



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
12 2008
Số 378

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 45

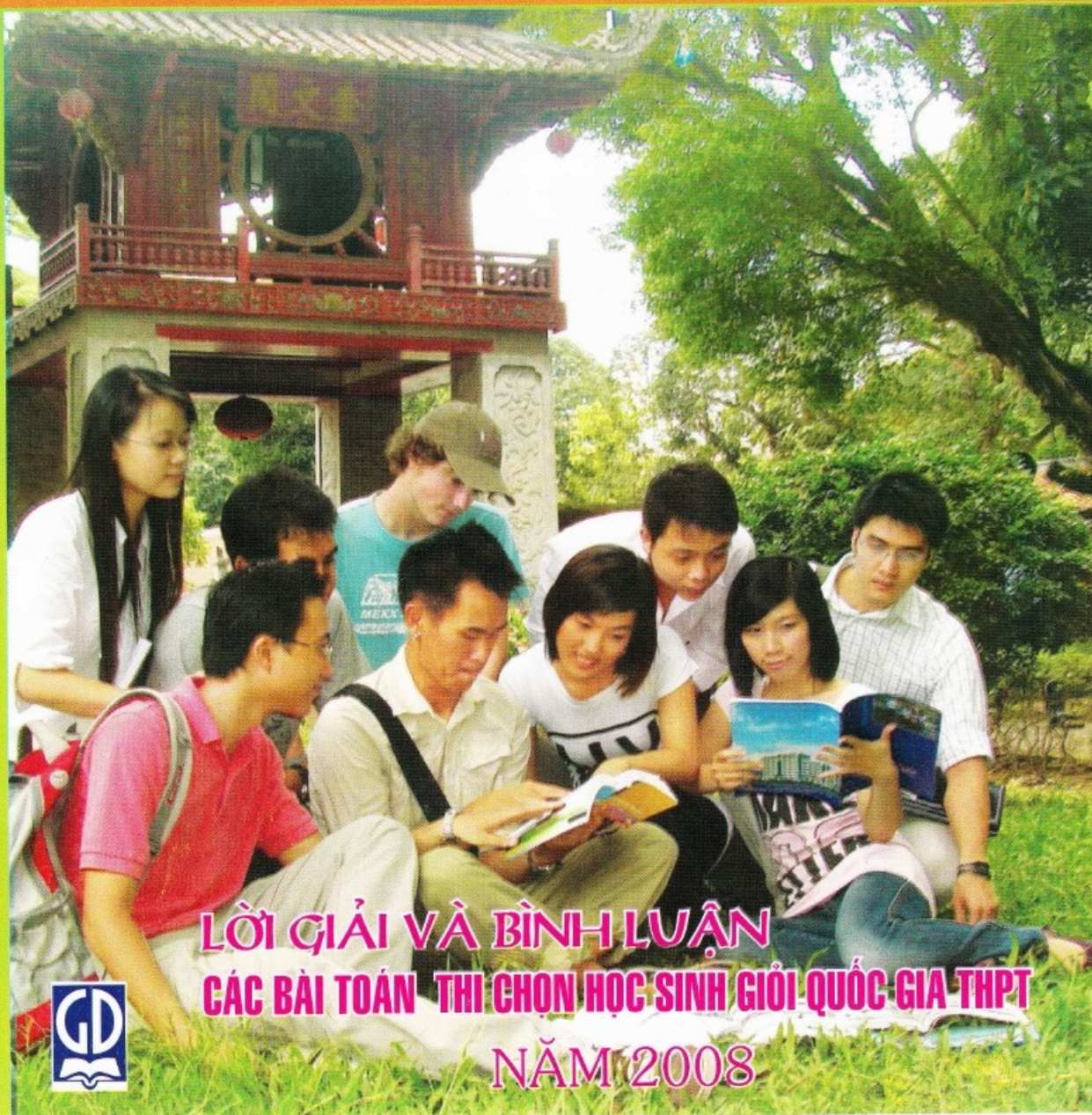
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Tri sự: (04) 35144272; (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoitre



LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN
CÁC BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM 2008



Lễ trao tặng danh hiệu

Nhà giáo Ưu tú cho Tổng Giám đốc NXBGD Ngô Trần Ái

Chiều 20/11/2008, tại Hội trường 22-12, 187B Giảng Võ Hà Nội, NXBGD đã tổ chức Lễ kỷ niệm 26 năm ngày Nhà giáo Việt Nam (20/11/1982 - 20/11/2008) và trao danh hiệu *Nhà giáo Ưu tú* cho Tổng Giám đốc Ngô Trần Ái. Dự lễ có Thứ trưởng Thường trực Bộ GD & ĐT *Bành Tiến Long*, Chánh văn phòng Bộ GD & ĐT *Trần Quang Quý*, các thành viên hội đồng quản trị và đông đảo cán bộ công nhân viên các đơn vị thành viên khu vực phía Bắc.

Trong suốt 36 năm đứng trên bục giảng và công tác trong ngành giáo dục, đồng chí *Ngô Trần Ái* luôn gắn bó, tâm huyết với nghề; hết lòng thương yêu chăm sóc, giáo dục học sinh; gương mẫu giữ gìn nếp sống văn minh, lành mạnh; có trách nhiệm cao với công việc, được học sinh và đồng nghiệp tin yêu, đồng chí luôn phấn đấu miệt mài, năng động, sáng tạo và đầy hiệu quả, là tấm gương tiêu biểu của một nhà giáo hết lòng cống hiến cho sự nghiệp giáo dục.

Thay mặt Lãnh đạo Bộ GD&ĐT, Thứ trưởng Thường trực *Bành Tiến Long* đã trao danh hiệu *Nhà giáo Ưu tú* cho Tổng Giám đốc *Ngô Trần Ái*.



Lễ đón nhận Huân chương Lao động Hạng Ba tại TP. Hồ Chí Minh

Ngày 19/11/2008, tại TP. Hồ Chí Minh, NXBGD đã tổ chức Lễ trao tặng Huân chương Lao động Hạng Ba cho Công ti CP in SGK TP. Hồ Chí Minh và nguyên Phó TGD NXBGD *Nguyễn Đăng Quang*.

Dự lễ có Thứ trưởng Bộ GD & ĐT *Nguyễn Vinh Hiển*, Giám đốc Văn phòng đại diện Bộ GD & ĐT tại TP. Hồ Chí Minh *Đỗ Quốc Anh*, đại diện lãnh đạo UBND TP. Hồ Chí Minh, Tổng Giám đốc NXBGD *Ngô Trần Ái*, các thành viên HĐQT, Ban TGD NXBGD và đông đảo CBCNV các đơn vị thành viên khu vực phía Nam.

Thay mặt lãnh đạo Bộ GD & ĐT, Thứ trưởng *Nguyễn Vinh Hiển* đã trao phần thưởng cao quý Huân chương Lao động Hạng Ba cho Công ti CP in SGK TP. Hồ Chí Minh. Đây là phần thưởng xứng đáng cho quá trình phấn đấu liên tục, miệt mài lao động sáng tạo không ngừng của tập thể lãnh đạo CBCNV Công ti. Cũng trong buổi lễ trang trọng này, nguyên Phó Tổng giám đốc NXBGD *Nguyễn Đăng Quang* đã vinh dự đón nhận Huân chương Lao động Hạng Ba.

Lễ kỷ niệm 33 năm thành lập Công ti CP in sách giáo khoa tại TP. Hà Nội và đón nhận Huân chương Độc lập Hạng Ba

Ngày 28/11/2008, tại Đông Anh, Hà Nội, Công ti CP in sách giáo khoa tại TP. Hà Nội đã long trọng tổ chức kỷ niệm 33 năm thành lập Công ti và đón nhận Huân chương Độc lập Hạng Ba. Đến dự buổi lễ có Thứ trưởng Bộ GD&ĐT *Phạm Vũ Luận*, Phó Chánh Văn phòng Bộ GD&ĐT *Đào Hải Long*, Phó chủ tịch Huyện ủy Đông Anh *Tô Văn Minh*, Tổng Giám đốc NXBGD *Ngô Trần Ái*, các ủy viên Hội đồng Quản trị, cán bộ lãnh đạo các đơn vị thành viên, cán bộ lãnh đạo công ti qua các thời kỳ và tập thể cán bộ công nhân viên của công ti. Giám đốc Công ti *Lê Hồng Quế* đã báo cáo những thành tích hoạt động của đơn vị trong 33 năm qua. Thay mặt lãnh đạo Bộ GD & ĐT, Thứ trưởng *Phạm Vũ Luận* đã trao tặng phần thưởng cao quý Huân chương Độc lập Hạng Ba của Chủ tịch nước cho công ti in CP sách giáo khoa tại TP. Hà Nội và Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ cho Giám đốc Công ti *Lê Hồng Quế* về những thành tích đặc biệt xuất sắc trong sự nghiệp giáo dục và đào tạo.



MỘT SỐ DẠNG TOÁN TÌM NGHIỆM NGUYÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

CAO NGỌC TOÀN

(GV Trường THPT Tam Giang – Phong Điền
Thừa Thiên – Huế)

Phương trình bậc hai hai ẩn $(x; y)$ có dạng tổng quát như sau:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + g = 0.$$

trong đó $a^2 + b^2 > 0$.

Bài toán tìm nghiệm nguyên của phương trình (PT) dạng này thường gặp trong các đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 và các đề thi vào lớp 10 chuyên Trung học phổ thông.

Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu với bạn đọc phương pháp giải cho một số trường hợp riêng của bài toán này. Chúng ta lần lượt xét theo các dạng sau:

1. Dạng 1. $a = 0$ hoặc $b = 0, a.c.d.e.g \neq 0$

Chẳng hạn, $b = 0$, khi đó PT có dạng

$$f(x, y) = ax^2 + cxy + dx + ey + g = 0$$

$$\Leftrightarrow y(cx + e) = -(ax^2 + dx + g)$$

$$\Leftrightarrow \text{hoặc } cx + e = ax^2 + dx + g = 0, y \text{ bất kì}$$

$$\text{hoặc } y = -\frac{ax^2 + dx + g}{cx + e}, cx + e \neq 0.$$

Từ đây biện luận để tìm được $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn phương trình đã cho.

✪ **Thí dụ 1.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình
 $4x^2 + 2xy + 4x + y + 3 = 0$ (1)

Lời giải. PT (1) tương đương với

$$y(2x + 1) = -(3 + 4x^2 + 4x)$$

$$\Leftrightarrow \text{hoặc } 2x + 1 = -(3 + 4x^2 + 4x) = 0, y \text{ bất kì}$$

$$\text{hoặc } y = -\frac{4x^2 + 4x + 3}{2x + 1}, 2x + 1 \neq 0.$$

$$\bullet \text{ Nếu } 2x + 1 = -(3 + 4x^2 + 4x) = 0 \text{ thì } 2x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Phương trình trên không có nghiệm nguyên nên trường hợp này PT (1) không có nghiệm nguyên.

$$\bullet \text{ Nếu } y = -\frac{4x^2 + 4x + 3}{2x + 1} = -2x - 1 - \frac{2}{2x + 1}$$

thì do $y \in \mathbb{Z}$ nên $2x + 1$ là ước của 2, suy ra $2x + 1$ nhận các giá trị là 1 hoặc -1. Từ đó $x = 0$ hoặc $x = -1$, dẫn đến $y = -3$ hoặc $y = 3$.

Vậy PT đã cho có hai cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; -3)$ và $(-1; 3)$. $\square$

2. Dạng 2. Với $ab > 0, c = 0, de \neq 0$

Khi đó PT có dạng

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + dx + ey + g = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{d^2}{4a^2}\right) + by^2 + ey + g - \frac{d^2}{4a} = 0$$

$$\Leftrightarrow by^2 + ey + \frac{4ag - d^2}{4a} = -a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2.$$

Từ đây biện luận để tìm được $y \in \mathbb{Z}$, do đó tính được $x \in \mathbb{Z}$.

✪ **Thí dụ 2.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình $3x^2 + 4y^2 + 6x + 3y - 4 = 0$ (2)

Lời giải. PT (2) tương đương với

$$3(x^2 + 2x + 1) + 4y^2 + 3y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(4y + 7) = -3(x + 1)^2 \leq 0 \quad (*)$$

$$\text{Suy ra } -\frac{7}{4} \leq y \leq 1.$$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-1; 0; 1\}$.

Kết hợp với (*) ta có

$$\bullet \text{ Nếu } y = -1 \text{ thì } (x+1)^2 = 2 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2} \text{ (loại).}$$

$$\bullet \text{ Nếu } y = 0 \text{ thì } (x+1)^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \text{ (loại).}$$

• Nếu $y = 1$ thì $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ (thỏa mãn).

Vậy PT (1) có một nghiệm nguyên là

$$(x; y) = (-1; 1). \quad \square$$

3. Dạng 3. Với $4ab - c^2 > 0, ce \neq 0, d = 0$

Khi đó PT có dạng

$$f(x; y) = ax^2 + by^2 + cxy + ey + g = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{c}{a}xy + \frac{c^2y^2}{4a^2}\right) - \frac{c^2y^2}{4a} + by^2 + ey + g = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4ab - c^2}{4a}y^2 + ey + g = -a\left(x + \frac{cy}{2a}\right)^2.$$

Từ đây biện luận để tìm được $y \in \mathbb{Z}$, từ đó tính được $x \in \mathbb{Z}$.

❖ **Thí dụ 3.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình
 $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0$ (3)

Lời giải. PT (3) tương đương với

$$(3) \Leftrightarrow (x^2 + 2xy + y^2) + y^2 + 3y - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow (y+4)(y-1) = -(x+y)^2 \leq 0 \quad (*)$$

Suy ra $-4 \leq y \leq 1$.

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$.

Kết hợp với (*), tìm được các cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ của PT (3) là $(4; -4), (1; -3), (5; -3), (-2; 0), (2; 0), (-1; 1)$. $\square$

4. Dạng 4. Với $c^2 - 4ab < 0, (cd - 2ae)^2 \geq (c^2 - 4ab)(d^2 - 4ag), cde \neq 0$.

Khi đó viết PT ban đầu dưới dạng sau

$$f(x; y) = ax^2 + (cy + d)x + by^2 + ey + g = 0.$$

Coi đây là một phương trình bậc hai ẩn x , với

$$\Delta = (cy + d)^2 - 4a(by^2 + ey + g) \\ = (c^2 - 4ab)y^2 + 2(cd - 2ae)y + d^2 - 4ag.$$

Từ đây xét $\Delta \geq 0$ để tìm được $y \in \mathbb{Z}$, sau đó suy ra $x \in \mathbb{Z}$.

❖ **Thí dụ 4.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình
 $x^2 + 2y^2 - 2xy + 3x - 3y + 2 = 0$ (4)

Lời giải. PT (4) tương đương với

$$x^2 + (3 - 2y)x + 2y^2 - 3y + 2 = 0 \quad (*)$$

Coi PT trên là một PT bậc hai ẩn x với

$$\Delta = (3 - 2y)^2 - 4(2y^2 - 3y + 2) = 1 - 4y^2.$$

Để PT (*) có nghiệm thì $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (2y + 1)(2y - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}.$$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y = 0$. Thay vào (*) ta được

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -2.$$

Vậy PT (4) có hai nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-1; 0)$ và $(-2; 0)$. $\square$

❖ **Nhận xét.** Phương pháp giải của dạng 4 có thể sử dụng để giải các bài toán thuộc các dạng 1, dạng 2 và dạng 3.

Để kết thúc bài viết, xin mời các bạn cùng luyện tập tìm nghiệm nguyên của một số phương trình dưới đây

a) $3y^2 - xy - 2x + y + 1 = 0.$

b) $2x^2 + 5y^2 - 8x + 3y = 0.$

c) $2x^2 + y^2 - 2xy + y = 0.$

d) $x^2 + y^2 + 1 = x + y + xy.$

e) $4x^4 + 3y^4 + 3x^2 + 6y^2 - 10 = 0.$

g) $2x^4 + 5y^4 = 12x^2 + 7y^2 - 12.$

h) $x^2 + 2y^2 + 2xy + 4x + 9y + 3 = 0.$

i) $2x^4 - 2x^2y + y^2 - 64 = 0.$

k) $x^4y^4 - 2x^2y^2 = x^4 + 8y^4.$



Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên toán TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG

NĂM HỌC 2008 - 2009

(Đề thi đã đăng trên THPT số 376, tháng 10 năm 2008)

Bài 1. a) Ta có

$$(2a^2 + a + 1)^2 - (2a^2 + a - 1)^2 = 2(4a^2 + 2a) = 4a(2a + 1).$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

b) Đặt $f(x) = (2a + 1)x^2 - (2a^2 + a + 1)x + a$.
Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow a \neq -\frac{1}{2}$, $\Delta > 0$ và $f(1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow a \neq -\frac{1}{2}, (2a^2 + a - 1)^2 > 0 \text{ và } 2a^2 - 2a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a \neq -\frac{1}{2}, 2a^2 + a - 1 \neq 0 \text{ và } 2a^2 - 2a \neq 0.$$

Đáp số. $a \neq 0$, $a \neq \pm \frac{1}{2}$, $a \neq \pm 1$.

Bài 2. a) Dễ thấy $x = y$ không là nghiệm của hệ phương trình. Trừ theo về hai phương trình của hệ đã cho ta được

$$(x - y)(2x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (do } x \neq y).$$

Thay vào PT thứ nhất của hệ tìm được $y = 2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 2)$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$(x - 1)(x - 4) = 2\sqrt{x - 1}.$$

Đặt $t = \sqrt{x - 1}$, $t \geq 0$, PT đã cho trở thành

$$t^2(t^2 - 3) = 2t \Leftrightarrow t(t + 1)^2(t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -1 \text{ (loại) hoặc } t = 2.$$

Đáp số. PT có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 5$.

Bài 3. a) Biến đổi biểu thức P ta được

$$\begin{aligned} P &= 85(x_1^2 + x_2^2) - 80x_1x_2 - 577 \\ &= 85(x_1 + x_2)^2 - 250x_1x_2 - 577 \end{aligned} \quad (*)$$

Theo định lý Viète có $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1x_2 = -10$.

Thay vào (*) ta được

$$P = 85.1^2 - 250.(-10) - 577 = 2008.$$

b) Điều kiện để P có nghĩa là $x \geq 0$ và $xy \geq 0$.

Với $x = 0$ thì từ điều kiện suy ra P có nghĩa với mọi y . Lúc này $P = 2008y + 10$ có thể nhỏ tùy ý. Vậy P không có giá trị nhỏ nhất.

Bài 4. a) Giả sử $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = k \in \mathbb{Z}$, ta có

$$ad + bc = kbd \Leftrightarrow ad = b(kd - c) : b.$$

Suy ra $d : b$ (vì $(a, b) = 1$).

Tương tự có $b : d$. Do đó $b = d$ (dpcm).

b) Giả sử $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a+c}{ac} + \frac{1}{b} = \frac{m}{n} + \frac{1}{b} = k \in \mathbb{Z}$,

trong đó $(m, n) = 1$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$). Theo câu a) ta có $n = b$, suy ra b là ước của ac , dẫn đến

$b = 1$ (vì $(a, b) = (b, c) = 1$). Do đó $\frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ là

số nguyên, theo câu a) có $a = c$. Từ đó tìm được $a = c = 1$ hoặc $a = c = 2$.

Có hai bộ nghiệm $(a; b; c)$ là $(1; 1; 1); (2; 1; 2)$.

Bài 5. Gọi $ABCD$ hình vuông đã cho và I là trung điểm AB (h. 1). Đường tròn (O, r) cắt H tại 8 điểm phân biệt khi và chỉ khi $OI < r < OA$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < r < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Khi đó ta có

$$MN = PQ = RS = TU$$

$$= 2\sqrt{OM^2 - OI^2} = \sqrt{4r^2 - 1};$$

$$NP = QR = ST = UM = AM\sqrt{2} = \frac{1 - MN}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $MNPQRSTU$ là hình bát giác đều



Hình 1

Đề thi vào lớp 10 chuyên toán

TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN

NĂM HỌC 2008 - 2009

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (2 điểm)

Tìm số tự nhiên có 2 chữ số $\overline{xy}$, biết rằng $\overline{xyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2$.

Câu 2 (2 điểm)

Giải phương trình $10\sqrt{x^3+1} = 3(x^2+2)$.

Câu 3 (1 điểm)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Biết rằng phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm, chứng minh rằng phương trình $a(f(x))^2 + bf(x) + c = x$ cũng vô nghiệm.

Câu 4 (1 điểm)

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{y}{x^2} + \frac{z}{y^2} + \frac{x}{z^2} \geq 3 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right).$$

T4-mau

Câu 5 (3 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi O là trung điểm của BC . Đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với AB ở E , tiếp xúc với AC ở F . Điểm H chạy trên cung nhỏ EF (H khác E, F). Tiếp tuyến của đường tròn tại H cắt AB, AC lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh rằng $\triangle MOB \sim \triangle ONC$.

b) Xác định vị trí của điểm H sao cho diện tích tam giác AMN lớn nhất.

Câu 6 (1 điểm)

Cho 33 điểm nằm trong hình vuông có độ dài cạnh bằng 4, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ và tâm là các điểm đã cho. Hỏi có hay không ba điểm trong các điểm đã cho sao cho chúng đều thuộc phần chung của ba hình tròn có tâm cũng chính là ba điểm đó? Vì sao?

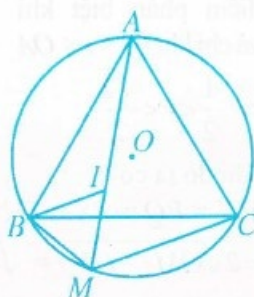
THÁI VIỆT THẢO (Sở GD - ĐT Nghệ An) giới thiệu

$$\Rightarrow \frac{1-MN}{\sqrt{2}} = MN \Leftrightarrow MN = \sqrt{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4r^2-1} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow r = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Đáp số. $r = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$

Bài 6. (h.2) Gọi A là điểm chính giữa cung lớn BC , khi đó ABC là tam giác đều. Trên cạnh AM lấy I sao cho $IM = MB$, do $\widehat{BMI} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ nên $\triangle BMI$ đều.



Hình 2

Ta có $\widehat{MBC} = \widehat{IBA} (= 60^\circ - \widehat{CBI})$.

Lại có $BM = BI$ và $\widehat{BMC} = \widehat{BIA} = 120^\circ$, do đó $\triangle ABI = \triangle CBM$ (g.c.g) $\Rightarrow MB + MC = MA$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{2}{\sqrt{MB \cdot MC}} \geq \frac{4}{MB + MC} = \frac{4}{MA} \geq \frac{4}{2R} = \frac{2}{R}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC .

Vậy $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{2}{R}$ khi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC .

NGUYỄN DUY THÁI SƠN, THÁI TRUNG, VÕ HỒNG TIỀN (Đà Nẵng) giới thiệu



Về bài toán

THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

NGUYỄN THANH CẢNH
(GV trường CDSP Hưng Yên)

Để học sinh thấy được cách giải nhất quán của dạng toán lập phương trình đường thẳng chứa cạnh tam giác, chúng ta cần làm nổi bật yếu tố **giải tích** trong việc giải quyết bài tập **hình**. Bài viết này nhằm mục đích giúp học sinh lập phương trình đường thẳng với công việc ban đầu là xác định tọa độ các điểm (đỉnh, trọng tâm tam giác, ...). Muốn vậy, học sinh cần nắm vững một số tính chất hình học sau:

1) Cho điểm M và đường thẳng (Δ) . Điểm M' đối xứng với điểm M qua (Δ) khi và chỉ khi đoạn MM' vuông góc với (Δ) tại trung điểm của nó.

2) Tam giác ABC có đỉnh $A(x_0; y_0)$, (Δ) là đường thẳng chứa trung tuyến BB' . Khi đó $C(x_1; y_1)$ là đỉnh của tam giác khi và chỉ khi trung điểm của đoạn thẳng AC nằm trên (Δ) .

3) Điểm D là giao điểm của tia phân giác trong (ngoài) của góc BAC với đường thẳng BC khi và chỉ khi D chia đoạn BC theo tỉ số $k = \frac{AB}{AC}$ đối với phân giác trong ($k = -\frac{AB}{AC}$ đối với phân giác ngoài). Từ công thức đó tính được tọa độ D qua tọa độ các điểm B, C .

Khi người học đã nắm được định nghĩa, tính chất của các đường **đặc biệt** trong tam giác như: đường cao, trung tuyến, phân giác, trung trực bằng việc cho biết tọa độ ba điểm không thẳng hàng; tọa độ của một điểm cùng với phương trình của hai đường thẳng giao nhau; phương trình của ba đường thẳng đôi một giao nhau ta có thể tổ hợp được nhiều bài toán bằng cách gán điểm đã biết tọa độ vào vị trí **đặc biệt** trong tam giác. Đường thẳng đã biết phương trình sẽ là đường thẳng chứa các

đường **đặc biệt** kể trên. Sau đây, tôi xin đơn cử một vài thí dụ cùng với hướng giải quyết để minh họa cho ý kiến của mình.

★ **Thí dụ 1.** Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu biết đỉnh $A(2; 1)$, trực tâm $H(-6; 3)$ và trung điểm cạnh BC là $D(2; 2)$.

Hướng giải

• Viết được phương trình đường thẳng BC là $2x + y - 6 = 0$.

• Giả sử $B(x; y)$ thì $C(4 - x; 4 - y)$ và $\overline{AB} = (x - 2; y - 1)$, $\overline{CH} = (x - 10; y - 7)$.

Ta xác định được $x; y$ bằng việc giải hệ PT

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ (x - 2)(x - 10) + (y - 1)(y - 7) = 0. \end{cases} \square$$

★ **Thí dụ 2.** Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu biết $C(-4; 1)$; phương trình các đường trung tuyến AA' , đường phân giác BB' của tam giác đó lần lượt là $2x - y + 3 = 0$, $x + y - 6 = 0$.

Hướng giải

• Gọi $B(x; y)$ thì $x + y - 6 = 0$ và trung điểm của BC là $A'\left(\frac{x-4}{2}; \frac{y+1}{2}\right) \in (AA')$.

Suy ra $2x - y - 3 = 0$.

Giải hệ $\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$ tìm được $B(3; 3)$.

• Gọi $C'(x; y)$ là điểm đối xứng của C qua BB' ($C' \in AB$) tính được $\overline{CC'} = (x + 4; y - 1)$ và trung điểm CC' là $J\left(\frac{x-4}{2}; \frac{y+1}{2}\right) \in (BB')$.

- Lập hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 & (\text{do } \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{u_{BB'}} = 0) \\ x + y - 15 = 0 & (\text{do } J \in BB'). \end{cases}$$

Tính được tọa độ $C'(5; 10)$ từ đó lập được PT các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác. $\square$

★ **Thí dụ 3.** Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $A(5; 2)$. Phương trình đường trung trực cạnh BC, đường trung tuyến CC' lần lượt là $(d_1): x + y - 6 = 0, (d_2): 2x - y + 3 = 0$.

Hướng giải

- Giả sử $B(x; y), C(z; 2z + 3)$.

Lần lượt tính được trung điểm AB là điểm $C'\left(\frac{x+5}{2}; \frac{y+2}{2}\right) \in (d_2)$. Trung điểm BC là

điểm $A'\left(\frac{x+z}{2}; \frac{y+2z+3}{2}\right) \in (d_1)$ và

$$\overrightarrow{BC} = (x - z; y - 2z - 3).$$

- Từ những tính chất đã nêu lập được hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + 3z - 9 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + 14 = 0. \end{cases}$$

Bài toán được giải quyết trọn vẹn khi ta tìm được nghiệm của hệ phương trình trên. $\square$

★ **Thí dụ 4.** Cho tam giác ABC biết các đường trung tuyến AA' , đường cao CH lần lượt có phương trình

$$(d_1): x + 2y - 7 = 0, (d_2): -x + y + 2 = 0.$$

Điểm $M(1; -2)$ thuộc đường thẳng AB. Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

Hướng giải

- Ta thiết lập được phương trình đường thẳng (AB) là $x + y + 1 = 0$.

- Gọi $B(x; -x - 1) \in (AB), C(y + 2; y) \in (d_2)$. Tọa độ trung điểm của BC là

$$A'\left(\frac{x+y+2}{2}; \frac{-x+y-1}{2}\right) \in (d_1).$$

$$\text{Suy ra } -x + 3y - 14 = 0.$$

Dễ thấy bài toán có vô số nghiệm hình. $\square$

- Việc hướng dẫn học sinh quy bài toán lập PT đường thẳng về việc xác định tọa độ các điểm sẽ thuận lợi hơn khi giải quyết các bài toán thuộc dạng này trong không gian ba chiều. Chẳng hạn ta xét bài toán sau đây.

★ **Thí dụ 5.** Trong không gian với hệ tọa độ Descartes Oxyz cho tam giác ABC với $C(0; 2; 3)$, phương trình hai đường cao là

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-5} \quad (d_1)$$

$$\frac{x+1}{13} = \frac{y}{16} = \frac{z-2}{5} \quad (d_2)$$

Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh AB.

Hướng giải

- Giả sử $A(2 + 7t; 1 - t; 1 - 5t); B(-1 + 13s; 16s; 2 + 5s)$. Tính được tọa độ các vectơ $\overrightarrow{CA} = (7t + 2; -t - 1; -5t - 2),$
 $\overrightarrow{CB} = (13s - 1; 16s - 2; 5s - 1).$

- Tọa độ các vectơ chỉ phương của $(d_1), (d_2)$ theo thứ tự là:

$$\vec{u}_1 = (7; -1; -5); \quad \vec{u}_2 = (13; 16; 5).$$

Sử dụng tính chất hai vectơ vuông góc ta tìm được tọa độ A, B, từ đó sẽ lập được phương trình cạnh AB. $\square$

Trên đây ta đã xét được một số thí dụ minh họa cho việc lập hệ phương trình để tìm tọa độ các điểm và hoàn thiện bài toán thiết lập phương trình đường thẳng trong mặt phẳng cũng như trong không gian. Hi vọng rằng các bạn đang ôn thi tốt nghiệp THPT nhận thấy được tính tích cực của việc áp dụng những phép toán giải tích khi giải các bài tập hình.

Cuối cùng xin gửi tới các bạn một số bài tập để tham khảo.

1. Tam giác ABC có $A(-2; 1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-1; 3)$ và điểm $M(5; 3)$ thuộc (BC). Lập phương trình các cạnh tam giác nếu biết độ dài cạnh $BC = 8$.

(Xem tiếp trang 13)

❀❀❀❀ LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ❀❀❀❀

CÁC BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA PTTH NĂM 2008

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT)

BÀI 1. Hãy xác định số nghiệm của hệ phương trình (ẩn x, y) sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 29 \\ \log_3 x \cdot \log_2 y = 1. \end{cases}$$

• **Lời bàn 1.1.** Bài đã ra là trường hợp riêng của bài toán sau:

Bài 1*. Cho số thực $a \geq 17$. Hãy xác định số nghiệm của hệ phương trình (ẩn x, y) sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = a & (1) \\ \log_3 x \cdot \log_2 y = 1. & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Lời giải bài 1*. Dễ thấy, nếu $(x; y)$ là nghiệm của hệ (I) thì $x > 1, y > 1$ (3)

Tiếp theo, có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

Cách 1. Đặt $\log_3 x = t, t > 0$ (do (3)). Khi đó, $x = 3^t$ và từ phương trình (PT) (2) có $y = 2^{\frac{1}{t}}$. Vì thế, từ PT (1) ta có PT (ẩn t) sau:

$$9^t + 8^{\frac{1}{t}} = a. \quad (4)$$

Dễ thấy số nghiệm của hệ (I) bằng số nghiệm dương của PT (4).

Xét hàm số $f(t) = 9^t + 8^{\frac{1}{t}} - a$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 9^t \ln 9 - \frac{8^{\frac{1}{t}} \ln 8}{t^2}$.

Trên $(0; +\infty)$, $y = 8^{\frac{1}{t}} \ln 8$ và $y = \frac{1}{t^2}$ là các hàm nghịch biến và chỉ nhận giá trị dương. Vì

thế, trên khoảng đó, $y = -\frac{8^{\frac{1}{t}} \ln 8}{t^2}$ là hàm đồng biến. Suy ra, $f'(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$. Hơn nữa, do

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f'(1) = 18(\ln 9 - \ln 2^{256})(\ln 27 - \ln 16) < 0$$

nên $\exists t_0 \in (0; 1)$ sao cho $f'(t_0) = 0$. Do đó, ta có bảng biến thiên sau của hàm $f(t)$ trên $(0; +\infty)$:

t	0	t_0	1	$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	$f(t_0)$	$f(1)$	$+\infty$

Từ đó, với lưu ý rằng $f(1) = 17 - a \leq 0$, suy ra PT (4) có đúng 2 nghiệm dương. Vì vậy, hệ (I) có tất cả 2 nghiệm.

Cách 2. Ta có PT (2) $\Leftrightarrow \ln(x^2) \cdot \ln(y^3) = \ln 8 \cdot \ln 9$ (2')

Đặt $x^2 = t$, từ PT (1) ta có $y^3 = a - t$.

Thế vào (2') ta được PT (ẩn t) sau:

$$\ln t \cdot \ln(a - t) = \ln 8 \cdot \ln 9 \quad (4')$$

Hơn nữa, từ (3) suy ra $1 < t < a - 1$. Do đó, dễ thấy, số nghiệm của hệ (I) chính bằng số nghiệm thuộc khoảng $(1; a - 1)$ của PT (4').

Xét hàm số $g(t) = \ln t \cdot \ln(a - t) - \ln 8 \cdot \ln 9$ trên

$$(1; a - 1). \text{ Ta có } g'(t) = \frac{\ln(a - t)}{t} - \frac{\ln t}{a - t}.$$

Trên $(1; a - 1)$, $y = \ln(a - t)$ và $y = \frac{1}{t}$ là các hàm nghịch biến và chỉ nhận giá trị dương,

$y = \ln t$ và $y = \frac{1}{a - t}$ là các hàm đồng biến và

chỉ nhận giá trị dương. Vì thế, $y = \frac{\ln(a - t)}{t}$

và $y = -\frac{\ln t}{a - t}$ là các hàm nghịch biến trên

$(1; a - 1)$. Suy ra $g'(t)$ là hàm nghịch biến trên

khoảng đó. Hơn nữa, do $g'\left(\frac{a}{2}\right)=0$ nên ta có bảng biến thiên sau của hàm $g(t)$ trên $(1; a-1)$:

t	1	$\frac{a}{2}$	$\frac{a+1}{2}$	$a-1$
$g'(t)$	+	0	-	
$g(t)$		$g\left(\frac{a}{2}\right)$	$g\left(\frac{a+1}{2}\right)$	
	$-\ln 8 \cdot \ln 9$		$-\ln 8 \cdot \ln 9$	

Vì $a \geq 17$ nên $\frac{a+1}{2} \geq 9$ và $\frac{a-1}{2} \geq 8$; do đó, $g\left(\frac{a+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{a+1}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{a-1}{2}\right) - \ln 8 \cdot \ln 9 \geq 0$. Vì thế, từ bảng biến thiên trên suy ra PT (4') có đúng 2 nghiệm thuộc khoảng $(1; a-1)$. Vì vậy, hệ (I) có tất cả 2 nghiệm.

◀ **Chú ý. 1)** Các kết quả đã được sử dụng để chứng minh tính đơn điệu của các hàm $f'(t)$ và $g'(t)$ ở các lời giải trên nằm trong phạm vi nội dung giảng dạy môn Toán cho học sinh lớp 10 chuyên Toán theo hướng dẫn của Bộ GD&ĐT. Trong kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia lớp 12 THPT môn Toán, các thí sinh được phép sử dụng các kết quả đó như kết quả sách giáo khoa (SGK) theo quy định của Bộ GD&ĐT tại các công văn số 11636/THPT, ngày 25/12/2000, và 1403/THPT, ngày 25/02/2002.

2) Có thể chứng minh hàm $f'(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và hàm $g'(t)$ nghịch biến trên $(1; a-1)$ bằng cách xét dấu của $f''(t)$ và $g''(t)$ trên các khoảng đó.

3) Với $a \geq 18$, ta có $g\left(\frac{a}{2}\right) > 0$. Vì thế, trong trường hợp này, để có được kết luận về số nghiệm thuộc khoảng $(1; a-1)$ của PT (4') không cần xét giá trị $g\left(\frac{a+1}{2}\right)$ trong quá trình khảo sát sự biến thiên của hàm số $g(t)$ trên khoảng đó.

• **Lời bàn 1.2.** - Có thể thấy, việc gán cho a các giá trị cụ thể không tạo ra được các cách giải mới (ngoài hai cách đã trình bày trên đây) cho các bài toán cụ thể nhận được.

- Khi chọn $a = 17$, từ Bài 1* ta có thể tạo được bài toán khó hơn và đẹp hơn về mặt Toán học so với Bài 1: "Giải hệ phương trình (I) ứng với $a = 17$ ". (Đáp số: $(x; y) = (3; 2)$ và $(x; y) = (2\sqrt{2}; \sqrt[3]{9})$). Tiếc rằng bài toán vừa nêu không thể phù hợp cho việc sử dụng làm bài toán thi trong một đề thi gồm 7 câu với thời lượng làm bài là 180 phút!

★ **BÀI 2.** Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BEC}$ là góc nhọn, trong đó E là trung điểm của cạnh AB . Trên tia EC lấy điểm M sao cho $\widehat{BME} = \widehat{ECA}$. Kí hiệu α là số đo của góc $\widehat{BEC}$, hãy tính tỉ số $\frac{MC}{AB}$ theo α .

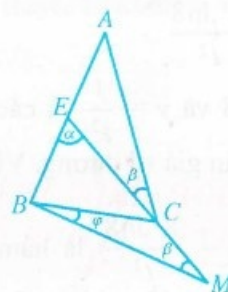
• **Lời bàn 2.1.** Bài đã ra là trường hợp riêng của bài toán sau đây

Bài 2*. Cho tam giác ABC . Gọi E là trung điểm của cạnh AB . Trên tia EC lấy điểm M sao cho $\widehat{BME} = \widehat{ECA}$. Kí hiệu α là số đo của góc $\widehat{BEC}$, hãy tính tỉ số $\frac{MC}{AB}$ theo α .

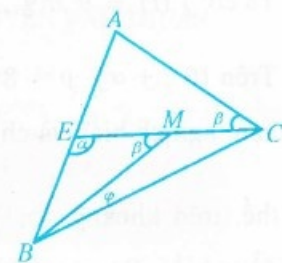
Lời giải bài 2*. + Dễ thấy nếu $\alpha = 90^\circ$ thì điểm M trùng với điểm C . Do đó, trong trường hợp này ta có $\frac{MC}{AB} = 0 = \cos \alpha$.

+ Xét $\alpha \neq 90^\circ$. Nhận thấy:

- Nếu $\alpha < 90^\circ$ thì điểm M nằm ngoài đoạn thẳng EC (h. 1).



Hình 1



Hình 2

Thật vậy, từ $\alpha < 90^\circ$ dễ dàng suy ra $AC > BC$.

Giả sử ngược lại, M thuộc đoạn EC . Khi đó, do M không thể trùng E , C nên M phải nằm giữa E và C . Do đó $\widehat{ECA} = \widehat{BME} = \widehat{ECB} + \widehat{CBM}$. Suy ra $\widehat{ECA} > \widehat{ECB}$. Vì thế, nếu gọi D là giao của đường phân giác góc $\widehat{ACB}$ và cạnh AB thì D phải nằm giữa E và A . Dẫn tới

$$1 < \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} < 1.$$

Mâu thuẫn nhận được cho ta điều muốn chứng minh.

- Nếu $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ thì điểm M nằm giữa hai điểm E và C . (Chứng minh tương tự trên) (h. 2).

Tiếp theo, ta có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

Cách 1. (h.1 và h.2). Đặt $\widehat{ECA} = \beta$ và $\widehat{MBC} = \varphi$.

Áp dụng định lý sin lần lượt cho các tam giác ACE và BME , ta được

$$\frac{AC}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{EA}{\sin \beta} = \frac{EB}{\sin \beta} = \frac{BM}{\sin \alpha}.$$

Suy ra $AC = BM$. Từ đó, áp dụng định lý cosin lần lượt cho các tam giác BCM và ABC ta được

$$\begin{aligned} MC^2 &= BC^2 + BM^2 - 2BC \cdot BM \cdot \cos \varphi \\ &= BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos \varphi \\ &= AB^2 + 2BC \cdot AC \cdot (\cos \widehat{ACB} - \cos \varphi) \\ &= AB^2 - 4BC \cdot AC \cdot \sin \frac{\widehat{ACB} + \varphi}{2} \sin \frac{\widehat{ACB} - \varphi}{2} \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có:

- Nếu điểm M nằm giữa hai điểm E và C (h. 2) thì

$$\frac{\widehat{ACB} + \varphi}{2} = \frac{\beta + \widehat{ECB} + \varphi}{2} = \frac{\beta + \beta}{2} = \beta$$

$$\text{và } \frac{\widehat{ACB} - \varphi}{2} = \frac{(\beta + \widehat{ECB}) - (\beta - \widehat{ECB})}{2} = \widehat{ECB}.$$

- Nếu điểm M nằm ngoài đoạn thẳng EC (h. 1) thì

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{ACB} + \varphi}{2} &= \frac{(\beta + \widehat{ECB}) + (\widehat{ECB} - \beta)}{2} = \widehat{ECB} \text{ và} \\ \frac{\widehat{ACB} - \varphi}{2} &= \frac{\beta + \widehat{ECB} - \varphi}{2} = \frac{\beta + \beta}{2} = \beta. \end{aligned}$$

Vì vậy, từ (*) ta có

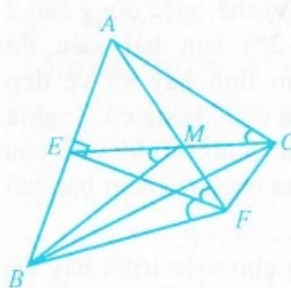
$$\begin{aligned} MC^2 &= AB^2 - 4(AC \cdot \sin \beta) \cdot (BC \cdot \sin \widehat{ECB}) \\ &= AB^2 - 4(EA \cdot \sin \alpha) \cdot (EB \cdot \sin \alpha) \\ &= AB^2 \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = AB^2 \cdot \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{MC}{AB} = |\cos \alpha|.$$

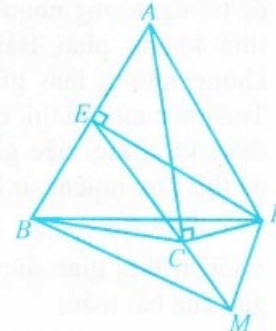
Cách 2. Gọi F là giao điểm thứ hai (khác E) của các đường tròn (AEC) và (BEM) . Dễ thấy:

- Nếu điểm M nằm giữa hai điểm E và C (h. 3) thì F nằm trong phần mặt phẳng giới hạn bởi tia đối của tia BA , đoạn thẳng BM và tia MC .

- Nếu điểm M nằm ngoài đoạn thẳng EC (h. 4) thì F nằm trong phần mặt phẳng giới hạn bởi tia đối của tia AB , đoạn thẳng AC và tia CM .



Hình 3



Hình 4

Từ đó, do bốn điểm A, E, C, F đồng viên (tức cùng nằm trên một đường tròn) và bốn điểm B, E, F, M đồng viên, ta có $\widehat{FCM} = \widehat{FAB}$ và $\widehat{FMC} = \widehat{FBA}$. Do đó $\triangle FCM \sim \triangle FAB$. Suy ra $\frac{MC}{AB} = \frac{FC}{FA}$ (1)

Cũng từ sự đồng viên của các bộ bốn điểm nêu trên, ta còn có $\widehat{AFE} = \widehat{ACE} = \widehat{BME} = \widehat{BFE}$. Do đó $\triangle AFB$ cân tại F . Suy ra $FE \perp AB$, hay $\widehat{AEF} = 90^\circ$. Dẫn tới $\widehat{FCA} = 90^\circ$ (2)

Từ (1), (2) và do bốn điểm A, E, C, F đồng viên, suy ra $\frac{MC}{AB} = \sin \widehat{FAC} = \sin \widehat{FEC}$ (3)

Để thấy, tùy thuộc vào vị trí tương đối của điểm M đối với hai điểm E, C , ta sẽ có $\widehat{FEC} = \alpha - 90^\circ$ hoặc $\widehat{FEC} = 90^\circ - \alpha$.

Vì thế, từ (3) ta được $\frac{MC}{AB} = |\cos \alpha|$.

+ Tóm lại, trong mọi trường hợp ($\alpha = 90^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$), ta luôn có $\frac{MC}{AB} = |\cos \alpha|$.

• **Lời bàn 2.2.** - Sử dụng phương pháp của Cách 1, ta còn có thể có được các lời giải khác lời giải đã trình bày ở trên (cho trường hợp $\alpha \neq 90^\circ$).

- Ở Bài 2, có thể thay giả thiết "góc $\widehat{BEC}$ là góc nhọn" bởi giả thiết " $AC > BC$ " (đẹp hơn và "kín đáo" hơn!).

- Có thể coi Bài 2 và Bài 2* có mức độ khó-dễ tương đương nhau. Vì thế, việc dùng Bài 2 (mà không phải Bài 2*) làm bài toán thì không những làm giảm tính hay và vẻ đẹp Toán học của đề thi, mà còn không có ý nghĩa đáng kể trong việc giảm mức độ khó-dễ của đề thi. Tuy nhiên, sự lựa chọn đó đảm bảo hai điều dưới đây:

+ Giảm thời gian dùng cho việc trình bày lời giải của bài toán;

+ Giúp thí sinh không bị mất điểm vì lí do "quên" không xét đầy đủ các trường hợp có thể xảy ra.

◀ **Nhận xét về bài làm của các thí sinh.** Hầu hết các thí sinh giải được bài đã ra đều không có lập luận nào về vị trí tương đối của điểm M đối với các điểm E, C . Lời giải cho bài toán của các thí sinh đó, hiển nhiên, không thể được coi là hoàn chỉnh. Tuy nhiên, sau khi cân nhắc, Tổ chấm thi đã quyết định châm chước cho các thí sinh về thiếu sót nêu trên.

❖ **Bài 4.** Cho dãy số thực (x_n) được xác định như sau :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2 \quad \text{và} \quad x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2} \quad \text{với mọi} \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 2^{-x} + \frac{1}{2}$, xác định trên $\mathbb{R}$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $x_{n+4} = f(x_{n+2}) = f(f(x_n))$, hay $x_{n+4} = g(x_n)$, trong đó g là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và $g(x) = f(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Để thấy, hàm số f giảm trên $\mathbb{R}$; do đó, hàm số g tăng trên $\mathbb{R}$. Vì thế từ (1) suy ra: với mỗi $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, dãy (x_{4n+k}) , $n \in \mathbb{N}$, là dãy đơn điệu. Hơn nữa, từ cách xác định dãy (x_n) dễ thấy $0 \leq x_n \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, với mỗi $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, dãy (x_{4n+k}) là dãy hội tụ.

Với mỗi $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, đặt $\lim x_{4n+k} = a_k$, ta có $0 \leq a_k \leq 2$. Hơn nữa, do hàm số g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (1) suy ra $g(a_k) = a_k$ (2)

Xét hàm số $h(x) = g(x) - x$ trên $[0; 2]$. Ta có $h'(x) = 2^{-(f(x)+x)} \cdot (\ln 2)^2 - 1 < 0, \quad \forall x \in [0; 2]$ (do $f(x) + x > 0, \quad \forall x \in [0; 2]$).

Suy ra, hàm số h giảm trên $[0; 2]$. Vì thế, sẽ có không quá một điểm $x \in [0; 2]$ sao cho $h(x) = 0$, hay $g(x) = x$. Mà $g(1) = 1$ (dễ thấy), nên từ (2) ta được $a_k = 1, \quad \forall k \in \{1; 2; 3; 4\}$. Từ đây, vì dãy (x_n) là hợp của bốn dãy con (x_{4n+k}) nên (x_n) là dãy hội tụ và $\lim x_n = 1$.

• **Lời bàn.** Bài toán trên có thể được coi như một "bài tập SGK" đối với học sinh các lớp chuyên Toán. Vì thế, việc có tới 55,83% tổng số thí sinh dự thi không giải được bài toán, thiết nghĩ, là một sự kiện đáng được các học sinh quan tâm, khi chuẩn bị dự thi các kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán lớp 12 THPT sắp tới.

◀ **Nhận xét về bài làm của các thí sinh.** Nhiều thí sinh đã gặp lúng túng khi giải quyết bài toán do đã tiến hành khảo sát tính hội tụ và tìm giới hạn của dãy (x_n) thông qua tính hội tụ và giới hạn của chỉ hai dãy con (x_{2n-1}) và (x_{2n}) , $n \in \mathbb{N}^*$.

(Kì sau đăng tiếp)



Ứng dụng CỦA MỘT ĐẲNG THỨC

HOÀNG ĐỨC NGUYỄN
(GV khối THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Trong các số báo trước, các bạn đã biết đến rất nhiều ứng dụng của đẳng thức:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \end{aligned}$$

Trong quá trình làm toán tôi cũng gặp một đẳng thức cũng có nhiều ứng dụng sau đây:

$$\begin{aligned} (x + y)(y + z)(z + x) = \\ (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz \end{aligned} \quad (1)$$

Đẳng thức này có thể chứng minh đơn giản bằng cách đặt $x + y + z = m$ và biến đổi:

$$\begin{aligned} (x + y)(y + z)(z + x) &= (m - z)(m - x)(m - y) \\ &= (m^2 - m(z + x) + zx)(m - y) \\ &= m^3 - m^2(x + y + z) + m(xy + yz + zx) - xyz \\ &= (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz. \end{aligned}$$

Sau đây là một vài thí dụ ứng dụng của đẳng thức (1).

★Thí dụ 1. Cho x, y, z là ba số thoả mãn điều kiện $(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz$.

Chứng minh rằng

$$x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = (x + y + z)^{2009}.$$

Lời giải

Từ giả thiết, sử dụng đẳng thức (1) ta có

$$\begin{aligned} (x + y)(y + z)(z + x) \\ = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz = 0. \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x + y = 0$ hay $x = -y$, suy ra $x^{2009} = -y^{2009}$ và do đó

$$x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = z^{2009} = (x + y + z)^{2009}. \quad \square$$

★Thí dụ 2. Cho ba số nguyên x, y, z có tổng chia hết cho 6. Chứng minh rằng biểu thức

$M = (x + y)(y + z)(z + x) - 2xyz$ cũng chia hết cho 6.

Lời giải. Sử dụng đẳng thức (1) ta có

$$M = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz.$$

Vì $(x + y + z) : 6$ nên $x + y + z$ chẵn, suy ra trong ba số x, y, z có ít nhất một số chẵn. Do đó $3xyz : 6$. Vậy $M : 6$. $\square$

★Thí dụ 3. Cho các số dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$a) (x + y)(y + z)(z + x) \geq \frac{8}{3}(x + y + z)\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \quad (2)$$

$$b) \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{8} \geq \frac{(x + y + z)(xy + yz + zx)}{9} \quad (3)$$

$$c) \sqrt[3]{\frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{8}} \geq \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} \quad (4)$$

Lời giải

a) Từ đẳng thức (1) ta có

$$\begin{aligned} (x + y)(y + z)(z + x) \\ = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz \\ \geq (x + y + z) \cdot 3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} - xyz \\ = \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} (3(x + y + z) - \sqrt[3]{xyz}) \\ \geq \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \left(3(x + y + z) - \frac{1}{3}(x + y + z) \right) \\ = \frac{8}{3}(x + y + z)\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}. \end{aligned}$$

b) Sử dụng đẳng thức (1) thì bất đẳng thức (3) tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz}{8} \\ \geq \frac{(x + y + z)(xy + yz + zx)}{9} \\ \Leftrightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 9xyz. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức (BĐT) này đúng do

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \text{ và } xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}.$$

c) Dùng BĐT (3) và BĐT

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}} &\geq \sqrt[3]{\frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{9}} \\ &\geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3(xy+yz+zx)}(xy+yz+zx)}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}. \end{aligned}$$

Chú ý. Nếu có thêm điều kiện $xyz = 1$ thì từ BĐT (2) ta có

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8}{3}(x+y+z). \quad \square$$

★ **Thí dụ 4.** (APMO 1998). Cho các số dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2\left(1 + \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right).$$

Lời giải

Theo BĐT (2) ta có

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \geq \frac{8}{3} \cdot \frac{(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) &\geq 2\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right) \\ &\geq 2\left(1 + \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right). \quad \square \end{aligned}$$

★ **Thí dụ 5.** Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$a) (x+y)(y+z)(z+x) \geq 2(1+x+y+z) \quad (5)$$

(Bài T8/310 – THPT tháng 4/2003)

$$b) \sqrt{\frac{x+y}{x+1}} + \sqrt{\frac{y+z}{y+1}} + \sqrt{\frac{z+x}{z+1}} \geq 3 \quad (6)$$

Lời giải

a) Sử dụng đẳng thức (1) và $xyz = 1$ thì thấy

$$\begin{aligned} (5) &\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx) - 1 \geq 2(1+x+y+z) \\ &\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 2(x+y+z) + 3. \end{aligned}$$

Từ BĐT $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$, ta có

$$\begin{aligned} (x+y+z)(xy+yz+zx) &\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}(x+y+z) \\ &= 3(x+y+z) \geq 2(x+y+z) + 3. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra BĐT (5) được chứng minh. $\square$

b) Trước hết ta chứng minh

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq (x+1)(y+1)(z+1) \quad (7)$$

Thật vậy, nhờ đẳng thức (1) và $xyz = 1$, ta thấy

$$\begin{aligned} (7) &\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx) - 1 \\ &\geq xy+yz+zx+x+y+z+2. \\ &\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx) \\ &\geq xy+yz+zx+x+y+z+3. \end{aligned}$$

Vì $xyz = 1$ nên $x+y+z \geq 3$ và $xy+yz+zx \geq 3$.

Do đó $(x+y+z)(xy+yz+zx)$

$$\begin{aligned} &= \frac{x+y+z}{3}(xy+yz+zx) + (x+y+z) \frac{xy+yz+zx}{3} \\ &\quad + \frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{3} \\ &\geq x+y+z+xy+yz+zx+3, \text{ suy ra BĐT (7)} \\ &\text{được chứng minh.} \end{aligned}$$

Sử dụng BĐT (7) và BĐT Cauchy cho ba số dương ta có ngay BĐT (6). $\square$

Chú ý. Ta cũng có ngay BĐT (5) khi thay $xyz = 1$ vào BĐT ở Thí dụ 4.

★ **Thí dụ 6.** Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c và S là diện tích tam giác. Chứng minh rằng

$$a) (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) + 9abc \geq 2(a+b+c)(ab+bc+ca) \quad (8)$$

$$b) a^2+b^2+c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab+bc+ca) \quad (9)$$

Lời giải

$$a) \text{ Đặt } x = p-a, y = p-b, z = p-c, \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Khi đó (8) $\Leftrightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x)$
 $\geq 8(x+y+z)(xy+yz+zx) \Leftrightarrow (3)$.

b) Ta có (9) $\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}$
 $\geq 4(xy+yz+zx) \Leftrightarrow (4)$. $\square$

★ **Thí dụ 7.** Cho các số dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) \geq (xy+yz+zx)\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Lời giải

Với α là số thực dương tùy ý thì BĐT ở bài ra vẫn đúng khi thay x, y, z bởi $\alpha x, \alpha y, \alpha z$. Bởi vậy, không mất tính tổng quát giả sử $(x+y)(y+z)(z+x)=8$. Ta chứng minh $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) \geq 2(xy+yz+zx)$ (10)

Từ đẳng thức (1) ta có

$$8=(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz \Rightarrow xyz=\frac{8+xyz}{x+y+z}.$$

Lại có

$$8=(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz \Rightarrow xyz \leq 1.$$

$$8=(x+y)(y+z)(z+x) \leq \left(\frac{2(x+y+z)}{3}\right)^3 \Rightarrow x+y+z \geq 3.$$

$$\text{Vậy } xy+yz+zx \leq 3 \quad (11)$$

$$\text{và } x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) = (x+y)(y+z)(z+x)-2xyz = 8-2xyz \quad (12)$$

Từ (10), (11) và (12) ta có đpcm. $\square$

BÀI TẬP

1. Cho $P=(x+y)(y+z)(z+x)-xyz$ với x, y, z là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $x+y+z$ chia hết cho 4 thì P cũng chia hết cho 4.

2. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$a) (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca) \quad (\text{APMO 2004})$$

$$b) \left| \frac{a^3-b^3}{a+b} + \frac{b^3-c^3}{b+c} + \frac{c^3-a^3}{c+a} \right| \leq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{4} \quad (\text{Moldova TST 2004})$$

3. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c và diện tích tam giác là S . Chứng minh rằng $S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{a^2 b^2 c^2}$.

4. Chứng minh rằng $(a+b-c-1)(b+c-a-1)(c+a-b-1) \leq 8$, trong đó a, b, c là các số thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=abc$. (T2/306-THTT, 4-2003).

5. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 4(x+y+z-1)$.

VỀ BÀI TOÁN... (Tiếp trang 6)

2. Cho tam giác ABC , điểm $D(0; 5; 2)$ là trung điểm cạnh BC . Đường cao BH , đường phân giác trong góc C lần lượt có phương trình $x-2y+3=0$; $y=3$. Hãy lập phương trình các cạnh của tam giác đó.

3. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu biết $A(-3; 1; 1)$ và phương trình hai đường trung tuyến theo thứ tự là

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{1}; \quad \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

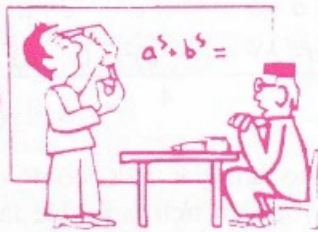
4. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu biết $B(-2; 4; 1)$ và phương trình các đường cao, trung tuyến kẻ từ A theo thứ tự là

$$\begin{cases} x+y-2z-4=0 \\ 2x+y-2z-1=0 \end{cases}; \quad \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

5. Tam giác ABC có $M(3; 2; 0)$ nằm trên đường thẳng BC . Phương trình tia phân giác góc B , đường trung trực cạnh BC lần lượt là

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{2}; \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh AB .

DIỄN ĐÀN**DẠY
HỌC
TOÁN**

Suy nghĩ KHÔNG CŨ VỀ MỘT DẠNG TOÁN KHÔNG MỚI

HÀ VĂN THẮNG

(GV THPT Yên Dũng số 1, Bắc Giang)

Sử dụng phương pháp tích phân hoặc đạo hàm đối với các bài toán về nhị thức Newton không còn xa lạ đối với giáo viên và học sinh. Trong các đề tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng, dạng bài tập này cũng thường xuất hiện. Tuy nhiên, trong sách giáo khoa mới hiện nay phần Nhị thức Newton nằm ở lớp 11 (trước phần Đạo hàm và Tích phân). Vì vậy, có ý kiến cho rằng không thể giảng cho học sinh lớp 11 các bài tập thuộc dạng này. Trong bài viết này, tác giả xin trình bày cách giải các bài toán thuộc dạng trên bằng cách sử dụng các công thức về tổ hợp thuần túy. Trước hết, chúng ta bắt đầu với thí dụ sau đây.

★Thí dụ 1. Tính tổng

$$S = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$$

$$(n \in \mathbb{N}^*).$$

Lời giải

Cách 1. Sử dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ với $k = 0, 1, \dots, n$, ta viết lại tổng đã cho như sau:

$$S = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \dots + 1C_n^{n-1}.$$

Như vậy, ta có

$$S = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n,$$

$$S = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \dots + 1C_n^{n-1}$$

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được

$$2S = nC_n^0 + nC_n^1 + nC_n^2 + \dots + nC_n^{n-1} + nC_n^n$$

$$\Rightarrow 2S = n2^n.$$

$$\text{Vậy } S = n2^{n-1}.$$

Cách 2. Ta có

Bổ đề. Với mọi $n, k \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq k \geq 1$ thì

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Thật vậy, với $n, k \in \mathbb{N}^* : n \geq k \geq 1$ thì

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{k \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-k)!k \cdot (k-1)!}$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = nC_{n-1}^{k-1} \text{ (đpcm).}$$

Áp dụng bổ đề ta có

$$S = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) = n2^{n-1}.$$

Vậy $S = n2^{n-1}$. $\square$

★Thí dụ 2. Tính tổng

$$S = \frac{1}{1}C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Lời giải. Theo bổ đề đã chứng minh ở phần trên suy ra với các số tự nhiên n và k thỏa mãn $n \geq k$

$$\text{ta có } \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}.$$

Vì vậy

$$S = \frac{C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1). \quad \square$$

«Nhận xét. Các lời giải trên có ưu điểm là ngắn gọn, dễ trình bày và có hướng giải “tự nhiên”. Quan trọng hơn cả là giáo viên có thể hướng dẫn học sinh giải ngay cả khi chưa học đạo hàm và tích phân.

★Thí dụ 3. Tính tổng

$$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + \dots + (n-1)n.C_n^n,$$

với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 2$.

Lời giải. Với $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ và $k = 2, 3, \dots, n$, áp dụng bổ đề ở phần trên hai lần ta có

$$(k-1)kC_n^k = (k-1)nC_{n-1}^{k-1} = n(k-1)C_{n-1}^{k-1}$$

$$= n(n-1)C_{n-2}^{k-2}.$$

Suy ra $(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2}$.

Như vậy ta được

$$S = 1 \cdot 2 \cdot C_n^2 + 2 \cdot 3 \cdot C_n^3 + 3 \cdot 4 \cdot C_n^4 + \dots + (n-1)n \cdot C_n^n$$

$$= (n-1)n(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + \dots + C_{n-2}^{n-2})$$

$$= (n-1)n \cdot 2^{n-2}. \quad \square$$

★Thí dụ 4. Tính tổng

$$S = 1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + n^2 C_n^n, \text{ với } n \in \mathbb{N}, n > 2.$$

Lời giải

Số hạng tổng quát của tổng S là $k^2 C_n^k$, với $k = 2, 3, \dots, n$, ta có

$$k^2 C_n^k = (k-1)kC_n^k + kC_n^k = n(n-1)C_{n-1}^{k-1} + nC_{n-1}^{k-1}$$

(theo Thí dụ 3 và Thí dụ 1).

$$\text{Mặt khác } 1^2 C_n^1 = nC_{n-1}^0.$$

Như vậy ta được

$$S = 1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + n^2 C_n^n$$

$$= n(n-1)(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-2})$$

$$+ n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1})$$

$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

$$= n(n+1)2^{n-2}. \quad \square$$

★Thí dụ 5. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1} \quad (*),$$

với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Theo Thí dụ 2 ta có

$$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

với $k = 1, 2, \dots, n$. Áp dụng vào bài toán ta được

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}$$

$$= \frac{1}{2n+1}(C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n})$$

$$= \frac{1}{2n+1}((C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n}) - 1)$$

$$= \frac{1}{2n+1}(2^{2n+1} - 1).$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

◀Nhận xét. Bài toán trên nằm trong đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2007. Trong đáp án trình bày theo cách giải tích phân khá phức tạp. Lời giải trên đây ngắn gọn hơn và tiếp cận tự nhiên hơn.

Từ bổ đề đã chứng minh ở phần trên, ta có thể giải được các bài tập sau đây. Xin dành cho bạn đọc.

Tính các tổng sau đây

1) $S_1 = 1C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \dots + (-1)^n nC_n^n$
với $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$.

2) $S_2 = 1C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + nC_n^n$.

3) $S_3 = 1C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + 4C_n^5 + \dots + (n-1)C_n^n$
với $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2$.

4) $S_4 = 1C_n^2 - 2C_n^3 + 3C_n^4 - 4C_n^5 + \dots + (-1)^n (n-1)C_n^n$
với $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2$.

5) $S_5 = \frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 - \frac{1}{5}C_n^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n$
với $n \in \mathbb{N}^*$.

6) $S_6 = \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + \frac{1}{5}C_n^3 + \dots + \frac{1}{n+2}C_n^n$
với $n \in \mathbb{N}^*$.

7) $S_7 = \frac{2^2}{2}C_n^1 - \frac{2^3}{3}C_n^2 + \frac{2^4}{4}C_n^3 - \frac{2^5}{5}C_n^4 + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n$
với $n \in \mathbb{N}^*$.

8) $S_8 = \frac{1}{1!(2n-1)!} + \frac{1}{3!(2n-3)!} + \frac{1}{5!(2n-5)!}$
 $+ \dots + \frac{1}{(2n-1)!!}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/378. (Lớp 6) Tìm số tự nhiên a sao cho $a + 593$ và $a - 159$ đều là số chính phương.

TRƯƠNG QUANG AN
(SV lớp Toán - Tin, ĐH Phạm Văn Đồng,
Quảng Ngãi)

Bài T2/378. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A với $\widehat{ACB} = 15^\circ$. Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng $a^2 = 4bc$.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa,
Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T3/378. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z, t thỏa mãn điều kiện

$$x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} = 2007 \cdot t^{2008}$$

NGUYỄN THỊ HIỀN
(SV lớp Y5C, ĐH Y Khoa Hà Nội)

Bài T4/378. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right) \geq 3(a+b+c)^2$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

ĐÀU THANH KỲ
(GV THPT Diễn Châu IV, Nghệ An)

Bài T5/378. Trên cạnh BC của tam giác nhọn ABC lấy điểm D khác các điểm B và C . Chứng minh rằng điểm A và tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, ACD, ABC cùng nằm trên một đường tròn.

NGUYỄN ĐỂ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/378. Tìm hệ số của x^2 sau khi khai triển biểu thức

$$(((\dots((x-2)^2-2)^2-\dots-2)^2-2)^2$$

biết rằng trong biểu thức trên có 1004 số 2 và 2008 dấu ngoặc.

TRỊNH XUÂN BÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Tây)

Bài T7/378. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{\sqrt{a_1+2008}+\sqrt{a_2+2008}+\dots+\sqrt{a_n+2008}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\dots+\sqrt{a_n}}$$

trong đó n là số nguyên dương cho trước và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a_1+a_2+\dots+a_n=n$.

ĐẶNG THANH HẢI
(GV Học viện Phòng không - Không quân,
Sơn Tây, Hà Nội)

Bài T8/378. Cho đường tròn (O) tâm O có đường kính AB cố định. Một đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A . Gọi M là điểm thuộc đường tròn (O) và M khác với các điểm A, B . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M cắt đường thẳng Δ tại C . Xét đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại C . Giả sử CD là đường kính của đường tròn (I) . Chứng minh rằng:

- 1) Tam giác DOC là tam giác cân;
- 2) Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn (O) .

ĐÀO TAM
(GV khoa Toán, ĐH Vinh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/378. Hỏi có tồn tại hay không dãy hữu hạn các số nguyên dương:

$a_{2003} > a_{2002} > \dots > a_2 > a_1$ với $a_1 = 2003$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- 1) Bất kì số nguyên nào thuộc khoảng $(2003; a_{2003})$ và không thuộc dãy trên thì đều là hợp số.

- 2) $A = \frac{2004}{a_1} + \frac{2004}{a_2} + \dots + \frac{2004}{a_{2003}}$ là số nguyên?

PHÙNG TRỌNG THỰC
(SV Khoa Toán, K29.1A, ĐHSP TP. Hồ Chí Minh)

Bài T10/378. Tìm tất cả các hàm số f, g, h liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ mà thỏa mãn $f(x+y) = g(x) + h(y)$ với mọi số thực x, y .

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T11/378. Cho tam giác ABC với trực tâm H và đường tròn ngoại tiếp tâm O bán kính R . Chứng minh rằng

$$3R - 2OH \leq HA + HB + HC \leq 3R + OH.$$

TRẦN QUANG HÙNG
(SV K49AIT, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Bài T12/378. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a . Lấy điểm N trên đoạn thẳng AB_1 và điểm M trên đoạn thẳng BC_1 sao cho đường thẳng MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° . Chứng minh rằng $MN \geq 2a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/378. Một quả bóng đàn hồi rơi từ độ cao $h = 2,0\text{m}$ so với mặt sàn nằm ngang. Sau mỗi va chạm với sàn bóng mất 19% cơ năng. Sau thời gian bao lâu thì bóng dừng lại? Trong thời gian đó bóng đã đi được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

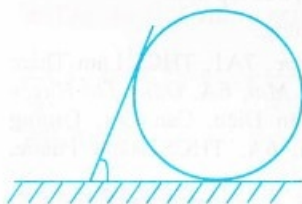
TRẦN KHÁNH HẢI
(GV THPT Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế)

Bài L2/378. Một khối trụ đặt trên một mặt bàn ráp nằm ngang. Một tấm ván đặt tựa vào khối trụ và nghiêng so với mặt phẳng ngang một góc 60° (xem hình vẽ). Biết khối lượng và chiều dài của tấm ván lần lượt bằng khối lượng và đường kính của khối trụ. Coi hệ số ma sát tại ba điểm tiếp xúc là như nhau.

a) Chứng tỏ rằng lực ma sát ở ba điểm tiếp xúc bằng nhau.

b) Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hệ số ma sát để đảm bảo sự cân bằng của hệ.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT Hà Nội - Amsterdam)



PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/378. (For 6th grade) Find all natural numbers a such that both $a + 593$ and $a - 159$ are perfect squares.

T2/378. (For 7th grade) Let ABC be a right triangle, with right angle at A and $\widehat{ACB} = 15^\circ$. Let $BC = a, AC = b, AB = c$. Prove that $a^2 = 4bc$.

T3/378. Find all intergers x, y, z, t such that $x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} = 2007t^{2008}$.

T4/378. Prove the inequality
$$\left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right) \geq 3(a+b+c)^2$$

where a, b, c are positive numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

T5/378. Let ABC be an acute triangle. Choose a point D , different from B and C , on the side BC . Prove that the vertex A and the centers of the circumcircles of the triangles ABD, ACD and ABC lie on the same circle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/378. Find the coefficient of x^2 in the expansion of

$$((\dots((x-2)^2-2)^2-\dots-2)^2-2)^2$$

given that the number 2 occurs 1004 times in the expression above and there are 2008 round brackets.

T7/378. Find the smallest value of the following expression

$$\frac{\sqrt{a_1+2008}+\sqrt{a_2+2008}+\dots+\sqrt{a_n+2008}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\dots+\sqrt{a_n}}$$

where n is a given positive natural number and $a_1, a_2, \dots, a_n$ are non-negative real numbers such that $a_1+a_2+\dots+a_n=n$.

(Xem tiếp trang 27)



★ **Bài T1/374.** Tìm tất cả các bộ ba số tự nhiên a, b, c nhỏ hơn 20 và thỏa mãn điều kiện $a(a+1) + b(b+1) = c(c+1)$, trong đó a là số nguyên tố và b chia hết cho 3.

Lời giải. Từ giả thiết

$$a(a+1) + b(b+1) = c(c+1) \quad (1)$$

ta thấy ngay $1 < a \leq c$ và $0 \leq b < c \Rightarrow c - b > 0$.

Cũng từ (1) có

$$a(a+1) = c^2 - b^2 + c - b = (c-b)(c+b+1) \quad (2)$$

Vì a là số nguyên tố nên $c-b$ hoặc $c+b+1$ chia hết cho a .

1) Nếu $c-b$ chia hết cho a thì $a \leq c-b$ và từ (2) có $c+b+1 \leq a+1 \leq c-b+1 \Rightarrow b=0$ và $a=c$. Ta có các nghiệm $(a; b; c)$ là $(a; 0; a)$ với a là số nguyên tố nhỏ hơn 20.

2) Nếu $c+b+1$ chia hết cho a , ta đặt $c+b+1 = ka$ (3) với k nguyên dương, lúc đó do $b \geq 0$ và $c \geq a$ nên $k \geq 2$.

$$\text{Thay (3) vào (2), suy ra } a+1 = k(c-b) \quad (4)$$

Thay thế a ở (4) vào (3) được

$$c+b+1 = k^2(c-b) - k$$

$$\Leftrightarrow 2b = k^2(c-b) - (c-b) - (k+1)$$

$$\Leftrightarrow 2b = (k+1)((k-1)(c-b) - 1) \quad (5)$$

Vì $c-b \geq 1$ nên $(k+1)(k-2) \leq 2b < 40 \Rightarrow k < 7$.

Thay các giá trị k với $2 \leq k \leq 6$ vào (5), ta tính được c, b rồi tính a theo (4) như dưới đây.

• Với $k=2$ và $b=3m$, từ (5) có $c=5m+1$.

+ Khi $m=1$ thì $c=6, b=3$ và $a=5$ (thỏa mãn).

+ Khi $m=2$ thì $c=11, b=6$ và $a=9$

(loại vì a phải là số nguyên tố).

+ Khi $m=3$ thì $c=16, b=9$ và $a=13$

(thỏa mãn).

+ Khi $m \geq 4$ thì $c > 20$ (không thỏa mãn).

• Với $k=3$ và $b=3m$ (vì $b < 20$ nên $m \leq 6$),

từ (5) có $4c = 15m + 2 \Rightarrow m = 4t + 2$ với $t=0, 1$.

+ Khi $t=0, m=2$ thì $c=8, b=6$ và $a=5$

(thỏa mãn).

+ Khi $t=1, m=6$ thì $c > 20$ (không thỏa mãn).

• Với $k=4$ và $b=3m$, từ (5) có $15c = 51m - 5$

(không thỏa mãn vì 3 là ước của 15 và 51 nhưng không là ước của 5).

• Với $k=5$ và $b=3m$, từ (5) có $4c = 13m + 1$.

Suy ra $m+1$ chia hết cho 4, mà $m < 7$ nên chỉ

có thể $m=3$, lúc đó $c=10, b=9$ và $a=4$ (loại vì a phải là số nguyên tố).

• Với $k=6$ và $b=3m$, từ (5) có $35c = 111m + 7$.

Suy ra m chia hết cho 7 mà $m < 7$ nên không thỏa mãn.

Tóm lại, bài toán có các nghiệm $(a; b; c)$ là

$(2; 0; 2), (3; 0; 3), (5; 0; 5),$
 $(7; 0; 7), (11; 0; 11), (13; 0; 13),$
 $(17; 0; 17), (19; 0; 19), (5; 3; 6),$
 $(5; 6; 8), (13; 9; 16). \square$

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn thay $b=3m$ với $m < 7$, lấy a là số nguyên tố để xét

$$b(b+1) = (c-a)(c+a+1)$$

cũng đi đến kết quả nhưng phức tạp hơn.

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: Trịnh Hồng Ngọc, 7A1, THCS Lâm Thao;

Hà Tĩnh: Bùi Thị Phương Mai, 6A, Đặng Thị Huyền

Trang, 6C, THCS BC Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng**

Ngãi: Nguyễn Bảo Trâm, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/374.** Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$ với n là số nguyên dương. Đặt

$$P_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \cdots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \cdots f(2n)}$$

Chứng minh rằng $P_1 + P_2 + \dots + P_n < \frac{1}{2}$.

Lời giải. Biến đổi

$$f(n) = ((n^2+1)+n)^2 + 1 = (n^2+1)^2 + 2n(n^2+1) + n^2 + 1 \\ = (n^2+1)((n+1)^2 + 1).$$

Suy ra

$$\frac{f(2n-1)}{f(2n)} = \frac{(4n^2-4n+2)(4n^2+1)}{(4n^2+1)(4n^2+4n+2)} = \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}$$

Do đó

$$P_n = \frac{1^2+1}{3^2+1} \cdot \frac{3^2+1}{5^2+1} \cdot \frac{5^2+1}{7^2+1} \cdots \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1} \\ = \frac{2}{(2n+1)^2+1} = \frac{1}{2n^2+2n+1} \\ < \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Vậy $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$

$$< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{2} \text{ (đpcm). } \square$$

◀ **Nhận xét.** Đây là bài toán liên quan đến các phép biến đổi phân thức quen thuộc. Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều có phương pháp giải đúng.

Các bạn sau đây có lời giải chính xác và ngắn gọn:

Bắc Ninh: Nguyễn Hữu Dũng, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Thị Thu Uyên, Nguyễn Thành Công, Hoàng Minh Phương, Tô Thị Thu Hà, Hoàng Hà Linh, Nguyễn Minh Hiếu, Phạm Thị Khánh Linh, Hoàng Thị Minh Hằng, Nguyễn Thu Hương, 7A1, THCS Yên Lạc; **Quảng Trị:** Dương Như Bảo Lộc, 7C, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hà, Nguyễn Văn Hải Như, 7I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Bảo Trâm, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/374.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức $T = \frac{(y+z)^2}{y^2+z^2} - \frac{(x+z)^2}{x^2+z^2}$, trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x > y; z > 0$ và $z^2 \geq xy$.

Lời giải. Ta có

$$T = 1 + \frac{2yz}{y^2+z^2} - \left(1 + \frac{2xz}{x^2+z^2} \right) \\ = \frac{2z(y(x^2+z^2) - x(y^2+z^2))}{(y^2+z^2)(x^2+z^2)}$$

$$= \frac{2z(x-y)(xy-z^2)}{(y^2+z^2)(x^2+z^2)} \leq 0 \text{ (do } x > y, z > 0, z^2 \geq xy).$$

$T = 0 \Leftrightarrow z^2 = xy$. Vậy giá trị lớn nhất của T bằng 0, đạt được khi và chỉ khi $z^2 = xy$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Tất cả các bạn tham gia đều giải đúng. Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: Lê Văn Tú, 8A1, THCS Yên Lạc, Nguyễn Thị Thủy Dương, 7A, THCS Vĩnh Tường; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Hương Lý, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Nghe An:** Nguyễn Văn Cường, 6D, Nguyễn Văn Thắng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** Nguyễn Văn Hải Như, 7I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị; **Phú Yên:** Lê Cao Thắng, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu; **Cần Thơ:** Huỳnh Thủy Cúc, 6A9, THCS Đoàn Thị Điểm, TP. Cần Thơ; **Bạc Liêu:** Trần Quang Minh, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/374.** Giải phương trình

$$\sqrt[3]{14-x^3} + x = 2(1 + \sqrt{x^2-2x-1}) \quad (1)$$

Lời giải. Cách 1. Điều kiện $x^2 - 2x - 1 \geq 0$ (2)

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{14-x^3} = 2\sqrt{x^2-2x-1} + 2-x.$$

$$\text{Do } \sqrt{x^2-2x-1} \geq 0 \text{ nên } \sqrt[3]{14-x^3} \geq 2-x$$

$$\Leftrightarrow 14-x^3 \geq 8-12x+6x^2-x^3$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-1 \leq 0 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $x^2-2x-1=0$, PT (1) tương đương với

$$\begin{cases} x^2-2x-1=0 \\ \sqrt[3]{14-x^3}=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{cases}$$

Cách 2. Đặt $u=2-x$, $v=\sqrt{x^2-2x-1}$ ($v \geq 0$),

ta có $u^3-6v^2=14-x^3$. Khi đó PT (1) có dạng

$$\sqrt[3]{u^3-6v^2}=u+2v \Leftrightarrow u^3-6v^2=(u+2v)^3$$

$$\Leftrightarrow v(v^2+3(u+v)^2+3v)=0.$$

Xảy ra các trường hợp sau:

• $v=0$, khi đó $x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \pm \sqrt{2}$ (thỏa mãn (1)).

• $v^2+3(u+v)^2+3v=0 \Leftrightarrow u=v=0$ (do $v \geq 0$).

Dẫn đến $\begin{cases} 2-x=0 \\ x^2-2x-1=0 \end{cases}$ Hệ này vô nghiệm.

Vậy PT (1) có hai nghiệm là $1+\sqrt{2}$ và $1-\sqrt{2}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có nhiều bạn tham gia giải bài và đa số cho kết quả đúng. Một số bạn biến đổi quá phức tạp và mắc sai lầm khi xét từ (1) và (3) suy ra $x^2 - 2x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$ rồi kết luận luôn đó là nghiệm (mà quên không thử có thỏa mãn (1) hay không)

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Đặng Việt Trung, 9A10, THCS Giảng Võ; **Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Dũng, 7A, THCS Hàn Thuyên, Vũ Phương Thu, 7A, THCS Từ Sơn; **Ngô Quang Quân,** 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Thủy Dương, 7A, THCS Vĩnh Tường, Phạm Mỹ Linh, Nguyễn Thế Bảo, 8A1, THCS Yên Lạc; **Thái Bình:** Nguyễn Yên Chi, 9A6, THCS Lương Thế Vinh; **Thanh Hóa:** Mai Thu Phương, 7C, THCS Lý Thường Kiệt, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Thắng, Nguyễn Văn Hoàng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Khánh Hòa:** Vũ Ngọc Dương, 8/6, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Nguyễn Đình Luận,** 9/1, THCS Mai Xuân Thưởng, Vĩnh Hải, Nha Trang; **Quảng Nam:** Huỳnh Thị Diệu Linh, 8/4, THCS Lương Thế Vinh, Tam Thành, Phù Ninh; **Bạc Liêu:** Trần Quang Minh, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu; **Quảng Trị:** Nguyễn Hữu Ánh, 9I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/374.** Giả sử ABC là tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi I, D, E là chân các đường cao lần lượt hạ từ A, B, C xuống các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng chu vi tam giác IDE không đổi khi A, B, C thay đổi trên đường tròn $(O; R)$ sao cho diện tích của tam giác ABC luôn bằng a^2 .

Lời giải. Tứ giác $BCDE$ nội tiếp (do $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$)
 nên $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$.

Kéo dài AO cắt đường tròn $(O; R)$ tại A' . Ta có

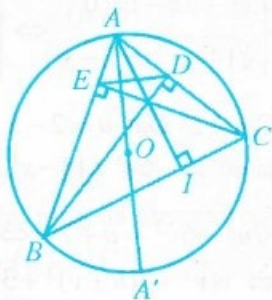
$$\widehat{EAO} + \widehat{AED} = \widehat{BAA'} + \widehat{ACB} \\ = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BA'} + \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BA} = 90^\circ.$$

Từ đó suy ra $AO \perp DE$, do đó

$$S_{AEOD} = \frac{1}{2} AO \cdot DE = \frac{1}{2} R \cdot DE.$$

Tương tự, ta cũng có

$$S_{BEOI} = \frac{1}{2} R \cdot EI, S_{CDOI} = \frac{1}{2} R \cdot ID.$$



$$\text{Vậy } S_{ABC} = S_{AEOD} + S_{BEOI} + S_{CDOI} \\ = \frac{1}{2} R (DE + EI + ID) \\ \Rightarrow DE + EI + ID = \frac{2S_{ABC}}{R} = \frac{2a^2}{R},$$

hay chu vi tam giác DEI không đổi (bằng $\frac{2a^2}{R}$). ◻

◀ **Nhận xét.** 1) Có ít bạn gửi lời giải cho bài toán này nhưng các bạn giải theo rất nhiều cách. Cách giải trên có lẽ là đẹp hơn cả. Các bạn **Thái Bảo Luật** và **Trần Thị Tuyết Kha**, 7B, THCS Nguyễn Tất Thành, **Phú Yên** đưa ra lời giải khác khá ngắn gọn, dựa vào định lý sin trong tam các tam giác BEI và ABC để có

$$EI = BH \cdot \sin \widehat{ABC} = BH \cdot \frac{AC}{2R} \\ = \frac{(BD - HD)AC}{2R} = \frac{S_{ABC} - S_{HAC}}{R}$$

(trong đó H là trực tâm của ΔABC), từ đó cũng suy ra kết quả như trên.

2) Ngoài các bạn **Luật** và **Kha**, các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn:

Phú Yên: Lê Cao Thăng, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu và Nguyễn Phước Thịnh, 9I, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa; **Hải Dương:** Nguyễn Thị Thanh Yên, 9A₂, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Thắng, 9B, Nguyễn Văn Cường, 6D và Nguyễn Văn Hoàng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Hồ Tấn Vũ, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Thái Bình:** Lê Hà Phương, 9A₆, THCS Lương Thế Vinh.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/374.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{y - 2} + y^2 \\ \sqrt{y^2 + 91} = \sqrt{x - 2} + x^2 \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 2, y \geq 2$.

Dễ thấy $x = y = 2$ không là nghiệm của HPT đã cho. Với $x > 2$ và $y > 2$, trừ theo vế phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai trong hệ và sử

dụng hệ thức $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, ta được

$$\sqrt{x^2 + 91} - \sqrt{y^2 + 91} = \sqrt{y - 2} - \sqrt{x - 2} + y^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 91} + \sqrt{y^2 + 91}}$$

$$= \frac{y - x}{\sqrt{y - 2} + \sqrt{x - 2}} + (y - x)(y + x)$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}} + \frac{1}{\sqrt{y-2}+\sqrt{x-2}} + x+y \right) = 0.$$

$\Leftrightarrow x-y=0$ hay $x=y$ (do thừa số thứ hai luôn dương với $x>2$ và $y>2$).

Thay $x=y$ vào một trong hai phương trình của hệ, ta được

$$\sqrt{x^2+91} = \sqrt{x-2} + x^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+91} - 10 = \sqrt{x-2} - 1 + x^2 - 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10} = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + (x-3)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} - \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - x-3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left((x+3) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+91}+10} - 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} \right) = 0.$$

$\Leftrightarrow x-3=0$ hay $x=3$ (do thừa số thứ hai luôn âm với $x>2$).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=y=3$. $\square$

Nhận xét. 1) Có thể chứng minh $x=y$ bằng cách khác như sau: Vì vai trò của x, y như nhau nên có thể giả thiết $x \geq y \geq 2$. Giả sử $x > y$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+91} > \sqrt{y^2+91} \Rightarrow \sqrt{y-2} + y^2 > \sqrt{x-2} + x^2;$$

từ đó dễ dàng suy ra $y > x$; mâu thuẫn. Vậy $x=y$.

Có thể giải phương trình $\sqrt{x^2+91} = \sqrt{x-2} + x^2$ bằng cách chứng tỏ phương trình không thỏa mãn trong mỗi trường hợp $x < 3$, $x > 3$. Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Nguyễn Thế Bảo, Phạm Mỹ Linh, 8A1, Nguyễn Mạnh Hùng, Đỗ Công Huân, 9A1, THCS Yên Lạc, Hà Quang Nhân, 8B, THCS Như Thủy, Lập Thạch; **Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Dũng, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, Nguyễn Thị Hương Lý, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Thanh Hoá:** Mai Tuấn Châu, 9A, THCS Nga Hải, Nga Sơn; **Nam Định:** Phùng mạnh Linh, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định; **Quảng Trị:** Nguyễn Đình Thành Công, 8C, THCS Triệu Trạch, Triệu Phong; **Phú Yên:** Lê Cao Thắng, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T7/374.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $4(a+b+c) - 9 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = (a + \sqrt{a^2+1})^b (b + \sqrt{b^2+1})^c (c + \sqrt{c^2+1})^a.$$

Lời giải. Ta có

$$\ln S = b \ln(a + \sqrt{a^2+1}) + c \ln(b + \sqrt{b^2+1}) + a \ln(c + \sqrt{c^2+1}).$$

Xét hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x > 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}$. Vậy tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số (1) tại điểm $\left(\frac{3}{4}; \ln 2\right)$ có PT là $y = \frac{4}{5}x + \ln 2 - \frac{3}{5}$ (d)

Lại có $f''(x) = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0, \forall x > 0$,

nên đồ thị (C) lõm trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) nằm phía trên đồ thị (C). Suy ra

$$\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \leq \frac{4}{5}x + \ln 2 - \frac{3}{5}, \forall x > 0.$$

Áp dụng BĐT này cho số dương a ta được

$$\begin{aligned} \ln(a + \sqrt{a^2+1}) &\leq \frac{4}{5}a + \ln 2 - \frac{3}{5} \\ \Rightarrow b \ln(a + \sqrt{a^2+1}) &\leq \frac{4}{5}ab + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)b. \end{aligned}$$

Tương tự có

$$\begin{aligned} c \ln(b + \sqrt{b^2+1}) &\leq \frac{4}{5}bc + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)c; \\ a \ln(c + \sqrt{c^2+1}) &\leq \frac{4}{5}ca + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)a. \end{aligned}$$

Cộng theo vế ba BĐT trên, ta được

$$\begin{aligned} \ln S &\leq \frac{4}{5}(ab+bc+ca) + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)(a+b+c). \\ &\leq \frac{4(a+b+c)^2}{5 \cdot 3} + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)(a+b+c) = \frac{9}{4} \ln 2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{3}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là $4\sqrt[4]{2}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Chỉ có hai bạn cho lời giải đúng, đó là các bạn Nguyễn Sơn Tùng, 12A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì, Hà Nội và Phạm Văn Cảnh, 12 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định. Cả hai bạn đều sử dụng BĐT Jensen cho hàm $f(x)$ với đồ thị lồi:

$$f\left(\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n r_i f(x_i), \text{ với } \sum_{i=1}^n r_i = 1, r_i > 0.$$

Áp dụng BĐT trên cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ta cũng nhận được kết quả $S_{\max} = 4\sqrt{2}$.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T8/374.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , ngoại tiếp đường tròn tâm I và góc AIO bằng 90° . Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC nhỏ hơn $\frac{3\sqrt{3}}{4} AI^2$.

Lời giải. Giả sử R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp tam giác ABC ($BC = a, AC = b, AB = c$). Từ giả thiết bài toán $\widehat{AIO} = 90^\circ$, suy ra $OI^2 = R^2 - AI^2$.

Theo hệ thức Euler, ta có $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (xem THPT số 376, tháng 10 năm 2008).

Vì vậy $AI^2 = 2Rr$ (1)

$$\text{Lại vì } S_{ABC} = \frac{abc}{4R} = \frac{(a+b+c)r}{2}, \text{ nên}$$

$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{2Rr} \quad (2)$$

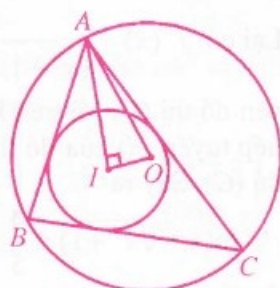
Từ (1) và (2) thu được $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{AI^2}$

$$\Rightarrow \frac{\sin A}{bc \cdot \sin A} + \frac{\sin B}{ac \cdot \sin B} + \frac{\sin C}{ab \cdot \sin C} = \frac{1}{AI^2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{2S_{ABC}}{AI^2} = \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

Lưu ý đến điều kiện $\widehat{AIO} = 90^\circ$, ta thấy dấu đẳng thức ở (3) không xảy ra.

$$\text{Vậy } S_{ABC} < \frac{3\sqrt{3}}{4} AI^2. \quad \square$$



◀ **Nhận xét.** Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng và trình bày tương tự như trên. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Hà Nội: Vũ Đình Long, 10A1 Toán, Trần Minh Vương, 10A2 Toán, Nguyễn Doãn Tiến Đạt, 11A2 Toán, Trần Nhật Tân, 12A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, Mai Anh Bằng, 10 Toán, Đỗ Vũ Thạch, 10T1, khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Phạm Duy Long, 11T1, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Thuận, 10A10, Kim Đình Sơn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Vũ Thanh Tú, 12A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Nghệ An:** Lê Hồng Thái, Nguyễn Thanh Tú, Đinh Đức Vinh, Nguyễn Thị Hồng Thủy, 11A1, Nguyễn Văn Việt, 11A2, khối THPT chuyên ĐH Vinh, Tăng Văn Bình, Doãn Văn Hùng, Đậu Thế Vũ, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Lê Trọng Hiền, 11A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; **Thừa Thiên – Huế:** Lê Chí Tâm, 11 Toán, THPT Quốc học Huế, TP. Huế; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyên, 10A7, THPT Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bến Tre:** Lê Phúc Lữ, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre, TX. Bến Tre; **Vĩnh Long:** Huỳnh Minh Tuấn, 12T2, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T9/374.** Cho a, b, n là những số nguyên dương, $b > 1$ và a chia hết cho $b^n - 1$. Chứng minh rằng khi biểu diễn số a trong hệ cơ số b thì được số chứa ít nhất n chữ số khác 0.

Lời giải. (Theo bạn Lưu Văn Đan, 11A1, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội).

Gọi $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{N}^* \mid a : b^n - 1\}$. Giả sử $s(a)$ là số chữ số khác 0 của $a \in \mathcal{A}$ trong biểu diễn cơ số b . Đặt $s = \min s(a)$ và $\mathcal{H} = \{a \in \mathcal{A} : s(a) = s\}$. Trong tập $\mathcal{H}$ ta chọn số A có tổng các chữ số trong biểu diễn cơ số b là bé nhất.

Giả sử $A = \sum_{i=1}^s a_i b^{n_i}$ với $n_1 > n_2 > \dots > n_s$ và $a_i \in \{1, 2, \dots, b-1\}$.

Ta chứng minh $n_i \not\equiv n_j \pmod{n}$ với $i \neq j$. Thật vậy giả sử $n_i \equiv n_j \pmod{n}$ (với $1 \leq i < j \leq s$). Đặt $r \equiv n_i \equiv n_j \pmod{n}$ ($0 \leq r < n-1$). Xét số $B = A - a_i b^{n_i} - a_j b^{n_j} + (a_i + a_j) b^{n_i+r}$.

Ta có

$$A - B = a_i(b^{n_i} - b^{n_i+r}) + a_j(b^{n_j} - b^{n_j+r}) : b^n - 1.$$

Do đó $B \in \mathcal{A}$.

• Nếu $a_i + a_j \leq b - 1$ thì số chữ số của B là $s - 1$ mâu thuẫn với cách chọn.

• Nếu $b \leq a_i + a_j < 2b$. Đặt $a_i + a_j = b + q$ ($0 \leq q < b$). Khi đó B có biểu diễn

$$B = b^{m_1+r+1} + qb^{m_1+r} + a_1b^{n_1} + \dots + a_{i-1}b^{n_{i-1}} + a_{i+1}b^{n_{i+1}} + \dots + a_{j-1}b^{n_{j-1}} + a_{j+1}b^{n_{j+1}} + \dots + a_sb^{n_s}.$$

Khi đó tổng các chữ số của B là

$$\sum_{i=1}^s a_i - (a_i + a_j) + 1 + q = \sum_{i=1}^s a_i + 1 - b < \sum_{i=1}^s a_i.$$

Điều này trái với cách chọn A . Vậy $n_i \equiv n_j \pmod{n}$ ($i \neq j$). Từ đó phải có $s \leq n$. Ta chứng minh $s = n$.

Thật vậy giả sử $s < n$. Đặt $n_i \equiv r_i \pmod{n}$ với

$$i = 1, \dots, s). \text{ Xét số } C = \sum_{i=1}^s a_i b^{r_i}. \text{ Ta có}$$

$$A - C = \sum_{i=1}^s a_i (b_i^{n_i} - b_i^{r_i}) : b^n - 1, \text{ do đó } C \in \mathcal{A}.$$

Mặt khác do $0 < a_i \leq b - 1$, $s \leq n - 1$ nên

$$0 < C \leq (b - 1)b + (b - 1)b^2 + \dots + (b - 1)b^{n-1} = b^n - b < b^n - 1. \text{ Mâu thuẫn.}$$

Vậy $s = n$. Bài toán được chứng minh. $\square$

◀ **Nhận xét.** Mặc dù đây là một bài toán tương đối khó nhưng có nhiều bạn tham gia giải và có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Phùng Quốc Anh, 12A1, THPT Ngô Gia Tự; **Hà Nội:** Trần Nhật Tân, 12T, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nghệ An:** Lê Hồng Thái, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh; **Thừa Thiên - Huế:** Võ Thành Văn, 12 Toán, khối chuyên ĐHKH Huế; **Đà Nẵng:** Lê Văn Tấn Quyển, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Bình Định:** Lê Hoàng Tín, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/374.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $0 < z \leq y \leq x \leq 8$ và

$$3x + 4y \geq \max \left\{ xy; \frac{1}{2}xyz - 8z \right\}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = x^5 + y^5 + z^5.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\frac{8}{x} \geq 1$, $3x + 4y \geq xy$

$$\Rightarrow \frac{8}{x} + \frac{6}{y} \geq 2, \quad 3x + 4y \geq \frac{1}{2}xyz - 8z \quad (1)$$

$$\text{Suy ra } \frac{8}{x} \cdot \frac{6}{y} + \frac{6}{y} \cdot \frac{3}{z} + \frac{3}{z} \cdot \frac{8}{x} \geq 3.$$

$$\text{Để cho gọn, ta kí hiệu } a = \frac{8}{x}, b = \frac{6}{y}, c = \frac{3}{z}.$$

Khi đó $ab + bc + ca \geq 3$. Biến đổi

$$\begin{aligned} 8^5 + 6^5 + 3^5 &= x^5 \cdot a^5 + y^5 \cdot b^5 + z^5 \cdot c^5 \\ &= x^5 \cdot a^5 + y^5(a^5 + b^5 - a^5) + z^5(a^5 + b^5 + c^5 - a^5 - b^5) \\ &= (x^5 - y^5)a^5 + (y^5 - z^5)(a^5 + b^5) + z^5(a^5 + b^5 + c^5) \quad (2) \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho năm số thực dương, kết hợp với (1) ta nhận được

$$(a^5 + 4) + (b^5 + 4) \geq 5\sqrt[5]{a^5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} + 5\sqrt[5]{b^5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 5(a + b) \geq 10 \Rightarrow a^5 + b^5 \geq 2.$$

$$a^5 + b^5 + 3 \geq 5\sqrt[5]{a^5 \cdot b^5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 5ab.$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự } b^5 + c^5 + 3 &\geq 5bc, \quad c^5 + a^5 + 3 \geq 5ca \\ \Rightarrow (a^5 + b^5 + 3) + (b^5 + c^5 + 3) + (c^5 + a^5 + 3) \\ &\geq 5(ab + bc + ca) \geq 15 \Rightarrow a^5 + b^5 + c^5 \geq 3. \end{aligned}$$

Do đó, từ (2), kết hợp với giả thiết $x \geq y \geq z > 0$ ta nhận được

$$\begin{aligned} 40787 &= 8^5 + 6^5 + 3^5 \\ &\geq (x^5 - y^5) \cdot 1 + (y^5 - z^5) \cdot 2 + z^5 \cdot 3 = x^5 + y^5 + z^5. \\ x^5 + y^5 + z^5 &= 40787 \text{ khi và chỉ khi } a = b = c = 1 \\ \Leftrightarrow x &= 8, y = 6, z = 3. \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^5 + y^5 + z^5$ bằng 40787. $\square$

◀ **Nhận xét.** Phép biến đổi (2) được gọi là *phép biến đổi Abel*. Nhiều bạn học sinh đã sử dụng thành thạo kĩ năng này. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Lý Duy Cương, Lê Anh Chúc, Nguyễn Thị Thủy Hằng, Nguyễn Mạnh Quân, Lê Tuấn Tú, Nguyễn Ngọc Trung, 10A1, Nguyễn Thị Hương Thảo, 12A4, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Hà Thành Trung, 10T1, khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; Nguyễn Văn Quý, 10A1, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Bình Định:** Huỳnh Kim Linh, 11T, THPT chuyên

Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T11/374.** *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau:*

$$f(f(x)+y^2) = f^2(x) - f(x)f(y) + xy + x \quad (1)$$

Lời giải. (Theo ý của đa số các bạn)

Từ (1) thay y bởi $-y$ ta được

$$f(f(x)+(-y)^2) = f^2(x) - f(x)f(-y) + x(-y) + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Kết hợp (1) với (2), suy ra

$$2xy = f(x)(f(y) - f(-y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Thay $x = y = -1$ vào (1), ta thu được

$$f(f(-1)+1) = f^2(-1) - f(-1)f(-1) + 1 - 1 = 0. \quad (4)$$

Tiếp tục thay $x = f(-1) + 1$ vào (3), ta nhận được

$$2(f(-1)+1)y = f(f(-1)+1)(f(y) - f(-y)) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra } f(-1) = -1.$$

Tiếp tục thay $x = -1, y = 0$ vào (1), ta nhận được

$$f(0) = f(-1) = -1 \quad (5)$$

Tiếp theo, thay $x = 0, y = -1$ vào (1), ta nhận được

$$f(0) = 1 + f(-1) = 0 \quad (6)$$

Ta thấy (5) và (6) mâu thuẫn với nhau, suy ra không tồn tại hàm số thỏa mãn (1). $\square$

◀ **Nhận xét.** Đây là một bài toán chứa đựng kỹ năng tính toán các giá trị phù hợp để xác định hàm số. Một số bạn đã có nhận xét rằng nếu thay giả thiết (1) bởi điều kiện

$$f(f(x)+y^2) = f^2(y) - f(x)f(y) + xy + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, (*)$$

thì tồn tại duy nhất một hàm số $f(x) \equiv x$ thỏa mãn (*).

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Nguyễn Mạnh Quân, 10A1, THPT Chuyên Vinh Phúc; **Hà Nội:** Phạm Mạnh Quý, 11AToán, THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, Hà Thành Trung, 10T, THPT Chuyên Toán Tin, ĐHSP Hà Nội; **Hà Nam:** Trần Trung Kiên, 11T THPT Chuyên Hà Nam; **Nam Định:** Đinh Xuân Lộc, Trần Vũ Trung, Phạm Văn Cảnh, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Ninh Bình:** Lương Văn Thiện, 11T, THPT Chuyên Lương Văn Tụy; **Hải Dương:** Vũ Minh Hải, 10T, THPT Chuyên Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** Nguyễn Thanh Tú, 11A1, THPT Chuyên, Đại học Vinh; **TP. Hồ Chí**

Minh: Bùi Văn Minh, 11CT, THPT Chuyên Lê Hồng Phong; **Bình Định:** Nguyễn Hoàng Vi, Đặng Văn Dế, Phạm Thị Mỹ Hào, 11T, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phan Duy, 12A2, THPT Chuyên Nguyễn Du, Châu Đức; **Bến Tre:** Lê Phúc Lữ, 12T, THPT Chuyên Bến Tre; **Kiên Giang:** Vũ Đại Nghĩa, 11T, THPT Chuyên Huỳnh Mãn Đạt, Rạch Giá; **Vĩnh Long:** Nguyễn Hiếu Triệu Vỹ, 11T, THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Ngãi:** Bùi Anh Vũ, 11T, THPT Chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/374.** *Xét tứ giác $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau ở K và $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$; $AC = AB + AD$. Chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABK, ADK bằng nhau.*

Lời giải. (Theo bạn Trần Tuấn Anh, 11A1, THPT Thuận Thành 1, Bắc Ninh)

Gọi O là trung điểm của AC . Dễ thấy tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O , đường kính AC .

Trên AC lấy các điểm E, F sao cho $AE = AB$; $AF = AD$. Từ giả thiết $AC = AB + AD$, dễ thấy $OE = OF$.

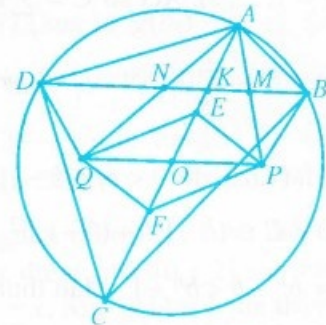
Lấy M thuộc đoạn KB sao cho AM là phân giác của góc $\widehat{KAB}$ (1)

Lấy P thuộc tia AM sao cho $OP \parallel BD$. Lấy Q trên tia đối của tia OP sao cho $OQ = OP$.

Dễ thấy $BPQD$ là hình thang cân; $EPFQ$ là hình bình hành. Suy ra $DQ = BP = EP = FQ$. Do đó các tam giác ADQ, AFQ bằng nhau (c.c.c).

Từ đó AQ là phân giác của góc $\widehat{KAD}$ (2)

Gọi N là giao điểm của AQ và KD . Theo định lí Thales có $\frac{KM}{OP} = \frac{KN}{OQ}$. Từ đó, với chú ý rằng $OP = OQ$, suy ra $KM = KN$ (3)



Từ (1), (2) và (3), theo tính chất của đường phân giác, ta có

$$\frac{KA \cdot KB}{KA + AB} = \frac{KA \cdot KD}{KA + AD} \Rightarrow \frac{KB}{KD} = \frac{KA + AB}{KA + AD}$$

$$\Rightarrow \frac{KB}{KD} = \frac{KA + AB + KB}{KD + AD + KD} \quad (4)$$

Gọi $S_1, S_2; p_1, p_2; r_1, r_2$ theo thứ tự là diện tích, nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp của các tam giác AKB, AKD .

Từ (4) suy ra $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2p_1}{2p_2} \Rightarrow \frac{p_1 \cdot r_1}{p_2 \cdot r_2} = \frac{2p_1}{2p_2}$

$\Rightarrow r_1 = r_2$ (đpcm). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này và đa số các bạn cho lời giải đúng. Ngoài lời giải hình học của bạn **Tuấn Anh**, bạn **Trần Vũ Trung**, 11T, THPT Lê Hồng Phong, **Nam Định** cũng có một lời giải hình học khác khá hay. Các lời giải còn lại đều sử dụng phương pháp lượng giác.

2) Bài toán trên được suy ra từ bài toán thứ vị sau đây:

Các đường phân giác AA', BB', CC' của tam giác ABC đồng quy tại I . Chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác IBA', ICA' bằng nhau khi và chỉ

khi hoặc $AB = AC$ hoặc $\sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1$.

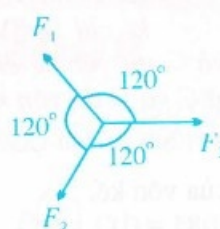
3) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Lưu Xuân Khôi, 11T, THPT chuyên Thái Nguyên; **Hà Nội:** Đào Trọng Anh, 11A₄, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên, Nguyễn Văn Hiếu, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TP. Hà Đông, Vũ Minh Thắng, 11T1, Đỗ Vũ Thạch, 10T1, khối THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Hải Phòng:** Vũ Văn Tuấn, 12A2, THPT Vĩnh Bảo; **Nghe An:** Nguyễn An Tịnh, 11A, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Vĩnh Long:** Nguyễn Hiếu Triệu, 11TT, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Kiên Giang:** Vũ Đại Nghĩa, 11I, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP Rạch Giá; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Hưng, 11T, THPT chuyên Lê Khiết.

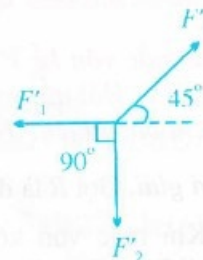
NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/374.** Ba sợi dây cao su, một đầu được nối với nhau, còn đầu kia được kéo chậm ra theo các hướng khác nhau (h. 1). Tại một thời điểm nào đó, độ dài của ba dây bằng nhau và bằng $L_1 = 20\text{cm}$. Sau đó các dây được kéo dần dưới các góc khác nhau (h. 2). Trong trường hợp sau, độ dài của ba dây bằng nhau và bằng $L_2 = 30\text{cm}$. Biết rằng độ

dài tự nhiên của dây dài nhất bằng $l_1 = 15\text{cm}$. Hãy tìm độ dài tự nhiên của hai dây kia và tỉ số độ cứng của các dây. Coi các dây cao su tuân theo định luật Húc.



Hình 1



Hình 2

Lời giải

• Trong trường hợp đầu (Hình 1): Xét sự cân bằng của điểm nối ba dây: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$.

Do góc giữa các sợi dây đôi một bằng 120° nên $F_1 = F_2 = F_3$ hay

$$k_1(L_1 - l_1) = k_2(L_1 - l_2) = k_3(L_1 - l_3) \quad (1)$$

• Trong trường hợp sau (Hình 2): Khi điểm nút cân bằng $\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \vec{F}'_3 = \vec{0}$.

Chiếu phương trình này lên hệ trục Oxy với Oy cùng phương với lực F_3 ta được

$$k_1(L_2 - l_1) = k_2(L_2 - l_2) \quad (2)$$

$$\sqrt{2}k_1(L_2 - l_1) = k_3(L_2 - l_3) \quad (3)$$

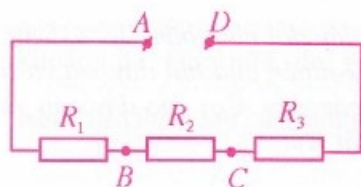
Giải hệ gồm phương trình (1), (2) và (3) ta được $l_1 = l_2 = 10,8\text{cm}$; $l_3 = 15\text{cm}$; $k_3 : k_2 : k_1 = 1,78 : 1 : 1$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng và ngắn gọn:

Bắc Giang: Nguyễn Hoàng Hiệp, 12 Toán, THPT Chuyên; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Nguyên, 12A1, THPT Kê Sặt, Bình Giang; **Thanh Hoá:** Phạm Văn Tuấn, 12A THPT Mai Anh Tuấn, Nga Sơn; **Nghe An:** Nguyễn Duy Mạnh, 10A1, THPT Quỳnh Lưu 1, Dương Tuấn Anh, 10 Toán, khối THPT Chuyên ĐH Vinh; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Ngọc Duy, 11 Lí, THPT Chuyên Lê Khiết; **Đắk Lắk:** Trương Công Thành, 12T1, THPT Ngô Gia Tự, EaKar.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/374.** Một đoạn mạch điện AD có hiệu điện thế U_{AD} không đổi và có ba điện trở R_1, R_2, R_3 mắc nối tiếp với $R_1 = r, R_2 = 2r$.



$R_3 = 3r$. Nếu mắc hai cực của một vôn kế V vào A và B thì vôn kế chỉ $10,8V$;

nếu mắc vôn kế V vào B và C thì vôn kế chỉ $20,79V$. Hỏi nếu mắc V vào C và D thì vôn kế V chỉ bao nhiêu? Hãy tính U_{AD} .

Lời giải. Gọi R là điện trở của vôn kế.

- Khi mắc vôn kế vào A và B , mạch gồm: $(R // R_1) + R_2 + R_3$.

Điện trở toàn mạch trong trường hợp này là

$$R_{tm1} = \frac{Rr}{R+r} + 2r + 3r = \frac{6Rr + 5r^2}{R+r} \quad (1)$$

- Khi mắc vôn kế vào B và C , mạch gồm: $R_1 + (R // R_2) + R_3$.

Điện trở toàn mạch trong trường hợp này là

$$R_{tm2} = r + \frac{2Rr}{R+2r} + 3r = \frac{6Rr + 8r^2}{R+2r} \quad (2)$$

- Khi mắc vôn kế vào C và D , mạch gồm: $R_1 + R_2 + (R // R_3)$.

Điện trở toàn mạch trong trường hợp này là

$$R_{tm3} = r + 2r + \frac{3Rr}{3r+R} = \frac{6Rr + 9r^2}{3r+R} \quad (3)$$

Gọi $R_{td1}, R_{td2}, R_{td3}$ là các điện trở tương đương của điện trở vôn kế với các điện trở R_1, R_2, R_3 tương ứng, khi đó

$$R_{td1} = \frac{Rr}{R+r}; \quad R_{td2} = \frac{2Rr}{R+2r}; \quad R_{td3} = \frac{3Rr}{R+3r}$$

Ta có

$$\frac{U_{AD}}{U_{AB}} = \frac{R_{tm1}}{R_{td1}} = \frac{6Rr + 5r^2}{Rr} = 6 + \frac{5r}{R} \quad (4)$$

$$\frac{U_{AD}}{U_{BC}} = \frac{R_{tm2}}{R_{td2}} = \frac{6Rr + 8r^2}{2Rr} = 3 + \frac{4r}{R} \quad (5)$$

$$\frac{U_{AD}}{U_{CD}} = \frac{R_{tm3}}{R_{td3}} = \frac{6Rr + 9r^2}{3Rr} = 2 + \frac{3r}{R} \quad (6)$$

Chia (4) cho (5) ta được

$$\frac{U_{BC}}{U_{AB}} = \frac{6 + \frac{5r}{R}}{3 + \frac{4r}{R}} = \frac{20,79}{10,8}; \text{ rút ra } R = 12r.$$

Từ (4) suy ra

$$U_{AD} = U_{AB} \left(6 + \frac{5r}{R} \right) = 10,8 \left(6 + \frac{5}{12} \right) = 69,3 V.$$

Từ (6) suy ra

$$U_{CD} = \frac{U_{AD}}{2 + \frac{3r}{R}} = \frac{69,3}{2 + 0,25} = 30,8 V.$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Vũ Quang Minh, 10Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** Dương Văn Thanh, Nguyễn Thiện Dũng, 10A2, Tạ Hữu Công, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, Nguyễn Huy Hoàng, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Nguyễn Sơn Tùng, 12A2, THPT Ngô Quyền, Ba Vì, Lê Viết Lan Hương, 10A1, THPT Lương Văn Can; **Hà Nam:** Phan Thanh Hải, 12A1, THPT Kim Bảng B; **Nam Định:** Nguyễn Trung Hiếu, 12A8, THPT Trần Hưng Đạo; **Thái Bình:** Nguyễn Khương Duy, 12A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hoá:** Mai Chí Đạt, 11E, THPT Hà Trung, Lê Thanh Minh, 11B12, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa; **Nghệ An:** Lê Tùng Sơn, Bùi Duy Thiện, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Quang Dũng, 12A1, THPT Nam Đàn I, Nguyễn Duy Mạnh, 10A1, THPT Quỳnh Lưu I, Nguyễn Trung Thành, A5K41, Nguyễn Thị Bích Ngọc, A3K41, khối THPT chuyên Đại học Vinh; **Đắk Lắk:** Đặng Công Bằng, 10Lí, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Long An:** Trần Thủy Anh, 11A, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** Huỳnh Vĩnh Sang, 12A1, THPT Thị xã Sa Đéc; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Ngọc Duy, 11Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN VĂN THUẬN

CÁC BẠN NHỚ ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ QUÝ I NĂM 2009 TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T8/378. Let (O) be a circle centered at O and fixed diameter AB . Let Δ be a straight line which touches (O) at A . Choose a point M on the circle (O) , different from A and B . The tangent line with (O) through M meets Δ at C . Let (I) be the circle through M and touches Δ at C . Let CD be the diameter of (I) . Prove that

- 1) DOC is an isosceles triangle.
- 2) The line through D and perpendicular to BC always passes through a fixed point when M moves on the circle (O) .

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/378. Does there exist a sequence of positive integers

$a_{2003} > a_{2002} > \dots > a_2 > a_1$ with $a_1 = 2003$ such that the following two conditions are satisfied:

1) All integers in the interval $(2003; a_{2003})$ are either a member of this sequence or a non-prime.

2) $A = \frac{2004}{a_1} + \frac{2004}{a_2} + \dots + \frac{2004}{a_{2003}}$ is an integer?

T10/378. Find all continuous functions f, g, h on $\mathbb{R}$ such that $f(x+y) = g(x) + h(y)$ for all real numbers x, y .

T11/378. Let H and O denote the orthocenter and circumcenter respectively of a triangle ABC . Prove the inequality

$$3R - 2OH \leq HA + HB + HC \leq 3R + OH,$$

where R is its circumradius.

T12/378. Let $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ be a cubic whose side is a . Let N, M be two points on AB_1 and BC_1 respectively such that the angle between MN and the plane $(ABCD)$ is 60° . Prove that $MN \geq 2a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. When does equality occur?

Translated by LE MINH HA

Sách mới

45 ĐỀ THI TOÁN CHỌN LỌC CẤP TRUNG HỌC CƠ SỞ (2005-2008)

Nội dung cuốn sách gồm ba phần:

- Phần một: Giới thiệu các dạng toán cơ bản thường gặp.
- Phần hai: Tuyển chọn 45 đề thi (gồm các đề thi vào lớp 10 và đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9) của các tỉnh, thành phố từ năm 2005 đến năm 2008.
- Phần ba: Hướng dẫn giải các đề thi.
Sách dày 180 trang, khổ 17 x 24cm.
Giá bán lẻ: 29.500 đồng.

Các bạn có thể mua các ấn phẩm của THPT tại Tòa soạn, các sở sở bưu điện, các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương, các cửa hàng sách của NXB Giáo dục. Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI.

Để biết thêm chi tiết xin liên hệ với Tòa soạn:

ĐT - FAX: 04.35121606. Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

ĐÓNG TẬP TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ NĂM 2008

Tất cả 12 số tạp chí Toán học và Tuổi trẻ của năm 2008 được đóng thành tập bìa cứng, mạ chữ vàng. Đây là cách để lưu giữ tạp chí tốt nhất, có hệ thống và tiện tra cứu đối với các thư viện, các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán. Sách được phát hành đầu năm 2009. Số lượng sách có hạn, bạn muốn có trọn bộ THPT năm 2008 hãy liên hệ ngay với Tòa soạn.

Giá bán lẻ 82.000 đồng.



Số π - THÔNG điệp bí hiểm của người ngoài hành tinh?

Người ngoài hành tinh gửi tín hiệu đến người trên Trái Đất bằng những hình tròn xuất hiện một cách bí hiểm trên cánh đồng nước Anh? Phải chăng thông điệp đó là số π (3,1459...), - tỉ số độ dài đường tròn và đường kính của nó?

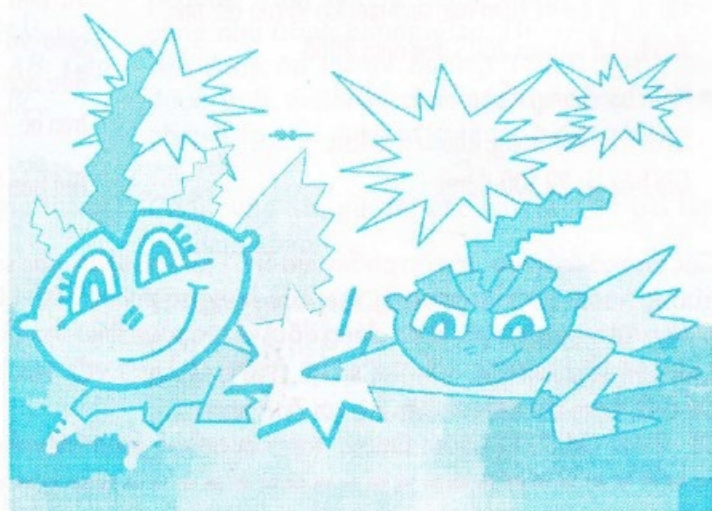
Một hiện tượng kì lạ làm xôn xao toàn thế giới: đầu tháng 6 này trên cánh đồng lúa mì ở Barbury Castle xuất hiện hình tròn kì dị giống với những hình tròn thường thấy trong thời kì này hàng năm, nhưng to hơn nhiều. Đó là hình tròn có đường kính hơn 45 mét được phát hiện trên đồi Wiltshire do Lucy Pringle chụp từ trên không. Pringle là người đã liên tục từ 10 năm nay chụp ảnh các hình tròn từ trên không (xem trên site <lucypringle.co.uk>). Hình tròn lớn này nằm bên cạnh những hình khác mới bắt đầu xuất hiện từ tháng 6 năm nay. Kì lạ nhất là một đường xoáy tròn ốc hội tụ vào tâm, bị cắt từng đoạn bằng những vạch giao nhau ở tâm hình tròn. Những hình tròn trên cánh đồng này

do ai tạo ra? nét vẽ nói lên điều gì? Nhà vật lí thiên văn về hưu Mike Reed đã thử "bật mí" bí mật của những hình tròn đó.

Giải mã những hình tròn bí ẩn ở Wiltshire

Nếu hoàn chỉnh nốt hình tròn bằng cách kẻ những bán kính qua các vạch thì bí mật được lộ ra: đó là số 3,14159654, là chín số đầu của π sau khi làm tròn đến số thập phân thứ 8. Theo Reed, hình tròn nhỏ nhất bên phải tâm của hình biểu thị cho dấu phẩy của số π . Phần bí mật còn lại được các nhà toán học phát hiện dễ dàng. Cần nhắc lại π là số vô tỉ (không thể biểu diễn thành phân số), hơn nữa là số siêu việt (không thể là nghiệm của phương trình Đại số). Do đó không thể cầu phương hình tròn, tức là không thể dùng thước và compa để dựng hình vuông có diện tích bằng hình tròn.

Vùng Wiltshire bị các hình tròn quái dị này ám ảnh từ "thời kì đá lớn" nổi tiếng Stonehenge (công trình xây bằng đá lớn). Rất nhiều hình tròn đã được tìm thấy ở vùng này: năm 1991 có hình vẽ một fractal (một hình được vẽ theo một quy luật nhất quán) của Benoit Mandelbrot; năm 1996 là hình tròn của Julia Set; năm 1997 là những hình tròn của Koch. Các nhà toán học và vật lí biết rõ các hình đó, do những tính chất đặc biệt của chúng. Cách đó không xa, ở Milk Hill, "hình tròn mẹ" lớn nhất được phát hiện năm 2001. Đó là một



hình xoáy tròn ốc rất đẹp gồm 400 hình tròn kích cỡ khác nhau trải dài trên một diện tích 90000 mét vuông... Những hình đó được Lucy Pringle kiên nhẫn sắp xếp lại để phát hiện xem có cái gì bí hiểm bên trong. Có nhà khoa học đặt giả thiết rằng có những kẻ nghịch ngợm ban đêm đi gặt rồi bày ra chuyện này để "khuấy đảo dư luận" chơi. Cũng có thể, nhưng chắc chắn họ không thể là tác giả của những hình phức tạp đến mức như vậy, lại được xếp rất mỹ thuật trong một và chỉ một đêm trời tối đen. Nếu quan sát kỹ cánh đồng, sẽ thấy hiện tượng kỳ lạ: những bông lúa chưa cắt ra được sắp xếp theo hình tròn ốc; thân cây lúa bị biến dạng khác thường; không khí có hiện tượng ion hóa; trên mặt đất có những hình cầu siêu nhỏ bằng sắt; xung quanh không có dấu vết chân người. Những hình đẹp nhất thường xuất hiện vào mùa hè, từ tháng 6 đến tháng 7 trên những vùng hoang vắng nhất nước Anh, những vùng còn di tích của những nền văn minh tiền sử, với những bức vẽ hình con ngựa to lớn trên đồi, những gò đồi xây bằng những tảng đá lớn lấy từ nơi cách xa hàng trăm kilômét, không biết đem đến bằng cách nào để làm lăng, mộ, toàn cảnh tạo thành những hình tròn bí hiểm mà cho đến nay người ta cũng chưa hiểu hết ý nghĩa của chúng.

Hướng dẫn tìm số π TRÊN HÌNH TRÒN BÍ ẨN

Hình tròn được chia thành 16 hình quạt bằng cách kẻ các bán kính qua các vạch. Từ vạch "bắt đầu" đi ngược chiều kim đồng hồ qua ba miền cùng màu, suy ra π có phần nguyên là 3. Dấu chấm biểu thị cho dấu phẩy (.). Tiếp tục đi, Số miền cùng màu trước khi gặp vạch mới là các chữ số tiếp theo trong phần thập phân của số π . Ba hình tròn cuối chỉ sự chấm dứt của cách biểu diễn số π .

PHAN THANH QUANG
(TP. Hồ Chí Minh)

(Theo *Courier International* số 15/10/2008)

TIN TỨC

HỘI NGHỊ QUỐC TẾ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT ỨNG DỤNG (CAPS 2008)

Hội nghị Quốc tế về Xác suất Thống kê và Ứng dụng lần thứ nhất đã được tổ chức tại Hà Nội vào năm 1999. Tiếp nối hội nghị đó, Hội nghị Quốc tế về Thống kê và Xác suất Ứng dụng (CAPS 2008) đã được tổ chức tại Viện Toán học Việt Nam, từ ngày 1 – 3/12/2008 nhằm động viên các hoạt động ứng dụng thực tế của Thống kê và Xác suất, đặc biệt là các ứng dụng trong công nghiệp và kinh doanh, đồng thời tăng cường các mối quan hệ hợp tác quốc tế giữa các nhà nghiên cứu trong lĩnh vực này.

Các báo cáo của Hội nghị bao gồm các chủ đề về Xác suất ứng dụng và các hướng nghiên cứu của Thống kê: *Đánh giá độ chuẩn xác – Điều khiển quá trình Thống kê – Định giá và khoanh vùng tài sản phát sinh – Hội nhập thị trường và rủi ro thế chấp – Khai phá dữ liệu – Kỹ thuật chọn mẫu – Mô hình hóa thống kê – Phân tích số liệu theo dõi dọc – Quản trị danh mục đầu tư – Sáu - sigma – Sinh trắc – Thiết kế thí nghiệm – Thống kê Bayes – Thống kê phi tham số – Thống kê sinh học – Thống kê tính toán và đồ thị – Thống kê trong hóa học.*

Trước đó, vào các ngày 24 – 28/11/2008 Trường Đông và Thống kê ứng dụng do một số chuyên gia hàng đầu trong lĩnh vực này giảng dạy cho các sinh viên, học viên cao học, nghiên cứu sinh đã được tiến hành kèm theo chương trình Hội nghị.

LÊ MAI

(Nguồn: <http://diendantoanhoc.net>)



Đề thi Olympic Toán TOÀN LIÊN BANG NGÀ 2008 DÀNH CHO LỚP 10

Câu 1. Tồn tại hay không 14 số nguyên dương, sao cho khi tăng mỗi số thêm 1 đơn vị thì tích của chúng tăng gấp 2008 lần?

Câu 2. Các cột của một bảng $n \times n$ được gán nhãn từ số 1 đến số n . Các số $1, 2, \dots, n$ được xếp trong bảng sao cho các số trong mỗi hàng và mỗi cột là khác nhau từng đôi. Ta gọi một ô của bảng là ô tốt nếu số trong ô đó lớn hơn số của cột chứa nó. Với giá trị nào của n thì ta có thể sắp xếp các số trong bảng sao cho các hàng có số ô tốt bằng nhau.

Câu 3. Một đường tròn ω tâm O tiếp xúc với các tia của góc BAC tại B và C . Q là một điểm nằm trong góc BAC . Điểm P nằm trên đoạn AQ sao cho $AQ \perp OP$. Đường thẳng OP cắt đường tròn ngoại tiếp ω_1 và ω_2 của các tam giác BPQ và CPQ theo thứ tự tại các điểm M và N (M và N không trùng với P). Chứng minh rằng $OM = ON$.

Câu 4. Cho các dãy số $(a_n), (b_n)$ được xác định bởi $a_1 = 1, b_1 = 2$ và

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$$

Chứng minh rằng $a_{2008} < 5$.

Câu 5. Tìm tất cả các bộ ba số thực x, y, z sao cho

$$1 + x^4 \leq 2(y - z)^2, \quad 1 + y^4 \leq 2(z - x)^2,$$

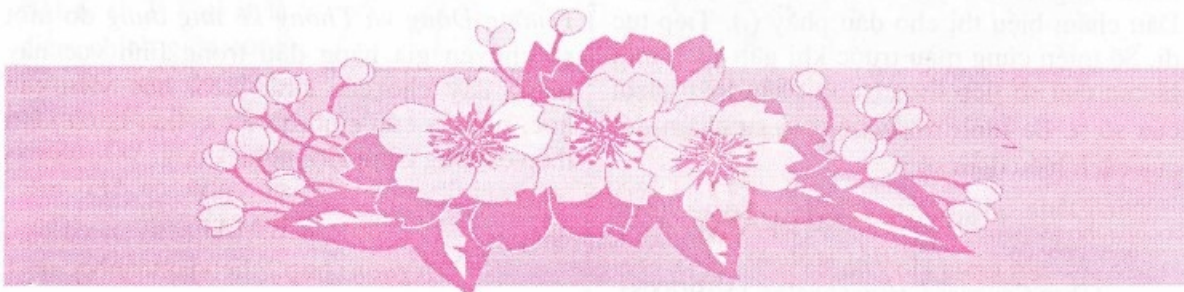
$$1 + z^4 \leq 2(x - y)^2.$$

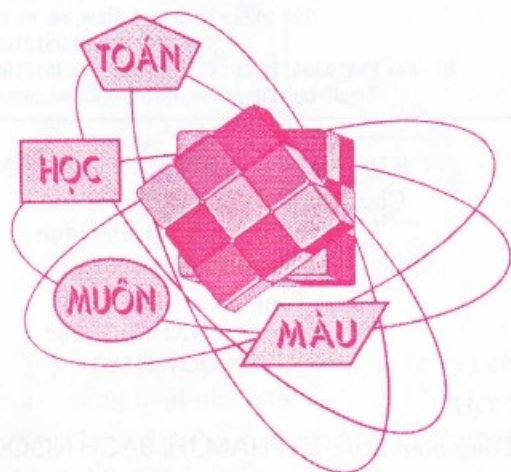
Câu 6. Cho tam giác không cân ABC có hai đường cao AA_1 và CC_1 cắt nhau tại H , O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và B_0 là trung điểm của cạnh AC . Đường thẳng BO cắt cạnh AC tại P , hai đường thẳng BH và A_1C_1 cắt nhau tại Q . Chứng minh rằng

$$HB_0 \parallel PQ.$$

Câu 7. Với số tự nhiên $n > 1$ nào thì tồn tại các số tự nhiên $b_1, b_2, \dots, b_n$ không bằng nhau tất cả sao cho số $(b_1 + k)(b_2 + k) \dots (b_n + k)$ là lũy thừa của một số tự nhiên, với mỗi số tự nhiên k ? (Số mũ có thể phụ thuộc vào k , nhưng phải lớn hơn 1).

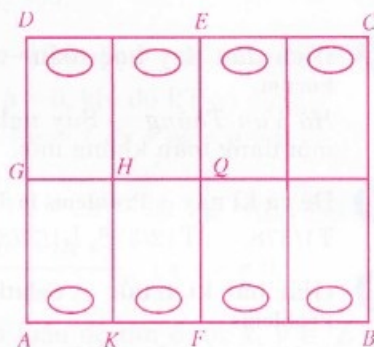
Câu 8. Trên mặt phẳng tọa độ vẽ một số hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ. Giả sử bất kì hai hình chữ nhật nào cũng có thể cắt bởi một đường nằm ngang hoặc một đường thẳng đứng. Chứng tỏ rằng có thể vẽ một đường nằm ngang và một đường thẳng đứng sao cho mỗi hình chữ nhật bị cắt bởi ít nhất một trong hai đường thẳng trên.



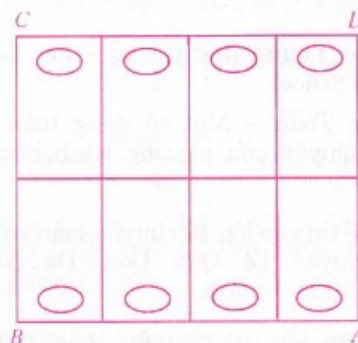


Để in một quyển sách có $16(n + 1)$ trang ruột người ta thường xếp từng bộ 16 trang in trên hai mặt của tờ giấy hình chữ nhật, trong đó số trang (từ $16k + 1, 16k + 2, \dots$ đến trang $16k + 16$ với k thuộc tập hợp $\{0, 1, 2, \dots, n\}$) được ghi ở vị trí các hình bầu dục như ở hình 1 và hình 2. Khi gấp các tờ giấy đó một số lần ta được *một tay sách* gồm 16 trang in, sau đấy khâu các *tay sách* theo thứ tự k từ 0 đến n rồi cắt xén các mép phía ngoài gáy sách thì được ruột quyển sách. Dưới đây để tiện lập luận ta chỉ xét *một tay sách* từ trang 1 đến trang 16 (ứng với $k = 0$).

SẮP XẾP CÁC trang sách ĐỂ IN



Hình 1. Mặt trên



Hình 2. Mặt dưới

Quá trình gấp tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ được thực hiện theo ba thao tác sau (xem hình 1):

- 1) Gấp đôi tờ giấy $ABCD$ theo đường thẳng EF từ phải sang trái để BC trùng với AD .
- 2) Gấp đôi tờ giấy $ADEF$ theo đường thẳng GQ từ trên xuống dưới để DE trùng với AF .
- 3) Gấp đôi tờ giấy $AGQF$ theo đường thẳng HK từ trái sang phải để AG trùng với FQ .

Sau lần gấp cuối cùng theo gáy HK thì số trang nhìn thấy là trang 1 và các trang tiếp theo được ghi theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

DÀNH CHO BẠN ĐỌC

- 1) Tìm mối liên hệ giữa các số trang của cùng một mặt tờ giấy, của hai mặt tờ giấy $ABCD$ (h. 1 và h.2).
- 2) Từ đó hãy rút ra quy tắc điền số trang trên hai mặt của tờ giấy $ABCD$.

PHI PHI

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 378(12.2008)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35144272, 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,

TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,

PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,

TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,

GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY,

GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School

Cao Ngọc Toán – Một số dạng toán tìm nghiệm nguyên của phương trình bậc hai hai ẩn.

3 Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên toán trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, năm học 2008 – 2009.

4 Đề thi vào lớp 10 chuyên toán trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, năm học 2008 – 2009.

5 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation

Nguyễn Thanh Cảnh – Về bài toán thiết lập phương trình đường thẳng.

7 Nguyễn Khắc Minh – Lời giải và bình luận các bài thi toán chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2008.

11 Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contributions

Hoàng Đức Nguyên – Ứng dụng của một đẳng thức.

14 Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum

Hà Văn Thắng – Suy nghĩ không cũ về một dạng toán không mới.

16 Đề ra kì này – Problems in This Issue

T1/378, ..., T12/378, L1/378, L2/378.

18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems

Giải các bài của số 374.

28 Toán học & đời sống – Math and Life

Phan Thanh Quang – Số π – thông điệp bí hiểm của người ngoài hành tinh?

29 Tin tức

Lê Mai – Hội nghị Quốc tế Thống kê và Xác suất ứng dụng (CAPS 2008)

30 Nhìn ra thế giới – Around the World

Đề thi Olympic Toán toàn Liên bang Nga 2008 dành cho lớp 10.

31 Toán học muôn màu – Multifarious

Bìa 3. Câu lạc bộ - Math Club

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.

Trĩ sự, phát hành : HOÀNG THÀNH ĐỨC, VŨ ANH THU

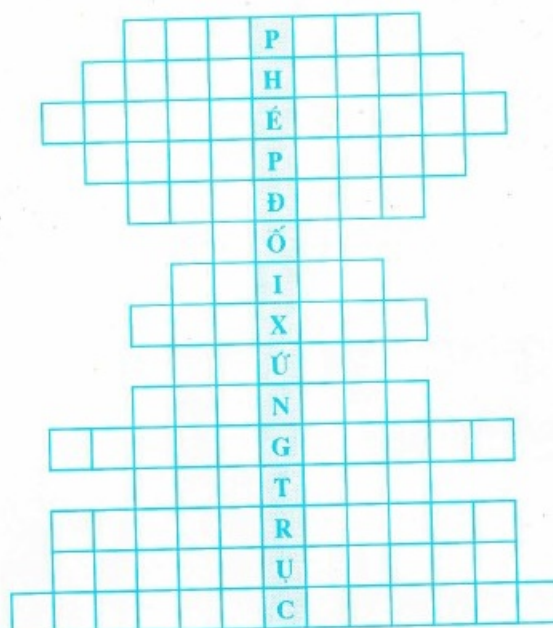
Mĩ thuật : MINH THO

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



Ô chữ DẠNG ĐỐI XỨNG

Bạn hãy tìm các thuật ngữ toán học để điền vào các dòng của ô chữ bên sao cho mỗi ô có đúng một chữ và nếu thuật ngữ có nhiều từ ghép thì các từ được viết liên tiếp (không để ô trống). Bạn càng giỏi hơn khi tìm ra nhiều thuật ngữ khác nhau cho mỗi dòng.



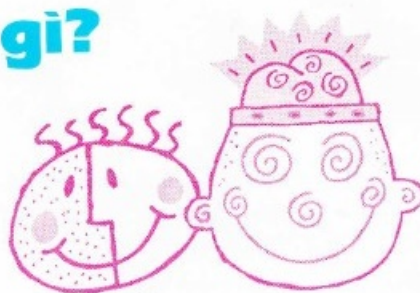
Giải đáp: Mặt có nghĩa gì?

(Đề đăng trên THPT số 375 tháng 9.2008)

Từ mặt có các nghĩa đen và nghĩa bóng như sau

1. Phần thấy phía trước của đầu người hoặc con thú, có thể kèm theo tính từ để chỉ sự xấu đẹp, già trẻ, ...
(Mặt trái xoan, Mặt vuông chữ điền; Đầu trâu mặt ngựa; Mặt hoa da phấn; Mặt búng ra sữa; Mặt mày lem luốc; Mặt mũi khô ngo;...)
2. Chỉ một phần tương đối phẳng ở phía ngoài của một vật, một khối chất lỏng, ...
(Mặt bàn; Mặt giấy; Mặt cân; Mặt phải và mặt trái của tấm vải; Mặt nước; Mặt bằng của nhà xưởng;...)
3. Chỉ phần không gian ở một phía đối với một người, một vật
(Mặt phố; Mặt trước ngôi nhà; Ba mặt giáp biển; Bị bao vây bốn mặt;...)
4. Một loại hàng hóa
(Mặt hàng nông sản; Mặt hàng xuất khẩu;...)
5. Một khía cạnh, một phương diện của vấn đề đang xét
(Mặt nội dung và mặt hình thức; Mặt tích cực và mặt tiêu cực; Mặt trái của kinh tế thị trường; Quán xuyên mọi mặt;...)
6. Mức độ chung của lĩnh vực cần ước lượng
(Mặt bằng giá cả; Mặt bằng thu nhập;...)

7. Những nét trên mặt người, thường đi kèm tính từ để biểu thị thái độ, tâm tư, tình cảm của người đó



- (Tay bắt mặt mừng; Mặt lạnh như tiền; Mặt dày mày dạn; Mặt sứa gan lìm; Mặt rắn như sành; Mặt ngán tò te; Đỏ mặt tía tai;...)
8. Biểu trưng cho thể diện, danh dự của con người
(Ngượng mặt; Nói cho rát mặt; Lên mặt dạy đời; Khinh người ra mặt; Vuốt mặt không nể mũi; Chọn mặt gửi vàng; Cháy nhà ra mặt chuột; Trông mặt mà bắt hình dong;...)
 9. Đại diện cho một người hoặc nhiều người của một tập thể, thường đi kèm động từ chỉ sự có mặt hay vắng mặt
(Họp mặt; Thay mặt cho...; Xa mặt cách lòng; Mất mặt mất mặt; Ba mặt một lời; Mặt đối mặt;...)

Các bạn sau đã chỉ ra nhiều ý nghĩa của từ Mặt và có nhiều thí dụ minh họa:

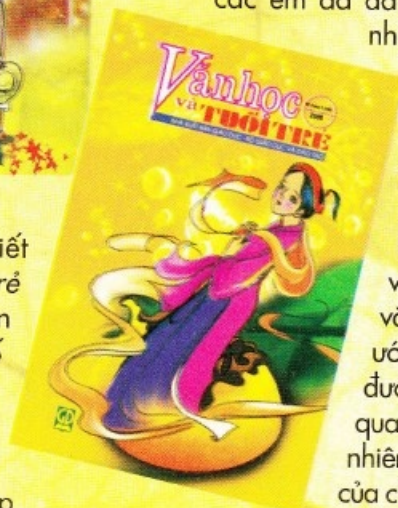
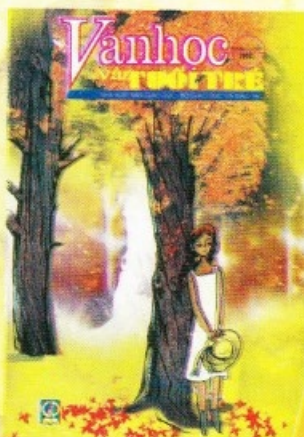
Tổng Xuân Thành, T1 Toán, THPT chuyên Lương Văn Tuy, Ninh Bình;
Bùi Thanh Long, 8B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Thanh Hóa;
Lê Hoàng Tín, T1T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định.

VÂN KHANH

✧ Nhân kỉ niệm 15 năm Tạp chí Văn học và Tuổi trẻ (1993 - 2008) ✧

Có một diễn đàn dạy - học Ngữ văn BÊN CẠNH DIỄN ĐÀN DẠY - HỌC TOÁN

◆ THU HÀ



không chỉ phù hợp với lứa tuổi chúng tôi mà còn phù hợp với nhu cầu và thị hiếu của giới trẻ.

Nhận thấy tính thiết thực, bổ ích của VH&TT, tôi đã luôn nhắc các em học sinh tìm đọc VH&TT. Đọc bài viết của các nhà văn, nhà nghiên cứu, các nhà giáo có kinh nghiệm như: Nguyễn An, Tạ Duy Anh, Trần Đình Sử, Nguyễn Đăng Mạnh, Chu Văn Sơn,...

các em đã dần nâng cao hiểu biết, cảm nhận được cái hay, cái đẹp trong

mỗi tác phẩm mà mình học. Nội dung Tạp chí đã

hỗ trợ cho các em những gì trong giờ Ngữ văn chúng tôi

giảng còn khiếm khuyết. Với học sinh, VH&TT còn là một

vườn ươm cho những mầm non văn học, chắp cánh cho những

ước mơ vươn xa của tuổi trẻ học đường. Điều đó được thể hiện

qua những bài viết tươi tắn, hồn nhiên cũng không kém phần tinh tế

của chính các em học sinh trên mỗi số Tạp chí.

Là người thường xuyên đọc và nghiên cứu, tôi nhận thấy trước sự tác động của nền kinh tế thị trường, khá nhiều sách, báo, tạp chí hiện nay bị thương mại hoá. Thật khác biệt, VH&TT vẫn luôn giữ vững phong độ, hơn thế, ngày càng thiết thực và hấp dẫn.

Được biết, năm 2008, Tạp chí VH&TT vừa tròn 15 tuổi. Mượn diễn đàn *Toán học và Tuổi trẻ*, bạn đọc chúng tôi xin được gửi đến Tạp chí lời chúc mừng và lời biết ơn sâu sắc nhất. Chúc tờ Tạp chí của chúng ta luôn có những đổi mới về nội dung và hình thức để đáp ứng được nhu cầu ngày càng cao của bạn đọc.

Mãi đến năm 2004 tôi mới được biết đến *Tạp chí Văn học và Tuổi trẻ* (VH&TT). Đó là điều mà cho đến tận bây giờ tôi vẫn còn cảm thấy tiếc. Tôi đã cố gắng tìm mua lại những số Tạp chí cũ nhưng cũng chỉ thêm được vài cuốn.

Là giáo viên dạy Ngữ văn lâu năm, vậy mà nhiều lúc đọc các bài viết của đồng nghiệp trên Tạp chí tôi cũng giật mình bởi kĩ năng giảng dạy các nội dung kiến thức cụ thể trong SGK Ngữ văn mà họ đưa ra thật sáng tạo. Trong những buổi họp chuyên môn, nhóm giáo viên chúng tôi thường xuyên trao đổi về nội dung của bài mới đăng trong các số Tạp chí. Cũng nhờ có VH&TT, giáo viên trong Tổ Văn chúng tôi đã gần gũi nhau hơn. Quan trọng hơn cả là qua những buổi trao đổi ấy, nhóm giáo viên chúng tôi có cơ hội bổ sung và hoàn thiện kiến thức cho nhau, để mỗi giờ lên lớp hiệu quả hơn. Hiện nay, trường tôi đang là một trong những trường đứng đầu về phong trào đọc VH&TT.

Về hình thức, VH&TT đã tìm được phong cách trình bày hấp dẫn, trẻ trung giàu chất văn chương

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT12M8

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2008

Giá : 6000 đồng

Sáu nghìn đồng