{2008}| = 1$ và $|A_k| = 9^{2007-k} \cdot C_{2008}^k$, $\forall k=0, 2007$.

Chứng minh. Hiển nhiên ta có $|A_{2008}| = 1$.

Xét $k \in \{0; 1; 2; \dots; 2007\}$.

Dễ thấy, số (trong dạng biểu diễn (*)) thuộc A_k có thể được tạo ra từ việc thực hiện liên tiếp hai bước sau:

- Bước 1. Chọn k vị trí trong dãy gồm 2008 vị trí trống rồi điền vào mỗi vị trí một chữ số 9;

- Bước 2. Với $2008 - k$ vị trí trống còn lại, điền vào mỗi vị trí một chữ số khác 9 sao cho tổng các chữ số được điền (ở bước này) chia hết cho 9.

Tương tự phần chứng minh Nhận xét 1.1 ở Cách 1, ta chứng minh được: có $9^{2008-k-1}$ cách thực hiện bước 2. Từ đó, do có C_{2008}^k cách thực hiện bước 1 nên có $9^{2008-k-1} \cdot C_{2008}^k$ phương án thực hiện liên tiếp hai bước nêu trên. Mỗi phương án cho một số thuộc A_k , hai phương án khác nhau cho hai số khác nhau. Vì thế $|A_k| = 9^{2007-k} \cdot C_{2008}^k$.

Từ Nhận xét trên và (2) ta được

$$\begin{aligned} |X| &= 1 + \sum_{k=2}^{2007} 9^{2007-k} \cdot C_{2008}^k \\ &= 1 + \frac{1}{9} \left(\sum_{k=0}^{2008} 9^{2008-k} \cdot C_{2008}^k - \sum_{k=0}^1 9^{2008-k} \cdot C_{2008}^k - 1 \right) \\ &= 1 + \frac{1}{9} (10^{2008} - 9^{2008} - 2008 \cdot 9^{2007} - 1) \\ &= \frac{10^{2008} - 2017 \cdot 9^{2007} + 8}{9}. \quad \square \end{aligned}$$

Lời bàn. Dựa trên ý tưởng chứng minh các Nhận xét 1 và 2, có thể chứng minh được kết quả tổng quát sau:

"Cho k và n là các số nguyên thỏa mãn $1 \leq k \leq n$. Gọi T là tập hợp tất cả các số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm tối đa n chữ số và trong đó có ít nhất k chữ số 9. Ta có $|T|=1$, nếu $k=n$, và $|T|=9^{n-k-1} \cdot C_n^k$, nếu $k < n$ ". Dựa vào kết quả trên, có thể tìm $|X|$ theo

công thức $|X| = \sum_{k=2}^{2008} |A_k|$.

❖ BÀI 3. Đặt $m = 2007^{2008}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên n mà $n < m$ và $n(2n+1)(5n+2)$ chia hết cho m ?

Lời giải. Dễ thấy $(m, 10) = 1$. Do đó

$$n(2n+1)(5n+2) \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow 10n(10n+5)(10n+4) \equiv 0 \pmod{m} \quad (*)$$

Ta có $m = 3^{4016} \cdot 223^{2008}$. Để cho tiện, đặt $10n = x$; $3^{4016} = q_1$ và $223^{2008} = q_2$. Khi đó, do $(q_1, q_2) = 1$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+5)(x+4) \equiv 0 \pmod{q_1} & (1) \\ x(x+5)(x+4) \equiv 0 \pmod{q_2} & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Dễ thấy

- (1) xảy ra khi và chỉ khi $x \equiv 0 \pmod{q_1}$ hoặc $x \equiv -5 \pmod{q_1}$ hoặc $x \equiv -4 \pmod{q_1}$;

- (2) xảy ra khi và chỉ khi $x \equiv 0 \pmod{q_2}$ hoặc $x \equiv -5 \pmod{q_2}$ hoặc $x \equiv -4 \pmod{q_2}$.

Do đó từ (I), với lưu ý $x \equiv 0 \pmod{10}$, suy ra n là số tự nhiên thỏa mãn các điều kiện của đề bài khi và chỉ khi $n = \frac{x}{10}$, với x là số nguyên thỏa mãn hệ điều kiện (còn nói: x là nghiệm

$$\text{của hệ) sau: } \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{10} \\ x \equiv r_1 \pmod{q_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{q_2} \\ 0 \leq x < 10q_1q_2 \end{cases} \quad (II)$$

trong đó $r_1, r_2 \in \{0; -4; -5\}$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh ứng với mỗi cặp $(r_1; r_2)$ thỏa mãn $r_1, r_2 \in \{0; -4; -5\}$, hệ (II) có duy nhất nghiệm.

Thật vậy, xét cặp $(r_1; r_2)$ tùy ý thỏa mãn $r_1, r_2 \in \{0; -4; -5\}$. Đặt $m_1 = 10q_2$ và $m_2 = 10q_1$, ta có $(m_1, q_1) = (m_2, q_2) = 1$. Do đó tồn tại

các số nguyên s_1, s_2 sao cho $s_1 m_1 \equiv 1 \pmod{q_1}$ và $s_2 m_2 \equiv 1 \pmod{q_2}$. Suy ra số $a = r_1 s_1 m_1 + r_2 s_2 m_2$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $a \equiv 0 \pmod{10}$ và $a \equiv r_i \pmod{q_i}, i = 1, 2$. Vì vậy, chọn số nguyên x sao cho $x \equiv a \pmod{10q_1q_2}$ và $x \in [0; 10q_1q_2)$, ta có x là nghiệm của hệ (II).

Giả sử, hệ (II) có hai nghiệm x và x' ($x > x'$). Khi đó, do $x, x' \in [0; 10q_1q_2)$ và $x \equiv x' \pmod{10q_1q_2}$ nên $0 < x - x' < 10q_1q_2$ và $x - x' \equiv 0 \pmod{10q_1q_2}$. Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ hệ (II) có duy nhất nghiệm.

Tóm lại, ta được điều muốn chứng minh.

Dễ thấy, ứng với hai cặp $(r_1; r_2)$ khác nhau, ta sẽ có hai số x khác nhau là nghiệm của hai hệ (II) tương ứng. Từ đây, vì có tất cả $3^2 = 9$ cặp $(r_1; r_2)$ đôi một khác nhau nên sẽ có 9 số x là nghiệm của 9 hệ (II) tương ứng. Vì mỗi số x cho ta đúng một số n và hai số x khác nhau cho hai số n khác nhau nên có tất cả 9 số n thỏa mãn các điều kiện của đề bài. $\square$

LỜI GIẢI... (Tiếp trang 3)

2) Vì $OE \perp EA$ và $OF \perp FA$, suy ra tứ giác $OFAE$ nội tiếp. Từ đó

$$\widehat{OFE} = \widehat{OAE} = 90^\circ - \widehat{AOE} = 90^\circ - \widehat{PBC} = \widehat{BCD}.$$

Tương tự $\widehat{OEF} = \widehat{BDC}$. Vậy $\triangle OFE \sim \triangle BCD$.

Suy ra $\frac{EO}{BD} = \frac{EF}{CD} = \frac{1}{2}$ (do EF là đường trung bình của $\triangle ACD$), hay $BD = 2EO$.

3) Gọi K và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên AB và CD . Ta có

$$AB^2 = 4BH^2 = 4R^2 - 4HO^2;$$

$$CD^2 = 4DK^2 = 4R^2 - 4KO^2. \text{ Từ đó}$$

$$S_{ACBD} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = 2\sqrt{R^4 - R^2 \cdot PO^2 + HO^2 \cdot KO^2} \quad (1)$$

(do $OH^2 + OK^2 = OP^2$)

Từ đó, min $S_{ACBD} = 2R\sqrt{R^2 - PO^2}$, xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv O$ hoặc $K \equiv O \Leftrightarrow AB$ hoặc CD là đường kính đường tròn $(O; R)$.

Mặt khác, $HO \cdot KO \leq \frac{HO^2 + KO^2}{2} = \frac{PO^2}{2}$, kết hợp với (1) ta có $S_{ACBD} \leq 2R^2 - PO^2$.

• **Chú ý.** Theo Quy định của Bộ GD&ĐT tại công văn số 1403/THPT ngày 25/02/2002, các thí sinh được phép sử dụng định lý Trung Quốc về các số dư như một kết quả SGK. Vì thế, đối với bài làm của thí sinh không yêu cầu trình bày phần chứng minh hệ (II) có duy nhất nghiệm; thay cho phần đó, thí sinh chỉ cần nêu nội dung sau: "Vì 10, q_1, q_2 đôi một nguyên tố cùng nhau nên hệ (II) có duy nhất nghiệm (theo định lý Trung Quốc về các số dư)".

Thay cho lời kết. Tại IMO2008, tổ chức tại Madrid - Tây Ban Nha từ ngày 10/7 đến ngày 22/7/2008, lãnh đạo nhiều đoàn đã gặp gỡ, trao đổi với người viết bài này về đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT của Việt Nam. Xin nêu ra đây một trong các ý kiến của họ: "Chúng tôi thích các đề thi của nước ông vì trong đó có nhiều bài toán (tiếng Anh là *problem*) hay, thú vị. Vì thế, chúng tôi rất ngạc nhiên khi đề thi năm nay (2008) của nước ông chỉ gồm toàn bài tập (tiếng Anh là *exercise*) mà không có một bài toán nào!".

Vậy max $S_{ACBD} = 2R^2 - PO^2$, xảy ra khi và chỉ khi $HO = KO \Leftrightarrow$ Tứ giác $PHOK$ là hình vuông.

Câu 6. Trước hết ta chứng minh BĐT

$$(ax - by)^2 \geq (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) \quad (1)$$

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow -2axy \geq a^2x^2 + b^2y^2$
 $\Leftrightarrow (ax - by)^2 \geq 0$ (đúng).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ax = by$.

Sử dụng BDT (1) ta có

$$(2x - y)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4x - \frac{1}{3} \cdot 3y \right)^2 \geq \frac{5}{36} (16x^2 - 9y^2) \geq 20$$

(do $16x^2 - 9y^2 \geq 144$). Suy ra

$$2x - y + 1 \geq 2\sqrt{5} + 1 \text{ hoặc } 2x - y + 1 \leq -2\sqrt{5} + 1.$$

Từ đó suy ra $|2x - y + 1| \geq 2\sqrt{5} - 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$8x = 9y, 2x - y = -2\sqrt{5} \text{ và } 16x^2 - 9y^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{9}{\sqrt{5}} \text{ và } y = -\frac{8}{\sqrt{5}}.$$

HOÀNG VĂN ĐẮC

(GV THCS Vũ Hữu, Bình Giang, Hải Dương)
giới thiệu)

Về cấu trúc Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia MÔN TOÁN LỚP 12 THPT NĂM 2009

1. MỞ ĐẦU

Nhằm đảm bảo có thể xây dựng được một đề thi đáp ứng yêu cầu nâng cao hiệu quả và chất lượng của việc đánh giá, phân loại năng lực, trình độ học sinh dự thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT, tạo tiền đề tốt cho việc tuyển chọn học sinh vào Đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán học Quốc tế, Tổ chấm thi môn Toán Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT năm 2008 đã kiến nghị các cấp có thẩm quyền xem xét, giảm số câu hỏi trong đề thi từ 7 câu xuống 4 hoặc 5 câu, đồng thời tăng thời gian làm bài từ 180 phút lên 240 phút (nếu vẫn tổ chức thi trong 01 buổi). Bên cạnh đó, Bộ Giáo dục và Đào tạo (GD&ĐT) cũng đã nhận được ý kiến góp ý của một số giáo viên dạy Toán ở các trường THPT chuyên, rằng đề thi gồm quá nhiều câu, thí sinh không thể làm hết trong thời gian 180 phút, dẫn đến tình trạng tỉ lệ học sinh đạt giải ở môn Toán quá thấp; từ đó, đề nghị giảm số câu trong đề thi hoặc tăng thời gian làm bài.

Tiếp thu các ý kiến nêu trên và trên cơ sở tham khảo ý kiến của các Sở GD-ĐT, Bộ GD&ĐT đã quyết định điều chỉnh Cấu trúc đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT theo hướng giảm số câu trong đề thi. Dưới đây là Cấu trúc đề thi (môn Toán) năm 2009, đã được Bộ GD&ĐT ấn định tại công văn số 11723/BGDĐT – KTKĐCLGD ngày 24/12/2008.

2. CẤU TRÚC ĐỀ THI

a. Số lượng câu, chủ đề của các câu và thời lượng làm bài: Đề thi gồm 05 (năm) câu thuộc 05 phân môn: Đại số, Giải tích, Hình học, Số học và Tổ hợp toán học; với thời lượng làm bài là 180 phút; cụ thể như sau:

Câu 1. Đại số (Phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, hệ bất phương trình; Bất đẳng thức đại số; Đa thức; Phương trình hàm trên tập số hữu tỉ, phương trình hàm không liên tục trên tập số thực; ...).

Câu 2. Giải tích (Giới hạn của dãy số, của hàm số; Phương trình hàm liên tục trên tập số thực; ...).

Câu 3. Hình học (Hình học tổng hợp; Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng và trong không gian).

Câu 4. Số học

Câu 5. Tổ hợp toán học

b. Phân bố điểm cho các câu: Điểm tối đa cho đề thi là 20 điểm, được phân bố cho các câu như sau:

- Câu 1 và Câu 2: một câu 5 điểm và một câu 4 điểm;
- Câu 3: 5 điểm;
- Câu 4 và Câu 5: mỗi câu 3 điểm.

3. ĐÔI LỜI BÀN LUẬN

Những điều được trình bày dưới đây là ý kiến cá nhân của người viết bài này:

- Cấu trúc nêu trên sẽ góp phần tạo điều kiện để Tổ soạn thảo đề thi có thể xây dựng được một đề thi gồm các tình huống Toán học có mức độ chuyên môn gần với mức "bài toán" (problem) hơn mức "bài tập" (exercise).

- Việc một học sinh giỏi Toán đặt ra mục tiêu "phải làm hết (trong thời gian làm bài cho phép) tất cả các câu trong đề thi môn Toán" của Kỳ thi tốt nghiệp THPT hay tuyển sinh Đại học là một điều hợp lý. Tuy nhiên, trong Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT, bất luận đề thi gồm nhiều câu hay ít câu, sẽ là một sai lầm nếu mọi thí sinh đặt ra cho mình một mục tiêu tương tự, mặc dù mỗi thí sinh đều là một học sinh giỏi Toán.

- Cho dù cấu trúc đề thi đã được điều chỉnh theo hướng nhiều người mong muốn, tỉ lệ thí sinh đạt giải trong Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm 2009 vẫn sẽ thấp nếu các thí sinh không được tuyển chọn tốt ở cấp cơ sở, không được chuẩn bị tốt về chuyên môn, về tâm lý thi và về đầu pháp.

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD – Bộ GD&ĐT)



Một số phương pháp GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

NGUYỄN MINH NHIÊN
(GV THPT Quế Võ I, Bắc Ninh)

Trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng những năm gần đây, chúng ta gặp khá nhiều bài toán giải hệ phương trình (HPT). Ngoài những hệ đối xứng loại 1, loại 2 cơ bản mà các bạn đã biết cách giải, trong bài báo này chúng tôi xin giới thiệu thêm với các bạn một số dạng toán về giải HPT và những phương pháp để giải chúng.

I. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Phương pháp này chủ yếu là sử dụng các kỹ năng biến đổi đồng nhất đặc biệt là kỹ năng phân tích nhằm đưa một PT trong hệ về dạng đơn giản (có thể rút x theo y hoặc ngược lại) rồi thế vào PT còn lại trong hệ.

LOẠI 1. Trong hệ có một phương trình bậc nhất với ẩn x hoặc y , khi đó ta tìm cách rút y theo x hoặc ngược lại.

★ **Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 & (1) \\ xy + x + 1 = x^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn PT (2).

Với $x \neq 0$ từ (2) có $y + 1 = \frac{x^2 - 1}{x}$, thay vào (1) ta được

$$x^2 \frac{x^2 - 1}{x} \left(x + \frac{x^2 - 1}{x} \right) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)(2x^2 - 1) = (x - 1)(3x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(2x^3 + 2x^2 - x - 1) = (x - 1)(3x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(2x^3 + 2x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; -1), (-2; -\frac{5}{2})$. □

LOẠI 2. Một phương trình trong hệ có thể đưa về dạng tích của các phương trình bậc nhất hai ẩn.

★ **Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 1; y \geq 0$.

$$PT (1) \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 - (x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x - 2y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \text{ (từ điều kiện ta có } x + y > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 2y + 1 \text{ thay vào PT (2) và biến đổi ta được}$$

$$(y + 1)(\sqrt{2y} - 2) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ (do } y \geq 0)$$

$$\Rightarrow x = 5. \text{ Hệ có nghiệm } (x; y) = (5; 2). \square$$

LOẠI 3. Một PT của hệ là PT bậc hai theo một ẩn, chẳng hạn đó là ẩn y . Lúc đó ta xem x là tham số và biểu diễn được y qua x bằng cách giải PT bậc hai ẩn y .

★ **Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = (5x + 4)(4 - x) & (1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Biến đổi PT (2) về dạng

$$y^2 - (4x + 8)y - 5x^2 + 16x + 16 = 0.$$

Coi PT (2) là PT bậc hai ẩn y (tham số x) ta có

$$\Delta' = 9x^2, \text{ từ đó } \begin{cases} y = 5x + 4 \\ y = 4 - x. \end{cases}$$

• Với $y = 5x + 4$, thay vào (1) được

$$(5x + 4)^2 = (5x + 4)(4 - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = 4. \end{cases}$$

• Với $y = 4 - x$, thay vào (1) được

$$(4-x)^2 = (5x+4)(4-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \Rightarrow y=0 \\ x=0 \Rightarrow y=4. \end{cases}$$

Hệ có ba nghiệm $(x; y)$ là

$$(0; 4), (4; 0), \left(-\frac{4}{5}; 0\right). \quad \square$$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Điểm quan trọng nhất trong việc giải hệ là phát hiện ẩn phụ $u = f(x, y); v = g(x, y)$ có ngay trong từng phương trình hoặc xuất hiện sau một số phép biến đổi hằng đẳng thức cơ bản hoặc phép chia cho một biểu thức khác 0 để đưa hệ về dạng đơn giản hơn.

★ **Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y+x-2) = y \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Lời giải. Ta thấy $y = 0$ không thỏa mãn PT(1)

$$\text{nên HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + y + x = 4 \\ \left(\frac{x^2+1}{y}\right)(y+x-2) = 1. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x^2+1}{y}, v = y+x-2 \text{ ta có } \begin{cases} u+v=2 \\ uv=1. \end{cases}$$

Giải hệ được $u = v = 1$, từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 + 1 = y \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Hệ này bạn đọc có thể giải được dễ dàng.

Hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2)$ và $(-2; 5)$. $\square$

★ **Thí dụ 5.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x + y \neq 0$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x + y + \frac{1}{x+y} + x - y = 3. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = x + y + \frac{1}{x+y} \quad (|u| \geq 2); v = x - y \text{ ta}$$

$$\text{được hệ } \begin{cases} 3u^2 + v^2 = 13 \\ u + v = 3. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $u = 2, v = 1$ (do $|u| \geq 2$), từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x+y} = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases} \quad \square$$

III. PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

LOẠI 1. Một phương trình trong hệ có dạng $f(x) = f(y)$, phương trình còn lại giúp ta giới hạn được x, y để trên đó hàm số f đơn điệu. Từ đó suy ra $x = y$.

★ **Thí dụ 6.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y \\ x^8 + y^4 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Lời giải. Từ PT (2) ta có $x^8 \leq 1, y^4 \leq 1$
 $\Leftrightarrow |x| \leq 1, |y| \leq 1$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 5t, t \in [-1; 1]$ có
 $f'(t) = 3t^2 - 5 < 0, \forall t \in [-1; 1]$. Do đó hàm
 $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ nên từ
 PT (1) suy ra $x = y$. Thay vào PT (2) ta được
 $x^8 + x^4 - 1 = 0$.

Đặt $a = x^4 \geq 0$ và giải PT tương ứng ta được

$$a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = x = \pm \sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}. \quad \square$$

LOẠI 2. Hệ đối xứng loại hai mà khi giải thường dẫn đến một trong hai PT của hệ có dạng $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = f(y)$ trong đó f là hàm đơn điệu.

★ **Thí dụ 7.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $a = x - 1, b = y - 1$ ta được hệ

$$\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + 1} = 3^b \\ b + \sqrt{b^2 + 1} = 3^a \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Trừ theo vế hai PT trên, ta được

$$a + \sqrt{a^2 + 1} + 3^a = b + \sqrt{b^2 + 1} + 3^b \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} + 3^t$, có

$$f'(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} + 3^t \ln 3.$$

Vì $\sqrt{t^2 + 1} > \sqrt{t^2} \geq -t \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1} + t > 0 \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t$,
do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó PT (3) $\Leftrightarrow a = b$ thay vào PT (1) ta được

$$a + \sqrt{a^2 + 1} = 3^a \quad (4)$$

Theo nhận xét trên thì $a + \sqrt{a^2 + 1} > 0$ nên

$$\text{PT}(4) \Leftrightarrow \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) - a \ln 3 = 0.$$

Xét hàm số $g(a) = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) - a \ln 3$ có

$$g'(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} - \ln 3 < 1 - \ln 3 < 0, \forall a \in \mathbb{R},$$

nên hàm số $g(a)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và do PT (4) có nghiệm $a = 0$ nên PT (4) có nghiệm duy nhất $a = 0$. Từ đó ta được nghiệm của hệ ban đầu là $(x; y) = (1; 1)$. $\square$

IV. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Với phương pháp này, cần lưu ý phát hiện các biểu thức không âm trong hệ và nắm vững cách vận dụng các bất đẳng thức cơ bản.

★ **Thí dụ 8.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x. \end{cases}$$

Lời giải. Cộng theo vế hai PT của hệ ta được

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = x^2 + y^2 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \sqrt[3]{x^2 - 2x + 9} = \sqrt[3]{(x-1)^2 + 8} \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} \leq \frac{2|xy|}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} \leq \frac{2|xy|}{2} = |xy|.$$

$$\text{Tương tự } \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} \leq |xy| \text{ mà theo BĐT}$$

$$\text{Cauchy } x^2 + y^2 \geq 2|xy| \text{ nên VT(1) } \leq \text{VP(1).}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = 0 \end{cases}$ thử lại ta được nghiệm $(x; y)$ của hệ là $(0; 0), (1; 1)$. $\square$

★ **Thí dụ 9.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^3 - 6y - 2. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = -(x + 1)^2 (x - 2) \\ x - 2 = 2(y + 1)^2 (y - 2) \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Nếu $x > 2$ thì từ (1) suy ra $y - 2 < 0$ điều này mâu thuẫn với PT(2) có $(x - 2)$ và $(y - 2)$ cùng dấu.

Tương tự với $x < 2$ ta cũng suy ra điều vô lí. Vậy nghiệm của hệ là $x = y = 2$. $\square$

Hi vọng một số thí dụ trên sẽ giúp bạn phần nào kĩ năng giải HPT. Để kết thúc bài viết mời các bạn cùng giải các hệ phương trình sau

$$1) \begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8 \\ x(y^3 - 2) = 6 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ y^4 + 4(2x - 3)y^2 - 48y - 48x + 155 = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y + 1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 44 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x^3 + y^2 = 2 \\ x^2 + xy + y^2 - y = 0. \end{cases}$$

Thể theo yêu cầu bạn đọc, bắt đầu từ số 380, (tháng 2 năm 2009) chúng tôi sẽ đăng các chuyên đề môn Vật lý giúp các bạn ôn thi tốt nghiệp THPT và chuẩn bị thi vào các trường Đại học. Rất mong các bạn đọc hưởng ứng và viết bài cho chuyên mục này.

THTT

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian làm bài: 180 phút)

I. PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 điểm)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x-2}{x-1} \quad (C).$$

2) Chứng minh rằng với mọi giá trị thực của m , đường thẳng $y = -x + m$ (d) luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AB .

Câu 2 (2 điểm)

1) Giải phương trình $3^{x^2} \cdot 2^{\frac{x}{2x-1}} = 6$.

2) Giải phương trình

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 3x = \sin x + \sin 2x.$$

Câu 3 (1 điểm)

Tính thể tích hình chóp $S.ABC$ biết $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$.

Câu 4 (1 điểm)

$$\text{Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x)^3}.$$

Câu 5 (1 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\log_2^2 x + 1} + \sqrt{\log_2^2 y + 1} + \sqrt{\log_2^2 z + 4}$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 8$.

II. PHẦN RIÊNG (Thí sinh chỉ làm một trong hai phần)

THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

Câu 6a (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy , cho hai đường thẳng có phương trình:

$$x + y + 1 = 0 \quad (d_1); \quad 2x - y - 1 = 0 \quad (d_2).$$

Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1;1)$ cắt $(d_1), (d_2)$ tương ứng tại A, B sao cho $2\overline{MA} + \overline{MB} = \vec{0}$.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z + 1 = 0$ và hai điểm $A(1;7;-1)$, $B(4;2;0)$. Lập phương trình đường thẳng (d) là hình chiếu vuông góc của đường thẳng AB trên mặt phẳng (P) .

Câu 7a (1 điểm)

Kí hiệu x_1, x_2 là hai nghiệm phức của phương trình bậc hai $2x^2 - 2x + 1 = 0$. Tính giá trị các số phức $\frac{1}{x_1^2}$ và $\frac{1}{x_2^2}$.

THEO CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

Câu 6b (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy , cho hyperbol (H) có phương trình $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. Giả sử (d) là một tiếp tuyến thay đổi và F là một trong hai tiêu điểm của (H) , kẻ FM vuông góc với (d) . Chứng minh rằng M luôn nằm trên một đường tròn cố định, viết phương trình đường tròn đó.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC .

Câu 7b (1 điểm)

Người ta sử dụng 5 cuốn sách Toán, 6 cuốn Vật Lí, 7 cuốn Hoá học (các cuốn sách cùng loại giống nhau) để làm giải thưởng cho 9 học sinh, mỗi học sinh được hai cuốn sách khác loại. Trong số 9 học sinh trên có hai bạn Ngọc và Thảo. Tìm xác suất để hai bạn Ngọc và Thảo có giải thưởng giống nhau.

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Lễ trao giải thưởng QUẢ CẦU VÀNG VÀ PHẦN THƯỞNG NỮ SINH VIÊN CNTT TIÊU BIỂU NĂM 2008

Ngày 30/12/2008 vừa qua, tại Phòng họp Chính phủ Số 1 Hoàng Hoa Thám, Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, Bộ Khoa học và Công nghệ đã phối hợp tổ chức Lễ trao Giải thưởng Công nghệ Thông tin (CNTT) thanh niên mang tên *Quả Cầu Vàng* và *Phần thưởng Nữ sinh viên tiêu biểu trong lĩnh vực CNTT* năm 2008. Thay mặt Chính phủ, Phó Thủ tướng Nguyễn Thiện Nhân đã trao giải thưởng *Quả Cầu Vàng* cho 10 gương mặt trẻ tiêu biểu và trao *Phần thưởng Nữ sinh viên tiêu biểu trong lĩnh vực CNTT* cho 40 nữ sinh viên (trong đó có 14 nữ sinh thuộc các trường Cao đẳng và 26 nữ sinh thuộc các trường Đại học).

10 cá nhân đoạt giải thưởng *Quả Cầu Vàng* năm 2008 đều có sản phẩm CNTT, công trình nghiên cứu, những sáng kiến, những giải pháp kỹ thuật đã và đang được áp dụng trong thực tế rất thành công. Người lớn tuổi nhất sinh năm 1973 là ThS. *Trần Quang Tuấn*, Bí thư Đoàn TNCS Bộ Khoa học và Công nghệ; người ít tuổi

nhất là em *Trần Nguyễn Bảo Trung*, sinh năm 1991, học sinh lớp 12 trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.

40 nữ sinh viên được nhận phần thưởng lần này đa số đều có kết quả học tập trên 8,0; tham gia tích cực công tác Đoàn, Hội của trường,...trong đó có những em đặc biệt xuất sắc như *Vũ Tuyết Nhung*, Học viện An Ninh; *Phạm Quỳnh Nga*, khoa CNTT, ĐH KHTN, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh; *Phạm Văn Anh*, khoa CNTT, ĐH Công nghệ, ĐHQG Hà Nội...

Phát triển CNTT là định hướng lớn của Đảng và Nhà nước nhằm chuẩn bị cho đất nước bước vào kỷ nguyên kinh tế tri thức, bước vào thời kỳ hội nhập quốc tế. Các tài năng trẻ được trao tặng Giải thưởng Quả Cầu Vàng và Phần thưởng nữ sinh viên tiêu biểu trong lĩnh vực CNTT là những hạt giống quý của quốc gia để góp phần tạo ra đội ngũ nhân lực CNTT đáp ứng yêu cầu phát triển của đất nước.

LỄ KỶ NIỆM 10 NĂM THÀNH LẬP CÔNG TI CÔNG NGHỆ TIN HỌC NHÀ TRƯỜNG

Ngày 19/12/2008 vừa qua, tại Trung tâm hội nghị Quốc tế, Công ti Công nghệ Tin học Nhà trường School@net đã long trọng tổ chức Lễ kỷ niệm 10 năm ngày thành lập (19/12/1998 - 19/12/2008) với sự tham dự đông đảo của các vị đại biểu, các cộng tác viên thân thiết, các bạn bè đồng nghiệp và cán bộ công ti.

Với mục tiêu hoạt động duy nhất của công ti là truyền bá, thiết kế các ứng dụng Công nghệ Thông tin áp dụng cho *học sinh, gia đình, giáo viên và nhà trường* nhằm nâng cao hiệu quả giảng dạy của giáo viên, cổ vũ niềm say mê học tập của học sinh trong nhà trường cũng như tại gia đình. Cho đến nay, công ti đã hoàn thiện hơn 50 sản phẩm phần mềm đóng gói cho ngành giáo dục. Các sản phẩm của công ti rất đa dạng từ các đĩa CD đóng gói phục vụ học tập, nâng cao kiến thức, thư giãn giải trí đến các phần

mềm phục vụ chuyên sâu phức tạp như Learning Math, TKB, School Viewer, IQB, TKBU, EMU; từ các sản phẩm đóng gói chạy trên PC đơn lẻ đến các giải pháp ứng dụng trên mạng máy tính. Công ti School@net đã đăng ký bản quyền tác giả và nhãn hiệu thương mại với hơn 30 sản phẩm quan trọng của mình, là một trong các công ti có số lượng bản quyền tác giả phần mềm được đăng ký nhiều nhất tại Việt Nam. Các sản phẩm của công ti đã triển khai tại hầu hết 63 Sở giáo dục với gần 2000 trường học, 3000 giáo viên, hàng nghìn phụ huynh học sinh trên toàn quốc.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin chúc mừng sự lớn mạnh của công ti School@net và hi vọng rằng trên chặng đường mới công ti sẽ phát huy hơn nữa tiềm năng và thế mạnh của các sản phẩm phần mềm phục vụ cho ngành giáo dục.

PV

Có bao nhiêu

HÌNH VUÔNG MORLEY?

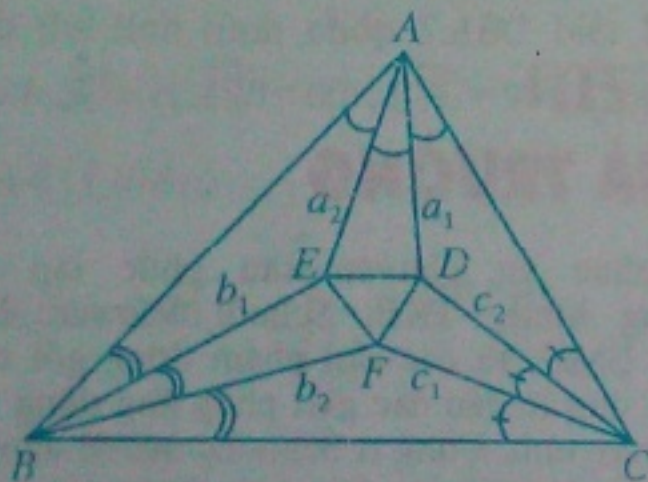


TRẦN ĐÌNH VIỆN
(Hà Nội)

Chúng ta đã biết kết quả nổi tiếng sau:

Định lí Morley. Cho tam giác ABC . Các tia Aa_1, Aa_2 chia ba góc BAC , các tia Bb_1, Bb_2 chia ba góc ABC , các tia Cc_1, Cc_2 chia ba góc ACB và các tia ở mỗi đỉnh tính theo chiều kim đồng hồ. Gọi D, E, F theo thứ tự là giao điểm của các tia Aa_1 và Cc_2 , Aa_2 và Bb_1 , Bb_2 và Cc_1 thì DEF là tam giác đều (h. 1).

Tam giác đều DEF được gọi là tam giác Morley của tam giác ABC .



Hình 1

Nếu xét tiếp các đường thẳng chia ba, các góc ngoài của tam giác ABC thì các giao điểm của chúng ta có thêm được một số tam giác đều nữa.

Trong cuốn *Lãng mạn toán học* (NXBGD năm 1999), GS. Hoàng Quý đã mở rộng khái niệm hình Morley đối với các đa giác khác, trong đó có hình vuông như sau.

Hình vuông Morley của hình vuông $ABCD$ là hình vuông mà đỉnh là giao của những tia

chia ba các góc trong tại bốn đỉnh hình vuông đã cho.

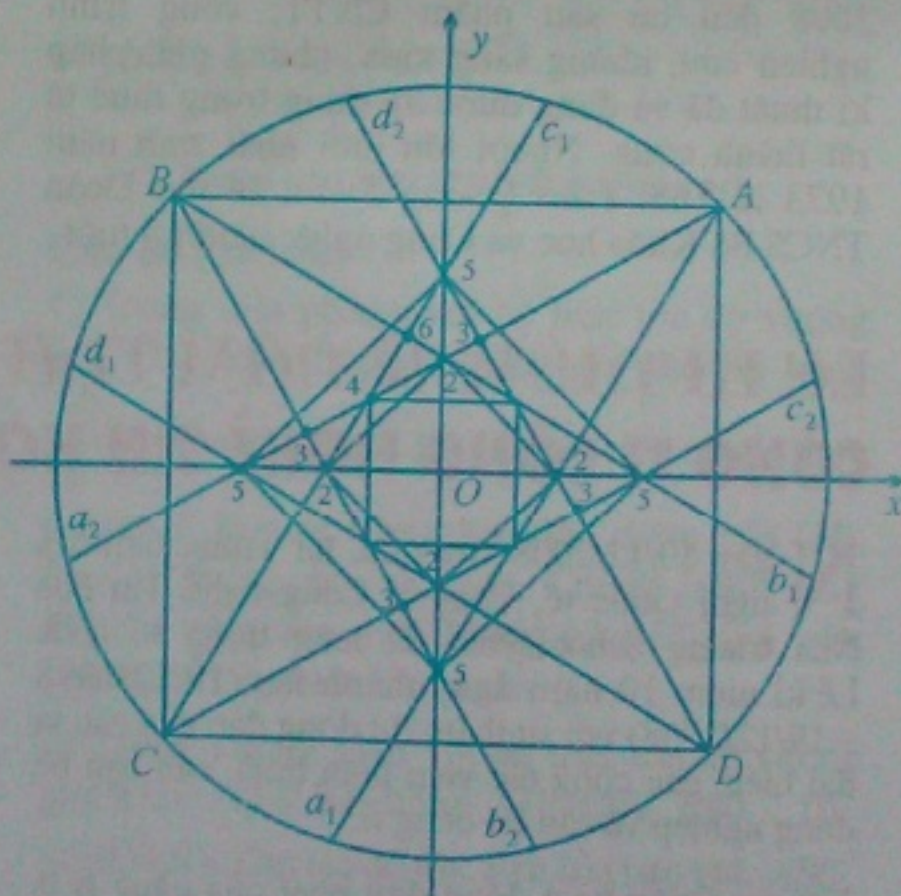
Vấn đề đặt ra là có hay không các hình vuông mà các đỉnh là giao của những đường chia ba góc trong tại bốn đỉnh của hình vuông cho trước $ABCD$? Đồng thời có bao nhiêu hình vuông Morley của hình vuông $ABCD$?

Cách giải

Trong mặt phẳng tọa độ Descartes vuông góc Oxy , chọn O và a theo thứ tự là tâm và bán kính đường tròn (O) ngoại tiếp hình vuông đã cho $ABCD$. Các đỉnh A, B, C, D theo thứ tự có tọa độ

$$\left(a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + i \cdot \frac{\pi}{2}\right); a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + i \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

với $i = 0, 1, 2, 3$ (h. 2).



Hình 2

Kí hiệu Aa_1, Aa_2 là các tia có đỉnh A sao cho

$$\widehat{DAa_1} = \widehat{BAa_2} = \frac{\pi}{6}.$$

Như vậy Aa_1, Aa_2 là các tia chia ba góc trong tại đỉnh A của hình vuông $ABCD$. Tương tự, lấy các tia Bb_1, Bb_2 chia ba góc trong tại đỉnh B ; các tia Cc_1, Cc_2 chia ba góc trong tại đỉnh C ; các tia Dd_1, Dd_2 chia ba góc trong tại đỉnh

D . Để đơn giản, ta kí hiệu các tia đó là $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$. Chúng ta có một tập gồm $28 \left(= \frac{8 \times 7}{2} \right)$ cặp tia không phân biệt thứ tự từ 8 tia nói trên.

Ta có các nhận xét :

- Các đỉnh A, B, C, D là ảnh của A qua các phép quay (Q_i) tâm O , góc quay $i \cdot \frac{\pi}{2}$, với $i = 0, 1, 2, 3$;

- Các tia a_1, b_1, c_1, d_1 là ảnh của tia a_1 qua các phép quay (Q_i) . Nói cách khác, phép quay tâm O , với góc quay $\frac{\pi}{2}$ biến tia a_1 thành b_1 ; biến b_1 thành c_1 ; biến c_1 thành d_1 ; biến d_1 thành a_1 ;

- Các tia a_2, b_2, c_2, d_2 là ảnh của tia a_2 qua các phép quay (Q_i) ;

- Trong số 28 cặp tia nói trên có 4 cặp tương ứng song song với nhau là : $a_1 // c_1, b_1 // d_1, a_2 // c_2, b_2 // d_2$. 24 cặp tia còn lại giao nhau tạo thành 6 tứ giác. Vấn đề còn lại là phải sắp xếp thích hợp để tìm ra được có bao nhiêu hình vuông trong số 6 tứ giác đó.

Từ nhận xét: Ảnh của giao điểm một cặp tia nào đó (trong số 24 cặp nói trên) qua các phép quay (Q_i) với $i = 0, 1, 2, 3$ là đỉnh của một hình vuông, chúng ta chứng minh được rằng: có 6 hình vuông Morley sau đây của hình vuông $ABCD$.

Hình vuông (1) chính là hình vuông $ABCD$ có các đỉnh là giao điểm của cặp tia như sau: $A(a_1; a_2), B(b_1; b_2), C(c_1; c_2), D(d_1; d_2)$.

Hình vuông (2) có các đỉnh là giao điểm của các cặp tia $(a_2; b_1), (b_2; c_1), (c_2; d_1)$ và $(d_2; a_1)$, bán kính vòng tròn ngoại tiếp của hình vuông (2) là

$$r_2 = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot (3 - \sqrt{3}).$$

Hình vuông (3) có các đỉnh là giao điểm của các cặp tia $(a_2; b_2), (b_2; c_2), (c_2; d_2)$, và $(d_2; a_2)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp của hình vuông (3) là

$$r_3 = 0,5 \cdot a \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$$

Hình vuông (4) có các đỉnh là giao điểm của các cặp tia $(a_2; d_1), (b_2; d_1), (c_2; a_1), (d_2; c_1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp của hình vuông (4) là

$$r_4 = a \cdot \tan \frac{\pi}{12} = a(2 - \sqrt{3}).$$

Hình vuông (3) và (4) đối xứng với nhau qua trục tung.

Hình vuông (5) có các đỉnh là giao điểm của các cặp tia $(a_2; d_1), (b_2; a_1), (c_2; b_1), (d_2; c_1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp của hình vuông (5) là

$$r_5 = 0,5 \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1).$$

Hình vuông (6) có các đỉnh là giao điểm của các cặp tia $(b_1; c_1), (c_1; d_1), (d_1; a_1), (a_1; b_1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp của hình vuông (6) là

$$r_6 = 0,5a \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$$

Vài nhận xét về các hình vuông Morley

- Các hình vuông nói trên đều nhận O làm tâm. Chúng được sắp xếp theo thứ tự nhỏ dần (theo độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp) như sau :

$$r_1 = a > r_5 > r_3 = r_6 > r_2 > r_4.$$

- Hai hình vuông (3) và (6) đối xứng với nhau qua trục tung.

- Hình vuông (4) là ảnh của hình vuông (1) qua phép vị tự tâm O . Hình vuông (2) và hình vuông (5) là ảnh của nhau qua phép vị tự tâm O . Hình vuông (6) là ảnh của hình vuông (3) qua phép quay tâm O , góc quay $\frac{\pi}{6}$.





CÁC LỚP THCS

Bài T1/379. (Lớp 6). Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 b^2.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/379. (Lớp 7) Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} \geq 90^\circ$. Lấy điểm M nằm giữa A và C , hạ AH và CK cùng vuông góc với BM (H, K thuộc BM) sao cho $BH = HK + KC$. Tính độ lớn của góc BAC .

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/379. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}} + 4x = 3\sqrt{2} - 1.$$

CAO XUÂN NAM
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T4/379. Tìm a, b để giá trị lớn nhất của biểu thức $\|x+1\| - 2\|-(ax+b)\|$ với $-3 \leq x \leq 4$ là nhỏ nhất.

NGUYỄN VĂN KHẢI
(GV khoa Toán - Tin ĐHSP Hà Nội)

Bài T5/379. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I là trung điểm của CD , E thuộc cạnh AB . Qua I kẻ IM vuông góc với DE , cắt AD ở H . Qua I kẻ IN vuông góc với CE , cắt BC ở K . Gọi G là giao điểm của EI và HK . Chứng minh rằng

a) Năm điểm E, G, N, K, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Năm điểm E, G, M, H, A cùng thuộc một đường tròn.

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/379. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8} \cos(B-C) \cos(C-A) \cos(A-B).$$

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(K41 khoa Toán - Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/379. Giải phương trình

$$3^x (4^x + 6^x + 9^x) = 25^x + 2 \cdot 16^x.$$

PHẠM VĂN TRƯỜNG
(SV lớp BK 79- K52 ĐH Bách Khoa Hà Nội)

Bài T8/379. Chứng minh rằng hình hợp bởi sáu nửa hình cầu có đường kính là sáu cạnh của một tứ diện thì chứa tứ diện đó.

TRẦN NGỌC CƯỜNG
(GV THPT Mường Quạ, Con Cuông, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/379. Cho tam giác ABC . Lấy các cặp điểm $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho lục giác $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$ lồi, có các cặp cạnh đối diện bằng nhau và diện tích của các tam giác $AA_1 A_2, BB_1 B_2, CC_1 C_2$ bằng nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng $A_1 B_2, B_1 C_2, C_1 A_2$ đồng quy.

LÊ VIỆT ÂN
(K40- TKKD, ĐH Kinh tế Huế, Thừa Thiên Huế)

Bài T10/379. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn

$$\sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} + abc = 3.$$

Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3}{b^2 + c^2} + \frac{b^3}{c^2 + a^2} + \frac{c^3}{a^2 + b^2}$ bằng $\sqrt[3]{32} \cdot m$, trong đó m là nghiệm của phương trình $t^3 + 54t - 162 = 0$.

NGUYỄN TẤT THU
(GV THPT Lê Hồng Phong, Biên Hòa, Đồng Nai)

Bài T11/379. Cho hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(0) = 0, f(1) = 1$ và

$$f(n+2) - 2011f(n+1) + f(n) = 0.$$

Lấy ngẫu nhiên n từ tập các số tự nhiên $\{0, 1, 2, \dots, 2008\}$. Tính xác suất sao cho $f(n)$ là một số nguyên tố.

KIỀU ĐÌNH MINH
(Phú Thọ)

Bài T12/379. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$, có đạo hàm trên $(0; 1)$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

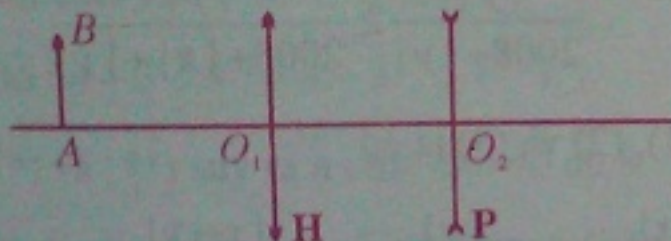
a) $20f(x) + 11f'(x) + 2009 \leq 0, \forall x \in (0; 1)$

b) $f(0) = f(1) = -\frac{2009}{11}.$

ĐỖ VĂN THU
(SV lớp K26 khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

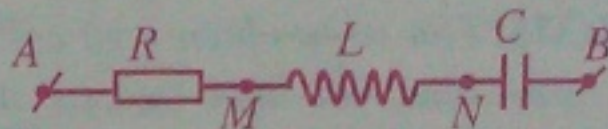
Bài L1/379. Một thấu kính hội tụ H , tiêu cự $f_1 = 10\text{cm}$ đặt trước và đồng trục với một thấu



kính phân kì P , tiêu cự $f_2 = -5\text{cm}$. Hai thấu kính đặt cách nhau một khoảng $O_1O_2 = a = 15\text{cm}$ (hình vẽ). Một vật sáng AB đặt trước H , qua hệ $H + P$ cho ảnh ảo A_2B_2 lớn gấp đôi vật. Hãy xác định vị trí của vật AB (tức là tính $O_1A = d_1$).

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/379. Cho mạch điện xoay chiều gồm điện trở R , cuộn dây có độ tự cảm L , tụ điện có điện dung C mắc nối tiếp (hình vẽ).



Điện áp tức thời giữa hai đầu đoạn mạch AB là $u = 175\sqrt{2}\cos 100\pi t$ (V), các điện áp hiệu dụng $U_{AM} = 25\text{V}; U_{MN} = 25\text{V}; U_{NB} = 175\text{V}.$

a) Xác định hệ số công suất của đoạn mạch AB .

b) Cho $R = 25\Omega$, tính công suất tiêu thụ trung bình của đoạn mạch AB trong khoảng thời gian từ $t_1 = \frac{T}{8}$ đến $t_2 = \frac{T}{4}$ (Với T là chu kỳ của dòng điện trong mạch).

PHẠM XUÂN MAI
(GV THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/379. (For 6th grade) Find all pairs of integers a, b such that

$$a^2 + ab + b^2 = a^2b^2.$$

T2/379. (For 7th grade) Let ABC be an isosceles triangle (at vertex A) such that $\widehat{BAC} \geq 90^\circ$. Choose a point M on AC , and let AH and CK be the altitudes from A and C onto BM respectively (H, K are the feet of these altitudes) such that $BH = HK + KC$. Find the angle BAC .

T3/379. Solve for x

$$\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}} + 4x = 3\sqrt{2} - 1.$$

T4/379. Find a, b such that the maximum value of the expression $\|x+1\| - 2\|-(ax+b)\|$ where $-3 \leq x \leq 4$ is smallest possible.

T5/379. Let $ABCD$ be a rectangular, let I be the midpoint of CD , and let E be a point on AB . The altitude onto DE through I meets DE and AD at M and H respectively. The altitude onto CE through I meets CE and BC at N and K , respectively. EI intersects with HK at G . Prove that

a) The points E, G, N, K, B lie on the same circle.

b) The points E, G, M, H, A lie on the same circle.

(Xem tiếp trang 31)



★ **Bài T1/375.** Tìm số tự nhiên x và các chữ số y, z sao cho với mỗi số tự nhiên n lớn hơn 1 đều có $(5 \cdot 10^n - 2)x = 3.\overline{y...yz}$, trong đó số $\overline{y...yz}$ (viết trong hệ thập phân) có $n - 1$ chữ số y .

Lời giải. Nếu $x \geq 1$ thì

$(5 \cdot 10^n - 2)x \geq 5(10^n - 1) \cdot 1 > 3(10^n - 1) > 3.\overline{y...yz}$ trong đó biểu thức cuối cùng bên phải có $n - 1$ chữ số y với $0 \leq y \leq 9, 0 \leq z \leq 9$, khi đó không có y, z nào thỏa mãn đề bài.

Vậy chỉ có thể xảy ra $x = 0$, lúc đó $y = z = 0$, thỏa mãn đề bài. $\square$

◀ **Nhận xét.** Nhiều bạn đã tính toán chi tiết hai vế của đẳng thức ở đề bài nên có lời giải dài hơn. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

Vinh Phúc: Nguyễn Thành Công, Nguyễn Văn Hải A, Nguyễn Văn Hải B, 6A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Cường, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **TP. Cần Thơ:** Huỳnh Thủy Cúc, 6A9, THCS Đoàn Thị Điểm.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/375.** Chứng minh rằng

$$\frac{|x|}{2008+|x|} + \frac{|y|}{2008+|y|} \geq \frac{|x-y|}{2008+|x-y|}$$

với các số x, y bất kì.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Cho $|a| \geq |b|$. Khi đó ta có

$$\frac{|a|}{2008+|a|} \geq \frac{|b|}{2008+|b|}.$$

Thật vậy, từ $|a| \geq |b|$ suy ra

$$2008 + |a| \geq 2008 + |b| > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2008}{2008+|a|} \leq \frac{2008}{2008+|b|}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2008}{2008+|a|} \geq 1 - \frac{2008}{2008+|b|}$$

$$\Rightarrow \frac{|a|}{2008+|a|} \geq \frac{|b|}{2008+|b|}.$$

Trở lại bài toán. Ta có $|x| + |y| \geq |x - y| \geq 0$.

Áp dụng bổ đề trên suy ra

$$\frac{|x|+|y|}{2008+|x|+|y|} \geq \frac{|x-y|}{2008+|x-y|}$$

$$\Rightarrow \frac{|x|}{2008+|x|+|y|} + \frac{|y|}{2008+|x|+|y|}$$

$$\geq \frac{|x-y|}{2008+|x-y|} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \frac{|x|}{2008+|x|} \geq \frac{|x|}{2008+|x|+|y|} \quad (2)$$

$$\frac{|y|}{2008+|y|} \geq \frac{|y|}{2008+|x|+|y|} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$\frac{|x|}{2008+|x|} + \frac{|y|}{2008+|y|} \geq \frac{|x-y|}{2008+|x-y|} \text{ (dpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$ hoặc $y = 0$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên, nhiều bạn không nêu điều kiện xảy ra đẳng thức.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bác Giang: Nguyễn Minh Trí, 7A4, THCS Yên Lư, Yên Dũng; **Bác Ninh:** Nguyễn Thị Hương Lý, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Phú Thọ:** Trịnh Hồng Ngọc, Nguyễn Thúy Hằng, Nguyễn Thị Mai Anh, Vũ Tuấn Linh, 7A1, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Trần Quang Toàn, 7A0, THCS Lương Thế Vinh, Q. Cầu Giấy; **Hải Dương:** Trần Xuân Thắng, 7/1, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương; **Cần Thơ:** Bùi Xuân Hưng, 7/1, THCS Châu Văn Liêm, TP. Cần Thơ; **Vinh Phúc:** Lê Thị Sơn, Đào Thị Hương, Hoàng Minh Phương, Nguyễn Ngân Giang, Nguyễn Thị Thu Hà, Tô Thị Thu Hà, Nguyễn Thu Thủy, Nguyễn Thị Kim Anh, Phan Thị Khánh Linh, Nguyễn Thị Bích Thủy, Hoàng Hà Linh, Đỗ Thị Thu Uyên, Tạ Chiếu Xuân, 7A1, THCS Yên Lạc.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/375.** Xét số nguyên n lớn hơn 2008 sao cho hai số $2n - 4015$ và $3n - 6023$ đều là số chính phương. Hãy tìm số dư khi chia n cho 40.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Văn Hoàng, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An).

Ta có hai nhận xét đơn giản sau:

1) Một số chính phương lẻ khi chia cho 8 chỉ có số dư là 1.

2) Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có số dư là 0; 1 hoặc 4.

• Từ đề bài và theo nhận xét 1, ta có

$2n - 4015 - 1 : 8 \Rightarrow n : 4 \Rightarrow 3n - 6023$ là số chính phương lẻ. Theo nhận xét 1, ta lại có $3n - 6023 - 1 : 8 \Rightarrow n : 8$ (*).

• Theo nhận xét 2, ta có $2n - 4015$ chia cho 5 dư 0; 1 hoặc 4 nên $6n$ chia cho 5 dư 0; 3 hoặc 2. Cũng vậy $3n - 6023$ chia cho 5 dư 0; 1 hoặc 4 nên $6n$ chia cho 5 dư 1; 3 hoặc 4.

Do đó $6n - 3 : 5 \Rightarrow n - 3 : 5$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra n chia cho 40 dư 8.

(Chú ý rằng: tồn tại số nguyên n thỏa mãn bài toán, chẳng hạn chọn $n = 2048$, khi đó $2n - 4015 = 9^2$, $3n - 6023 = 11^2$). □

◀ **Nhận xét.** 1) Nếu đặt $2n - 4015 = a^2$, $3n - 6023 = b^2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) thì a, b là các số lẻ. Khi đó từ nhận xét 2, ta cũng chứng minh được (*) và (**).

2) Tất cả các bạn đều tìm ra đúng kết quả. Một số bạn lập luận còn dài. Các bạn có lời giải gọn gàng là:

Vinh Phúc: Lê Văn Tú, Phạm Mỹ Linh, 9A1; Kim Anh, Tô Thị Thu Hà, Nguyễn Thị Thu Hà, Minh Hiếu, Quang Minh, 7A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Hùng, Nguyễn Văn Thắng, Trương Đình Đức, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nguyễn Hữu Thắng, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Bạc Liêu:** Trần Quang Minh, 8/4, THCS Trần Huỳnh TX. Bạc Liêu.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/375.** Giải phương trình

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x} \quad (1)$$

Lời giải

Cách 1. Điều kiện $x - \frac{1}{x} \geq 0$; $1 - \frac{1}{x} \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq 1$ hoặc $-1 \leq x < 0$.

Với điều kiện trên, ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x}} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{x-1}{x}} + 1 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 1 = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} \quad (3)$$

• Nếu $-1 \leq x < 0$ thì vế trái của (3) luôn âm, còn vế phải không âm.

• Vậy $x \geq 1$. Khi đó hai vế của (3) không âm, ta được

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow x^2 + 1 - x = 2\sqrt{x(x-1)} \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 1 - x)^2 = 4x(x-1) \\ &\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x} - 1 \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (Do } x \geq 1). \end{aligned}$$

Cách 2. Điều kiện $x \geq 1$ hoặc $-1 \leq x < 0$.

• Nhận thấy $x = 1$ là nghiệm của PT (1).

• Với $x > 1$ hoặc $-1 \leq x < 0$, ta đặt

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} = a; \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = b \quad (a \geq 0; b > 0).$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a^2 - b^2 = x - 1 \\ a - b = \frac{x-1}{x} \end{cases} \Rightarrow a + b = x.$$

Do đó $x > 1$.

Suy ra $(a+b)+(a-b)=x-\frac{1}{x}+1 \Leftrightarrow 2a=a^2+1$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2=0 \Leftrightarrow a=1.$$

$$\text{Vì vậy } \begin{cases} x-\frac{1}{x}=1 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của PT (1) là $\left\{1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Tuy nhiên, không ít bạn đặt điều kiện sai (chỉ cho $x < 0$ hoặc $x \geq 1$). Đặc biệt còn sai lầm trong phép đổi tương đương sau:

$$\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)}-\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=0 (!)$$

(Chúng chỉ tương đương khi $x \geq 1$ mà thôi), dẫn đến kết

luận $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ cũng là nghiệm (!).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Lê Hữu Hoàng, 8A3, THCS Lâm Thao, Đặng Duy Linh, 9E, THCS Văn Lang, Đặng Trung Anh, Võ Duy Tân, 9A, THCS Hồ Xuân Hương; **Nghệ An:** Hoàng Văn Đông, Trương Đình Đức, 9B, Lê Đình Tuấn, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Cao Xuân Bang, 9B, THCS Cao Xuân Huy; **Vĩnh Phúc:** Mai Thị Thanh Hằng, 8C, THCS Vĩnh Yên, Lê Tuấn Anh, 8A, THCS Đại Đồng, Nguyễn Ngân Giang, 7A1, Phạm Thị Mỹ Linh, Tạ Thị Việt Chinh, 9A1, THCS Yên Lạc, Hà Trung Hiệu, 8A, THCS Tam Dương; **Hải Dương:** Nguyễn Thị Thanh Yên, 9A2, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Thanh, 9A, THCS Yên Phong, Nguyễn Ngọc Tân, 9C, THCS Hà Mãn, Thuận Thành, Trần Thị Ngọc, 9B, THCS Từ Sơn; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Cẩm Nhung, 9/1, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; **Khánh Hòa:** Vũ Ngọc Cương, 8/6, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

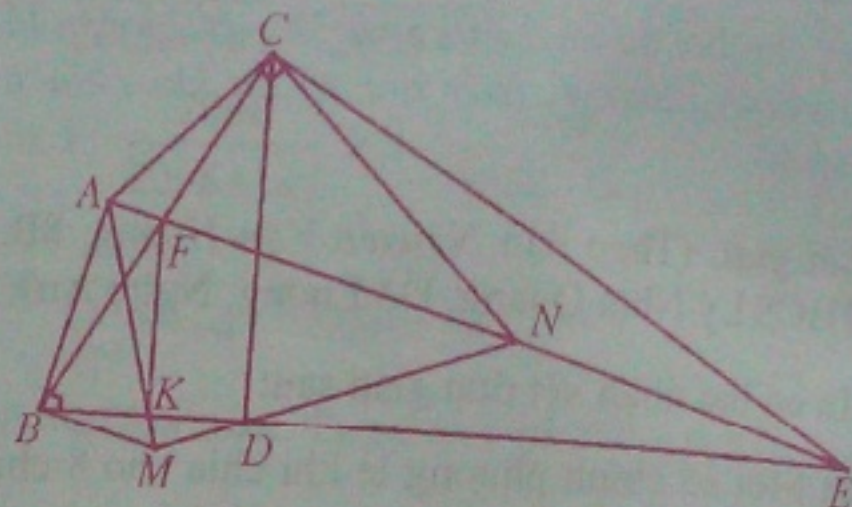
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/375.** Cho tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC}=150^\circ$. Dụng các tam giác AMB và ANC sao cho các tia AM, AN nằm trong góc BAC với $\widehat{ABM}=\widehat{ACN}=90^\circ$, $\widehat{MAB}=30^\circ$, $\widehat{NAC}=60^\circ$. Trên đoạn thẳng MN lấy điểm D sao cho $ND=3MD$. Đường thẳng BD cắt đường thẳng AM và AN theo thứ tự tại K và E . Gọi F là giao điểm của BC với AN . Chứng minh rằng

1) Tam giác NCE cân;

2) KF song song với CD .

Lời giải



1) Do $\widehat{BAE}=\widehat{BAC}-\widehat{CAN}=150^\circ-60^\circ=90^\circ$

nên $BM \parallel AE$, suy ra $\frac{NE}{BM}=\frac{DN}{DM}=3$ (định lí

Thales), do đó $NE=3BM$.

Xét hai tam giác vuông ABM và CAN , ta có

$$BM=AB.\tan 30^\circ=\frac{AB}{\sqrt{3}},$$

$$CN=AC.\tan 60^\circ=AC.\sqrt{3}.$$

Do $AB=AC$ nên $CN=3BM$.

Vậy $CN=NE$ hay tam giác NCE cân.

2) Vì tam giác NCE cân có $\widehat{ANC}=30^\circ$ nên $\widehat{NEC}=15^\circ$, tam giác ABC cân mà $\widehat{BAC}=150^\circ$ nên $\widehat{ABC}=15^\circ$. Vậy $\widehat{ABC}=\widehat{AEC}$, hay tứ giác $ABEC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{CBE}=\widehat{CAE}=60^\circ$. Kết hợp với $\widehat{KAF}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$, ta có tứ giác $ABKF$ nội tiếp, mà $\widehat{FAB}=90^\circ$ nên $\widehat{FKB}=90^\circ$ hay $FK \perp BE$.

Do tứ giác $ABEC$ nội tiếp nên $\widehat{BCE}=\widehat{BAE}=90^\circ$.

Tam giác vuông BCE có $\widehat{CBE}=60^\circ$ nên

$$BE=2BC, \text{ mà } \frac{BD}{BE}=\frac{DM}{MN}=\frac{1}{4} \text{ nên } BC=2BD.$$

Suy ra hai tam giác BDC và BCE đồng dạng, do

đó $\widehat{CDB}=90^\circ$ hay $CD \perp BD$. Vậy $KF \parallel CD$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn đã tham gia giải bài toán này và hầu hết đều cho lời giải đúng. Các bạn chưa học về tỉ số lượng giác trong tam giác vuông hay tứ giác nội tiếp đã giải bài toán trên theo cách dựa vào các phát hiện sau: $\triangle ABK$ cân tại A , $\triangle AFK=\triangle AFC$, $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle NEC$, tam giác nửa đều (tam giác vuông có

một góc bằng 60°) có cạnh góc vuông kẻ với góc 60° bằng nửa cạnh huyền...

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Kiên Giang: Trần Văn Hội, 9¹, THCS Mai Thị Hồng Hạnh; **Đà Nẵng:** Đỗ Trần Tuấn Anh, 9/5, THCS Nguyễn Khuyến; **Thanh Hóa:** Đinh Uýt Nây, 8B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Hương Lý, 7A₁, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Nguyễn Ngọc Tân**, 9C, THCS Hà Mãn, Thuận Thành; **Nguyễn Thị Xuân**, 9/1, Song Hồ, Thuận Thành; **Bình Định:** Trần Minh Bảo, 9A₁, THCS Trần Hưng Đạo, Quy Nhơn; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thế Anh, Trần Quang Đức, 9D, THCS Lập Thạch; **Phạm Mỹ Linh**, 9A₁, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Nguyễn Huy Vũ, 9A₁, Lê Minh Phúc, 9A₅, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Nghệ An:** Lê Ngọc Nguyên, Võ Duy Văn, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Tướng Thị Hiến**, 9B, THCS Bồi Sơn, Đô Lương; **Nguyễn Văn Thắng**, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** Kim Huyền Trang, 9A₁, THCS Lâm Thao; **Hải Phòng:** Trịnh Ngọc Tú, 8A₁, Nguyễn Đức Toàn, 9A₁, THCS Hồng Bàng; **Hà Tĩnh:** Thái Doãn Minh, 9B, THCS Xuân Diệu, Nghèn, Can Lộc; **Nguyễn Thị Cẩm Nhung**, 9/1, THCS Lê Văn Thiêm.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/375.** Tìm tất cả các cặp số nguyên m, n lớn hơn 1 sao cho với các số thực a, b, c mà $a + b + c = 0$ thì đẳng thức sau đúng:

$$\frac{a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n}}{m+n} = \frac{a^m + b^m + c^m}{m} \cdot \frac{a^n + b^n + c^n}{n} \quad (1)$$

Lời giải. 1) Điều kiện cần

Giả sử cặp số nguyên m, n thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Trong hệ thức (1), thay $a = 1; b = -1; c = 0$, ta được

$$\frac{1 + (-1)^{m+n}}{m+n} = \frac{1 + (-1)^m}{m} \cdot \frac{1 + (-1)^n}{n} \quad (2)$$

Nếu m, n là các số nguyên lẻ thì vế trái của (2) khác 0 còn vế phải bằng 0, đẳng thức không thỏa mãn.

Nếu m, n là các số nguyên chẵn thì hệ thức (2) trở thành $\frac{1}{m+n} = \frac{2}{mn}$ hay $(m-2)(n-2) = 4$.

Suy ra $m = 4, n = 4$.

Nhưng khi đó trong (1), thay $a = 1, b = -1, c = 2$, ta có VT = $\frac{129}{4} \neq$ VP = $\frac{81}{4}$. Cặp giá trị này của m, n không thỏa mãn bài toán.

Ta xét trường hợp m, n khác tính chẵn lẻ. Vì vai trò của m, n như nhau nên có thể giả thiết m là số chẵn, n là số lẻ.

Trong (1), thay $a = b = -1, c = 2$, ta được

$$\frac{-2 + 2^{m+n}}{m+n} = \frac{2 + 2^m}{m} \cdot \frac{-2 + 2^n}{n} \quad \text{hay}$$

$$mn(-2 + 2^{m+n}) = (m+n)(2 + 2^m)(-2 + 2^n) \quad (3)$$

$$\text{Mà } (2 + 2^m)(-2 + 2^n) = 2^{m+n} - 2 \cdot 2^m + 2 \cdot 2^n - 4$$

$< 2(-2 + 2^{m+n})$, nên từ (3) suy ra

$$mn < 2(m+n) \Rightarrow (m-2)(n-2) < 4 \quad (4)$$

Vì m chẵn, n lẻ và $m \geq 2, n \geq 3$ nên từ (4) suy

$$\text{ra } \begin{cases} m = 2 \\ m = 4, n = 3. \end{cases}$$

Lại thấy $m = 4, n = 3$ không thỏa mãn (3).

Với $m = 2$, thay vào (3) và rút gọn, ta được $4n + 12 = (6 - n)2^n \Rightarrow n < 6$. Do đó $n = 3$ hoặc $n = 5$.

Vậy chỉ có thể

$$(m; n) \in \{(2; 3), (2; 5), (3; 2), (3; 5)\}.$$

2) Điều kiện đủ

Giả sử các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$, ta sẽ chứng minh (1) thỏa mãn với các cặp số $(m; n)$ như trên.

Đặt $S_n = a^n + b^n + c^n, n \in \mathbb{N}$, ta cần chứng

$$\text{minh } \frac{S_5}{5} = \frac{S_2}{2} \cdot \frac{S_3}{3} \quad \text{và} \quad \frac{S_7}{7} = \frac{S_2}{2} \cdot \frac{S_5}{5}.$$

Ta có $S_1 = a + b + c = 0$;

$$ab + bc + ca = \frac{1}{2}((a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2))$$

$$= -\frac{1}{2}S_2;$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\text{suy ra } abc = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \frac{S_3}{3}.$$

Do đó theo định lý Viète a, b, c là nghiệm của phương trình bậc ba

$$x^3 - \frac{1}{2}S_2x - \frac{S_3}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x^{n+3} - \frac{1}{2}S_2x^{n+1} - \frac{S_3}{3}x^n = 0 \quad (5)$$

Trong (5), lần lượt thay x bằng a, b, c rồi cộng các đẳng thức thu được theo vế, ta được

$$S_{n+3} - \frac{1}{2}S_2 \cdot S_{n+1} - \frac{S_3}{3} \cdot S_n = 0 \quad (6)$$

Từ (6) ta thấy

• Với $n = 1$, suy ra $S_4 = \frac{1}{2}S_2^2$ (7)

• Với $n = 2$, suy ra $\frac{S_5}{5} = \frac{S_2}{2} \cdot \frac{S_3}{3}$ (8)

• Với $n = 4$, sử dụng (7), (8), ta dễ dàng có $\frac{S_7}{7} = \frac{S_2}{2} \cdot \frac{S_5}{5}$ (9)

Vậy các cặp số nguyên phải tìm là

$$(m; n) \in \{(2; 3), (2; 5), (3; 2), (3; 5)\}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán khó, nhiều bạn đã làm thiếu phần điều kiện đủ.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Ninh Bình: Nguyễn Đỗ Thành Duy, 11 Toán, THPT Lương Văn Tụy; **Nam Định:** Trần Thị Hồng Vân, 12A, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bắc Giang:** Nguyễn Hoàng Hiệp, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Mạnh Quân, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** Trần Trung Kiên, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Bắc Ninh:** Quách Đăng Hưng, 12 Toán THPT chuyên Bắc Ninh; **Nghệ An:** Quang Tài Anh Phú, 10A1, THPT Phan Bội Châu, TP Vinh; **Quảng Nam:** Nguyễn Hoài Phương, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Tam Kỳ; **Đà Nẵng:** Hoàng Bùi Khánh, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng; **Lâm Đồng:** Đào Phúc Quang Trí, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T7/375.** Cho số nguyên dương k và ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc \leq 1$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{b^k} + \frac{b}{c^k} + \frac{c}{a^k} \geq a + b + c$

Lời giải. Cách 1. Áp dụng BĐT Cauchy cho k số dương, ta có

$$\frac{a}{b^k} + (k-1)a \geq k \sqrt[k]{\frac{a}{b^k} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k-1 \text{ số } a}} = k \cdot \frac{a}{b}$$

Tương tự có

$$\frac{b}{c^k} + (k-1)b \geq k \cdot \frac{b}{c}; \quad \frac{c}{a^k} + (k-1)c \geq k \cdot \frac{c}{a}$$

Cộng theo vế ba BĐT trên ta được

$$\frac{a}{b^k} + \frac{b}{c^k} + \frac{c}{a^k} + (k-1)(a+b+c) \geq k \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3a \quad (\text{do } abc \leq 1).$$

Tương tự, $\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3b; \quad \frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} \geq 3c.$

Cộng theo vế ba BĐT trên ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{b^k} + \frac{b}{c^k} + \frac{c}{a^k} \geq a + b + c.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1.$

Cách 2. Xét $f(k) = \frac{a}{b^k} + \frac{b}{c^k} + \frac{c}{a^k}$ với $k \geq 0.$

Ta chứng minh $f(k+1) \geq f(k), k \geq 0$ (3)

Từ (2) suy ra BĐT (3) đúng với $k = 0.$

Giả sử BĐT (3) đúng với $k = n$, tức là

$$\frac{a}{b^{n+1}} + \frac{b}{c^{n+1}} + \frac{c}{a^{n+1}} \geq \frac{a}{b^n} + \frac{b}{c^n} + \frac{c}{a^n}.$$

Từ đây, sử dụng BĐT Cauchy ta có

$$\begin{aligned} f(n+2) + f(n+1) &\geq f(n+2) + f(n) \\ &= \left(\frac{a}{b^{n+2}} + \frac{a}{b^n} \right) + \left(\frac{b}{c^{n+2}} + \frac{b}{c^n} \right) + \left(\frac{c}{a^{n+2}} + \frac{c}{a^n} \right) \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{a^2}{b^{2n+2}}} + 2 \sqrt{\frac{b^2}{c^{2n+2}}} + 2 \sqrt{\frac{c^2}{a^{2n+2}}} = 2f(n+1). \end{aligned}$$

Suy ra $f(n+2) \geq f(n+1).$ Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có $f(k) \geq f(0), \forall k \geq 1$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1. \quad \square$

◀ **Nhận xét.** Khá nhiều bạn tham gia giải và hầu hết cho kết quả đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

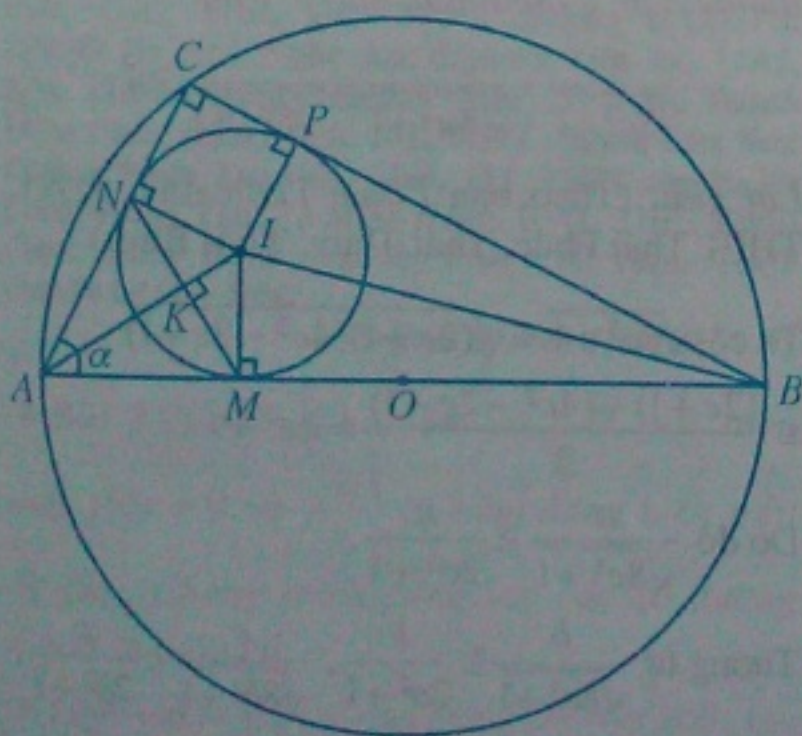
Hà Nội: Đào Trọng Anh, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên; Nguyễn Khánh Việt, 11A2 Toán, Đỗ Vũ Thạch, 10T1, Nguyễn Văn Quý, 10A1 Toán, khối

THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; Nguyễn Đức Mạnh, 10A2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; Nguyễn Sơn Tùng, 12A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì; **Thanh Hoá:** Đinh Quang Lộc, Nguyễn Thái Hoàn, lớp A3, THPT Hậu Lộc I; La Hồng Quân, Ngô Văn Dũng, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; Hoàng Sỹ Quý, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng; **Cần Thơ:** Hồ Diên Tuấn Anh, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; Trần Thuỳ Dương, 10A6, THPT Trà Nóc; **Vĩnh Phúc:** Phan Quốc Khánh, 11A1, Đinh Tiến Dũng, Nguyễn Ngọc Trung, Lê Tuấn Tú, 10A1, Phạm Hữu Đức, 10A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Khuông Mạnh Thắng**, 10A2, THPT Ngô Gia Tự; **Quảng Trị:** Nguyễn Đức Lâm, 10Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Nam Định:** Trương Quang Huy, 11B, THPT Lê Hồng Phong; **Tuyên Quang:** Nguyễn Mạnh Đức, 12Toán, THPT chuyên Tuyên Quang; **Hải Dương:** Ninh Văn Quý, 11A, THPT Kim Thành; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Minh, Quang Tài Anh Phú, 10A1, Nguyễn Văn An, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Trần Kim Quý, 10 Toán Tin II, Thiệu Đẳng Ba, 11Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bắc Ninh:** Quách Đẳng Hưng, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Thái Nguyên:** Nguyễn Hữu Thường, 10 Lý, THPT chuyên Thái Nguyên; **Ninh Bình:** Lương Văn Thiện, 11CT, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Quảng Nam:** Nguyễn Hoài Phương, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Tam Kỳ.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T8/375.** Cho đường tròn đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm C trên đường tròn (C khác A và B). Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với hai cạnh AB và AC lần lượt tại M và N . Hãy tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN khi điểm C chạy trên đường tròn.

Lời giải



Gọi I và r theo thứ tự là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$; K là giao điểm của MN với IA . Đặt $\widehat{CAB} = \alpha$, khi đó

$$MK = IM \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Suy ra } MN = 2r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

Giả sử BC tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm P . Vì tứ giác $CNIP$ là hình vuông nên

$$\begin{aligned} 2r &= CN + CP = AC + BC - AB \\ &= AB(\cos \alpha + \sin \alpha - 1) \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} MN &= AB(\cos \alpha + \sin \alpha - 1) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= AB \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= AB \sin \alpha \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } MN^2 &= AB^2 \sin^2 \alpha \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \\ &= AB^2 \sin^2 \alpha (1 - \sin \alpha). \text{ Hay} \end{aligned}$$

$$MN = AB \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^3 \alpha} = 2R \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^3 \alpha} \quad (3)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương $\sin \alpha$, $\sin \alpha$, $2 - 2\sin \alpha$, ta được

$$\leq \left(\frac{\sin \alpha + \sin \alpha + (2 - 2\sin \alpha)}{3} \right)^3 = \frac{8}{27} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } MN \leq \frac{4R\sqrt{3}}{9}. \text{ Đẳng thức}$$

xảy ra khi và chỉ khi $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

$$\text{Lúc đó } BC = \frac{4R}{3} \text{ và } AC = \frac{2R\sqrt{5}}{3}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN là $\frac{4R\sqrt{3}}{9}$ đạt được khi và chỉ khi $BC = \frac{4R}{3}$ và

$$AC = \frac{2R\sqrt{5}}{3}. \text{ Dễ thấy có hai vị trí của điểm}$$

C trên đường tròn đường kính AB thỏa mãn điều kiện này. $\square$

◀ **Nhận xét.** Nhiều bạn phải sử dụng đến công cụ đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN . Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Những bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Hà Nội: Nguyễn Văn Quý, 10A1 Toán, Trần Nhật Tân, 12A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; Mai Anh Bằng, 10 Toán, Đỗ Vũ Thạch, 10T1, Vũ Minh Thắng, 11 Toán 1, khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Phú Thọ:** Tạ Hải Nam, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Đinh Tiến Dũng, Nguyễn Mạnh Quân, Nguyễn Ngọc Trung, 10A1, Phạm Hữu Đức, 10A10, Phan Quốc Khánh, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** Nguyễn Thị Hoa, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Trịnh Đăng Sơn, Ngô Văn Dũng, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Đỗ Chí Sơn Linh, 10A1, Nguyễn Thanh Tú, 11A1, Khối THPT chuyên ĐH Vinh, Doãn Văn Hùng, Lê Trung Hiếu, Nguyễn Văn Minh, Quang Tài Anh Phú, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Hồ Hữu Quân, 11A1, THPT Quỳnh Lưu I; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Tam Kỳ; **Đà Nẵng:** Nguyễn Hữu Minh Tuấn, 10A1, Lê Văn Tấn Quyên, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** Đào Phúc Quang Trí, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt; **Quảng Ngãi:** Lê Nguyễn Khánh, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, Ngô Tấn Kha, 11A2, THPT Nguyễn Huệ, TP. Tuy Hòa; **Vĩnh Long:** Châu Tuấn Kiệt, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Cà Mau:** Nguyễn Phạm Tuấn Anh, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** Lê Phúc Lữ, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **TP. Hồ Chí Minh:** Bùi Trần Long, 11T, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T9/375.** Cho dãy (x_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$)

thỏa mãn $x_0 = 2$ và $x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2}$ với mọi

$n = 0, 1, 2, \dots$. Tính $\left[\sum_{k=1}^n x_k \right]$ trong đó $[x]$ kí

hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Lời giải. Chứng minh bằng quy nạp theo n ta thấy ngay $x_n > 0$ với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$

Nhận xét rằng: $x_{n+1} - 1 = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2} - 1 = \frac{x_n - 1}{x_n + 2}$

và $x_{n+1} + 1 = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2} + 1 = \frac{3(x_n + 1)}{x_n + 2}$.

Từ đó ta có công thức truy hồi

$$\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_n - 1}{x_n + 1}, \quad n \geq 0 \quad (1)$$

Do đó với mọi $n \geq 1$, thì

$$\frac{x_n - 1}{x_n + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_{n-1} - 1}{x_{n-1} + 1} = \dots = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} = \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Suy ra $3^{n+1}(x_n - 1) = x_n + 1$.

$$\text{Bởi vậy } x_n = \frac{3^{n+1} + 1}{3^{n+1} - 1} = 1 + \frac{2}{3^{n+1} - 1}$$

$$= 1 + \frac{1}{3^n + 3^{n-1} + \dots + 1} < 1 + \frac{1}{3^n} < 1 + \frac{1}{2^n}$$

với mọi $n \geq 1$. Hệ quả là

$$n < \sum_{k=1}^n x_k < n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = n + 1 - \frac{1}{2^n} < n + 1.$$

Suy ra $\left[\sum_{k=1}^n x_k \right] = n$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Bài toán trên có thể được giải bằng nhiều cách khác nhau. Phát hiện ra công thức (1) để có lời giải gọn gàng, sáng sủa như trên chỉ có bốn bạn học sinh sau:

Nghệ An: Nguyễn Thanh Tú, 11A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh; **Bình Định:** Đặng Văn Đế, Nguyễn Đăng Hưng, Nguyễn Ngọc Hưng, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/375.** Chứng minh rằng nếu các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ thì

$$\frac{a}{\sqrt{8c^3 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{8a^3 + 1}} + \frac{c}{\sqrt{8b^3 + 1}} \geq 1.$$

Lời giải. (Theo bạn Phạm Tuấn Anh, 11A1, THPT Thái Phúc, Thái Thụy, Thái Bình).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{8c^3 + 1} &= \sqrt{(2c + 1)(4c^2 - 2c + 1)} \\ &\leq \frac{(2c + 1) + (4c^2 - 2c + 1)}{2} = 2c^2 + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{\sqrt{8c^3 + 1}} \geq \frac{a}{2c^2 + 1}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{\sqrt{8a^3 + 1}} \geq \frac{b}{2a^2 + 1}, \quad \frac{c}{\sqrt{8b^3 + 1}} \geq \frac{c}{2b^2 + 1}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{2c^2+1} + \frac{b}{2a^2+1} + \frac{c}{2b^2+1} \geq 1 \quad (1)$$

Chú ý rằng BĐT (1) tương đương với

$$\begin{aligned} & 4(a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2) + 2(a^3 + b^3 + c^3) \\ & + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) + (a + b + c) \\ & \geq 8a^2b^2c^2 + 4(a^2b^2 + c^2b^2 + c^2a^2) \\ & + 2(a^2 + b^2 + c^2) + 1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Ta có } 2a^3b^2 + 2ab^2 \geq 2\sqrt{4a^4b^4} = 4a^2b^2 \quad (3)$$

$$\text{Tương tự } 2b^3c^2 + 2bc^2 \geq 4b^2c^2 \quad (4)$$

$$2c^3a^2 + 2ca^2 \geq 4a^2c^2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \text{Lại có } 2(a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2) \\ & \geq 2.3\sqrt[3]{a^5b^5c^5} = 6 = 6a^2b^2c^2 \text{ (do } abc = 1) \end{aligned} \quad (6)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3 = 1 + 2a^2b^2c^2 \quad (7)$$

$$a^3 + a \geq 2a^2, b^3 + b \geq 2b^2, c^3 + c \geq 2c^2 \quad (8)$$

Cộng các vế của (3), (4), (5), (6), (7), (8) ta được (2).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Bài toán này được rất đông các bạn tham gia giải và có nhiều cách giải khác nhau. Có thể khẳng định rằng bất đẳng thức là một thể mạnh của học sinh Việt Nam. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Phan Quốc Khánh, 11A1, THPT chuyên Vinh Phúc; Nam Định: Trương Quang Huy, 11B, THPT chuyên Lê Hồng Phong; Hà Nội: Nguyễn Khánh Việt, 11A2 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; Nghệ An: Nguyễn Văn An, 11A1, K36, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; Thanh Hóa: Phạm Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; Quảng Ninh: Trịnh Đức Anh, 11T, THPT chuyên Hạ Long; Hưng Yên: Tạ Minh Hằng, 10A1, THPT Khoái Châu; Bình Định: Nguyễn Phúc, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T11/375.** Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $\frac{f(t)}{t}$ là hàm đồng biến trên

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chứng minh rằng với các số dương x, y, z ta luôn có

$$x.f(y^2 - zx) + y.f(z^2 - xy) + z.f(x^2 - yz) \geq 0 \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Theo giả thiết thì hàm số $\frac{f(t)}{t}$ đồng biến trên

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$, nên tồn tại các giới hạn $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t)}{t}$ và

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$. Chọn $d \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t)}{t} \leq d \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t},$$

$$\text{ta thu được hàm } g(x) = \begin{cases} \frac{f(t)}{t} & \text{nếu } t \neq 0 \\ d & \text{nếu } t = 0. \end{cases}$$

Đặt $y^2 - zx = a$, $z^2 - xy = b$ và $x^2 - yz = c$ thì $xa + yb + zc = 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$.

Do $a + b + c = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$ nên $a \geq 0$. Do $xa + yb + zc = 0$ nên $yb = -xa - zc$ và $zc = -xa - yb$.

Ta biến đổi vế trái của (1):

$$\begin{aligned} T &= xf(a) + yf(b) + zf(c) \\ &= xag(a) + ybg(b) + zcg(c) \text{ dưới dạng} \end{aligned}$$

$$T = xag((a) - g(b)) + zc(g(c) - g(b)) \quad (2)$$

$$T = xa(g(a) - g(c)) + yb(g(b) - g(c)) \quad (3)$$

$$\text{Nếu } T < 0 \text{ thì từ (2), suy ra } c(g(c) - g(b)) < 0 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) suy ra } b(g(b) - g(c)) < 0 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta thu được $(b - c)(g(b) - g(c)) < 0$ mâu thuẫn, vì $g(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $T \geq 0$, đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Vinh Phúc: Nguyễn Mạnh Quân, 10A1 THPT Chuyên Vinh Phúc; Hà Nội: Nguyễn Sơn Tùng, 12A2 THPT Ngô Quyền, Ba Vì; Hà Nam: Trần Trung Kiên, 11T, THPT Chuyên Hà Nam; Nghệ An: Quang Tài Anh Phú, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; Đà Nẵng: Nguyễn Tăng Thành, 11A1 THPT Chuyên Lê Quý Đôn; An Giang: Nguyễn Văn Phước, 11T1 THPT Chuyên An Giang.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/375.** Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) là hình chiếu vuông góc của điểm M nào đó trong không gian lên đường thẳng A_iA_{i+1} (coi A_5 trùng với A_1). Tìm giá trị nhỏ nhất của $\sum_{1 \leq i \leq 4} A_iA_{i+1} \cdot A_iB_i$.

Lời giải. Coi A_5 trùng với A_1 , ta có

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq 4} A_iA_{i+1} \cdot A_iB_i &\geq \sum_{1 \leq i \leq 4} \overline{A_iA_{i+1}} \cdot \overline{A_iB_i} \\ &\geq \sum_{1 \leq i \leq 4} \overline{A_iA_{i+1}} \cdot \overline{A_iM} \quad (\text{vì } MB_i \perp A_iA_{i+1}) \\ &\geq \sum_{1 \leq i \leq 4} \frac{A_iA_{i+1}^2 + A_iM^2 - A_{i+1}M^2}{2} \geq \sum_{1 \leq i \leq 4} \frac{A_iA_{i+1}^2}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

Với $1 \leq i \leq 4$, gọi (P_i) là mặt phẳng qua A_i , vuông góc với A_iA_{i+1} ; $(P_i(A_{i+1}))$ là phần không gian gồm mặt phẳng (P_i) và nửa không gian bờ (P_i) , chứa A_{i+1} . Đẳng thức xảy ra ở (1)

$$\Leftrightarrow A_iA_{i+1} \uparrow\uparrow A_iB_i \quad (1 \leq i \leq 4)$$

$$\Leftrightarrow M \in P_i(A_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq 4) \Leftrightarrow M \in \bigcap_{1 \leq i \leq 4} P_i(A_{i+1}).$$

Dễ dàng kiểm tra rằng $\bigcap_{1 \leq i \leq 4} P_i(A_{i+1}) \neq \emptyset$, chẳng hạn, tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ thuộc $\bigcap_{1 \leq i \leq 4} P_i(A_{i+1})$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\sum_{1 \leq i \leq 4} A_iA_{i+1} \cdot A_iB_i$ bằng

$$\sum_{1 \leq i \leq 4} \frac{A_iA_{i+1}^2}{2}. \quad \square$$

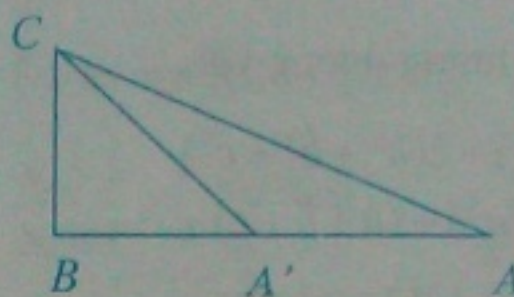
◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt là:

Bác Ninh: Trần Tuấn Anh, 11A1, THPT Thuận Thành 1, Quách Đăng Hưng, 12T, THPT chuyên; **Hà Nội:** Đào Trọng Anh, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều; **Ninh Bình:** Lương Văn Thiện, 11T, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Bến Tre:** Lê Phúc Lữ, 12T, THPT chuyên.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/375.** Một quan sát viên ngồi trên tàu hỏa chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ nhìn thấy trên thành toa xe một hình tam giác ABC vuông góc tại B mà vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với chuyển động của toa tàu và góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Một quan sát viên khác đứng trên mặt đất thấy hình tam giác trên là một hình tam giác

vuông cân. Hãy xác định độ lớn của vận tốc v theo tốc độ ánh sáng.



Lời giải. Do cạnh BC vuông góc với vận tốc của toa tàu nên nó có độ dài không đổi, còn cạnh AB bị co ngắn thành

$A'B$ đối với quan sát viên đứng yên trên mặt đất.

Theo thuyết tương đối hẹp thì

$$A'B = AB \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

$$\text{Mặt khác } A'B = BC = AB \tan 30^\circ = \frac{AB}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Từ trên suy ra } \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow v^2 = \frac{2}{3}c^2,$$

$$\text{hay } v = c \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad \square$$

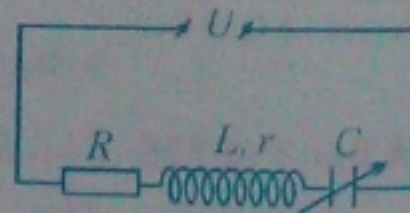
◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt là:

Vinh Phúc: Nguyễn Thiệu Dũng 10A2, Nguyễn Văn Đông 121, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hà Nam:** Kiều Minh Tuấn 11 Lí, THPT Chuyên; **Thanh Hoá:** Nguyễn Hồng Lĩnh, 12C10, Lê Thanh Minh 12C12, THPT Lê Văn Huru, Thiệu Hoá; **Nghệ An:** Nguyễn Trung Hưng, 10A3 THPT Chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Đông, 11 Lí THPT Chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Nguyễn Vĩnh Triết, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Phan Hữu Chi, 11 Lí THPT Chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/375.**

Một mạch điện gồm một điện trở $R = 8\Omega$, một cuộn dây có điện trở



thuần $r = 2\Omega$, độ tự cảm $L = \frac{3}{2\pi}$ H và một tụ điện có điện dung C biến đổi được mắc nối tiếp (hình vẽ).

Cho biết hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu đoạn mạch $U = 10V$, cường độ dòng điện hiệu dụng $I = 0,704A$ và tần số dòng điện chạy trong mạch $f = 50Hz$.

1) Tính độ lệch pha giữa cường độ dòng điện và hiệu điện thế.

2) Tính điện dung C của tụ điện.

3) Để dòng điện trong mạch đạt cực đại thì phải tăng hay giảm điện dung C và tăng hay giảm bao nhiêu? Tính hiệu điện thế cực đại ở hai đầu cuộn dây khi đó.

Lời giải

1) Tổng trở của mạch điện:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{10}{0,704} \approx 14,2\Omega.$$

$$\cos \varphi = \frac{R+r}{Z} \approx \frac{10}{14,2} \approx 0,7 \Rightarrow \varphi \approx \frac{\pi}{4}.$$

Vậy cường độ dòng điện và hiệu điện thế lệch pha nhau $\frac{\pi}{4}$.

$$2) \text{ Ta có } Z_L = L\omega = \frac{3}{2\pi} \cdot 100\pi = 150\Omega.$$

$$\text{Mặt khác } (R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2 = Z^2$$

$$\Rightarrow (8+2)^2 + (150 - Z_C)^2 \approx (14,2)^2.$$

$$\text{Từ đây ta tìm được } Z_{C1} \approx 160(\Omega); Z_{C2} \approx 140\Omega$$

$$\text{Với } Z_{C1} \approx 160\Omega \text{ thì } C_1 \approx \frac{1}{16\pi} \cdot 10^{-3} F.$$

$$\text{Với } Z_{C2} \approx 140\Omega \text{ thì } C_2 \approx \frac{1}{14\pi} \cdot 10^{-3} F.$$

$$3) \text{ Để đạt } I_{\max} \text{ thì } Z_L = Z_C. \text{ Từ đó } \frac{1}{C\omega} = 150,$$

$$\text{suy ra } C = \frac{1}{15\pi} \cdot 10^{-3} F.$$

Với $Z_{C1} \approx 160\Omega$ thì điện dung phải tăng thêm

$$\frac{1}{2,4\pi} \cdot 10^{-5} F. \text{ Với } Z_{C2} \approx 140\Omega \text{ thì điện dung}$$

$$\text{phải giảm đi } \frac{1}{2,1\pi} \cdot 10^{-5} F.$$

Tổng trở của cuộn dây:

$$Z_d = \sqrt{r^2 + Z_L^2} = \sqrt{2^2 + 150^2} \approx 150(\Omega).$$

Cường độ dòng điện cực đại

$$I_{\max} = \frac{U}{R+r} = \frac{10}{10} = 1(A).$$

Hiệu điện thế cực đại giữa hai đầu cuộn dây là:

$$U_{d\max} = I_{\max} Z_d \approx 1.150 = 150(V). \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Văn Đông, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, Nguyễn Huy Hoàng, 12A1, Nguyễn Thị Trang, 12A4, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Trịnh Bá Huy, 12TN2, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Bắc Giang:** Ngô Hồng, 12A1, THPT Tân Yên 2; **Hà Nam:** Kiều Minh Tuấn, 11Lí, THPT chuyên Hà Nam; **Hải Dương:** Phạm Đình Tuấn, 12A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Bình Định:** Phạm Cao Kiều Ngọc, 12A1, Trường Quốc học Quy Nhơn; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Ngọc Duy, 12Lí, THPT chuyên Lê Kluyt.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Đọc lại cho đúng

Lời giải L2/368 do sơ suất nên có chỗ nhầm lẫn. Từ dòng 10↓ trang 27 (số 372 tháng 6 năm 2008). Xin sửa lại như sau:

"Từ các điều kiện của bài toán, ta có

Tại điểm A thì $R_{\min} = \frac{b^2}{a}$, gia tốc của ô tô tại A là

$$\text{lớn nhất: } a_{\max} = \frac{v^2}{R_{\min}} = \frac{a}{b^2} v^2 = 5 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Tại điểm B thì $R_{\max} = \frac{a^2}{b^2}$, gia tốc của ô tô tại B là

$$\text{nhỏ nhất: } a_{\min} = \frac{v^2}{R_{\max}} = \frac{b}{a^2} v^2 = 0,625 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Lực làm cho xe chuyển động theo elip là lực ma sát nghỉ, lực này gây ra gia tốc pháp tuyến cho ô tô. Khi gia tốc của ô tô cực đại thì

$$F_{\max} = ma_{\max} = m \frac{a}{b^2} v^2.$$

Mặt khác $F_{\max} \leq kmg$, nên $kmg \geq m \frac{a}{b^2} v^2$, suy

$$\text{ra } k \geq \frac{av^2}{b^2g} = 0,5.$$

Nếu hệ số ma sát $k \geq 0,5$ thì ô tô không bị trượt khi chuyển động theo elip."

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT



Trong SGK Đại số 10 Nâng cao trang 110 có bài toán sau:

Chứng minh rằng nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \quad (A)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải bài toán trên không có gì khó khăn. Tuy nhiên, nếu chúng ta biết khai thác bất đẳng thức (BĐT) trong bài toán thì ta có thể tìm được nhiều bài toán hay và quen thuộc. Sau đây là một số hướng khai thác.

Khai thác một bất đẳng thức TRONG SGK ĐẠI SỐ 10 NÂNG CAO

TRỊNH XUÂN TÌNH

(Giáo viên trường THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

HƯỚNG 1. Với a, b, c là các số dương, từ BĐT (A) suy ra

$$\frac{a}{b^3} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}.$$

Tương tự $\frac{b}{c^3} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{c^2} + \frac{1}{bc};$

$$\frac{c}{a^3} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ac}.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên ta được bài toán sau đây.

Bài toán 1. Với a, b, c là các số dương, chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}.$$

• Cũng từ BĐT (A) ta có

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}; \quad \frac{b^2}{c^3} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{b}{c^2} + \frac{1}{c};$$

$$\frac{c^2}{a^3} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{c}{a^2} + \frac{1}{a}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên, ta có bài toán sau đây.

Bài toán 2. Với a, b, c là các số dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \geq \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}.$$

• Mặt khác, theo BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$$\frac{a}{b^2} + \frac{1}{a} \geq \frac{2}{b}; \quad \frac{b}{c^2} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{c}; \quad \frac{c}{a^2} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a}.$$

Do đó $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$

Ta được bài toán quen thuộc sau đây.

Bài toán 3. Với a, b, c là các số dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \geq \frac{ab + bc + ca}{abc}.$$

HƯỚNG 2. Với a, b, c là các số dương, từ BĐT (A) suy ra

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{1}{bc(a + b + c)};$$

$$\frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{ca(a+b+c)}.$$

Từ đó ta có bài toán quen thuộc sau đây.

★ **Bài toán 4.** Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

• Nếu thêm điều kiện $abc = 1$, ta có bài toán sau đây.

★ **Bài toán 5.** Cho a, b, c là các số dương, và $abc = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1.$$

➡ **HƯỚNG 3.** Từ BĐT (A) suy ra

$$4(a^3 + b^3) \geq a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = (a+b)^3,$$

$$\text{nên } \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \quad (\text{B})$$

$$\text{Với } a, b \text{ dương, ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Kết hợp với BĐT (B) ta có bài toán sau đây.

★ **Bài toán 6.** Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng

$$(a^3 + b^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq (a+b)^2.$$

• Cũng từ BĐT (B), với a, b, c dương suy ra

$$\frac{1}{(a+b)^3} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^3 + b^3} \right) \Rightarrow \left(\frac{c}{a+b} \right)^3 \geq \frac{1}{4} \left(\frac{c^3}{a^3 + b^3} \right).$$

Tương tự ta cũng có

$$\left(\frac{b}{c+a} \right)^3 \geq \frac{1}{4} \left(\frac{b^3}{c^3 + a^3} \right); \quad \left(\frac{a}{b+c} \right)^3 \geq \frac{1}{4} \left(\frac{a^3}{b^3 + c^3} \right).$$

Cộng theo vế các BĐT trên và áp dụng BĐT

$$\text{Nesbit } \frac{a^3}{b^3 + c^3} + \frac{b^3}{c^3 + a^3} + \frac{c^3}{a^3 + b^3} \geq \frac{3}{2} \text{ ta được}$$

bài toán sau

★ **Bài toán 7.** Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c} \right)^3 + \left(\frac{b}{c+a} \right)^3 + \left(\frac{c}{a+b} \right)^3 \geq \frac{3}{8}.$$

(Bài T9/328 – THPT số 10/2004 khi $k = 3$)

• Từ BĐT (B), ta có

$$a+b \leq \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)} \Rightarrow \frac{c}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}} \leq \frac{c \sqrt[3]{4}}{a+b}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{a}{\sqrt[3]{b^3 + c^3}} \leq \frac{a \sqrt[3]{4}}{b+c}; \quad \frac{b}{\sqrt[3]{c^3 + a^3}} \leq \frac{b \sqrt[3]{4}}{c+a}.$$

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta

$$\text{luôn có } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2. \text{ Từ đó ta được}$$

★ **Bài toán 8.** Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b^3 + c^3}} + \frac{b}{\sqrt[3]{c^3 + a^3}} + \frac{c}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}} < 2\sqrt[3]{4}.$$

(Bài T4/323 – THPT số 5/2004)

Như vậy là từ một bài toán đơn giản trong SGK nếu ta biết cách khai thác nó thì ta sẽ tìm được nhiều điều hay. Chúc bạn thành công.

Mừng xuân Kỷ Sửu

Một khúc tâm tình với Tết Trâu,
Cố mong vui khỏe, họ mợ giàu.
Hồn Thơ có thể trời cao vút,
Chất Toán dò tìm biển thẳm sâu.
Bạn hữu gương tròn tâm tỏa sáng,
Sư huynh mực thước trọng hàng đầu.
Tương lai phía trước còn gian khó,
Lộc phú chỉ bằng khỏe tựa trâu.

ĐÀO TAM
(GV khoa Toán, ĐH Vinh)



NGƯỜI CHƠI THÔNG MINH

Hãy tưởng tượng bạn đang tham gia trò chơi "Chiếc nón kì diệu" trên truyền hình và bạn đang có cơ hội nhận được một phần quà có giá trị. Phần quà này nằm ở một trong ba chiếc hộp, (hai chiếc còn lại là rỗng).

Giả sử bạn đã chọn một chiếc hộp nào đó nhưng chưa mở ra. Lúc này người dẫn chương trình (là người biết rõ trong hộp nào chứa phần quà) sẽ mở 1 chiếc hộp rỗng trong 2 chiếc còn lại ra (nếu cả 2 hộp đều rỗng thì chọn hộp bất kì). Sau đó anh ta hỏi bạn là có đổi chiếc hộp mà bạn vừa chọn với chiếc hộp còn lại chưa mở hay không? Hỏi rằng nếu bạn đồng ý đổi thì xác suất chọn đúng chiếc hộp có quà của bạn là bao nhiêu?

Theo tôi nghĩ, khi người dẫn chương trình bỏ đi 1 chiếc hộp rỗng thì sẽ còn lại 2 chiếc hộp. Nên nếu đồng ý đổi thì xác suất chọn đúng hộp có quà tặng là $\frac{1}{2}$.

Bạn có nghĩ như tôi không?

HOÀNG NGỌC TUÂN

(Khu Toàn Thắng, xã Lệ Chi, Gia Lâm, Hà Nội)



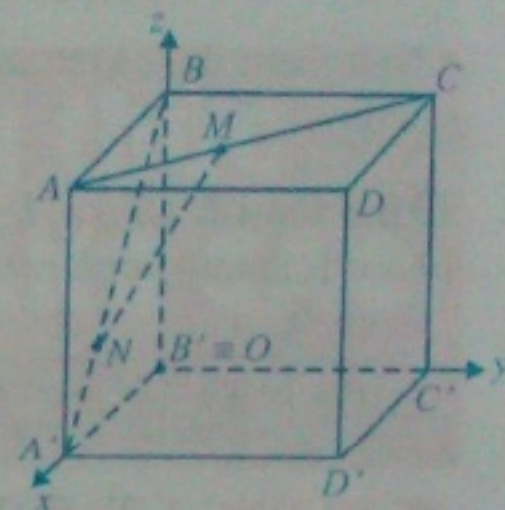
Giải đáp: BÀI TOÁN LỖ NGHIỆM?

(Đã đăng trên THPT số 376, tháng 10.2008)

Lời giải của bạn học sinh đăng trên số 376, tháng 10.2008 sai từ chỗ lập luận *Do MN nhỏ nhất khi và chỉ khi MN là đường vuông góc chung của AC và A'B*, nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0. \end{cases}$$

Bởi vì khi M, N chuyển động theo thứ tự trên AC và $A'B$ nhưng luôn bị ràng buộc bởi điều kiện $AM = A'N$ thì độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị nhỏ nhất chưa hẳn ở các vị trí của M, N sao cho MN là đường vuông góc chung của AC và $A'B$.



Có thể giải lại bài toán như sau:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MN^2 &= \frac{t^2}{2} + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - a \right)^2 = t^2 - a\sqrt{2}t + a^2 \\ &= \left(t - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $MN \geq \frac{a}{\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ

khi $t = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Lúc đó M, N lần lượt là trung điểm của AC và $A'B$. Do đó giá trị nhỏ nhất của MN là $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Hơn nữa, lúc này MN tạo với AC và $A'B$ các góc đều bằng 60° (bạn đọc tự kiểm tra).

Những bạn sau có đáp án đúng, chỉ rõ sai lầm trong lời giải:

Lê Đức Tin, 11A, THPT Diễn Châu III, Nghệ An; Lê Dương Trường Giang, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị; Nguyễn Tấn Hưng, 11T, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi; Lê Phúc Lữ, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre, Bến Tre; Nguyễn Quốc Hưng, SV lớp DH9A1, ĐH An Giang, An Giang.

NGỌC HIỂN



Tính toán năm Kỷ Sửu

Năm Kỷ Sửu sắp tới, ta cần lo toan, tính toán sao cho chu toàn mọi việc mà làm toán vẫn giỏi.

KỶ X SỬU = TOÁN

Bạn hãy trở tài tính toán để điền các chữ số thay cho các chữ cái sao cho phép nhân trên là đúng, trong đó mỗi chữ cái (kể cả dấu đặt trên chữ đó), tương ứng với một chữ số khác 0, chữ cái khác nhau ứng với chữ số khác nhau, biết rằng chữ **Y** là bình phương của một số, chữ **U** là lập phương của một số khác 1. Bạn tìm ra đáp số bằng cách nào?

AN MINH



PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/379. Let ABC be a triangle. Prove the inequality

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8} \cos(B-C) \cos(C-A) \cos(A-B).$$

T7/379. Solve for x

$$3^x(4^x + 6^x + 9^x) = 25^x + 2 \cdot 16^x.$$

T8/379. Prove that the union of six hemispheres whose diameters are the sides of a given tetrahedron must contain the tetrahedron itself.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/379. Let ABC be a triangle. Choose the pair of points $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ on the sides BC , CA , and AB respectively such that $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ is a convex hexagon with equal opposite sides and the triangles AA_1A_2 , BB_1B_2 , CC_1C_2 have the same areas. Prove that the lines A_1B_2 , B_1C_2 , C_1A_2 are collinear.

T10/379. Let a, b, c be non-negative real numbers such that

$$\sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} + abc = 3.$$

Prove that the smallest value of the expression

$$P = \frac{a^3}{b^2 + c^2} + \frac{b^3}{c^2 + a^2} + \frac{c^3}{a^2 + b^2}$$
 is $\sqrt[3]{32} \cdot m$,

where m is the real root of the equation

$$t^3 + 54t - 162 = 0.$$

T11/379. Let $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ be the function with initial values $f(0) = 0, f(1) = 1$ such that

$$f(n+2) - 2011f(n+1) + f(n) = 0.$$

What is the probability that $f(n)$ is a prime number, where n is a randomly chosen number from the set of integers $\{0, 1, 2, \dots, 2008\}$?

T12/379. Find all functions $f(x)$ such that it is continuous on $[0; 1]$, differentiable on the open interval $(0; 1)$ and the following two conditions are satisfied:

a) $20f(x) + 11f'(x) + 2009 \leq 0, \forall x \in (0; 1);$

b) $f(0) = f(1) = -\frac{2009}{11}.$

Translated by LE MINH HA

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,

TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,

PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,

TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,

GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY,

GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**

Thái Nhật Phương – Một tính chất của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

- 3 **Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên toán trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2008 – 2009.**

- 4 **Nguyễn Khắc Minh** – Lời giải và bình luận các bài thi toán chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2008.

- 8 **Nguyễn Khắc Minh** – Về cấu trúc đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm 2009

- 9 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**

Nguyễn Minh Nhiên – Một số phương pháp giải hệ phương trình.

- 12 **Thử sức trước kì thi**

Nguyễn Anh Dũng – Đề số 1.

- 13 **Tin tức**

Lễ trao giải thưởng *Quả cầu vàng và phần thưởng nữ sinh viên CNTT tiêu biểu năm 2008.*

Lễ kỉ niệm 10 năm thành lập Công ti Công nghệ Tin học nhà trường.

- 14 **Bạn có biết? – Do you know?**

Trần Đình Viện – Có bao nhiêu hình vuông morley?

- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**

T1/379, ..., T12/379, L1/379, L2/379.

- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**

Giải các bài của số 375.

- 28 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**

Trịnh Xuân Tình – Khai thác một bất đẳng thức trong SGK Đại số 10 nâng cao.

- 30 **Sai lầm ở đâu – Where's Mistake?**

- 31 **Giải trí toán học – Math Recreation**

Bìa 3. Hội nghị Hội đồng biên tập và Cộng tác viên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm 2008

Bìa 4. Câu lạc bộ – Math Club

Hội nghị Hội đồng biên tập và Cộng tác viên TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM 2008

Ngày 11/12/2008 tại Đại Lải, Vĩnh Phúc đã diễn ra Hội nghị Hội đồng biên tập và Cộng tác viên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ các tỉnh phía Bắc năm 2008. Đến dự Hội nghị có GS.TSKH Nguyễn Cảnh Toàn, Nguyên Tổng biên tập tạp chí, GS. Đoàn Quỳnh, Chủ tịch Hội đồng bộ môn Toán Bộ GD&ĐT, GS. TSKH. Hà Huy Khai, Nguyên Viện trưởng Viện Toán học Việt Nam, TS. Nguyễn Quý Thao, Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD, PGS. TS. Phan Doãn Thoại, Tổng biên tập tạp chí THPT, các ủy viên Hội đồng biên tập, cán bộ lãnh đạo của các đơn vị: Công ty Cổ phần Thiết kế và Phát hành Sách Giáo dục, Công ty Cổ phần In Diên Hồng, Công ty Cổ phần In SGK tại TP.Hà Nội, Công ty Sách và Thiết bị trường học Hải Dương, Công ty Cổ phần Sách - Thiết bị Giáo dục Nam Định, Xí nghiệp In Bản đồ 1 Bộ Quốc phòng, tạp chí Toán Tuổi thơ, các cộng tác viên thân thiết từ Hà Tĩnh, Nghệ An trở ra và cán bộ Tòa soạn.

Tổng biên tập THPT Phan Doãn Thoại đã báo cáo những định hướng chính trong hoạt động của tạp chí trong thời gian tới trong tình hình đất nước hội nhập với quốc tế. Phó tổng biên tập THPT Phạm Thị Bạch Ngọc báo cáo về các hoạt động đã làm được trong năm qua thông qua các số liệu cụ thể và đề xuất phương hướng hoạt động trong năm 2009 của tạp chí.

Phó Tổng Giám đốc Nguyễn Quý Thao đã phát biểu chào mừng Hội nghị, đồng thời tuyên dương các cán bộ của Tòa soạn, ngoài lĩnh vực chính là xuất bản tạp chí hàng tháng còn tham gia các hoạt động chính trị như tham gia chấm thi và biên soạn hai ấn phẩm Toán học bằng tiếng Anh làm quà tặng cho các đại biểu tham dự Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 48; kết hợp với Ban chỉ đạo phòng trào thi đua tổ chức biên soạn cuốn *Sổ tay Trường học thân thiện, học sinh tích cực* phục vụ kịp thời phong trào thi đua do Phó Thủ tướng kiêm Bộ trưởng Bộ GD&ĐT Nguyễn Thiện Nhân phát động.

Ở phần thảo luận của các cộng tác viên, nhiều ý kiến cho rằng tạp chí đã có nhiều cải tiến, số lượng và chất lượng các chuyên mục được tăng lên rõ rệt, nên có thêm nhiều bài cho mục *Toán học và đời sống*, *Lịch sử toán học*, các bài viết về SGK Toán, phối hợp tổ chức các cuộc thi giải toán trên máy tính bỏ túi.



Nhân dịp này tòa soạn THPT đã tặng hoa chúc mừng các cộng tác viên lâu năm lão thành của tạp chí: GS. Nguyễn Cảnh Toàn, GS. Đoàn Quỳnh, PGS. Nguyễn Đăng Phát, Nhà giáo Nguyễn Văn Thiêm, Nhà giáo Nguyễn Quang Hậu.

Cuối Hội nghị ThS. Hồ Quang Vinh báo cáo Kết quả cuộc thi giải Toán và Vật lý trên tạp chí THPT năm học 2007 - 2008. GS. Nguyễn Cảnh Toàn, TS. Nguyễn Quý Thao, PGS. Phan Doãn Thoại đã trao thưởng cho các em học sinh đoạt giải Xuất sắc và giải Nhất của cuộc thi này. Hội nghị diễn ra trong không khí đầm ấm, sôi nổi của nhiều thế hệ say mê với phong trào dạy và học toán của nước nhà.

Buổi chiều cùng ngày, các đại biểu đã có chuyến tham quan thú vị trên Hồ Đại Lải và khu Di tích Đền thờ Hai Bà Trưng ở huyện Mê Linh, tỉnh Vĩnh Phúc.

NGUYỄN PHÚC



Đại Lải 11-12-2008



Giải đáp: **Kỉ niệm một số nhà giáo tròn chục năm sinh**

(Đăng trên THPT số 376, tháng 10.2008)

THÁCH ĐỐI MỪNG XUÂN MỚI

*Tiền năm Mậu Tý, Toán học
và Tuổi trẻ mừng tuổi trẻ học
đường hằng say học toán*

Tòa soạn THPT sẽ trao giải thưởng
cho các bạn có vẻ đối hay.

LÝ VĂN TOÁN

1. THÂN NHÂN TRUNG (1418 - 1499),
hiệu Hậu Phủ.

- Quê: Làng Yên Ninh, Yên Dũng, Bắc Ninh.
- Đỗ Tiến sĩ năm 1469.
- Tác phẩm: *Thiên Nam dư hạ tập*, *Quyển Uyển cú ca*, *Chiêu Lăng bi văn* và một số bài thơ văn trong *Toàn Việt thi lục*.
- Là Đồng Các đại học sĩ, Nhập nội phụ chính; Phó soái trong hội *Tao đàn nhị thập bát tú* do Lê Thánh Tông làm Nguyên soái; là Tế tửu Quốc Tử Giám.
- Ông soạn văn bia ở Quốc Tử Giám (1484), trong đó có câu "Hiền tài là nguyên khí của Quốc gia, nguyên khí thịnh thì thế nước mạnh rồi lên cao, nguyên khí suy thì thế nước yếu rồi xuống thấp. Vì vậy các đấng thánh đế minh vương chẳng ai không lấy việc bồi dưỡng nhân tài, kén chọn kẻ sĩ, vun trồng nguyên khí làm việc đầu tiên".

2. NGUYỄN HUY CẬN (1728 - 1790),
hiệu Phương Am.

- Quê: Làng Phú Thị, Gia Lâm, Hà Nội.
- Đỗ Tiến sĩ năm 1760.

- Tác phẩm: *Phương Am tiên sinh thi văn tập*.

- Ông xin từ quan, về quê mở trường dạy học.

3. PHẠM ĐÌNH HỔ (1768 - 1839),
hiệu Đông Dã Tiều.

- Quê: Làng Đan Loan, Bình Giang, Hải Dương.
- Đỗ Tú tài.
- Tác phẩm: *Vũ Trung tùy bút*, *Tang thương ngẫu lục*, *Châu Phong tạp thảo*, *Châu Phong thi tập* và 15 quyển sách khác về Văn, Sử, Địa, trong đó có loại sách giáo dục như: *Quốc sử tiểu học*, *Nhật dụng thường đàm*.

- Được vua Minh Mạng mời ra làm ở Viện Hàn lâm, làm Tế tửu Quốc Tử Giám nhưng ít lâu sau xin từ quan về quê.

4. ĐOÀN HUYỀN (1808 - 1882),
hiệu Ứng Khê.

- Quê: Làng Hữu Thanh Oai, huyện Thanh Oai, Hà Nội.
- Đỗ Cử nhân năm 1831.
- Tác phẩm: *Ứng Khê văn tập*.
- Làm Đốc học, học trò thành đạt rất nhiều.

5. TRẦN VĂN CẬN (1858 - 1938),
hiệu Miên Hải, Nguyệt Phường, Nguyệt Tiều.

- Quê: Làng Từ Ô, xã Tân Trào, huyện Thanh Miện, Hải Dương.

- Đỗ Cử nhân năm 1894.

- Tác phẩm: *Nam Bang thảo mộc*, *Thúy Sơn thi tập*, *Văn Uyển kim hưu*, *Quốc triều thi lục*.

- Ông không ra làm quan, ở nhà dạy học.

6. NGUYỄN THƯỢNG HIỀN (1868 - 1925),
hiệu Mai Sơn.

- Quê: Làng Liên Bạt, huyện Ứng Hòa, Hà Nội.
- Đỗ Hoàng giáp năm 1889.

- Tác phẩm chính: *Nam Chi tập*, *Học Thư ngâm biên*, *Mai Sơn ngâm tập*, *Nam Hương tập*, *Mai Sơn ngâm thảo*,...

- Làm Đốc học tỉnh Ninh Bình, Nam Định. Lãnh đạo Việt Nam Quang phục hội chống Pháp.

Rất tiếc là có bạn gửi đáp án tốt nhưng không ghi tên, địa chỉ để được tặng phẩm.

Ghi chú: 1) Tế tửu: Chức quan lãnh đạo cao nhất của Quốc Tử Giám.

2) Đốc học: Chức quan phụ trách giáo dục của một tỉnh hoặc một số tỉnh.

VÂN KHANH