



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
10 2008
Số 376

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 45

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trại sự: (04) 35144272, (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre



Kết quả cuộc thi vui
GIẢI TRÍ NGÀY HÈ



TRƯỜNG HỌC TRỰC TUYẾN SỐ 1



DÀNH CHO HỌC SINH VIỆT NAM

www.truongtructuyen.vn



Giải pháp đã đạt **giải nhất** cuộc thi Nhân tài đất Việt 2007

trong lĩnh vực CNTT do Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bộ Khoa học Công nghệ, Bộ Thông tin Truyền thông đồng tổ chức.



Ông Nguyễn Thiện Nhân
(Phó Thủ Tướng Bộ trưởng Bộ GD&ĐT) cùng
lãnh đạo Đảng và nhà nước trong cuộc thi
Nhân tài đất Việt



Ông Trương Tấn Sang (Ủy viên Bộ Chính
Trị, thường trực ban Bí thư TW Đảng) trao
giải Nhất Nhân tài đất Việt cho giải pháp
"Học trực tuyến và thi trực tuyến nhằm
nâng cao chất lượng đào tạo"

CƠ VẤN VÀ XÂY DỰNG NỘI DUNG

Nội dung của www.truongtructuyen.vn được cơ vấn và xây dựng bởi trường Đại học Sư Phạm Hà Nội, các thầy cô khối chuyên trường Đại học Sư Phạm Hà Nội và các thầy cô giỏi trên toàn quốc như:

- Thầy Trương khối THPT chuyên trường Đại học Sư Phạm Hà Nội.
- Thầy Phụ trách bộ môn Ngữ văn khối chuyên trường Đại học Sư Phạm Hà Nội
- Thầy Trưởng bộ môn Toán, Vật Lí trường THPT Chu Văn An.
- Các thầy cô giỏi trường Amsterdam, THPT chuyên Lam Sơn...



CUỘC THI: "TÀI NĂNG TOÁN HỌC KHỐI TRUNG HỌC CƠ SỞ NĂM 2008"

Chương trình đặc biệt dành cho các em học sinh
Tổ chức vào ngày **15** hàng tháng

100.000.000 VNĐ tổng giá trị giải thưởng

- + Bắt đầu từ **15-10-2008**. Tổng kết vào tháng **15-5-2009**.
- + Giải thưởng tháng với nhiều phần quà hấp dẫn.
- + Được vinh danh trên các kênh của truongtructuyen.vn
- + Thẻ lệ đăng kí xem tại truongtructuyen.vn.



Chương trình ôn thi vào lớp 10

Môn Toán
(dành cho hệ chuyên và hệ đại trà)



Thầy Nguyễn Sơn Hà

Thầy Nguyễn Sơn Hà
giáo viên chuyên Toán Khối THPT
chuyên ĐHSP Hà Nội

Tham gia bồi dưỡng đội tuyển toán
Việt Nam đi thi Olympic Quốc tế

ĐỂ BIẾT THÊM THÔNG TIN CHI TIẾT XIN MỜI CÁC BẠN VÀO WEBSITE WWW.TRUONGTRUCTUYEN.VN
ĐIỆN THOẠI HỖ TRỢ: (04) 2466 775



Sử dụng đẳng thức để chứng minh bất đẳng thức

VÕ QUỐC BÁ CẦN

(SV K32, lớp YY0647 A1, ĐHY Dược Cần Thơ)

Hiện nay, có rất nhiều phương pháp chứng minh bất đẳng thức (BĐT), nhưng để có một lời giải đẹp và đơn giản thì không dễ gì thực hiện được. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu với bạn đọc một kĩ thuật chứng minh bất đẳng thức với những lời giải thực sự đẹp và ấn tượng: *chứng minh bất đẳng thức nhờ sử dụng các đẳng thức*. Dưới đây là các thí dụ.

★ **Thí dụ 1.** Cho các số thực x, y ($x + y \neq 0$).

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2$.

Lời giải. Đặt $z = -\frac{1+xy}{x+y}$ ta có $xy + yz + zx = -1$

và BĐT đã cho trở thành
 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx)$
 $\Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Vậy BĐT được chứng minh. $\square$

★ **Thí dụ 2.** Cho các số thực phân biệt a, b, c .
 Chứng minh rằng

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Ta có hệ thức

$$\frac{1+ab}{a-b} \cdot \frac{1+bc}{b-c} + \frac{1+bc}{b-c} \cdot \frac{1+ca}{c-a} + \frac{1+ca}{c-a} \cdot \frac{1+ab}{a-b} = 1.$$

Mặt khác, ta có $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Dẫn đến

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+ab}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{1+bc}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{1+ca}{c-a}\right)^2 \\ & \geq \frac{1+ab}{a-b} \cdot \frac{1+bc}{b-c} + \frac{1+bc}{b-c} \cdot \frac{1+ca}{c-a} + \frac{1+ca}{c-a} \cdot \frac{1+ab}{a-b} = 1. \end{aligned}$$

Lại có

$$\frac{1-ab}{a-b} \cdot \frac{1-bc}{b-c} + \frac{1-bc}{b-c} \cdot \frac{1-ca}{c-a} + \frac{1-ca}{c-a} \cdot \frac{1-ab}{a-b} = -1.$$

Từ $x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx)$ dẫn đến

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-ab}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{1-bc}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{1-ca}{c-a}\right)^2 \\ & \geq -2 \left(\frac{1-ab}{a-b} \cdot \frac{1-bc}{b-c} + \frac{1-bc}{b-c} \cdot \frac{1-ca}{c-a} + \frac{1-ca}{c-a} \cdot \frac{1-ab}{a-b} \right) = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } & \frac{2(1+a^2b^2)}{(a-b)^2} + \frac{2(1+b^2c^2)}{(b-c)^2} + \frac{2(1+c^2a^2)}{(c-a)^2} \\ & = \frac{(1+ab)^2 + (1-ab)^2}{(a-b)^2} + \frac{(1+bc)^2 + (1-bc)^2}{(b-c)^2} + \frac{(1+ca)^2 + (1-ca)^2}{(c-a)^2} \\ & = \left(\left(\frac{1+ab}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{1+bc}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{1+ca}{c-a}\right)^2 \right) \\ & + \left(\left(\frac{1-ab}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{1-bc}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{1-ca}{c-a}\right)^2 \right) \geq 3. \quad \square \end{aligned}$$

★ **Thí dụ 3.** Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(a+1)^2} + \frac{b}{(b+1)^2} + \frac{c}{(c+1)^2} - \frac{4}{(a+1)(b+1)(c+1)} \leq \frac{1}{4}.$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{1-a}{1+a}, y = \frac{1-b}{1+b}, z = \frac{1-c}{1+c}$, suy ra

$$-1 < x, y, z < 1, \quad a = \frac{1-x}{1+x}, \quad b = \frac{1-y}{1+y}, \quad c = \frac{1-z}{1+z}.$$

Dễ thấy $(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$,
 dẫn đến $x + y + z + xyz = 0$.

$$\text{Mặt khác } \frac{4a}{(a+1)^2} = 1 - x^2, \quad \frac{2}{a+1} = 1 + x,$$

nên BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & 1 - x^2 + 1 - y^2 + 1 - z^2 \leq 1 + 2(1+x)(1+y)(1+z) \\ & \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) + 2(x + y + z + xyz) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}. \quad \square \end{aligned}$$

★ **Thí dụ 4.** Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 1.$$

Lời giải. Đặt tương tự như thí dụ 3, ta có BĐT cần chứng minh tương đương với

$$(1+x)^2 + (1+y)^2 + (1+z)^2 + (1+x)(1+y)(1+z) \geq 4 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 \geq 4xyz.$$

Sử dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} + 2\sqrt{z^2x^2y^2z^2} \\ \geq 4\sqrt{x^4y^4z^4} = 4|xyz| \geq 4xyz. \quad \square$$

★ **Thí dụ 5.** Cho các số thực phân biệt a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+bc+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+ca+a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

Lời giải. Ta có

$$a^2+ab+b^2 = \frac{3}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 \\ \text{nên } \frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+bc+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+ca+a^2}{(c-a)^2} \\ = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a} \right)^2 + 1 \right).$$

Mặt khác có (xem Tuyển chọn theo chuyên đề THPT, Quyển 1, trang 12)

$$\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b} = -1.$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a} \right)^2 \\ \geq -2 \left(\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b} \right) = 2.$$

Dẫn đến

$$\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+bc+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+ca+a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{3}{4}(2+1) = \frac{9}{4}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 6.** Cho các số thực phân biệt a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right) \geq \frac{9}{2}.$$

Lời giải. Theo thí dụ 5 ta có

$$\left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a} \right)^2 \geq 2 \\ \Rightarrow \frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)^2} + \frac{2(b^2+c^2)}{(b-c)^2} + \frac{2(c^2+a^2)}{(c-a)^2} \\ = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2+(b-c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2+(c-a)^2}{(c-a)^2} \\ = \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a} \right)^2 + 3 \geq 5.$$

Mặt khác, ta thấy

$$\left(\frac{a}{b-c} + 1 \right) \left(\frac{b}{c-a} + 1 \right) \left(\frac{c}{a-b} + 1 \right) = \left(\frac{a}{b-c} - 1 \right) \left(\frac{b}{c-a} - 1 \right) \left(\frac{c}{a-b} - 1 \right) \\ \Rightarrow \frac{a}{b-c} \cdot \frac{b}{c-a} + \frac{b}{c-a} \cdot \frac{c}{a-b} + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{a}{b-c} = -1 \\ \Rightarrow \left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 \\ \geq -2 \left(\frac{a}{b-c} \cdot \frac{b}{c-a} + \frac{b}{c-a} \cdot \frac{c}{a-b} + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{a}{b-c} \right) = 2.$$

$$\text{Do đó } (a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right) \\ = \left(\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \right) + \left(\left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 \right) \\ \geq \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 7.** Cho các số không âm a, b, c , và không có hai số nào trong chúng đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 + \frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{2a}{b+c}, y = \frac{2b}{c+a}, z = \frac{2c}{a+b}$, ta có

$$x+2 = \frac{2(a+b+c)}{b+c} \Rightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{b+c}{2(a+b+c)}.$$

Làm tương tự với y, z rồi cộng lại ta được

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} = 1 \Rightarrow xy + yz + zx + xyz = 4.$$

Ta phải chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 + 5xyz \geq 8$.

(Xem tiếp trang 5)

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, ĐÀ NẴNG

NĂM HỌC 2008 - 2009

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1. (2 điểm).

a) Chứng minh đẳng thức

$$(2a^2 + a + 1)^2 - 4a(2a + 1) = (2a^2 + a - 1)^2.$$

b) Tìm điều kiện đối với tham số a để phương trình $(2a + 1)x^2 - (2a^2 + a + 1)x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Bài 2. (2 điểm).

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - xy + x - y = 4 \\ 3x^2 - 3xy - 5x + 5y = 4. \end{cases}$$

b) Giải phương trình $x^2 - 5x + 4 = 2\sqrt{x-1}$.

Bài 3. (2 điểm).

a) Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - x - 10 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức

$$P = (2x_1 + 7x_2)^2 + 9(3x_1 - 2x_2)^2 - 577.$$

b) Cho biểu thức

$$P = 21x - 6\sqrt{xy} + 2008y - 9\sqrt{x} + 10.$$

Tìm điều kiện đối với các biến số x và y để biểu thức P có nghĩa. Biểu thức P có giá trị nhỏ nhất không? Tại sao?

Bài 4. (1,5 điểm). Ước chung lớn nhất của các số nguyên x và y (x và y không đồng thời bằng 0) được kí hiệu là (x, y) .

a) Cho bốn số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $b > 0, d > 0, (a, b) = (c, d) = 1$. Chứng minh rằng nếu

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \text{ là một số nguyên thì } b = d.$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ là một số nguyên và } (a, b) = (b, c) = 1.$$

Bài 5. (1 điểm). Cho H là hình vuông có tâm O và độ dài cạnh bằng 1. Tìm số thực dương r để đường tròn $(O; r)$ cắt tất cả các cạnh của H và các giao điểm tạo thành các đỉnh của một hình bát giác đều.

Bài 6. (1,5 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm B, C cố định trên $(O; R)$ thỏa mãn $\widehat{BOC} = 120^\circ$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$, khi M di động trên cung nhỏ BC của đường tròn $(O; R)$ mà $M \neq B$ và $M \neq C$.

NGUYỄN DUY THÁI SƠN, THÁI TRUNG, VÕ HỒNG TIẾN (Đà Nẵng) giới thiệu

THẺ LỆ GỬI BÀI CHO TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

- Bài cần đánh máy hoặc viết tay sạch sẽ, không dập xóa, trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng. Không gửi bản photocopy.
- Bài viết chỉ gửi một lần (nếu đã gửi bưu điện thì không gửi email và ngược lại), trừ khi Tòa soạn yêu cầu tác giả gửi lại. Nếu bài đã chế bản nên gửi kèm file.
- Mỗi bài dài không quá 2000 chữ hoặc không quá 4 trang A4 chế bản vi tính.
- Bài dịch cần gửi kèm bản photocopy bài gốc.
- Mỗi đề ra đều có kèm lời giải và không ghi 2 đề trên cùng 1 tờ giấy.
- Ghi đầy đủ họ và tên thật, số điện thoại, địa chỉ để tiện liên hệ. Mỗi bài chỉ gửi một lần. Bài không đăng không trả lại bản thảo.
- Ảnh tập thể gửi đăng phải là ảnh màu, cỡ nhỏ nhất 9x12. Sau ảnh ghi rõ nội dung ảnh và tên người chụp.
- Đối với bài giải gửi dự thi, mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng. Phía trên bên trái ghi số thứ tự của bài, bên phải ghi rõ họ tên, ngày sinh, trường lớp, địa chỉ gia đình. Bài chỉ gửi về một địa chỉ: *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội. Ngoài phong bì ghi rõ: Dự thi giải toán số tạp chí... Không gửi bài giải của nhiều số tạp chí trong cùng một phong bì. Học sinh THPT không giải bài dành cho THCS. Bài gửi có dán tem.*
- Thời hạn nhận bài giải *Để ra kì này* là hai tháng tính từ cuối tháng ra số tạp chí đó. Các bài giải cho các chuyên mục khác là 1 tháng.
- Bài đã gửi cho TH&TT thì không gửi cho các tạp chí khác.

THTT

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

Năm học 2007 - 2008

(Đề thi đã đăng trên THPT số 371, tháng 5 năm 2008)

Câu 1. • Nếu $x = 0$ thì $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ phương trình.

• Nếu $x \neq 0$ thì khi đó y, z khác 0, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{2} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{6} \\ \frac{z+x}{zx} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \end{cases} \text{ suy ra } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6}.$$

Từ đó $\frac{1}{x} = 1, \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \frac{1}{z} = \frac{1}{3},$

dẫn đến $x=1, y=2, z=3.$

Vậy HPT có hai nghiệm $(x; y; z)$ là $(0; 0; 0); (1; 2; 3).$

Câu 2. Gọi x và y theo thứ tự là số cầu thủ của đội A và đội B ($x, y \in \mathbb{N}^*, y$ lẻ. Số trận đấu là $xy = 4(x+y) \Leftrightarrow (x-4)(y-4) = 16.$

Suy ra $x-4$ và $y-4$ là các ước số của 16. Do y lẻ nên $y-4 = 1$, hay $y = 5$. Từ đó tìm được $x = 20$.

Vậy số cầu thủ của đội A là 20 và số cầu thủ của đội B là 5.

Câu 3. (h. 1)

1) Ta có $\triangle ACM \sim \triangle DCA$ (vì $\widehat{CAM} = \widehat{CDA}$ và $\widehat{ACD}$ chung).

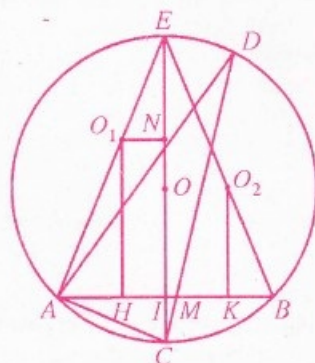
Suy ra

$$\frac{AC}{DC} = \frac{CM}{CA}$$

$$\text{hay } AC^2 = CM \cdot CD.$$

2) Vẽ đường kính

CE. Vì $\widehat{CAM} = \widehat{CDA}$ nên AC là tiếp tuyến tại



Hình 1

A của đường ngoại tiếp $\triangle ADM$. Do $AC \perp AE$, nên tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADM$ nằm trên đường thẳng cố định AE.

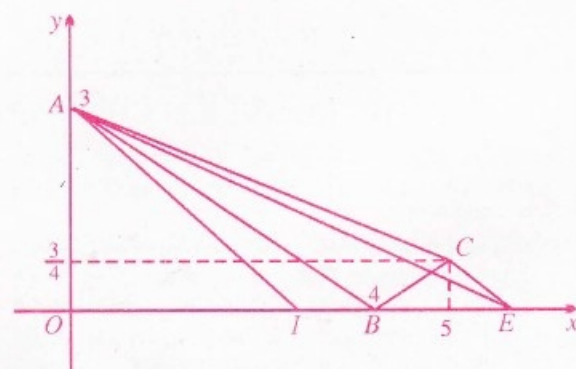
3) Tương tự phần 2, tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDM$ thuộc đường thẳng BE. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADM và BDM. Kẻ $O_1H \perp AB, O_2K \perp AB$. Khi đó H và K lần lượt là trung điểm của AM và MB. Suy ra $R_1 = O_1A$ và $R_2 = O_2B$.

Kẻ $O_1N \perp CE$ thì $O_1N = HI = AI - AH$

$$= \frac{1}{2}(AB - AM) = \frac{1}{2}BM = KB.$$

Vậy $\triangle ENO_1 = \triangle O_2KB \Rightarrow R_2 = O_2B = O_1E$, suy ra $R_1 + R_2 = AE$ (hằng số).

Câu 4. Nối A với B, từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt trục hoành tại E. Gọi I là trung điểm của OE (h. 2). Ta thấy $S_{AOI} = S_{AIE}$, $S_{EAB} = S_{CAB}$ nên $S_{AIE} = S_{AIBC}$. Từ đó AI chính là đường thẳng (d) đi qua A và chia tứ giác AOBC thành hai phần có diện tích bằng nhau.



Hình 2

Ta viết phương trình đường thẳng đi qua A, B. Đường thẳng này có dạng: $y = ax + b$, vì nó đi qua $A(0; 3)$ nên $b = 3$, đi qua $B(4; 0)$, từ đó tính được $a = -\frac{3}{4}$. Đường thẳng đi qua

$C\left(5; \frac{3}{5}\right)$ và song song với AB nên phương

trình có dạng $y = -\frac{3}{4}x + n$. Thay tọa độ C vào

ta có $n = \frac{9}{2}$. Đường thẳng này cắt trục Ox tại

$E(6; 0)$. Vậy trung điểm I của OE có tọa độ $I(3; 0)$. Điều này chứng tỏ I nằm giữa O và B . Đường thẳng (d) đi qua A và I có phương trình là $y = -x + 3$.

Câu 5. Đặt $x^3 = \frac{a}{b}$, $y^3 = \frac{b}{c}$, $z^3 = \frac{c}{a}$. Từ giả thiết suy ra $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0.$$

• Nếu $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ thì $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z \Rightarrow a = b = c$. Do đó $abc = a^3$ là lập phương của một số nguyên.

• Nếu $x + y + z = 0$ thì $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} = 0$.

Nhân hai vế lần lượt với $a\sqrt[3]{b^2c}$ và $b\sqrt[3]{ac^2}$ ta được $a\sqrt[3]{abc} + ab + \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 0$ và

$$\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + b\sqrt[3]{abc} + bc = 0.$$

Trừ theo vế hai hệ thức trên, ta được

$$(a - b)\sqrt[3]{abc} = b(c - a).$$

Nếu $a = b$ thì $a = b = c \Rightarrow x = y = z = 1$ (không thỏa mãn $x + y + z = 0$). Vậy $a \neq b$.

Do đó $abc = \left(\frac{b(c-a)}{a-b}\right)^3$ là lập phương số hữu

tỉ. Nhưng do a, b, c là các số nguyên nên khi đó abc là lập phương của số nguyên.

PHẠM NGỌC QUANG
(Sở GD - ĐT Thanh Hoá) giới thiệu

SỬ DỤNG... (Tiếp trang 2)

Đặt $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$, ta có $q + r = 4$ và bất đẳng thức trở thành

$$p^2 - 2q + 5r \geq 8 \Leftrightarrow p^2 - 7q + 12 \geq 0.$$

• Nếu $p \leq 4$ thì sử dụng BĐT Schur (xem THPT số 348, tháng 6 năm 2006) dạng $x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0$ ta có $r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9} \Rightarrow 4 \geq q + \frac{p(4q-p^2)}{9}$

$$\Leftrightarrow q \leq \frac{p^3+36}{4p+9} \Rightarrow p^2 - 7q + 12 \geq p^2 - \frac{7(p^3+36)}{4p+9} + 12.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$p^2 - \frac{7(p^3+36)}{4p+9} + 12 \geq 0 \Leftrightarrow (p-3)(p^2-16) \leq 0.$$

Điều này đúng vì $4 \geq p \geq \sqrt{3q} \geq 3$.

• Nếu $p \geq 4$, ta có $p^2 \geq 16 \geq 4q$ nên

$$p^2 - 2q + 5r \geq p^2 - 2q \geq \frac{p^2}{2} \geq 8.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. $\square$

Qua các thí dụ trên, hẳn các bạn đã thấy được nhiều điều thú vị từ kĩ thuật khá đơn giản

nhưng hiệu quả này. Hi vọng nó sẽ được phát triển hơn nữa. Cuối cùng, chúng tôi xin nêu ra một số bài tập tự luyện.

Bài 1. Cho các số thực phân biệt a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{(a-2b)^2 + (a-2c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(b-2c)^2 + (b-2a)^2}{(c-a)^2} + \frac{(c-2a)^2 + (c-2b)^2}{(a-b)^2} \geq 22.$$

Bài 2. Cho các số thực phân biệt a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(a-b)^2} + \frac{(1-b^2)(1-c^2)}{(b-c)^2} + \frac{(1-c^2)(1-a^2)}{(c-a)^2} \geq -1.$$

Bài 3. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \geq 3.$$

Bài 4. Cho các số không âm a, b, c không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$



SỬ DỤNG CHIỀU BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ TÌM ĐIỀU KIỆN VỀ SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

THỊNH THỊ BẠCH TUYẾT
(GV trường Dự bị Đại học Dân tộc,
Sầm Sơn, Thanh Hóa)

Khảo sát sự biến thiên của hàm số trên tập xác định của nó giúp ta giải quyết được nhiều bài toán về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương trình. Trong bài viết này, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp khảo sát sự biến thiên của hàm số để giải quyết một lớp bài tập tìm điều kiện về số nghiệm của phương trình thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào đại học, cao đẳng.

DẠNG TOÁN. Tìm m để phương trình $f(x) = m$ có đúng n nghiệm thực.

Cách giải. • Khảo sát và lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.

• Căn cứ vào bảng biến thiên, xác định đáng điệu đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định để suy ra các giá trị của m cần tìm.

Sau đây là một vài thí dụ minh họa.

★ **Thí dụ 1.** Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = m.$$

Lời giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 8$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)}$ trên $[-1; 8]$.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} + \frac{7-2x}{2\sqrt{(1+x)(8-x)}} \\ &= \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\sqrt{8-x}} + \frac{7-2x}{2\sqrt{(1+x)(8-x)}} \\ &= (7-2x) \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{8-x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x})} + \frac{1}{2\sqrt{(1+x)(8-x)}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{8-x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x})} + \frac{1}{2\sqrt{(1+x)(8-x)}} > 0.$$

với mọi $x \in (-1; 8)$.

Do đó, dấu của đạo hàm $f'(x)$ chỉ phụ thuộc vào dấu của nhị thức $7-2x$.

Ta có bảng biến thiên

x	-1	$\frac{7}{2}$	8		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\frac{9}{2} + 3\sqrt{2}$	3		

Từ bảng biến thiên suy ra các giá trị của m cần tìm là $3 \leq m < \frac{9}{2} + 3\sqrt{2}$. □

★ **Thí dụ 2.** Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m.$$

(Đề thi TSĐH khối A năm 2008)

Lời giải. Điều kiện: $0 \leq x \leq 6$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x}$ trên $[0; 6]$. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } u(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}},$$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}, \text{ ta thấy } u(2) = v(2) = 0$$

nên $f'(2) = 0$. Hơn nữa $u(x), v(x)$ cùng dương trên $(0; 2)$ và cùng âm trên $(2; 6)$.

Ta có bảng biến thiên

x	0	2	6	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$3\sqrt{2}+6$	
		$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$		$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra các giá trị của m cần tìm là $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \leq m < 3\sqrt{2}+6$. $\square$

★Thí dụ 3. Tìm m để phương trình

$$\tan^2 x + \cot^2 x + m(\tan x + \cot x) + 3 = 0$$

có nghiệm.

Lời giải. Điều kiện $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đặt $\tan x + \cot x = t$, khi đó $|t| \geq 2$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 + mt + 1 = 0$.

Nhận thấy $t = 0$ không phải là nghiệm của PT trên. Do đó $m = -\frac{(t^2+1)}{t} = -t - \frac{1}{t}$.

Xét hàm $y = -t - \frac{1}{t}$, với $|t| \geq 2$.

Ta thấy $y' = -1 + \frac{1}{t^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -1$.

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
y'		-	0	0	-	
y		$\frac{5}{2}$			$-\frac{5}{2}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy PT đã cho có nghiệm khi $m \geq \frac{5}{2}$ hoặc $m \leq -\frac{5}{2}$. $\square$

Hi vọng rằng bạn đọc sẽ khai thác phương pháp này để giải một số dạng toán khác. Sau đây là một số bài tập dành cho bạn đọc tự luyện tập.

(Xem tiếp trang 15)

Toán học & Đời sống Góc tốt nhất



ĐỂ
BẮN
XA
NHẤT

Muốn bắn đạn súng đại bác đi xa nhất thì góc bắn phải là bao nhiêu? Đáp số cho bài toán cổ điển này là 45° . Điều này đúng cho đạn súng đại bác cũng đúng cho một quả bóng đá, một cái lao và một quả tạ. Tuy nhiên, khi quan sát các nhà thể thao chuyên nghiệp, Nicholas Linthorne và David Everet (news@nature.com; doi: 10.1038/news060123-7, 2006) đã nhận thấy rằng họ ném theo những góc từ 30° đến 35° , như vậy rất xa với đáp số lý thuyết tốt nhất! Phải chăng họ sẽ phải thay đổi cách làm của mình? Không đâu, đáp số trên chỉ đúng khi lực tác động ban đầu là không đổi, trong khi cơ thể của chúng ta được tạo ra để cho tốc độ phóng một vật bằng bàn tay không như nhau theo góc ném. Theo hai nghiên cứu mới đây, kết hợp mô hình sinh - cơ học và những dữ liệu chụp ảnh thì những góc mà các nhà thể thao sử dụng theo kinh nghiệm đúng là những góc có hiệu quả nhất.

NGUYỄN VĂN THIÊM

(Theo La Recherche tháng 4-06)



ỨNG DỤNG CỦA MỘT HỆ THỨC HÌNH HỌC trong tam giác

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

Trong bài báo này chúng tôi xin giới thiệu một số hệ thức hình học, mà với các hệ thức này có thể xác định một cách khá dễ dàng khoảng cách từ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đến một số điểm đặc biệt trong tam giác đó như: trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, điểm Gergone, điểm Naghen, điểm Lemoine. Cũng hi vọng rằng với công thức này các bạn có thể sử dụng nó để giải các bài toán sơ cấp khác nữa.

Để tiện cho việc trình bày, trong tam giác ABC kí hiệu $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$; $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{ACB}$; p là nửa chu vi; còn O và R thứ tự là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp; I và r thứ tự là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp; I_a, I_b, I_c và r_a, r_b, r_c theo thứ tự là các tâm và các bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với các đỉnh A, B, C ; G, H, J, N, L tương ứng là trọng tâm, trực tâm, điểm Gergone, điểm Naghen, điểm Lemoine của tam giác ABC .

I. MỘT SỐ HỆ THỨC CƠ BẢN

Chúng ta đã biết kết quả sau:

Mệnh đề 1. Giả sử M là một điểm nằm trong tam giác ABC . Các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1 . Khi đó ta có hệ thức

$$\frac{MA_1}{AA_1} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{MB_1}{BB_1} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{MC_1}{CC_1} \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad (1)$$

Kết quả này đã được đăng trên tạp chí THPT số 185 (5.1992) (bài T9/182). Nhận thấy rằng hệ thức (1) tương đương với hệ thức

$$\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} \quad (2)$$

Kết quả (2) được khái quát hóa như sau:

Mệnh đề 2. Với M là một điểm bất kì trên mặt phẳng chứa tam giác ABC , tồn tại các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mà $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ sao cho

$$\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB} + \lambda_3 \overrightarrow{OC} \quad (3)$$

Phép chứng minh (3) xin dành cho độc giả.

Từ (3) dẫn đến kết quả sau:

Mệnh đề 3. Giả sử O, R thứ tự là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ; M là một điểm bất kì trong mặt phẳng chứa tam giác; các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ thỏa mãn $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ và $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB} + \lambda_3 \overrightarrow{OC}$.

Khi đó ta có hệ thức:

$$\begin{aligned} OM^2 &= R^2(1 - 4\lambda_1\lambda_2 \sin^2 \widehat{ACB} - 4\lambda_2\lambda_3 \sin^2 \widehat{BAC} \\ &\quad - 4\lambda_3\lambda_1 \sin^2 \widehat{ABC}) \text{ hay là} \\ OM^2 &= R^2 - \lambda_1\lambda_2 c^2 - \lambda_2\lambda_3 a^2 - \lambda_3\lambda_1 b^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Chứng minh. Bình phương vô hướng hai vế của hệ thức (3) ta được

$$\begin{aligned} OM^2 &= (\lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB} + \lambda_3 \overrightarrow{OC})^2 \\ &= (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)R^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\lambda_2\lambda_3 \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &\quad + 2\lambda_3\lambda_1 \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 R^2 - 2R^2 \left((1 - \cos \widehat{AOB})\lambda_1\lambda_2 \right. \\ &\quad \left. + (1 - \cos \widehat{BOC})\lambda_2\lambda_3 + (1 - \cos \widehat{COA})\lambda_3\lambda_1 \right) \\ &= R^2(1 - 4\lambda_1\lambda_2 \sin^2 \widehat{ACB} - 4\lambda_2\lambda_3 \sin^2 \widehat{BAC} \\ &\quad - 4\lambda_3\lambda_1 \sin^2 \widehat{ABC}). \end{aligned}$$

Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC ta có $OM^2 = R^2 - \lambda_1\lambda_2 c^2 - \lambda_2\lambda_3 a^2 - \lambda_3\lambda_1 b^2$. $\square$

Để thiết lập các công thức tính $OG, OH, OI, OI_a, OI_b, OI_c, OJ, ON, OL$ ta cần đến các hệ thức cơ bản trong tam giác ABC dưới đây (các bạn có thể xem chứng như các bài tập).

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R} = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c \quad (4)$$

$$S_{ABC}^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16} \quad (5)$$

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \quad (6)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = \frac{1}{4R^2} (p^2 - (2R+r)^2) \quad (7)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr \quad (8)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr) \quad (9)$$

$$(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) = r(4R+r) \quad (10)$$

$$\frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c} = \frac{4p(R-r)}{r} \quad (11)$$

II. KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP ĐẾN CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC

1. Khoảng cách từ O đến G

Từ hệ thức (*), cho M trùng với G và chọn

$$\lambda_1 = \frac{S_{GBC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}; \lambda_2 = \frac{S_{GAC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}; \lambda_3 = \frac{S_{GAB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ta có } OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

2. Khoảng cách từ O đến H

Xét trường hợp ΔABC có ba góc nhọn (trong trường hợp ΔABC có một góc tù các bạn có thể làm tương tự).

$$\text{Chọn } \lambda_1 = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{BH \cdot CH \cdot BC}{4R}}{\frac{abc}{4R}} = \frac{BH \cdot CH}{bc}$$

$$= \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = \frac{1}{\tan \beta \cdot \tan \gamma};$$

$$\lambda_2 = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{\tan \alpha \cdot \tan \gamma};$$

$$\lambda_3 = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{\tan \alpha \cdot \tan \beta}.$$

Từ hệ thức (*) cho M trùng với H, ta được

$$OH^2 = R^2 - \frac{1}{\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma} \left(\frac{c^2}{\tan \gamma} + \frac{a^2}{\tan \alpha} + \frac{b^2}{\tan \beta} \right)$$

$$= R^2 - \frac{16R^4 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}{abc} (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)$$

$$= R^2 - \frac{8R^4}{a^2 b^2 c^2} (2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2 - a^4 - b^4 - c^4) \times \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$$

$$= R^2 - 8R^2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \text{ (theo (4), (5))}$$

$$= 9R^2 - (2p^2 - 2r^2 - 8Rr) \text{ (theo (7))}$$

$$= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \text{ (theo (8)).}$$

$$\text{Vậy } OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= R^2 (1 - 8 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma).$$

Từ các hệ thức trên ta còn suy ra được

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma;$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8} \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

3. Khoảng cách từ O đến I

$$\text{Từ (*) cho M trùng với I và chọn } \lambda_1 = \frac{S_{IBC}}{S_{ABC}} = \frac{a}{2p};$$

$$\lambda_2 = \frac{S_{IAC}}{S_{ABC}} = \frac{b}{2p}; \lambda_3 = \frac{S_{IAB}}{S_{ABC}} = \frac{c}{2p} \text{ thì được}$$

$$OI^2 = R^2 - \frac{abc^2 + a^2 bc + abc^2}{4p^2} = R^2 - 2R \left(\frac{abc}{4pR} \right) = R^2 - 2Rr.$$

Đây là công thức L. Euler mà bạn đọc đã biết.

4. Khoảng cách từ O đến các điểm I_a, I_b, I_c

Từ (*), cho M trùng với I_a và chọn

$$\lambda_1 = -\frac{S_{I_a BC}}{S_{ABC}} = -\frac{a}{2(p-a)}; \lambda_2 = \frac{S_{I_a AC}}{S_{ABC}} = \frac{b}{2(p-a)};$$

$$\lambda_3 = \frac{S_{I_a AB}}{S_{ABC}} = \frac{c}{2(p-a)}$$

thì có

$$OI_a^2 = R^2 + \frac{abc(-a+b+c)}{4(p-a)^2} = R^2 + \frac{2Rabc}{4R(p-a)} = R^2 + 2Rr_a.$$

$$\text{Tương tự } OI_b^2 = R^2 + 2Rr_b; OI_c^2 = R^2 + 2Rr_c.$$

5. Khoảng cách từ O đến điểm J

Điểm Gergone. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Khi đó các đường AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm J (điểm Gergone).

Để chọn được bộ số $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ chúng ta cần kết quả sau (h.1):

Định lý Van-Oben.

Nếu trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng sao cho

$$\frac{JA}{JA_1} = \frac{C_1A}{C_1B} + \frac{B_1A}{B_1C}.$$

(Bạn đọc tự chứng minh định lý này).

Từ định lý Van-Oben suy ra

$$\begin{aligned} \frac{AJ}{JA_1} &= \frac{C_1A}{C_1B} + \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{p-a}{p-b} + \frac{p-a}{p-c}, \text{ do đó} \\ \frac{AA_1}{JA_1} &= \frac{(p-a)(p-c) + (p-a)(p-b) + (p-b)(p-c)}{(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{r(4R+r)}{(p-b)(p-c)} \text{ (theo (10)). Từ đó chọn} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \frac{S_{JBC}}{S_{ABC}} = \frac{(p-b)(p-c)}{r(4R+r)};$$

$$\lambda_2 = \frac{S_{JAC}}{S_{ABC}} = \frac{(p-c)(p-a)}{r(4R+r)};$$

$$\lambda_3 = \frac{S_{JAB}}{S_{ABC}} = \frac{(p-a)(p-b)}{r(4R+r)}.$$

Sử dụng hệ thức (*) cho M trùng với J ta có

$$\begin{aligned} OJ^2 &= R^2 - \frac{p}{2(4R+r)^2} \\ &\times ((a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 2(a^3+b^3+c^3)). \end{aligned}$$

Từ đó và các hệ thức (8) và (9) suy ra

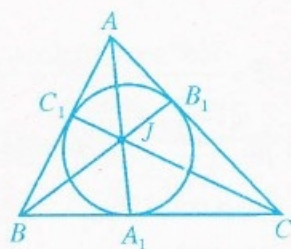
$$OJ^2 = R^2 - \frac{4p^2r(r+R)}{(4R+r)^2}.$$

6. Khoảng cách từ O đến điểm N

Điểm Naghen. Các đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A_1, B_1, C_1 . Khi đó các đường AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm N (điểm Naghen).

Bây giờ cho điểm M trùng với N và chọn

$$\lambda_1 = \frac{S_{NBC}}{S_{ABC}} = \frac{p-a}{p}; \lambda_2 = \frac{S_{NAC}}{S_{ABC}} = \frac{p-b}{p};$$



Hình 1

$$\lambda_3 = \frac{S_{NAB}}{S_{ABC}} = \frac{p-c}{p}. \text{ Theo hệ thức (*) ta thấy}$$

$$\begin{aligned} ON^2 &= R^2 - \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} \\ &\times \left(\frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c} \right). \end{aligned}$$

Từ đó và (11) suy ra

$$\begin{aligned} ON^2 &= R^2 - \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} \cdot \frac{4p(R-r)}{r} \\ &= R^2 - \frac{4S_{ABC}^2 \cdot (R-r)r}{S_{ABC}^2} = (R-2r)^2. \end{aligned}$$

Vậy $ON = R - 2r$.

7. Khoảng cách từ O đến điểm L

Điểm Lemoine.

Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC, lấy các điểm C_1, A_1, B_1 tương ứng sao cho

$$\begin{aligned} \frac{AC_1}{C_1B} &= \frac{b^2}{a^2}; \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c^2}{b^2}; \\ \frac{CB_1}{B_1A} &= \frac{a^2}{c^2}, \text{ lúc đó các} \end{aligned}$$

đường AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm L (điểm Lemoine).

Chú ý rằng AA_1 đối xứng với tia trung tuyến AM qua tia phân giác AD nên AA_1 gọi là đường đối trung. (h. 2).

Cho M trùng với L, từ định lý Van-Oben có

$$\frac{AL}{LA_1} = \frac{C_1A}{C_1B} + \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{b^2+c^2}{a^2}, \text{ suy ra}$$

$$\frac{AA_1}{LA_1} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}. \text{ Từ đây chọn}$$

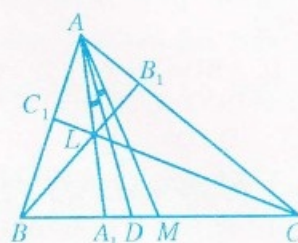
$$\lambda_1 = \frac{S_{LBC}}{S_{ABC}} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}; \lambda_2 = \frac{S_{LAC}}{S_{ABC}} = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2};$$

$$\lambda_3 = \frac{S_{LAB}}{S_{ABC}} = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2},$$

đồng thời áp dụng hệ thức (*) ta được

$$OL^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

(Xem tiếp trang 13)



Hình 2



Năm 2008 KỶ NIỆM MỘT SỐ NHÀ GIÁO THỜI XƯA

Nhân ngày nhà giáo Việt Nam 2008 chúng ta nhớ tới công lao của một số nhà giáo danh tiếng vừa tròn chục năm sinh và đã để lại nhiều tác phẩm giá trị. Rất tiếc là ta không biết chính xác năm sinh của nhiều nhà giáo nổi tiếng thời xưa nên ở đây chỉ xin nêu tên một số người tiêu biểu sinh trước năm 1900 (Riêng nhà giáo *Nhữ Bá Sỹ* (1788 – 1867), đỗ Cử nhân năm 1821 và mở trường Nghi Am, đã được giới thiệu trên THPT số 365 tháng 11.2007).

1. *Thân Nhân Trung* (1418 – 1499)
2. *Nguyễn Huy Cận* (1728 – 1790)
3. *Phạm Đình Hổ* (1768 – 1839)
4. *Đoàn Huyền* (1808 – 1882)
5. *Trần Văn Cận* (1858 – 1938)
6. *Nguyễn Thượng Hiền* (1868 – 1925)

Bạn hãy sưu tầm tư liệu để kể tóm tắt về: quê quán; học vị; tác phẩm chính và tên hiệu; vài nét về hoạt động xã hội, giáo dục của các nhà giáo trên.

Bạn hiểu ĐƯỜNG như thế nào?

(Để đăng trên THPT số 372 tháng 6.2008)

ĐƯỜNG có những nghĩa đen sau:

- 1) Lối đi cho người, cho các phương tiện vận chuyển (*Đường mòn, đường cái, đường xe lửa, đường thủy, đường băng, đường hàng không, đường hầm, đường sá,...*)
- 2) Sự chuyển động của một vật thể hoặc một chất điểm trong kỹ thuật (*Đường chim bay, đường cây, đường đạn; đường sức từ trường, đường truyền sóng,...*).
- 3) Sự nối liền hai nơi (*Đường ống dẫn dầu, đường điện thoại, đường cống, đường ngầm, ...*)
- 4) Cơ quan trong cơ thể sinh vật để dẫn một chất nào đó (*Đường ruột, đường hô hấp, ...*)
- 5) Sự phân chia ranh giới giữa hai phần (*Đường chiến tuyến, đường ngôi trên đầu, đường phân cách, đường biên, đường chân trời, đường bờ biển, ...*)

ĐƯỜNG có những nghĩa bóng sau:

- 6) Thuật ngữ ngày đường chỉ sự chuyển động từ nơi này đến nơi khác...

(Đi mấy ngày đường;

Tiếng lành đồn xa, tiếng dữ đồn xa.

Tiếng lành tiếng dữ đồn ba ngày đường;...)

- 7) Cách tiến hành hoạt động với mục đích nào đó (*Đường đi nước bước; Đường lối quần chúng; Liều đường làm ăn;...*)

- 8) Các mặt, các phương diện nào đó trong hoạt động xã hội của con người (*Cay đắng trăm đường; Muộn màng về đường tình duyên; Việc nhà việc nước vẹn cả đôi đường; Dù chàng mà có yêu thương Thì chàng đắp điểm trăm đường đi cho;...*)

- 9) Cuộc sống của con người (*Đường đời; Vắng trắng ai sẽ làm đôi Đường trần ai vẽ ngược xuôi hỡi chàng?;...*)

- 10) Có thể hiểu đường như mối quan hệ tình cảm nào đó

(Ăn bát cơm dẻo nhớ nẻo đường đi;

Chữ tình là chữ chi chi

Yêu nhau phải bảo đường đi lối về;

(Xem tiếp trang 27)



Về cách lập MA PHƯƠNG

TRẦN VIỆT HÙNG
(Sở GD&ĐT Sóc Trăng)

Ma phương (viết tắt là MP) bậc n là một bảng hình vuông, kích thước $n \times n$ ô, mỗi ô ghi một số sao cho tổng các số ở mỗi hàng bằng tổng các số ở mỗi cột và bằng tổng các số ở mỗi đường chéo. Tổng này được gọi là *hằng số* của ma phương. Với n chẵn (hoặc lẻ) ta có ma phương bậc chẵn (hoặc bậc lẻ).

Ma phương $M_n(a, d)$ bậc n gồm n^2 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng $a + d, a + 2d, \dots, a + n^2d$ có hằng số bằng $S_n(a, d) = \frac{na + n(n^2 + 1)d}{2}$.

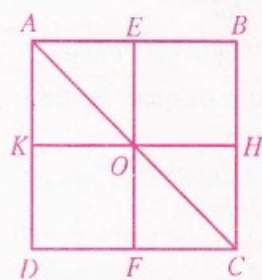
Nổi riêng ma phương $M_n = M_n(0, 1)$ gồm n^2 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n^2 có hằng số $S_n = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$.

Trong bài *Ma phương bậc chẵn* (xem THPT số 304, tháng 10.2002 hoặc *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ*, Quyển 4, NXBGD 2008, trang 120) tác giả Nguyễn Xuân Huy đã nêu một cách lập MP bậc chẵn. Bài này xin cung cấp thêm một cách lập MP bậc chẵn với các bước tương tự như thế trong dạng tổng quát hơn, sau đó nêu cách lập một MP từ hai MP đã biết.

MỘT CÁCH LẬP MA PHƯƠNG BẬC CHẴN

Để lập được một MP bậc chẵn với $n = 2k$ ta thực hiện theo năm bước như dưới đây.

Bước 1. Xác định các yếu tố của bảng hình vuông $n \times n$ ô



Hình 1

Vẽ bảng hình vuông ABCD có kích thước $n \times n$ ô vuông. Gọi E, H, F, K theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi O là tâm và AC là đường chéo chính của hình vuông ABCD (h. 1).

Bước 2. Tạo mẫu cho bảng hình vuông $k \times k$ ô

Đặt $p = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$, nghĩa là $p = \frac{k}{2}$ nếu k chẵn, hoặc $p = \frac{k-1}{2}$ nếu k lẻ.

Ta sẽ điền mỗi chữ T, Đ, N vào một ô của bảng hình vuông AEOK kích thước $k \times k$ ô, mỗi ô có không quá một chữ, theo các quy tắc (QT) sau đây. Nếu k chẵn chỉ thực hiện QT 2.1; nếu k lẻ thực hiện cả ba quy tắc.

QT 2.1. Điền chữ T sao cho mỗi hàng và mỗi cột có đúng p chữ T.

QT 2.2. (với k lẻ) Điền chữ Đ vào các ô còn trống không nằm trên đường chéo chính sao cho mỗi hàng và mỗi cột có đúng một chữ Đ.

QT 2.3. (với k lẻ) Điền chữ N vào các ô còn trống không nằm trên đường chéo chính sao cho mỗi hàng và mỗi cột có đúng một chữ N.

Bước 3. Hoàn chỉnh mẫu cho bảng hình vuông $n \times n$ ô

Ta điền tiếp các chữ T, Đ, N vào ba hình vuông OEBH, OHCF, OFDK theo các quy tắc sau đây. Nếu k chẵn chỉ thực hiện QT 3.1; nếu k lẻ thực hiện cả ba quy tắc.

QT 3.1. Điền chữ T vào ô đối xứng với ô có chữ T của bảng hình vuông AEOK qua tâm O, qua trục đứng EF và qua trục ngang KH.

QT 3.2. (với k lẻ) Điền chữ Đ vào ô đối xứng với ô có chữ Đ của bảng hình vuông AEOK qua trục đứng EF.

QT 3.3. (với k lẻ) Điền chữ N vào ô đối xứng với ô có chữ N của bảng hình vuông AEOK qua trục ngang KH.

Ta được mẫu hoàn chỉnh cho bảng hình vuông ABCD.

Trên hình 2 chỉ ra một cách thực hiện bước 2 và bước 3 cho bảng hình vuông 10×10 ô.

A											B
		T	N	T	Đ	Đ	T		T		
K	Đ		T	T	N		T	T		Đ	H
	T	N	T	Đ			Đ	T		T	
D	N	T	Đ		T	T		Đ	T		C
	T	Đ		N	T	T			Đ	T	
F	T			N	T	T				T	H
	N	T			T	T				T	
D	T	N	T					T		T	C
			T	T	N		T	T			
D		T	N	T			T		T		C

Hình 2

Bước 4. Lập bảng gồm n^2 số theo thứ tự cấp số cộng

Điền n^2 số $a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + n^2d$ vào bảng hình vuông $ABCD$, sao cho mỗi ô có một số, theo thứ tự từ trái sang phải rồi từ trên xuống dưới. Chẳng hạn, hàng thứ nhất là $a + d, a + 2d, \dots, a + nd$; hàng thứ hai là $a + (n + 1)d, a + (n + 2)d, \dots, a + 2nd$.

Bước 5. Thực hiện việc chuyển số

Dựa vào bảng hình vuông $ABCD$ đã tạo mẫu ta thực hiện chuyển các số trong bảng ở bước 4 theo các quy tắc sau:

QT 5.1. Giữ nguyên các số trong những ô không có chữ T, Đ, N.

QT 5.2. Tráo đổi hai số ở hai ô có chữ T đối xứng nhau qua tâm O.

QT 5.3. (với k lẻ) Tráo đổi hai số ở hai ô có chữ Đ đối xứng nhau qua trục đứng EF.

QT 5.4. (với k lẻ) Tráo đổi hai số ở hai ô có chữ N đối xứng nhau qua trục ngang KH.

Sau khi thực hiện năm bước trên ta được MP bậc chẵn ($n = 2k$). Việc chứng minh bảng hình vuông đó là MP xin dành cho bạn đọc. Trên hình 3 chỉ ra một ma phương bậc 10 được lập theo cách tạo mẫu ở hình 2 gồm n^2 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100 với hằng số $S_{10} = 505$.

Chú ý. 1) Nếu một MP bậc chẵn chia hết cho 4 việc thành lập rất đơn giản vì chỉ thực hiện các quy tắc QT2.1, QT3.1, QT5.1, QT 5.2.

2) Nếu đã có một MP bậc n mà ta lấy các số đối xứng qua tâm O (hoặc qua trục đứng, hoặc qua trục ngang) thì được MP mới.

3) Mỗi cách tạo mẫu ở bước 2 sẽ cho một MP tương ứng.

A											B
	1	99	93	97	6	5	94	8	92	10	
K	20	12	88	87	85	16	84	83	19	11	H
	80	72	78	27	25	26	24	73	29	71	
D	61	69	38	34	66	65	37	33	62	40	C
	60	49	43	54	56	55	47	48	42	51	
F	50	52	53	44	46	45	57	58	59	41	H
	31	39	63	64	36	35	67	68	32	70	
D	30	22	28	74	75	76	77	23	79	21	C
	81	82	18	17	15	86	14	13	89	90	
D	91	9	3	7	95	96	4	98	2	100	C

Hình 3

(Kì sau đăng tiếp)

ỨNG DỤNG... (Tiếp trang 10)

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Chứng minh rằng với mỗi tam giác ABC , ta có các kết quả sau:

$$1) GI^2 = \frac{1}{9}(3ab + 3ac + 3bc - a^2 - b^2 - c^2) - 4Rr.$$

$$2) a) 2.IO \geq IH; b) \sqrt{2}.IO \geq IG;$$

$$c) 2.IO \geq GH; d) OI \geq OG; e) 3.OI \geq OH.$$

$$3) OJ^2 \geq \frac{R(R - 2r)(2R + r)}{2R - r}.$$

$$4) OL^2 \geq \frac{8}{3} \cdot \frac{R^3(R - 2r)}{(2R - r)^2}.$$

$$5) \frac{OJ}{OI} \geq \frac{5OI^2 - ON^2}{3OI^2 + ON^2}.$$

$$6) \frac{OL}{OI} \geq \sqrt[4]{\frac{2}{3}} \cdot \frac{OI^2}{3OI^2 + ON^2}.$$

$$7) 1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \geq \sqrt{3} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

(Hướng dẫn: Sử dụng công thức tính khoảng cách từ điểm O đến điểm Lemoine).

DIỄN ĐÀN

DAY HOC TOAN



Khai thác một bài toán HÌNH HỌC LỚP 9

TRẦN VĂN HINH

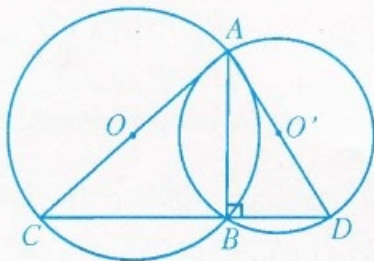
(GV THCS Nam Giang, Nam Trực,
Nam Định)

Chúng ta xuất phát từ bài toán:

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Kẻ các đường kính AOC và $AO'D$. Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng và $AB \perp CD$.

(Bài 67, trang 138, SBT Toán 9, tập một, NXBGD-2008)

Lời giải.



Vì tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC nên $\widehat{ABC} = 90^\circ$, suy ra $AB \perp BO$ tại B (1)

Vì tam giác ABD nội tiếp đường tròn (O') đường kính AD nên $\widehat{ABD} = 90^\circ$, suy ra $AB \perp BD$ tại B (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm C, B, D thẳng hàng và $AB \perp CD$.

Ngược lại, với bài toán trên, nếu điểm $C \in (O)$ và $D \in (O')$ mà $AB \perp CD$ tại B thì AC và AD thứ tự có là đường kính của đường tròn (O) và

(O') hay không? Trả lời câu hỏi đó ta được bài toán đảo của bài toán ban đầu sau đây.

✪ **Bài toán 1.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt (O) và (O') lần lượt tại C và D . Chứng minh rằng AC và AD lần lượt là đường kính của (O) và (O') .

Từ hình vẽ trong lời giải của bài toán mở đầu ta thấy DO và CO' là các đường trung tuyến của tam giác ACD nên nếu gọi G là giao điểm của DO và CO' thì G sẽ là trọng tâm của tam giác ACD và khi đó ta có AG sẽ đi qua trung điểm của CD .

Nếu gọi thêm N là giao của AG và CD thì lúc này không khó khăn gì ta sẽ chứng minh được tứ giác $AONO'$ là hình bình hành và suy ra được AG cũng đi qua trung điểm của OO' . Vì thế, ta có bài toán mới sau đây.

✪ **Bài toán 2.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Kẻ các đường kính AOC và $AO'D$ và gọi G là giao điểm của DO và CO' . Chứng minh rằng AG đi qua trung điểm của CD và OO' .

Tiếp tục đi tìm bài toán đảo của bài toán 2 cùng với việc phát hiện thêm các kết quả mới qua hình vẽ trong lời giải ta có được một bài toán hay và khó sau đây.

✪ **Bài toán 3.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Kẻ các đường kính AOC và $AO'D$. Gọi I là trung điểm của OO' ; M là giao điểm của AI và CD ; G là giao điểm của DO và CO' .

1) Chứng minh rằng:

- Tứ giác $AOMO$ là hình bình hành.
- Ba điểm A, I, G thẳng hàng.

2) Trên các nửa đường tròn (O) đường kính AC và đường tròn đường kính AD không chứa B lần lượt lấy P và Q sao cho $\widehat{AOP} = \widehat{AO'Q}$ với P không thuộc tia MO còn Q không thuộc tia MO' . Chứng minh rằng

- Tam giác MPQ cân.
- Nếu bán kính của (O) lớn hơn bán kính của (O') thì $AP > AQ$.

Nếu đặc biệt hóa bài toán ban đầu theo hướng cho hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau, khi đó ta nhận thấy $\triangle ACD$ là tam giác cân và tứ giác $AOBO'$ là hình thoi. Nếu vẽ tiếp một đường thẳng d bất kì đi qua B cắt hai đường tròn (O) và (O') lần lượt tại E và F thì ta sẽ chứng minh được $\triangle AEF$ là tam giác cân. Từ đây ta còn có trung điểm H của EF chuyển động trên đường tròn đường kính AB . Như vậy ta lại có một bài toán mới khá thú vị sau đây.

✪ **Bài toán 4.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ cắt nhau tại A và B . Kẻ các đường kính AOC và $AO'D$.

- 1) Tứ giác $AOBO'$ là hình gì? Hãy chứng minh.
- 2) Phải thêm vào giả thiết của bài toán điều kiện gì để tứ giác $AOBO'$ là hình vuông?
- 3) Gọi d là đường thẳng đi qua B và cắt $(O; R)$ và $(O'; R)$ lần lượt ở E và F , khi đó trung điểm của EF chuyển động trên đường nào? Giải thích tại sao?

Tiếp tục khai thác ta sẽ có nhiều bài toán hay nữa. Chẳng hạn như:

✪ **Bài toán 5.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt (O) và (O') lần lượt tại C và D . Đường thẳng CA cắt (O') tại E , đường thẳng DA cắt (O) tại F . Chứng minh rằng

- 1) Bốn điểm C, F, E, D cùng nằm trên một đường tròn.
- 2) Ba đường thẳng CF, DE và AB đồng quy.
- 3) Điểm A cách đều ba cạnh của tam giác BEF .

✪ **Bài toán 6.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng d bất kì quay quanh A cắt hai đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D . Gọi P là hình chiếu của O trên CD và Q là hình chiếu của O' trên CD .

- 1) Xác định vị trí của d để độ dài của CD lớn nhất.
- 2) Khi đường thẳng d quay quanh A thì trung điểm của PQ chuyển động trên đường nào? Giải thích tại sao?

3) Gọi E là giao của các đường thẳng OC và $O'D$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BOE luôn đi qua một điểm cố định.

✪ **Bài toán 7.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ cắt nhau tại A và B sao cho $AB = R$. Kẻ các đường kính AOC và $AO'D$. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M (khác B và C), gọi giao điểm thứ hai của tia MB với $(O'; R)$ là P , các tia CM và PD cắt nhau tại Q , các tia MP và AQ cắt nhau tại K .

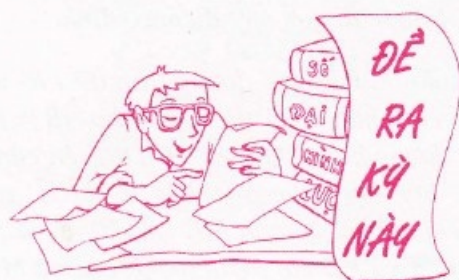
- 1) Chứng minh bốn điểm A, M, Q, P cùng nằm trên một đường tròn.
- 2) Chứng minh tam giác MPQ đều.
- 3) Tính tỉ số giữa AK và AQ .

Nếu có thói quen thường xuyên khai thác mỗi bài toán trong SGK bằng việc đi tìm bài toán đảo hay đặc biệt hóa hoặc khai thác, tìm kiếm các kết luận mới từ hình vẽ của lời giải để có nhiều kết luận mới thú vị sẽ giúp ta có được nhiều bài tập hay và khó nhằm phát hiện và bồi dưỡng năng lực toán cho học sinh.

Chúc các bạn có nhiều khai thác thú vị đối với các bài tập trong SGK mới.

SỬ DỤNG ... (Tiếp trang 7)

1. Tìm m để phương trình $mx - \sqrt{x-3} = m+1$ có nghiệm.
2. Tìm m để phương trình $x + m = m\sqrt{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.
3. Tìm m để phương trình $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$ có nghiệm.
4. Tìm m để phương trình $2x + \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} = m$ có nghiệm.
5. Tìm m để phương trình $\sin x + 2\cos \frac{x}{2} = m \left(\cos x + 2\sin \frac{x}{2} \right)$ có nghiệm trong đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/376. (Lớp 6) Trong hệ thập phân, khi ta viết hai số 8^{2008} và 125^{2008} liên nhau thì nhận được một số có bao nhiêu chữ số?

LƯƠNG VĂN BÁ

(GV THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T2/376. (Lớp 7) Tìm phân số $\frac{a}{b}$ thỏa mãn ba điều kiện sau:

- i) $-\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < -\frac{2}{5}$;
- ii) $11a + 5b = 26$;
- iii) $200 < |a| + |b| < 230$.

PHẠM HUY THÔNG

(Hà Nội)

Bài T3/376. Tìm tất cả các số tự nhiên n khác 0 sao cho số $A = \frac{1.3.5.7...(2n-1)}{n^n}$ là một số nguyên, trong đó tử số của A là tích của n số tự nhiên lẻ đầu tiên.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, Bình Định)

Bài T4/376. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{3}{2} (a+b+c-1),$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

PHAN LÊ NHẬT DUY

(GV THCS Lâm Mỹ Quang, Vĩnh Mỹ, Phú Lộc, Thừa Thiên-Huế)

Bài T5/376. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH , trung tuyến BM , phân giác CD đồng quy. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN

(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/376. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x-1} = x^2 - 1.$$

TẠ HOÀNG THÔNG

(GV TT Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/376. Cho tam giác ABC có diện tích bằng S . Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq$$

$$16S^2 + \frac{1}{2}a^2(b-c)^2 + \frac{1}{2}b^2(c-a)^2 + \frac{1}{2}c^2(a-b)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

ĐÀO MẠNH THẮNG

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T8/376. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ thỏa mãn điều kiện $a + c = 2b$. Gọi h_a, h_c theo thứ tự là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A, C ; r_a, r_c theo thứ tự là bán kính các đường tròn bàng tiếp tương ứng với các đỉnh A, C . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c}.$$

BÙI MINH DUY

(SV 33B, khoa Toán, ĐH Sư phạm Thái Nguyên)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/376. Xét các số dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} cy + bz = a \\ az + cx = b \\ bx + ay = c \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + \frac{z^2}{1+z}.$$

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/376. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, thoả mãn hai điều kiện

$f(2010) = 2009$ và $f(x).f_4(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong đó kí hiệu $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$.

Hãy tính $f(2008)$.

TRỊNH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T11/376. Cho dãy số dương $u_1, u_2, \dots, u_n$ ($n > 2$) thoả mãn hai điều kiện sau:

i) $\frac{1004}{k} = u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n$ với số nguyên dương k nào đó;

ii) $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 2008$.

Chứng minh rằng trong dãy số (u_n) có thể chọn ra k số hạng sao cho trong k số đó thì số nhỏ nhất lớn hơn một nửa số lớn nhất.

NGUYỄN HOÀNG NAM
(GV THPT K'Bang, Gia Lai)

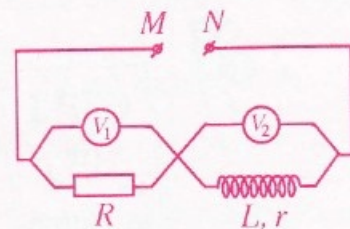
Bài T12/376. Cho đường tròn (O) ; các điểm X, Y, H thẳng hàng không nằm trên đường tròn (O) và thoả mãn điều kiện $\overline{HX} \cdot \overline{HY} \neq \mathcal{P}_{H((O))}$. Đường thẳng d đi qua H cắt đường tròn (O) tại các điểm M, N . Các đường thẳng MX, NY theo thứ tự cắt (O) lần nữa tại P, Q . Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d đi động nhưng luôn đi qua H .

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/376. Cho một mạch điện như hình vẽ. Biết $u_{MN} = 40\sqrt{2} \cos 100\pi$ (V), $R = 5\Omega$,

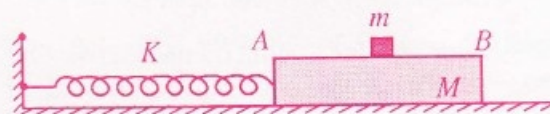
vôn kế V_1 chỉ 15V, vôn kế V_2 chỉ 35V. Điện trở các vôn kế vô cùng lớn.



- 1) Tính hệ số công suất của mạch điện và của cuộn dây.
- 2) Viết biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch điện.
- 3) Tính r, L .
- 4) Tính công suất tiêu thụ của cuộn dây, của điện trở và của toàn mạch.

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV ĐHSP Hà Nội)

Bài L2/376. Một lò xo nhẹ có độ cứng K , một đầu gắn vào giá cố định, đầu kia mắc vào một khối gỗ hình hộp khối lượng M , trên khối gỗ đặt vật nhỏ khối lượng m (hình vẽ).



Khối gỗ có thể chuyển động không ma sát trên mặt bàn nằm ngang còn vật m có thể chuyển động không ma sát trên mặt nằm ngang AB của khối gỗ. Tại thời điểm $t = 0$ người ta đưa khối gỗ đến vị trí lò xo giãn Δl (theo phương trục lò xo) rồi thả nhẹ. Viết phương trình chuyển động của

- 1) Khối gỗ trong hệ quy chiếu gắn với bàn.
- 2) Vật nhỏ m trong :
 - a) Hệ quy chiếu gắn với bàn,
 - b) Hệ quy chiếu gắn với khối gỗ,

Giả sử trong quá trình chuyển động vật m không rơi khỏi khối gỗ.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Nghệ An)

(Xem tiếp trang 28)



★ Bài T1/372. Cho tổng sau gồm 2007 số hạng

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2007^{2008}}.$$

Chứng minh rằng giá trị của A là số không nguyên.

Lời giải. Số nguyên tố lớn nhất mà không vượt quá 2007 là 2003. Quy đồng mẫu số các số hạng của A ta được $A = \frac{B}{C}$ với mẫu số chung $C = 1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot \dots \cdot 2007^{2008}$ chia hết cho 2003^{2004} . Tử số B là tổng của 2007 số tự nhiên, trong đó tử số của số hạng $\frac{1}{2003^{2004}}$ có dạng

$$1^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2002^{2003} \cdot 2004^{2005} \cdot 2005^{2006} \cdot 2006^{2007} \cdot 2007^{2008}$$

nên nó không chia hết cho 2003, còn tử số của tất cả các số hạng còn lại của A thì chia hết cho 2003^{2004} , do đó B không chia hết cho 2003. Vậy A không thể là số nguyên. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Cách giải trên vẫn đúng khi mẫu số của các số hạng của A là lũy thừa của số nhỏ hơn 4006 với số mũ nguyên dương tùy ý.

2) Lời giải của đa số các bạn dựa vào bất đẳng thức

$$\frac{1}{n^{n+1}} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{với mọi } n \geq 2, \text{ và sử dụng đẳng thức}$$

thức $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ để suy ra $1 < A < 2$, do đó số A không nguyên.

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Thị Mai Anh, Vũ Tuấn Linh, Trịnh Hồng Ngọc, 6A1, Triệu Duy Hải, 6A3, THCS Lâm

Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Hiếu, Hoàng Minh Phương, Phạm Văn Trung, Nguyễn Thành Công, Phạm Thị Khánh Linh, 6A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Dũng, 6A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, Nguyễn Như Ngọc, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Hải Dương:** Trần Xuân Thắng, 6/1, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Lộc, Phan Thanh Tùng, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Lê Đăng Nhân, 6A, THCS Quang Sơn, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Bùi Thị Phương Mai, 6A, THCS BC Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Bình:** Nguyễn Phương Thảo, 6D, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Quảng Trị:** Dương Quốc Huy, 6G, THCS Nguyễn Trãi, TX. Đông Hà; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Bảo Trâm, Nguyễn Thị Thu Hà, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Đắk Lắk:** Bùi Nguyễn Tấn Thi, 6A4, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Ekpam, Cưnggar, Lê Công Vinh, 6C, THCS Phan Chu Trinh, TP. Buôn Ma Thuột.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/372. Cho đa thức bậc ba

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8.$$

Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n đều tồn tại bộ ba số nguyên phân biệt a_1, a_2, a_3 thỏa mãn hai điều kiện sau:

- i) $|a_i - a_j| < 5, \text{ với } \forall i, j \in \{1, 2, 3\};$
- ii) $P(a_i) \neq 0 \text{ và } P(a_i) : 5^n \text{ với } \forall i \in \{1, 2, 3\}.$

Lời giải. Phân tích đa thức $P(x)$ thành nhân tử
 $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$
 $= (x^3 - x^2) - (6x^2 - 6x) + (8x - 8)$
 $= (x - 1)(x^2 - 6x + 8) = (x - 1)(x - 2)(x - 4).$

• Với $n = 0$ thì $5^n = 1$. Ta chọn, chẳng hạn $a_1 = 5, a_2 = 6, a_3 = 7$. Rõ ràng $|a_i - a_j| < 5$ với $i, j \in \{1, 2, 3\}; P(a_i) \neq 0$ và $P(a_i) : 5^n, \forall i \in \{1, 2, 3\}.$

• Với $n \geq 1$, ta chọn $a_1 = 5^n + 1, a_2 = 5^n + 2, a_3 = 5^n + 4$. Dễ thấy $|a_i - a_j| < 5 \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$; Mặt khác, các số $a_i - 1, a_i - 2, a_i - 4$ đều dương (do $5^n \geq 5$) nên $P(a_i) > 0$. Cuối cùng,
 $P(a_1) : (a_1 - 1), \text{ hay } P(a_1) : 5^n;$
 $P(a_2) : (a_2 - 2), \text{ hay } P(a_2) : 5^n;$
 $P(a_3) : (a_3 - 4), \text{ hay } P(a_3) : 5^n.$

Tóm lại, với mọi số tự nhiên n đều tồn tại bộ ba số nguyên phân biệt $(a_1; a_2; a_3)$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Mấu chốt của bài giải là phân tích đa thức $P(x)$ thành nhân tử.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Hoàng Anh Tú, 71, THCS Marie Curie, Lê Minh Phúc, 7A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Vinh Phúc:** Nguyễn Thị Hà, Nguyễn Ngân Giang, Phạm Thị Khánh Linh, Đỗ Thị Thu Uyên, Nguyễn Thị Thu Dương, Hoàng Minh Phương, Nguyễn Minh Hiếu, 6A1, Phạm Văn Tú, 7A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Dũng, 6A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, Nguyễn Như Ngọc, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Quảng Trị:** Nguyễn Văn Hải Như, 71, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị; **Bạc Liêu:** Trần Quang Minh, 7/1, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/372.** Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x+1} + \dots + \sqrt[n]{x+n-1} = y \quad (\text{gồm } m \text{ dấu căn}) \quad (1)$$

với m, n là các số tự nhiên lớn hơn 2.

Lời giải. • Nhận xét rằng nếu (1) có nghiệm âm ($x; y$) ($x < 0, y < 0$) (n lẻ) thì $(-x, -y)$ là nghiệm dương của (1).

• Ta có $(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của (1).

• Giả sử (1) có nghiệm dương: $x > 0, y > 0$. Rõ ràng $x < y^n$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x+1} + \dots + \sqrt[n]{x+n-1}}_{(m-1) \text{ dấu căn}} = y^n - x \quad (2)$$

Vì x, y nguyên dương nên hai vế của (2) đều là các số nguyên dương. Lập luận tương tự dẫn đến $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x+1}$ và $\sqrt[n]{x}$ là hai số nguyên dương.

Đặt $a = \sqrt[n]{x}, b = \sqrt[n]{x+1}$ thì $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Do $n > 2$ nên $(a+1)^n > a^n + a > a^n$

hay $a+1 > \sqrt[n]{a^n + a} > a$

tức là $a+1 > b > a$

Rõ ràng (3) không xảy ra với a, b nguyên dương. Vậy (1) không có nghiệm nguyên dương. Do đó theo nhận xét trên, (1) cũng không có nghiệm nguyên âm.

Vậy $x = 0, y = 0$ là các số nguyên cần tìm. ◻

◀ **Nhận xét.** 1) Đa số các bạn đều giải theo cách trên. Các bạn có lời giải ngắn gọn là:

Phú Thọ: Triệu Duy Hải, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vinh Phúc:** Lê Văn Tú, 8A1, THCS Yên Lạc; **Hưng Yên:** Trịnh Xuân Phương, 9D, THCS Lê Lợi, TX. Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Mai Thu Phương, 7A, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung; **Nghệ An:** Doãn Văn Hùng, 9A, THCS Nghi Thái, Nghi Lộc, Nguyễn Hồng Ngọc Thạch, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Ngọc Quang, 9P2, THCS Ngô Sĩ Liên, Tân Bình; **Bạc Liêu:** Nguyễn Công Dũng, 9/1, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/372.** Cho $x > 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{2} + \frac{8x^3}{(x-2)(x+2)^2} > 9 \quad (1)$$

Lời giải. Cách 1. Với $x > 2$ thì

$(x-2)(x+2)^2 > 0$, ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x(x-2)(x+2)^2 + 16x^3 > 18(x-2)(x+2)^2 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 40x^2 + 64x + 144 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x^4 - 32x^2 + 16^2) - 8(x^2 - 8x + 16) + 16 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x-4)^2(x+4)^2 - 8(x-4)^2 + 16 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x-4)^2(x^2 + 8x + 8) + 16 > 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Vì $x > 2$ nên $x^2 + 8x + 8 > 0$, do đó BĐT (2) luôn đúng.

Vậy BĐT (1) được chứng minh. ◻

Cách 2. Sau khi biến đổi (1) tương đương với $x^4 - 40x^2 + 64x + 144 > 0$, xét hai trường hợp:

• Với $x > 4$, ta có

$$M = x^4 - 40x^2 + 64x + 144 > x^4 - 40x^2 + 64.4 + 144 = (x^2 - 20)^2 \geq 0.$$

• Với $2 < x \leq 4$, ta có

$$M = (x^2 - 12)^2 + 16x(4 - x) > 0.$$

Vậy BĐT (1) đúng với mọi $x > 2$. ◻

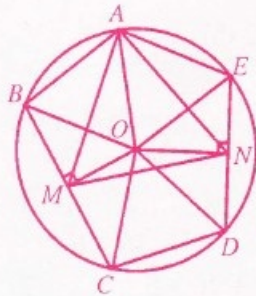
(3) **Nhận xét.** Đây là bài toán cơ bản, song nhiều bạn biến đổi rất dài và phức tạp. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Lý Phụng Hoàng, 8A1, THPT DL Nguyễn Siêu, Cầu Giấy; **Lê Đức Tâm**, 9A1, THCS Mộ Lao, TP. Hà Đông; **Bắc Ninh:** Nguyễn Quang Rực, Nguyễn Đình Duy, 9A, THCS Yên Phong, Nguyễn Như Ngọc, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Vinh Phúc:** Nguyễn Thành Hưng, 8A1, THCS Yên Lạc, Nguyễn Mạnh

Quân, 9C, THCS Vĩnh Tường, Hà Đình Đức, 6A, Hà Quang Nhân, 7B, THPT Như Thủy; **Nam Định:** Nguyễn Văn Quý, Phan Quang Hưng, 9A, THCS Hải Hậu, Phùng Mạnh Linh, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh; **Hà Nam:** Nguyễn Tiến Hòa, 9B, THCS Đình Công Tráng; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 9B, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn; **Quảng Trị:** Nguyễn Văn Hải Như, 7I, Nguyễn Hữu Ánh, 8I, THCS Thành Cổ; **Phú Yên:** Phạm Quang Thịnh, 9I, THCS Hùng Vương, Lê Cao Thăng, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/372.** Cho ngũ giác $ABCDE$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R với $AB = CD = EA = R$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC và DE . Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác đều.



Lời giải. Từ giả thiết dễ thấy

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} = \widehat{EOA} = 60^\circ, \text{ do đó}$$

$$\widehat{BOC} + \widehat{EOD} = 180^\circ.$$

Lại có

$$\widehat{BOM} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$$

$$\text{và } \widehat{EON} = \frac{1}{2} \widehat{EOD}. \text{ Vậy } \widehat{BOM} + \widehat{EON} = 90^\circ.$$

Hai tam giác vuông BOM và OEN có $BO = OE = R$, $\widehat{BOM} = \widehat{OEN}$ (vì cùng phụ với $\widehat{EON}$) nên chúng bằng nhau, suy ra $OM = EN$.

Chú ý rằng $\widehat{BOC} < 180^\circ$ và $\widehat{EOD} < 180^\circ$.

Xét hai tam giác AOM và AEN . Ta có

$$AO = AE = R, OM = EN,$$

$$\begin{aligned} \widehat{AOM} &= \widehat{AOB} + \widehat{BOM} = 60^\circ + \widehat{OEN} \\ &= \widehat{AEO} + \widehat{OEN} = \widehat{AEN}. \end{aligned}$$

Do đó $\triangle AOM = \triangle AEN$ (c.g.c), suy ra $AM = AN$ và $\widehat{MAO} = \widehat{NAE}$.

Như vậy, tam giác AMN cân tại A và có $\widehat{MAN} = \widehat{MAO} + \widehat{OAN} = \widehat{EAN} + \widehat{OAN} = \widehat{EAO} = 60^\circ$, do đó tam giác AMN đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn đã tham gia giải và hầu hết đều làm đúng. Đa số các bạn giải theo cách trên, đặc biệt có ba bạn học sinh lớp 6 là: Nguyễn Như

Ngọc, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, Bắc Ninh; Nguyễn Phương Thảo, 6D, THCS Quách Xuân Kỳ, Bồ Trách, Quảng Bình; Hà Đình Đức, 6A, THCS Như Thủy, Lập Thạch, Vĩnh Phúc.

2) Có hai bạn đưa ra lời giải phức tạp hơn dựa vào phép quay tâm A , góc quay 60° hoặc tâm M , góc quay -60° .

3) Xin hoan nghênh bạn Nguyễn Văn Huyền, 11A₂, THPT Nguyễn Trung Trực, Tri Tôn, An Giang đã phát triển bài toán trên như sau: Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác AMN khi độ dài đoạn BC thay đổi. Bạn Huyền đã giải bài toán này dựa trên định lý cosin và đi đến kết quả là chu vi tam giác AMN lớn nhất bằng

$$\frac{3R(1 + \sqrt{3})}{2} \text{ khi } BC = R\sqrt{2}. \text{ Tuy nhiên, các bạn hoàn}$$

toàn có thể tìm được kết quả trên mà không phải sử dụng công cụ lượng giác. Các bạn hãy thử suy nghĩ nhé.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/372.** Tồn tại hay không hai số nguyên dương phân biệt a, b sao cho $b^n + n$ chia hết cho $a^n + n$ với mọi số nguyên dương n ?

Lời giải. Giả sử tồn tại hai số nguyên dương phân biệt a, b sao cho $b^n + n$ chia hết cho $a^n + n$ với mọi số nguyên dương n , thế thì $b^n + n > a^n + n \Rightarrow b > a$.

Giả sử p là một số nguyên tố lớn hơn b và n là số tự nhiên thỏa mãn $n = (a+1)(p-1) + 1$.

Khi đó

$$n = (a+1)p - a \Rightarrow n \equiv -a \pmod{p} \quad (1)$$

Vì $a < b < p$ nên $(a, p) = (b, p) = 1$.

Theo định lý nhỏ Fermat, ta có

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a^{(a+1)(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow a^{(a+1)(p-1)+1} \equiv a \pmod{p}.$$

$$\text{Do đó } a^n \equiv a \pmod{p} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a^n + n \equiv 0 \pmod{p}$ hay $(a^n + n) : p$.

Chứng minh tương tự, ta được

$$b^n \equiv b \pmod{p} \quad (3) \text{ và } (b^n + n) : p \quad (4)$$

Từ (1) và (3) suy ra

$$b^n + n \equiv b - a \pmod{p} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $(b-a):p$. Điều này không thể xảy ra vì $a < b < p$.

Vậy không tồn tại hai số nguyên dương phân biệt a, b sao cho $b^n + n$ chia hết cho $a^n + n$ với mọi số nguyên dương n . $\square$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán tương đối khó nên có ít bạn tham gia giải. Một số bạn cho rằng bài toán trên tương tự với một bài toán dự tuyển thi IMO 2005.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hải Dương: Trần Hoàng Sơn, 12T2, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hà Nội:** Nguyễn Quý Tuấn, 11T, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Tâm Đăng, 10 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên - Huế:** Võ Thành Văn, 11 Toán, khối THPT chuyên ĐHKH Huế; **Đà Nẵng:** Hoàng Bùi Khánh, Lê Đình Toàn, 10A1, Lê Văn Tấn Quyển, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T7/372. Gọi S là tập hợp các cặp số thực (α, β) thỏa mãn điều kiện phương trình $x^3 - 6x^2 + \alpha x - \beta = 0$ có ba nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt) lớn hơn 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 8\alpha - 3\beta$ khi $(\alpha, \beta) \in S$.

Lời giải. Gọi a, b, c là ba nghiệm thực của phương trình đã cho. Theo định lý Viète ta có $a + b + c = 6, ab + bc + ca = \alpha$ và $abc = \beta$.

Cách 1. Theo BDT Cauchy có

$$bc \leq \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{(6-a)^2}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } T &= 8\alpha - 3\beta = 8(ab + bc + ca) - 3abc \\ &= 8a(b+c) + bc(8-3a) = 8a(6-a) + bc(8-3a) \\ &\leq 8a(6-a) + \frac{(6-a)^2}{4}(8-3a) \\ &= -\frac{3a(a-2)^2}{4} + 72 \leq 72. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$. Lúc đó $\alpha = 12, \beta = 8$.

Vậy $T_{\max} = 72$ khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Cách 2. Trước hết ta chứng minh BDT sau:

$$(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) \leq abc \quad (*)$$

Thật vậy, không giảm tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ thì $a+b-c > a-b+c > b+c-a$.

• Nếu $b+c-a < 0$ thì BDT (*) hiển nhiên đúng.

• Nếu $b+c-a > 0$ thì ta có

$$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c) > 0$$

$$b^2 \geq b^2 - (c-a)^2 = (b-c+a)(b+c-a) > 0$$

$$c^2 \geq c^2 - (a-b)^2 = (c-a+b)(c+a-b) > 0.$$

Nhân ba BDT trên theo vế, chú ý rằng a, b, c không là số âm, ta được (*).

Trở lại bài toán, kết hợp (*) và định lý Viète ta có

$$abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$$

$$\Leftrightarrow abc \geq (6-2a)(6-2b)(6-2c)$$

$$\Leftrightarrow 3abc \geq -72 + 8(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha - 3\beta \leq 72.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Lúc đó $\alpha = 12, \beta = 8$.

Vậy $T_{\max} = 72$ khi $\alpha = 12$ và $\beta = 8$.

Nhận xét. 1) Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán trên và đa số cho lời giải đúng. Một số bạn sử dụng BDT Schur (xem THPT số 384, T6.2006):

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0,$$

$$\text{dẫn đến } (a+b+c)^3 - 4(a+b+c)(ab+bc+ca) + 9abc \geq 0.$$

Từ đó suy ra $T_{\max} = 72$.

2) Một số bạn nhận xét đúng rằng bài toán không cần giả thiết ba nghiệm thực lớn hơn 1 mà chỉ cần các nghiệm không âm là đủ. Các bạn sau đây có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Phạm Đức Nam, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Phúc:** Trương Mạnh Tuấn, 12A1, THPT Ngô Gia Tự; **Trần Bá Trung**, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nguyễn Mạnh Quân**, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Phú Yên:** Dương Xuân Vinh, 11A1, THPT Phan Đình Phùng, Sông Cầu; **Đóng Tháp:** Huỳnh Vĩnh Sang, 11A1, THPT Thị xã Sa Đéc; **Quảng Ngãi:** Lê Nguyễn Khánh, 10 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Trần Thành Luân**, 10A3, THPT Số 1 Đức Phổ; **Phú Thọ:** Nguyễn Quốc Hùng, 9E, THPT Văn Lang, Việt Trì; **Bắc Ninh:** Đỗ Vũ Thạch, 9A, THPT Yên Phong; **Nguyễn Bá Tiến**, 10A1, THPT Thuận Thành Số 1; **Hải Phòng:** Nguyễn Hữu Định, 11B4, THPT Phạm Ngũ Lão, Thủy Nguyên; **Thái Bình:** Tạ Minh Tùng, Thôn Đoài, Thụy Trình, Thái Thụy; **Hà Thành Trung**, 10 T1, khối THPT chuyên Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội; **Nghệ An:** Lang Văn Thành, 12A, Trường BT VH Hữu nghị Việt - Lào, Hà Tây.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T8/372.** Cho tam giác nhọn ABC với Q là tâm đường tròn Euler của nó. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với bán kính R cắt AQ, BQ, CQ lần nữa tại M, N, P theo thứ tự.

Chứng minh rằng $\frac{1}{QM} + \frac{1}{QN} + \frac{1}{QP} \geq \frac{3}{R}$.

Lời giải. (Theo bạn *Trần Văn Hạnh*, 11A5, THPT Ninh Giang, **Hải Dương**).

Gọi G, H theo thứ tự là trọng tâm và trực tâm tam giác ABC . Ta có kết quả quen thuộc sau

đây: O, G, Q, H thẳng hàng và $\overline{OG} = \frac{1}{3}\overline{OH}$;

$$\overline{OQ} = \frac{1}{2}\overline{OH}. \text{ Suy ra } OG \leq OQ \quad (1)$$

Mặt khác $AQ \cdot QM = R^2 - OQ^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{QM} = \frac{AQ}{R^2 - OQ^2} \Rightarrow \frac{R}{QM} = \frac{AQ \cdot AO}{R^2 - OQ^2}$$

$$\geq \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{AO}}{R^2 - OQ^2}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{R}{QN} \geq \frac{\overline{BQ} \cdot \overline{BO}}{R^2 - OQ^2}; \quad \frac{R}{QP} \geq \frac{\overline{CQ} \cdot \overline{CO}}{R^2 - OQ^2}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{R}{QM} + \frac{R}{QN} + \frac{R}{QP}$$

$$\geq \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{AO} + \overline{BQ} \cdot \overline{BO} + \overline{CQ} \cdot \overline{CO}}{R^2 - OQ^2}$$

$$= \frac{(\overline{AO} + \overline{OQ})\overline{AO} + (\overline{BO} + \overline{OQ})\overline{BO} + (\overline{CO} + \overline{OQ})\overline{CO}}{R^2 - OQ^2}$$

$$= \frac{3R^2 + 3\overline{OQ}(\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO})}{R^2 - OQ^2} = \frac{3R^2 + 3\overline{OQ} \cdot \overline{GO}}{R^2 - OQ^2}$$

$$= \frac{3R^2 - 3\overline{OQ} \cdot \overline{OG}}{R^2 - OQ^2} \geq \frac{3R^2 - 3\overline{OQ}^2}{R^2 - OQ^2} = 3 \text{ (do (1))}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{QM} + \frac{1}{QN} + \frac{1}{QP} \geq \frac{3}{R}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $Q \equiv G \Leftrightarrow O \equiv H \Leftrightarrow \triangle ABC$ đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này và đều giải đúng. Tuy nhiên một số lời giải còn dài.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Hà Nội: *Phạm Đức Nam*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, *Trần Nhật Tân*, 12A1, *Trần Thế Khải*, 10A1, khối THPT chuyên ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** *Vũ Thanh Tú*, 11A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Ninh Bình:** *Lương Văn Thiện*, 10T, THPT Lương Văn Tụy; **Quảng Ninh:** *Đặng Thu Hương*, 11T, THPT chuyên Hạ Long; **Kiên Giang:** *Vũ Đại Nghĩa*, 11T, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Hưng*, 11T, THPT Lê Khiết.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T9/372.** Tìm phần nguyên của A , biết

$$\text{rằng } A = \sqrt[n]{1 - \frac{x}{2008}} + \sqrt[m]{1 + \frac{x}{2008}}$$

với x là số thực thuộc đoạn $[-2008; 2008]$, m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $m \geq n \geq 2$.

Lời giải.

• Nếu $x = 2008$ hoặc $x = -2008$ thì $[A] = 1$.

• Nếu $x = 0$ thì $[A] = 2$.

• Nếu $-2008 < x < 0$ hoặc $0 < x < 2008$ thì đặt

$y = \frac{x}{2008}$, ta chuyển về xét phần nguyên của

$$A = \sqrt[n]{1 - y} + \sqrt[m]{1 + y} \text{ với } -1 < y < 1 \text{ và } y \neq 0.$$

$$\text{Do } \max\{1 - y, 1 + y\} > 1 \text{ nên } A > 1 \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho $n - 1$ số 1 và một số $1 - y$ (với $0 < 1 - y \neq 1$) ta có

$$\sqrt[n]{1 - y} < \frac{n - 1 + 1 - y}{n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{1 - y} < 1 - \frac{y}{n}.$$

Tương tự với $0 < 1 + y \neq 1$ ta có

$$\sqrt[m]{1 + y} < \frac{m - 1 + 1 + y}{m} \Leftrightarrow \sqrt[m]{1 + y} < 1 + \frac{y}{m}.$$

$$\text{Từ đó } A = \sqrt[n]{1 - y} + \sqrt[m]{1 + y} < 2 + y \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \quad (2)$$

Xét các trường hợp sau:

1) Với $m = n$ thì từ (1) và (2) có $1 < A < 2$ nên $[A] = 1$.

2) Với $m > n \geq 2$ thì $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} < 0$.

a) Nếu $0 < y < 1$ ($0 < x < 2008$). Lúc đó từ (1) và (2) có $1 < A < 2$ nên $[A] = 1$.

b) Nếu $-1 < y < 0$ ($-2008 < x < 0$). Lúc đó

$$2 + y \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) = 2 + |y| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) < 2 + \frac{|y|}{n} < 2 + \frac{1}{2} < 3.$$

Từ (1) và (2) có $1 < A < 3$ nên $[A]$ bằng 1 hoặc bằng 2.

Chẳng hạn với $x = -2007$, $n = 2$ thì $[A] = 1$ nếu $3 \leq m \leq 14$, còn $[A] = 2$ nếu $m \geq 15$.

Kết luận. 1) Với $x = -2008$, hoặc $0 < x \leq 2008$, hoặc $m = n$ thì $[A] = 1$.

2) Với $x = 0$ thì $[A] = 2$.

3) Với $-2008 < x < 0$ và $m > n \geq 2$ thì $[A]$ bằng 1 hoặc bằng 2 tùy thuộc vào các giá trị của x , m , n . $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể không dùng BĐT Cauchy. Trong trường hợp $0 < x < 2008$ ta sử dụng BĐT $\left(\frac{a+b}{2} \right)^n < \frac{a^n + b^n}{2}$ với $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a \neq b$, $n \geq 2$, còn với $-2008 < x < 0$ thì so sánh các căn thức.

2) Nhiều bạn chỉ cho kết quả $1 < A < 3$ dẫn đến $[A]$ bằng 1 hoặc bằng 2 mà không xét các trường hợp riêng.

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Vũ Minh Thắng, 10T1, khối PTCTT ĐHSP Hà Nội; **Nam Định:** Nguyễn Văn Quý, 9A, THCS Hải Hậu; **Thanh Hóa:** Đinh Quang Lộc, Nguyễn Thái Hoàn, A3, THPT Hậu Lộc I; **Nghe An:** Đoàn Văn Tùng, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III.

VIỆT HẢI

★ **Bài T10/372.** Gọi S là tập hợp các bộ n ($n > 1$) số thực $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn điều kiện

$$3 \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2 = 502 \quad (1)$$

a) Chứng minh rằng

$$\min_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i| \leq \sqrt{\frac{2008}{n(n^2-1)}} \quad (2)$$

b) Hãy xây dựng bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn điều kiện (1) và đạt dấu bằng ở điều kiện (2).

Lời giải. Giả sử $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là các số thực thỏa mãn điều kiện (1). Không mất tính tổng quát (do vai trò của $a_1, a_2, \dots, a_n$ trong bài toán là như nhau) ta giả sử $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

a) Đặt $p = \min_{1 \leq i \leq n-1} (a_{i+1} - a_i)$. Khi đó với mọi

$1 \leq i < j \leq n$, ta có

$$a_j - a_i = (a_j - a_{j-1}) + (a_{j-1} - a_{j-2}) + \dots + (a_{i+1} - a_i) \geq (j-i)p.$$

$$\text{Do đó } \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)^2 \geq \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)^2 \right) \cdot p^2 \quad (3)$$

Chú ý

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)^2 &= (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \\ &= n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \\ &\leq n \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2 = \frac{502 \cdot n}{3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Áp dụng (4) ta có

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)^2 &= n \cdot \sum_{i=1}^n i^2 - \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 \\ &= n \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{n^2(n+1)}{12} (4n+2-3(n+1)) = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Từ (3), (4), (5) suy ra } \frac{502 \cdot n}{3} \geq \frac{n^2(n^2-1)}{12} \cdot p^2.$$

$$\text{Bởi vậy } p^2 \leq \frac{2008}{n(n^2-1)}.$$

Như vậy bất đẳng thức (2) đã được chứng minh.

b) Từ (3), (4), (5) ta thấy bất đẳng thức (2) đạt được dấu bằng khi và chỉ khi $a_{i+1} - a_i = p$ với

$$\text{mọi } 1 \leq i \leq n-1 \text{ và } \sum_{i=1}^n a_i = 0 \quad (6)$$

$$\text{Đặt } d = \sqrt{\frac{2008}{n(n^2-1)}}.$$

Khi đó (6) $\Leftrightarrow a_i = a_1 + (i-1)d$, với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Ta có

$$\sum_{i=1}^n a_i = n a_1 + (1+2+\dots+(n-1))d = n a_1 + \frac{(n-1)n}{2}d = 0$$

Suy ra $a_1 = -\frac{(n-1)d}{2}$.

Như vậy, nếu ta sắp xếp $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ thì có duy nhất một bộ n số như thế mà bất đẳng thức (2) đạt được dấu bằng. $\square$

<Nhận xét. Mặc dù đây là bài toán có nhiều tính toán phức tạp nhưng vẫn có nhiều bạn học sinh tham gia giải và có lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Đức Lập, 10C, THPT Tam Nông;
Bắc Ninh: Nguyễn Bá Tiến, 10A1, THPT Thuận Thành 1;
Hà Nội: Nguyễn Vương Linh, 10A1 Tin, PTCT-Tin, ĐHKHTN – ĐHQG;
Vĩnh Phúc: Nguyễn Mạnh Quân, 9C, THCS Vĩnh Tường;
Ninh Bình: Lương Văn Thiện, 10CT, THPT chuyên Lương Văn Tụy;
Nghệ An: Đoàn Văn Tùng, 11A1, THPT Quỳnh Lưu 3;
Đà Nẵng: Hoàng Bùi Khánh, Lê Đình Toàn, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn;
Bến Tre: Lê Phúc Lữ, 11T1, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T11/372.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[1; +\infty)$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $f(1) = \frac{1}{4.2008}$,

ii) $f(x) + 2007(f(x))^2 = f(x+1)$

với mọi $x \in [1; +\infty)$.

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \dots + \frac{f(n)}{f(n+1)} \right)$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Ta viết điều kiện ii) dưới dạng

$$2007(f(x))^2 = f(x+1) - f(x) \quad (1)$$

hay

$$\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{1}{2007} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x+1)} \right) \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $f(x+1) \geq f(x), \forall x \geq 1$ và từ (2), lần lượt thay $x = 1, 2, \dots, n$, rồi lấy tổng, ta thu được

$$\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \dots + \frac{f(n)}{f(n+1)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2007} \left(\frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2007} \left(4.2008 - \frac{1}{f(n+1)} \right) \\ &= \frac{4.2008}{2007} - \frac{1}{2007.f(n+1)} \end{aligned} \quad (3)$$

Dãy số $(f(n))$ là một dãy tăng và do

$$f(1) = \frac{1}{4.2008} \text{ nên là một dãy số dương. Suy}$$

ra tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = a, \quad 0 < a \leq +\infty.$$

Nếu a hữu hạn thì từ (1) suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2007(f(n+1))^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n),$$

hay $2007.a^2 = a - a = 0$, suy ra $a = 0$. Điều này không xảy ra.

Vậy nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = +\infty$ và vì vậy từ (3)

ta thu được

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \dots + \frac{f(n)}{f(n+1)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4.2008}{2007} - \frac{1}{2007.f(n+1)} \right) = \frac{4.2008}{2007}. \quad \square \end{aligned}$$

<Nhận xét. 1) Đề bài T11/372 không chính xác. Xin được sửa lại để như trên. Tòa soạn thành thật xin lỗi bạn đọc.

2) Đây là một bài toán chứa đựng kiến thức về phương trình hàm và dãy số. Thực ra đối với bài toán đã cho chỉ cần xét dãy số trên tập các số nguyên dương là đủ.

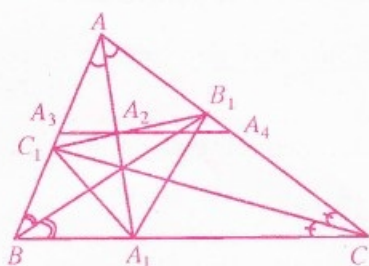
NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/372.** Các đường phân giác trong AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC có chu vi p cắt các đoạn thẳng B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tương ứng tại A_2, B_2, C_2 . Đường thẳng qua A_2 song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại A_3, A_4 . Đường thẳng qua B_2 song song với CA cắt BC, BA theo thứ tự tại B_3, B_4 . Đường thẳng qua C_2 song song với AB cắt CA, CB theo thứ tự tại C_3, C_4 . Chứng minh rằng

$$AB_4 + BC_4 + CA_4 + BA_3 + CB_3 + AC_3 \leq p.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.



Giả sử $BC = a, AC = b, AB = c, p = a + b + c$.

Vì $A_3A_4 \parallel BC$ nên

$$\frac{BA_3}{c} = \frac{CA_4}{b} = 1 - \frac{AA_2}{AA_1} = \frac{BA_3 + CA_4}{b + c} \quad (1)$$

Áp dụng tính chất đường phân giác, ta có

$$\frac{AC_1}{AB} = \frac{AC}{AC + BC} \Rightarrow AC_1 = \frac{bc}{a + b}.$$

$$\text{Tương tự } AB_1 = \frac{bc}{a + c}.$$

Sử dụng công thức đường phân giác cho $\triangle ABC$ và $\triangle AB_1C_1$, ta thấy

$$AA_1 = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}; \quad AA_2 = \frac{2AB_1 \cdot AC_1 \cos \frac{A}{2}}{AB_1 + AC_1}.$$

$$\text{Do đó } \frac{AA_2}{AA_1} = \frac{b + c}{2a + b + c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{BA_3 + CA_4}{b + c} = 1 - \frac{b + c}{2a + b + c} = \frac{2a}{2a + b + c}.$$

Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta nhận được

$$\begin{aligned} BA_3 + CA_4 &= \frac{2a(b + c)}{2a + b + c} \leq \frac{\left(\frac{2a + (b + c)}{2}\right)^2}{2a + b + c} \\ &= \frac{2a + b + c}{4} \end{aligned} \quad (3)$$

Hoàn toàn tương tự

$$AB_4 + CB_3 \leq \frac{2b + a + c}{4} \quad (4)$$

$$BC_4 + AC_3 \leq \frac{2c + a + b}{4} \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) suy ra

$$AB_4 + BC_4 + CA_4 + BA_3 + CB_3 + AC_3 \leq a + b + c = p$$

(đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hay tam giác ABC đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Để đi đến bất đẳng thức cần chứng minh, điều cần thiết là biểu diễn được tỉ số $\frac{AA_2}{AA_1}$ qua độ dài các cạnh của tam giác ABC .

Ngoài cách sử dụng tính chất và công thức đường phân giác trong tam giác để đi đến hệ thức (2), ta còn có thể sử dụng một trong các kết quả sau:

• Với M, N, P là các điểm cùng nằm trên một đường

thẳng d và $\frac{NM}{MP} = \frac{\beta}{\alpha}$ ($\alpha + \beta \neq 0$), còn O là điểm bất kì

$$(O \notin d) \text{ thì } \overrightarrow{OM} = \frac{\alpha \cdot \overrightarrow{ON} + \beta \cdot \overrightarrow{OP}}{\alpha + \beta}.$$

• $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}$ (xem cuốn Tuyển tập 5 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, NXBGD, trang 120).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả:

Hà Nội: Trần Thế Khải, 10A1 Toán, Trần Nhật Tân, 12A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN – ĐHQG, Nguyễn Sơn Tùng, 11A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì; **Quảng Ninh:** Đặng Thu Hương, 11 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Bắc Ninh:** Trần Anh Tuấn, 10A1, THPT Thuận Thành 1; **Vĩnh Phúc:** Kim Đình Sơn, 10A1, Nguyễn Hoàng Hải, 11A1, Nguyễn Khánh Duy, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** Hà Phương Anh, 12A1, THPT chuyên Hà Nam; **Nam Định:** Nguyễn Văn Quý, 9A, THCS Hải Hậu, Trần Thị Hồng Vân, 11A, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đà Nẵng:** Lê Văn Tấn Quyền, 10A2, Nguyễn Đức Tâm, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tấn Hưng, 11T, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** Phạm Quang Thịnh, 9I, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa; **Bến Tre:** Lê Phúc Lữ, 11T, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá; **TP. Hồ Chí Minh:** Bùi Trần Long, 10T, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài L1/372.** Về phía đầu của một con tàu đang chuyển động với gia tốc không đổi $2,00 \text{ m/s}^2$, người ta đặt một máy phóng bóng tennis. Máy phóng ra một quả bóng với vận

tốc 25,0 m/s đối với tàu và hướng về phía đuôi con tàu. Quả bóng đạt được độ cao 10,0m. Bỏ qua sức cản của không khí. Hỏi

a) Độ lớn góc ném (góc tạo bởi phương ném và sàn tàu) là bao nhiêu?

b) Điểm chạm sàn tàu cách máy phóng bao xa?

Lời giải. a) Chọn hệ quy chiếu gắn với con tàu sao cho trục Oy hướng thẳng đứng lên trên và trục Ox ngược hướng chuyển động của con tàu. Quả bóng chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ và lực quán tính $\vec{F}_q = -m\vec{a}$.

Phương trình chuyển động của quả bóng là

$$x = v_0 \cos \alpha t \pm \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

Phương trình (1) lấy dấu + nếu tàu chuyển động nhanh dần đều và lấy dấu - nếu tàu chuyển động chậm dần đều.

Tại thời điểm quả bóng đạt độ cao cực đại thì vận tốc theo phương thẳng đứng bằng không nên ta có

$$0 = v_0 \sin \alpha - g t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Thay biểu thức của t_1 vào phương trình (2) ta rút ra

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2gy}{v_0^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}}$$

Thay $g = 10 \text{ m/s}^2$, $h = 10 \text{ m}$, $v_0 = 25 \text{ m/s}$ vào

biểu thức trên ta tìm được $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

hay $\alpha \approx 34,45^\circ$.

b) Thời gian chuyển động của quả bóng là

$$t = 2t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Thay vào phương trình (1) ta có

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \pm \frac{2av_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

Thay số vào biểu thức trên, ta được

• $x \approx 66,3 \text{ m}$, nếu tàu chuyển động nhanh dần đều.

• $x \approx 50,3 \text{ m}$, nếu tàu chuyển động chậm dần đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** Trong số các lời giải gửi về Tòa soạn chỉ có bạn Nguyễn Ngọc Duy, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi là xét đủ hai trường hợp và có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/372.** Một xylanh

đặt thẳng đứng có tiết diện

$S = 40 \text{ cm}^2$ được chia làm hai

ngăn B và C bởi một pittông

(hình vẽ). Trọng lực tác dụng

lên pittông có độ lớn $F =$

60 N . Lúc đầu hai ngăn B và

C chứa khí sao cho pittông nằm đúng chính

giữa xylanh và thể tích mỗi ngăn là $V = 2,4 \text{ l}$.

Áp suất của khí ở ngăn B là $p = 1,5 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$.

Sau đó người ta cho thêm khí vào ngăn B để

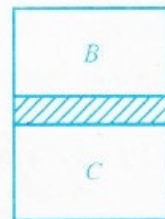
tăng áp suất khí ở ngăn B lên gấp đôi.

Pittông dịch chuyển xuống dưới (ma sát

không đáng kể). Tính công mà khí ở ngăn B

đã thực hiện để đẩy pittông xuống dưới. Nhiệt

độ của khí ở ngăn C coi như không đổi.



Lời giải. Gọi p_B , p_C , p theo thứ tự là áp suất ban đầu của ngăn B, ngăn C và của pittông.

Theo bài ra ta có $p_C = p_B + p$ với $p = \frac{F}{S}$, ở

đây F là trọng lực của pittông, còn S là tiết diện của xylanh. Gọi A_1 là công nén của khí

ở ngăn C, ta có

$$A_1 = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_C}{V'_C} = p_C V_C \ln \frac{p'_C}{p_C}$$

trong đó V_C , p_C là thể tích và áp suất ở ngăn

C lúc đầu; V'_C , p'_C là thể tích và áp suất ở

ngăn C sau khi đã tăng áp suất ở ngăn B lên

gấp đôi.

Ta cũng có $p'_C = 2p_B + p$. Suy ra

$$A_1 = (p_B + p)V_C \ln \left(\frac{2p_B + p}{p_B + p} \right) \\ = \left(p_B + \frac{F}{S} \right) V_C \ln \left(\frac{2p_B S + F}{p_B S + F} \right).$$

Gọi A_2 là công của trọng lực pittông, ta có

$A_2 = F \Delta h$, ở đây Δh là quãng đường dịch chuyển của pittông. Do nhiệt độ của khí ở ngăn C không đổi nên

$$p_C V_C = p'_C V'_C.$$

$$\text{Do đó } V'_C = \frac{p_C V_C}{p'_C} = \frac{(p_B + p)}{2p_B + p} V_C.$$

$$\text{Suy ra } \Delta V = V_C - V'_C = \frac{p_B}{2p_B + p} V_C.$$

$$\text{Từ đây ta tính được } \Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{p_B}{S(2p_B + p)} V_C.$$

$$\text{Vậy } A_2 = F \Delta h = \frac{F p_B V_C}{2p_B S + F}.$$

Gọi A là công mà khối khí ngăn B đã thực hiện, ta có

$$A = A_1 - A_2 \\ = \left(p_B + \frac{F}{S} \right) V_C \ln \left(\frac{2p_B S + F}{p_B S + F} \right) - \frac{F p_B V_C}{2p_B S + F}.$$

Thay số ta tìm được: $A \approx 17,2 \text{ J}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Mạnh Quân, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Nguyễn, 12A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Diệu Thúy, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Nghệ An:** Nguyễn Trung Thành, 10A5 - K48, khối THPT chuyên, Đại học Vinh.

NGUYỄN VĂN THUẬN

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Trong lời giải của bài T4/371, có một lập luận chưa được chính xác là: "Do về trái của BĐT (1) không đổi trong phép hoán vị vòng quanh a, b, c nên có thể giả thiết $a \geq b \geq c > 0$ ". Thực ra thì một biểu thức không đổi trong phép hoán vị vòng quanh a, b, c thì chỉ có thể giả thiết được một trong ba số là max (hoặc

min) của ba số đó. Do đó để lời giải bài T4/371 được đầy đủ, ta cần chứng minh thêm BĐT (1) trong trường hợp: $a \geq c \geq b > 0$.

Trong trường hợp này chứng minh như sau:

Do $a \geq c \geq b > 0$ nên $a^2 - b^2 \geq 0, c^2 - b^2 \geq 0, \sqrt{a+c} \geq \sqrt{a+b} \geq \sqrt{b+c} > 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{b+c}} + \frac{b^2 - c^2}{\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 - a^2}{\sqrt{a+b}} \\ & \geq \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a+b}} + \frac{b^2 - c^2}{\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 - a^2}{\sqrt{a+b}} \\ & = \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{a+b}} + \frac{b^2 - c^2}{\sqrt{c+a}} \\ & \geq \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{a+c}} + \frac{b^2 - c^2}{\sqrt{c+a}} = 0. \end{aligned}$$

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

Bạn hiểu ĐƯỜNG... (Tiếp trang 11)

Tác lòng cố quốc tha hương
Đường kia nổi nọ ngổn ngang bởi bởi;...)

11) Thuật ngữ ra đường, ra ngoài đường (trái nghĩa với về nhà), chỉ sự thoát li khỏi gia đình họ hàng, mà quan hệ với xã hội bên ngoài.

(Con lành con ở cùng bà
Váng mình sốt mảy con ra ngoài đường;
Ra đường bà nọ bà kia
Về nhà không khỏi cái nia cái sàng;...)

12) Chỉ tính chất của một hoạt động của con người giống như tính chất của con đường về ra (Đường tơ kẻ tóc; Đường kim mới chỉ; Đường ngay lẽ phải;...)

Các bạn sau đã đưa ra nhiều thí dụ hay, được nhận tặng phẩm:

Nguyễn Thị Hiền, 9A, THCS Vũ Kiệt, Thuận Thành, **Bắc Ninh**; Nguyễn Hữu Trọng, xóm Nội, xã Mão Điền, Thuận Thành, **Bắc Ninh**; Sâm Thị Hoa, bản Viêng, Sơn A, Văn Chấn, **Yên Bái**.

VĂN KHANH

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/376. (For 6th grade) Write the numbers 8^{2008} and 125^{2008} consecutively. What is the number of decimal digits of the resulting number?

T2/376. (For 7th grade) Find a rational number $\frac{a}{b}$ such that the following three conditions are satisfied

- i) $-\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < -\frac{2}{5}$;
- ii) $11a + 5b = 26$;
- iii) $200 < |a| + |b| < 230$.

T3/376. Find all non-zero natural numbers n such that the number $A = \frac{1.3.5.7...(2n-1)}{n^n}$ is an integer, here the numerator of A is the product of the first n odd numbers.

T4/376. Prove that

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{3}{2}(a+b+c-1),$$

where a, b, c are positive real numbers such that $abc = 1$. When does equality hold?

T5/376. In a right triangle ABC with right angle at A , the altitude AH , the median BM , and the angle-bisector CD meet at a common point. Determine the ratio $\frac{AB}{AC}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOL

T6/376. Solve for x
 $\sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x-1} = x^2 - 1.$

T7/376. Let S denote the area of a given triangle ABC , and denote $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Prove the inequality

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq$$

$$16S^2 + \frac{1}{2}a^2(b-c)^2 + \frac{1}{2}b^2(c-a)^2 + \frac{1}{2}c^2(a-b)^2.$$

When does equality hold?

T8/376. Given a triangle ABC with three sides $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ such that $a + c = 2b$, let h_a, h_c be the altitudes from A and C respectively; and let r_a, r_c denote the A -exradius and C -exradius respectively. Prove that

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/376. The positive real numbers a, b, c, x, y , and z are such that

$$\begin{cases} cy + bz = a \\ az + cx = b \\ bx + ay = c. \end{cases}$$

Find the smallest possible value of the expression

$$P = \frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + \frac{z^2}{1+z}.$$

T10/376. Let f be a continuous function on $\mathbb{R}$ such that $f(2010) = 2009$ and $f(x).f_4(x) = 1$ for all $x \in \mathbb{R}$, (where $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$). Determine the value of $f(2008)$.

T11/376. Let $u_1, u_2, \dots, u_n$ ($n > 2$) be a sequence of positive real numbers such that

i) $\frac{1004}{k} = u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n$ for some positive integer k ;

ii) $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 2008$.

Show that it is possible to select k elements from the set (u_n) such that in this collection of k numbers, the smallest one is at least half of the largest.

T12/376. Consider the circle (O) and three collinear points X, Y, H that are not on this circle such that $\overline{HX}, \overline{HY} \neq \mathcal{H}_{H((O))}$. A straight line d through H meets (O) at two points M and N . MX and NY intersect with (O) again at P and Q respectively. Show that as the line d through H varies, the line connecting P and Q always passes through a fixed point.

Translated by LE MINH HA



Kì thi OLYMPIC Toán Rumani 2008

DÀNH CHO LỚP 7

Câu 1. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$, đường cao AD , E là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC . Giả sử F là một điểm trên đoạn DE . Chứng minh rằng các đường thẳng AF và BF vuông góc với nhau khi và chỉ khi $EF \cdot DC = BD \cdot DE$.

Câu 2. Một hình chữ nhật có thể chia được thành 200 hoặc 288 hình vuông bằng nhau bởi các đường thẳng song song với các cạnh. Chứng minh rằng hình chữ nhật trên

có thể chia được thành 392 hình vuông bằng nhau.

Câu 3. Giả sử p, q, r là ba số nguyên tố sao cho $5 \leq p < q < r$. Biết rằng $2p^2 - r^2 \geq 49$ và $2q^2 - r^2 \leq 193$, tìm p, q, r .

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O , $AB \neq BC$. Đường thẳng qua O vuông góc với BD cắt các đường thẳng AB và BC theo thứ tự tại E và F . M và N lần lượt là trung điểm các cạnh CD và AD . Chứng minh rằng $FM \perp EN$.

DÀNH CHO LỚP 8

Câu 1. Một khối tứ diện có độ dài các cạnh là các số nguyên dương có tích độ dài hai cạnh đối diện bất kì đều bằng 6. Chứng minh rằng tứ diện đó là một hình chóp tam giác đều mà các cạnh bên tạo với mặt đáy một góc không nhỏ hơn 30° .

Câu 2. a) Ta gọi một dãy gồm bốn chữ số chẵn là *dãy chấp nhận được* nếu trong đó không có chữ số nào xuất hiện quá hai lần. Hỏi có bao nhiêu dãy chấp nhận được?

b) Với mỗi số tự nhiên $n \geq 2$, kí hiệu d_n là số cách ghép với các chữ số chẵn thành một bảng n dòng và 4 cột sao cho

- 1) Mỗi hàng đều là một dãy chấp nhận được.
- 2) Dãy số 2, 0, 0, 8 xuất hiện đúng một lần trong bảng đó.

Tìm các giá trị của n sao cho số $\frac{d_{n+1}}{d_n}$ là một số nguyên.

Câu 3. Cho $a, b \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b} \leq 1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3}.$$

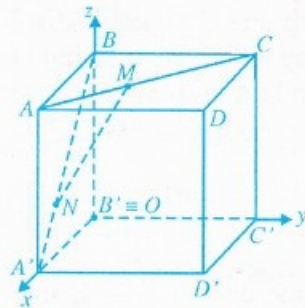
Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh $A'D'$, $A'B'$ và $A'A$ lần lượt lấy các điểm M_1, N_1 và P_1 . Trên các cạnh CB, CD và CC' lần lượt lấy các điểm M_2, N_2 và P_2 . Giả sử d_1 là khoảng cách giữa các đường thẳng M_1N_1 và M_2N_2 ; d_2 là khoảng cách giữa các đường thẳng N_1P_1 và N_2P_2 ; d_3 là khoảng cách giữa các đường thẳng P_1M_1 và P_2M_2 . Giả sử d_1, d_2 và d_3 đôi một khác nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng M_1M_2, N_1N_2 và P_1P_2 đồng quy.

CÁC BẠN NHỚ ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ QUÝ IV NĂM 2008 VÀ CÁC SẢN PHẨM CỦA TẠP CHÍ TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC



BÀI TOÁN VÔ NGHIỆM?

Một bài toán hình học không gian có nội dung:
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .
Lấy hai điểm M và N theo thứ tự trên AC và $A'B$ sao cho $AM = A'N = t$ ($0 \leq t \leq a\sqrt{2}$).
Tìm giá trị nhỏ nhất của MN khi M và N lần lượt chuyển động trên AC và $A'B$.



Một học sinh đã giải bài toán trên bằng phương pháp tọa độ như sau:

Lập hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ sao cho O trùng B' , trục Ox chứa A' , trục

Oy chứa C' và trục Oz chứa B (hình vẽ). Khi đó $A(a; 0; a)$, $C(0; a; a)$, $A'(a; 0; 0)$,

$$B(0; 0; a), M\left(a - \frac{t}{\sqrt{2}}; \frac{t}{\sqrt{2}}; a\right),$$

$$N\left(a - \frac{t}{\sqrt{2}}; 0; \frac{t}{\sqrt{2}}\right) \text{ nên } \overrightarrow{AC} = (-a; a; 0),$$

$$\overrightarrow{A'B} = (-a; 0; a), \overrightarrow{MN} = \left(0; -\frac{t}{\sqrt{2}}; \frac{t}{\sqrt{2}} - a\right).$$

Do MN nhỏ nhất khi và chỉ khi MN là đường vuông góc chung của AC và $A'B$, nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{at}{\sqrt{2}} = 0 \\ a\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - a\right) = 0. \end{cases}$$

Ta thấy hệ này vô nghiệm. Vậy giá trị nhỏ nhất của MN không tồn tại. Bạn hãy cho biết ý kiến của mình về lời giải trên. Còn cách giải của bạn thế nào?

LÊ QUỐC HÁN
(Nghệ An)

Giải đáp PHƯƠNG TRÌNH có nghiệm duy nhất?

(Đề đăng trên THPT số 373 tháng 7.2008)

Nhiều bạn đã nhận xét đúng rằng lời giải phạm sai lầm ở những điểm sau:

- Điều kiện xác định $x > -10$ là chưa chặt chẽ. Ở đây cần điều kiện $x + 10 > 0$ và $x^2 > 0$. Do đó $x > -10$ và $x \neq 0$.

- Phép biến đổi sau đây không đúng

$$(1) \Leftrightarrow \lg(x+10) + \lg x = 2 - \lg 4 (!)$$

Việc quan niệm $2\lg 4 = 2 - \lg 4$ là sai, vì

$$2\lg 4 = \lg 16; 2 - \lg 4 = \lg \frac{10^2}{4} = \lg 25.$$

$$\text{Hơn nữa } \frac{1}{2}\lg x^2 = \lg x \text{ chỉ khi } x > 0.$$

Lời giải đúng (theo cách của nhiều bạn) như sau:

Điều kiện xác định: $x > -10$ và $x \neq 0$. Với điều kiện trên thì

$$(1) \Leftrightarrow \lg(x+10) + \lg |x| = 16 \\ \Leftrightarrow (x+10) \cdot |x| = 16 \quad (2)$$

$$\text{Nếu } x > 0 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow x(x+10) = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 16 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = -5 + \sqrt{41} \text{ (Do } x > 0).$$

- Nếu $-10 < x < 0$ thì

$$(2) \Leftrightarrow -x(x+10) = 16 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = -8 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy PT đã cho có ba nghiệm là $x = -5 + \sqrt{41}$; $x = -2$; $x = -8$.

Các bạn sau đây có lời giải đúng, lời bình hay:

Khuông Mạnh Tuấn, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, **Vĩnh Phúc**; **Phạm Phú Hoàn**, 11A4, THPT Lý Nhân, **Hà Nam**; **Lê Văn Giang**, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**; **Nguyễn Quốc Hưng**, 12A1, THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu, TP. Long Xuyên, **An Giang**; **Đỗ Đức Long**, 12A, THPT chuyên Quang Trung, TX. Đồng Xoài, **Bình Phước**; **Dương Văn An**, 12A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa, **Bà Rịa - Vũng Tàu**; **Ngô Đức Vĩnh Phước**, 12A1, THPT Thống Nhất A, **Đồng Nai**.

PHẠM THỊ THÀNH
(Hà Nội)

Kết quả CUỘC THI VUI...

(Tiếp bài 3)

2) Đoàn tàu A đi sang phải. Đầu máy B cùng 10 toa rời khỏi đường rẽ đi sang trái.



3) Đoàn tàu A lùi lại bên trái, tách đầu máy A ra để kéo 10 toa của B và đẩy vào đường rẽ.



4) Đầu máy A trở ra kéo 30 toa của mình sang phải. Đầu máy B kéo 10 toa lùi lại móc với 10 toa ra khỏi chỗ rẽ và đi sang trái.



5) Đoàn tàu A lùi lại bên trái, tách đầu máy A ra để kéo nốt 10 toa của B và đẩy vào đường rẽ.



6) Đầu máy A trở ra kéo 30 toa của mình sang phải. Đầu máy B kéo 20 toa lùi lại móc với 10 toa ra khỏi chỗ rẽ và đi sang trái. Cả hai đoàn tàu sẽ tiếp tục cuộc hành trình của mình.



Bài 6.

VẬN ĐỘNG VIÊN ĐIỀN KINH YÊU TOÁN

Giả sử số thứ tự của người vận động viên đó là x , số vận động viên tham dự là y ($100 \leq y \leq 500$). Theo giả thiết, tổng tất cả các số của các

vận động viên đăng kí là $A = \frac{y(y+1)}{2}$ và

tổng các số đăng kí nhỏ hơn hoặc bằng x là $B = \frac{x(x+1)}{2}$.

Khi đó tổng các số đăng kí lớn hơn x là $A - B$. Theo giả thiết $A - B = B - x$, từ đó có

$$2x^2 = y(y+1) \quad (*)$$

Mặt khác $2y = z^2$, với $100 \leq y \leq 500$, nên y có thể nhận các giá trị 128, 162, 200, 242, 288, 338, 392, 450.

Kết hợp với (*), ta tìm được $x = 204$, $y = 288$.

Kết luận. Số người tham gia cuộc thi là 288, số đăng kí của vận động viên yêu toán là 204.

DANH SÁCH CÁC BẠN ĐOẠT GIẢI Cuộc thi vui Giải trí ngày hè 2008

GIẢI NHẤT. (1 giải)

Lê Uyên Thảo, 7³, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hoà;

GIẢI NHÌ. (2 giải)

1. Trần Văn Hạnh, Đội 9, Nghĩa An, Ninh Giang, Hải Dương;

2. Lê Thị Nguyệt, 11 Tự nhiên 1, THPT Văn Giang, Hưng Yên.

GIẢI BA. (6 giải)

1. Nguyễn Thị Hằng, 10A4, THPT Tân Lập, Đan Phượng, Hà Nội;

2. Nguyễn Công Khôi, 11A1, THPT Thuận Thành I, Bắc Ninh;

3. Nguyễn Văn Dũng, Đường 6, Thôn Tân Trại I, Vĩnh Giang, Vĩnh Linh, Quảng Trị;

4. Nguyễn Văn Thắng, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An;

5. Vũ Việt Tuấn Anh, 11A1, THPT Hắc Dịch, Tân Thành, Bà Rịa - Vũng Tàu;

6. Nguyễn Ngọc Phiên, 10 Toán - Tin, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi.

GIẢI KHUYẾN KHÍCH. (9 giải)

1. Trần Văn Quý, 11A1, THPT Lê Thành Phương, Phú Yên;

2. Nguyễn Đình Thi, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hoà, Phú Yên;

3. Hà Đức Giang, 10A1, THPT B Nghĩa Hưng, Nam Định;

4. Hoàng Văn Đông, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An;

5. Dương Hoàng Huy, Số 1, Tổ 5, Khối 10, TTr Eatlung, Cư jut, Đắk Nông;

6. Ngô Đặng Tuấn, 10A2, THPT Võ Giur, Hoài Ân, Bình Định;

7. Nguyễn Đình Nhâm, 10A4, K48, Khối THPT chuyên ĐH Vinh, Nghệ An;

8. Nguyễn Tuấn Linh, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, Bắc Ninh;

9. Trương Đình Đức, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An.

THTT

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRÉ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 376(10.2008)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35144272, 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC
TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,
TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,
PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,
TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,
GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY,
GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Vô Quốc Bá Cẩn – Sử dụng đẳng thức để chứng minh bất đẳng thức.
 - 3 **Đề thi vào lớp 10 chuyên toán trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, năm học 2008 – 2009.**
 - 4 **Lời giải đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2007 – 2008.**
 - 6 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Thịnh Thị Bạch Tuyết – Sử dụng chiều biến thiên của hàm số tìm điều kiện về số nghiệm của phương trình.
 - 7 **Toán học & đời sống – Math and Life**
Nguyễn Văn Thiêm – Góc tốt nhất để bắn xa nhất.
 - 8 **Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Hồ Quang Vinh – Ứng dụng của một hệ thức hình học trong tam giác.
 - 11 **Câu lạc bộ – Math Club**
 - 12 **Từ kho tàng toán học – From Math Treasure**
Trần Việt Hùng – Về cách lập ma phương.
 - 14 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Trần Văn Hình – Khai thác một bài toán hình học lớp 9.
 - 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/376, ..., T12/376, L1/376, L2/376.
 - 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.**
Giải các bài của số 372.
 - 29 **Nhìn ra thế giới – Around the World**
Kì thi Olympic Toán Rumani 2008
 - 30 **Sai lầm ở đâu – Where's Mistake?**
- Bìa 3. Kết quả Cuộc thi vui Giải trí ngày hè – Đáp án Đợt 2.

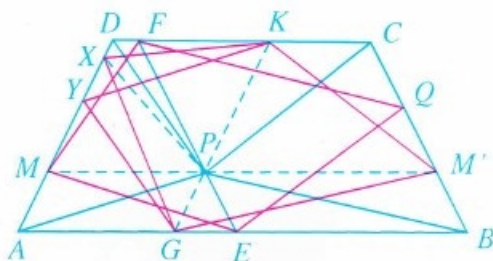
Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.
Trị sự, phát hành : HOÀNG THÀNH ĐỨC, VŨ ANH THƯ

Mỹ thuật : MINH THO
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

Kết quả CUỘC THI VUI GIẢI TRÍ NGÀY HÈ (Đáp án ĐỢT 2)

LTS. Trên tạp chí THPT số 375, tháng 9 năm 2008 đã đăng đáp án của ba bài toán vui trên số báo 371. Trong số này chúng tôi tiếp tục đăng đáp án của ba bài toán còn lại trên số báo 372 và danh sách các bạn đoạt giải Cuộc thi vui Giải trí ngày hè 2008. Xin chúc mừng các bạn đoạt giải và hẹn gặp lại các bạn vào kì hè năm sau.

Bài 4. TẠO TỨ GIÁC



Hình 1

Qua P kẻ đường thẳng song song với AB , cắt AD ở M và cắt BC ở M' . Qua P kẻ đường thẳng song song với BC , cắt AB ở E và cắt CD ở F . Qua P kẻ đường thẳng song song với AD , cắt AB ở G và cắt CD ở K . Dựng các hình bình hành $PEQC$, $PAYK$; dựng hình thang cân $PGAX$. Từ tính chất của các hình bình hành $PBQF$, $PDYG$ và các hình thang cân $PMAE$, $PGBM'$, $PKCM'$, $PFDM$, $GYXK$ trên hình 1 ta có

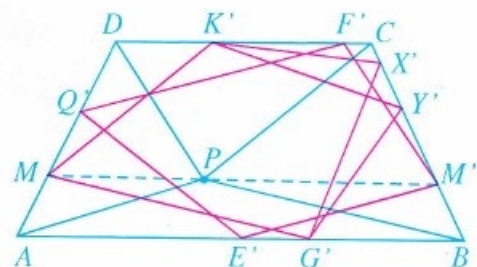
$$a = PA = ME = XG = KY;$$

$$b = PB = QF = GM';$$

$$c = PC = QE = KM';$$

$$d = PD = MF = KX = GY.$$

Từ đó các tứ giác $MEQF$, $KXGM'$, $KYGM'$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Lấy đối xứng ba tứ giác này qua đường trung trực của AB ta được ba tứ giác $M'E'Q'F'$, $K'X'G'M'$, $K'Y'G'M'$ (hình 2) cũng thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Vậy bài toán có 6 nghiệm. Chú ý rằng nếu kích thước của hình thang cân $ABCD$ hoặc vị trí của điểm P khác với hình vẽ đã cho ở đề ra thì số nghiệm có thể thay đổi.



Hình 2

Bài 5. XE LỬA TRÁNH NHAU

Ta kí hiệu: $A(B)$ là đầu máy của đoàn tàu bên trái (bên phải), k_A là k toa của A , $A + k_A$ là đầu máy A gắn với k toa của A .

Trạng thái ban đầu



1) Đoàn tàu A lùi lại. Đoàn tàu B tiến sang trái và lùi tách 10 toa cuối vào đường rẽ, rồi lùi 20 toa còn lại về chỗ cũ; sau đó tách đầu máy B và đi vào chỗ rẽ gắn với 10 toa ở đó.

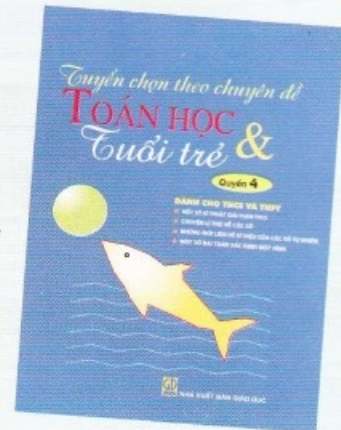


(Xem tiếp trang 31)

SÁCH MỚI

QUYỂN 4

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

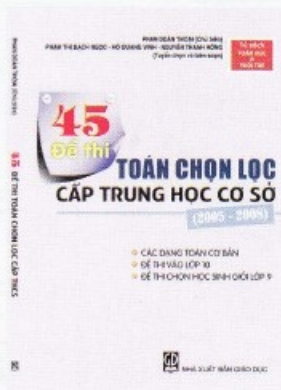


Cuốn sách bao gồm các bài viết được chọn lọc trên tạp chí THPT (chủ yếu từ năm 1992 đến 2007), gồm bốn chương dành cho THCS và THPT.

- **Chương I. Một số kĩ thuật giải toán Trung học cơ sở**, gồm hai phần: Phần một nêu nhiều cách giải bài toán chưa căn thức; phần hai trình bày cách vẽ hình phụ, cách vận dụng các công thức vào tính toán và chứng minh tính chất của hình phẳng.
- **Chương II. Chuyện lí thú về các số**, giới thiệu về thuật toán và máy tính, nêu những câu chuyện thú vị về các số nguyên, số nguyên tố, về tính quy luật của các dãy số.
- **Chương III. Những mối liên hệ kì diệu của các số tự nhiên**, trình bày về ma phương, hình vuông latin,... Tiếp theo là một số hệ thức liên hệ giữa các số tự nhiên.
- **Chương IV. Một số bài toán xác định một hình**, gồm hai phần: Phần một trình bày việc xác định góc phẳng nhị diện, sau đó đưa ra một số cách tính thể tích của hình tứ diện không gấp trong sách giáo khoa; phần hai giới thiệu một số bài toán hình học tổ hợp.

Sách dày 200 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bán lẻ: 38.500 đồng.

Sách sắp xuất bản



45 ĐỀ THI TOÁN CHỌN LỌC TRUNG HỌC CƠ SỞ (2005-2008)

Sách tuyển chọn 45 đề thi chọn lọc cấp THCS từ năm 2005 đến 2008 của các tỉnh, thành phố có phong trào học toán tốt. Nội dung cuốn sách gồm ba phần:

- **Phần một:** Giới thiệu các dạng toán cơ bản thường gặp.
- **Phần hai:** 45 Đề thi (gồm các đề thi vào lớp 10 và đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9).
- **Phần ba:** Hướng dẫn giải các đề thi.

Sách dày 180 trang, khổ 17 x 24cm. Giá bán lẻ: 29.500 đồng.

Các bạn có thể mua các ấn phẩm trên tại tòa soạn THPT, các sở sở bưu điện, các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương, các cửa hàng sách của NXB Giáo dục. Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI.

Để biết thêm chi tiết xin liên hệ với Tòa soạn:

ĐT - FAX: 04.35121606. Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT10M8

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ti CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2008

Giá : 6000 đồng

Sáu nghìn đồng