



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
8 2008
Số 374

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 45

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272, (04)5121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre



July 10-22, 2008
Madrid
Spain

Đoàn Việt Nam
tại Olympic Toán học Quốc tế
lần thứ 49



49th International Mathematical Olympiad





Kì thi OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ lần thứ 49

HÀ HUY KHOÁI

(Trưởng đoàn Việt Nam)

Kì thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) lần thứ 49 diễn ra tại Madrid, Tây Ban Nha từ ngày 10 đến 22/7/2008. Đăng kí tham gia IMO lần này có 103 nước và khu vực, trong đó có 100 đội tuyển và 3 nước cử quan sát viên. Tuy nhiên, đến phút cuối cùng, do nhiều nguyên nhân khác nhau nên chỉ có 97 đội tuyển tham gia thi tài. Mặc dù vậy, đây vẫn là con số kỉ lục của mọi kì thi IMO từ trước đến nay.

Từ ngày 10 đến 14/7, Hội đồng Quốc tế (gồm các trưởng đoàn) họp để soạn thảo đề thi, thông qua đáp án, thang điểm và bản dịch đề thi ra các thứ tiếng. Thí sinh làm bài trong hai ngày 16 và 17/7. Theo quy định, mỗi ngày có 3 bài, làm trong thời gian 4 giờ 30 phút, mỗi bài được tối đa 7 điểm. Việc chấm thi, xét giải diễn ra trong các ngày từ 18 đến 20/7. Lễ bế mạc, trao thưởng (với sự có mặt của Thái tử và Công chúa Tây Ban Nha) được tiến hành vào ngày 21/7/2008.

Đoàn Việt Nam tham dự IMO lần thứ 49 gồm 5 thầy giáo: Hà Huy Khoái (Trưởng đoàn), Nguyễn Khắc Minh (Phó trưởng đoàn), Mạc Đăng Nghị, Phan Tuấn Cộng, Trịnh Văn Hoa (Quan sát viên) và 6 học sinh: Lê Ngọc Anh (THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa), Nguyễn Phạm Đạt (Chuyên Toán-Tin, ĐHSP Hà Nội), Dương Trọng Hoàng (Chuyên Toán-Tin, ĐH Vinh), Đỗ Thị Thu Thảo (THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương), Đặng Trần Tiến Vinh (Chuyên Toán-Tin, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh) và Hoàng Đức Ý (THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa).

Trong tổng số 521 thí sinh tham gia, có 47 thí sinh được trao Huy chương Vàng (tổng điểm từ 31 đến 42), 100 thí sinh được trao Huy chương Bạc (tổng điểm từ 22 đến 30) và 113 thí sinh được trao Huy chương Đồng (tổng điểm từ 15 đến 21).

Kết quả của đoàn học sinh Việt Nam như sau:

Họ và tên	Điểm bài 1	Điểm bài 2	Điểm bài 3	Điểm bài 4	Điểm bài 5	Điểm bài 6	Tổng điểm	Huy chương
Lê Ngọc Anh	7	4	7	7	7	0	32	Vàng
Nguyễn Phạm Đạt	7	1	0	7	7	1	23	Bạc
Dương Trọng Hoàng	7	5	0	7	1	0	20	Đồng
Đỗ Thị Thu Thảo	7	7	0	7	7	1	29	Bạc
Đặng Trần Tiến Vinh	7	7	0	7	0	0	21	Đồng
Hoàng Đức Ý	7	7	7	6	0	7	34	Vàng

Với tổng điểm toàn đoàn là 159, đoàn Việt Nam xếp thứ 12/97 đoàn tham gia. Cũng cần nhắc lại rằng, việc xếp thứ hạng này là không chính thức, hơn nữa, các đoàn cũng chỉ lệch nhau rất ít điểm (chẳng hạn đoàn Nhật Bản xếp thứ 11 được 160 điểm, Đoàn Hungary xếp thứ 10 được 163 điểm). Xếp thứ hạng từ thứ nhất đến thứ ba là các Đoàn Trung Quốc, Nga và

Mỹ. Đặc biệt có 3 thí sinh đạt điểm tối đa 42/42 (2 thí sinh của Trung Quốc và 1 thí sinh của Mỹ). Nga là đoàn duy nhất đoạt 6 Huy chương Vàng.

Sau đây là sáu bài toán thi.

(Xem tiếp trang 28)



Hành trình đi đến BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

$$\frac{1}{c} + \frac{3}{2}c \geq \frac{1}{4}c^2 + \frac{9}{4}, \text{ với } c \in (0; \sqrt{3}) \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = 1$.

Cộng (1), (2) và (3) theo vế ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{2}(a+b+c) \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{4} + \frac{27}{4} = \frac{15}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bất đẳng thức (BĐT) có điều kiện là một mảng khó thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi THCS và kì thi vào lớp 10 THPT chuyên. Thông qua việc xây dựng bài toán tổng quát để giúp các em hệ thống được phần nào các bài toán BĐT có điều kiện là điều cần thiết. Dưới đây, ta sẽ bắt đầu từ một bài toán trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán trường THPT chuyên Vĩnh Phúc năm học 2006 – 2007.

★ **Bài toán 1.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{2}(a+b+c) \geq \frac{15}{2} \quad (*)$$

Lời giải. Cách 1. (đáp án đề thi). Từ giả thiết dễ thấy a, b, c thuộc khoảng $(0; \sqrt{3})$. Trước hết ta chứng minh BĐT sau đây

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{2}a \geq \frac{1}{4}a^2 + \frac{9}{4}, \text{ với } a \in (0; \sqrt{3}) \quad (1)$$

Thật vậy, ta có

$$(1) \Leftrightarrow 4 + 6a^2 \geq a^3 + 9a$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 6a^2 + 9a - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(a-4) \leq 0 \text{ (đúng với } a \in (0; \sqrt{3})).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

Tương tự ta có

$$\frac{1}{b} + \frac{3}{2}b \geq \frac{1}{4}b^2 + \frac{9}{4}, \text{ với } b \in (0; \sqrt{3}) \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = 1$; và

Đây là một bài toán tương đối khó. Bất đẳng thức (1) trong lời giải trên xuất hiện không được tự nhiên. Khi các hệ số trong (*) thay đổi, BĐT (1) cũng thay đổi, các em học sinh sẽ không biết xuất phát từ BĐT nào!

Liệu có phép chứng minh nào phù hợp hơn với học sinh THCS để giải quyết không chỉ bài toán 1 ở trên mà cả một lớp các bài toán dạng này? Bây giờ ta hãy thử đi tìm lời giải khác cho bài toán 1.

Cách 2.

$$\text{Đặt } X = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; Y = a + b + c.$$

Ta sẽ chứng minh $XY^2 \geq 27$.

Thật vậy, với $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

ta có

$$\begin{aligned} XY^2 &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (3 + 2ab + 2bc + 2ca) \\ &= 3X + 2 \left(2(a+b+c) + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b}\right) \geq a;$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right) \geq b;$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) \geq c.$$

$$\text{Đến đây } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c.$$

Kết hợp với (4) ta được

$$XY^2 \geq 3X + 2(2(a+b+c) + (a+b+c)) \\ = 3(X + Y + Y) \geq 9\sqrt{XY^2}.$$

Suy ra $XY^2 \geq 9\sqrt{XY^2}$, dẫn đến $XY^2 \geq 27$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Mặt khác theo BĐT Cauchy

$$X = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \\ \geq \frac{9}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} = 3.$$

Suy ra $X \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Gọi vế trái của (*) là P , ta có

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{2}(a+b+c) = X + \frac{3}{2}Y. \\ = \frac{3}{4}(Y+Y+X) + \frac{1}{4}X \\ \geq \frac{3}{4} \cdot 3\sqrt{XY^2} + \frac{1}{4} \cdot 3 \\ \geq \frac{3}{4} \cdot 3\sqrt{27} + \frac{3}{4} = \frac{15}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Cách giải thứ hai này dẫn chúng ta đến bài toán tổng quát hơn sau đây.

Bài toán 2. Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$; m, n là các số nguyên dương sao cho $2n \geq m$. Chứng minh rằng

$$m(a+b+c) + n\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3(m+n) \quad (**)$$

Lời giải. Gọi vế trái của (**) là T , ta có

$$T = \frac{m}{2}(Y+Y+X) + \left(n - \frac{m}{2}\right)X$$

Với $X = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, $Y = a+b+c$, theo bài toán 1 ta có $X \geq 3$; $XY^2 \geq 27$.

Suy ra

$$T \geq \frac{m}{2} \cdot 3\sqrt{XY^2} + \left(n - \frac{m}{2}\right) \cdot 3 \quad (\text{do } 2n \geq m) \\ \geq \frac{9m}{2} + 3\left(n - \frac{m}{2}\right) = 3(m+n).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Nhận xét. Rõ ràng bài toán 2 là một mở rộng của bài toán 1. Khi $m = 3$ và $n = 2$, bài toán 2 trở về bài toán 1. Ngoài ra, từ bài toán 2 bạn đọc có thể giải quyết được một số BĐT thuộc dạng (**) sau đây.

Với a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\text{a) } a+b+c + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{9}{2};$$

$$\text{b) } \frac{5}{3}(a+b+c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 8;$$

$$\text{c) } 2008(a+b+c) + 1005\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9039.$$

Bài toán 1 liệu có còn mở rộng hơn nữa được không? Rất mong được trao đổi cùng bạn đọc.

TỪ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

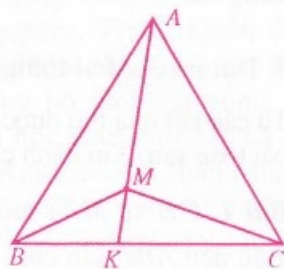
TRỊNH KHÔI
(GV THPT chuyên Bắc Ninh)

Khi gặp một bài toán mà nhanh chóng tìm được ngay lời giải thì chúng ta thường coi đó là một bài toán dễ và ta ít để tâm đến nó nữa. Tuy nhiên, nếu chịu khó suy nghĩ, tìm tòi thì rất có thể ta sẽ khám phá thêm nhiều cách giải hay cũng như nhiều kết quả mới thú vị. Sau đây là một thí dụ minh họa.

1. Bài toán. Cho M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đều ABC . Chứng minh rằng từ ba đoạn MA, MB, MC ta có thể dựng được một tam giác.

Lời giải. Cách 1.

Không giảm tính tổng quát có thể giả sử $MA = \max\{MA, MB, MC\}$. Ta chỉ cần chứng minh $MA < MB + MC$. Gọi K là giao điểm của AM và BC . Do điểm M nằm trong tam giác ABC nên $MA < MK$ và $AK < \max\{AB, AC\} = BC$, hay $MA < BC$ (1)

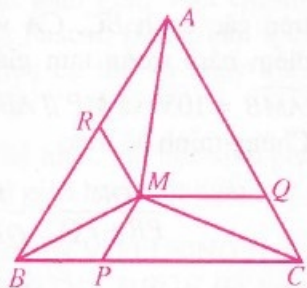


Hình 1

Mặt khác $BC < MB + MC$. Từ đây và (1) suy ra $MA < MB + MC$. Vậy MA, MB, MC là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Cách 2. Trên các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự lấy các điểm P, Q, R sao cho $MP \parallel AB, MQ \parallel BC, MR \parallel CA$ (h. 2).

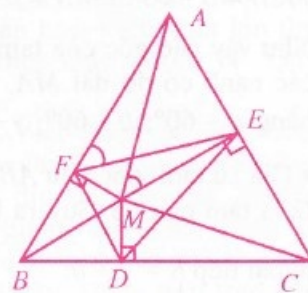
Dễ thấy tam giác PQR có $PR = MB$,



Hình 2

$PQ = MC$ và $QR = MA$, từ đó ta có điều phải chứng minh.

Cách 3. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh BC, CA, AB (h. 3). Ta có tứ giác $MEAF$ nội tiếp trong đường tròn đường kính MA và



Hình 3

$$\frac{AE}{MA} = \sin \widehat{AME} = \sin \widehat{AFE};$$

$$\frac{EF}{AE} = \frac{\sin \widehat{EAF}}{\sin \widehat{AFE}}. \text{ Từ đó}$$

$$\frac{EF}{MA} = \sin \widehat{EAF} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Chứng minh tương tự sẽ thu được

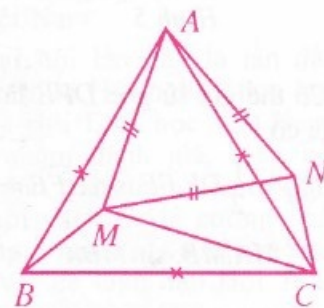
$$\frac{EF}{MA} = \frac{FD}{MB} = \frac{DE}{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Chứng tỏ ba đoạn MA, MB, MC tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác DEF , do đó từ ba đoạn này có thể dựng được một tam giác.

Cách 4. Dựng tam giác đều AMN (h. 4). Ta có $MA = MN$.

$$\begin{aligned} \widehat{CAN} &= \widehat{BAM} \\ &= 60^\circ - \widehat{MAC}. \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle MAB = \triangle NAC$ (c.g.c), dẫn đến $MB = NC$. Rõ ràng tam giác MNC có các cạnh tương ứng bằng MA, MB, MC .



Hình 4

2. Nhìn nhận kết quả

• Gọi tam giác có ba cạnh tương ứng bằng MA, MB, MC là tam giác T .

Đặt $\widehat{BMC} = \alpha, \widehat{CMA} = \beta, \widehat{AMB} = \gamma$, ta có $60^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ$ và $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$.

Xét tam giác MCN (h. 4) ta có

$$\widehat{MCN} = \alpha - 60^\circ; \widehat{CMN} = \beta - 60^\circ; \widehat{MNC} = \gamma - 60^\circ.$$

Như vậy các góc của tam giác T đối diện với các cạnh có độ dài MA, MB, MC tương ứng bằng $\alpha - 60^\circ; \beta - 60^\circ; \gamma - 60^\circ$.

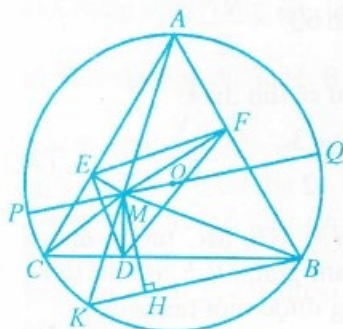
• Giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng a và O là tâm của nó. Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Kí hiệu S là diện tích tam giác T và $MO = d$.

Ta có công thức sau $S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 - 3d^2)$.

Thật vậy, theo (2) ở cách 3 suy ra

$$\frac{S_{DEF}}{S} = \frac{3}{4} \text{ hay } S = \frac{4}{3}S_{DEF}. \quad (3)$$



Hình 5

Kéo dài AM cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại K ; qua M vẽ đường kính PQ (h. 5). Theo tính chất tứ giác nội tiếp, ta có $\widehat{DBM} = \widehat{DFM}$ và $\widehat{KBC} = \widehat{KAC} = \widehat{MFE}$. Từ đó $\widehat{KBM} = \widehat{DFE}$.

Có thể giả sử góc DFE là góc nhọn, theo (2) ta có

$$\begin{aligned} S_{DEF} &= \frac{1}{2} DF \cdot FE \cdot \sin \widehat{DFE} = \frac{3}{8} MA \cdot MB \cdot \sin \widehat{DFE} \\ &= \frac{3}{8} MA \cdot MB \cdot \sin \widehat{MBK} \end{aligned} \quad (3)$$

Kẻ $MH \perp KB$ ($H \in KB$). Ta có

$$\begin{aligned} MH &= MB \cdot \sin \widehat{MBK} = MK \cdot \sin \widehat{MKB} \\ &= MK \cdot \sin \widehat{BCA} = \frac{\sqrt{3}}{2} MK. \end{aligned}$$

Kết hợp với (4) suy ra

$$S_{DEF} = \frac{3\sqrt{3}}{16} MA \cdot MK. \quad (5)$$

Mặt khác từ $\triangle AMQ \sim \triangle PMK$, ta có

$$\frac{MA}{MQ} = \frac{MP}{MK} \text{ hay}$$

$$\begin{aligned} MA \cdot MK &= (R - d)(R + d) \\ &= R^2 - d^2 = \frac{1}{3}a^2 - d^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $S_{DEF} = \frac{\sqrt{3}}{16}(a^2 - 3d^2)$.

Kết hợp với (3) ta có điều phải chứng minh.

• Từ cách 3 cho ta kết quả sau.

Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O . M là một điểm bất kì khác O . Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của M trên hai đường thẳng d và d' . Khi đó tỉ số $\frac{EF}{MO}$ là một hằng số.

3. Đặt ra các bài toán khác

Từ các kết quả thu được, ta có thể giải được các bài toán sau. Xin dành cho bạn đọc tự giải.

Bài 1. Giả sử M là một điểm nằm trong tam giác đều ABC sao cho $\widehat{AMB} = 113^\circ$, $\widehat{BMC} = 123^\circ$. Hãy tính các góc của tam giác có độ dài ba cạnh tương ứng là MA, MB, MC .

Bài 2. Cho M là một điểm nằm trong tam giác đều ABC và nhìn hai đỉnh B và C của tam giác này một góc 150° . Chứng minh rằng ba đoạn MA, MB, MC là độ dài các cạnh của một tam giác vuông.

Bài 3. Các điểm P, Q và R theo thứ tự nằm trên các cạnh BC, CA và AB còn M là một điểm nằm trong tam giác đều ABC sao cho $\widehat{AMB} = 105^\circ$ và $MP \parallel AB, MQ \parallel BC, MR \parallel CA$. Chứng minh hệ thức

$$\frac{QR}{PR + PQ} = \frac{PQ - PR}{QR - PR\sqrt{2}}$$

(Xem tiếp trang 30)



Số hữu tỉ và số vô tỉ

PHÙNG HỒ HẢI
(Viện Toán học Việt Nam)

Các số 1, 2, 3, ... được dùng để đếm cũng như để chỉ số lượng, chẳng hạn: "Người thứ 41" hay "Alibaba và 40 tên cướp". Các số này xuất hiện một cách tự nhiên nên được gọi là số tự nhiên (Số 0 không xuất hiện một cách tự nhiên, ta không nói "Tôi có 0 quả cam" mà nói "Tôi không có cam"). Chú ý rằng trong thực tế, các số luôn đi cùng với một đại lượng nào đó (5 người, 6 quả cam...). Bản thân các số không tồn tại trong thực tế mà chỉ có trong suy nghĩ của chúng ta.

Trong các phép đo đạc, các số tự nhiên không đáp ứng được đủ yêu cầu. Để thực hiện phép đo độ dài người ta phải lấy một độ dài nào đó làm chuẩn (1 mét là độ dài của một cây thước kim loại hiện vẫn còn được lưu giữ trong một Viện Bảo tàng ở Paris, Pháp). Không mấy khi một độ dài ta đo lại dài gấp một số nguyên lần độ dài đơn vị. Vì vậy để đo chính xác người ta chia (đều) độ dài đơn vị ra các phần nhỏ và so sánh xem độ dài cần phải đo dài gấp mấy lần độ dài của một phần nhỏ. Độ dài đơn vị được chia càng nhỏ thì việc đo đạc càng chính xác. Giả sử một độ dài nào đó được tính chính xác bằng phương pháp này, khi đó ta có thể dùng một *phân số* để biểu diễn độ dài đó. Thí dụ, nếu ta chia đơn vị ra m phần nhỏ (bằng nhau) còn độ dài của đoạn AB gấp n lần độ dài của một phần nhỏ thì AB sẽ có độ dài $\frac{n}{m}$. Từ đó xuất hiện tên gọi *số hữu tỉ*.

1. Hệ thập phân

Phát minh ra số 0 thuộc về người Ấn Độ (đến tận thế kỉ XIII người Châu Âu mới biết đến nó). Với phát minh này tất cả các số tự nhiên đều có thể biểu diễn được qua 10 chữ số 0, 1, 2, ..., 9. Tuy nhiên cách biểu diễn này không thật sự hiệu quả đối với số hữu tỉ (chẳng hạn ta không biểu diễn chính xác được đoạn thẳng có độ dài $\frac{1}{3}$). Tuy nhiên, như đã nói ở trên, nếu ta chia càng nhỏ thì việc tính toán của ta càng chính

xác, chẳng hạn số $\frac{1}{3}$ có thể biểu diễn trong hệ thập phân bằng các số 0,333...3 với độ chính xác tùy ý.

Giả thiết rằng ta xây dựng được một dãy vô hạn các chữ số $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sao cho với mọi $n > 1$, số $0, a_1 a_2 \dots a_n$ xấp xỉ phân số $\frac{m}{n}$ với sai số không quá 10^{-n} , khi đó ta nói: *số thập phân vô hạn* $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ biểu diễn số hữu tỉ $\frac{m}{n}$. Chẳng

hạn trong thí dụ trên ta có $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$

Câu hỏi đặt ra là liệu có thể biết biểu diễn thập phân chính xác của một số hữu tỉ bất kì không? Câu trả lời là có. Thực ra, như ta thấy trong thí dụ trên, các chữ số xuất hiện trong biểu diễn thập phân vô hạn của một số hữu tỉ bất kì không xuất hiện một cách tùy ý mà chúng xuất hiện một cách tuần hoàn (bắt đầu từ một lúc nào đó trở đi).

2. Định lí nhỏ Fermat và số thập phân vô hạn tuần hoàn

Nhà toán học Pháp P. Fermat (1601 – 1665) khẳng định rằng (Định lí nhỏ Fermat): p là ước của $(n^p - n)$ với p là số nguyên tố và n là số nguyên dương bất kì. Nếu p không là ước của n thì p là ước của $n^{p-1} - 1$.

Nhà toán học Thụy Sĩ L. Euler (1707 – 1783) đã mở rộng định lí của Fermat như sau: Cho n là một số tự nhiên lớn hơn 1. Gọi $\phi(n)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n . Khi đó với mọi số nguyên a nguyên tố cùng nhau với n ta có n là ước của $a^{\phi(n)} - 1$.

Bằng cách nhân phân số $\frac{m}{n}$ với một lũy thừa của 10 và rút gọn ta có thể giả thiết n và 10 nguyên tố cùng nhau. Theo định lí nhỏ Fermat, n là ước của $10^{\phi(n)} - 1$. Từ đó ta có $\frac{m}{n} = \frac{p}{999\dots 9}$.

Để thấy biểu diễn thập phân của phân số $\frac{p}{999...9}$, với $p < 999...9$ có chu kỳ là chính p (bổ sung thêm một số 0 cần thiết để chu kỳ có độ dài là $\varphi(n)$).
 Chẳng hạn $\frac{2004}{99999} = 0,02004 = 0,0200402004...$

Chú ý. $\varphi(n)$ có thể không là độ dài của chu kỳ ngắn nhất của phân số $\frac{m}{n}$. Có thể chứng minh tính tuần hoàn của một số hữu tỉ bằng nguyên lý Dirichlet, tuy nhiên phép chứng minh này không cho ta thông tin về chu kỳ của biểu diễn.

Chính nhờ tính tuần hoàn trong biểu diễn thập phân của một số hữu tỉ mà ta biết được chính xác biểu diễn thập phân của nó. Ngược lại, dễ thấy rằng một số thập phân vô hạn tuần hoàn xác định một số hữu tỉ.

3. Định lý Pythagore và sự tồn tại của số vô tỉ



Pythagore

Định lý Pythagore là một trong những định lý quan trọng nhất của toán học cổ đại. Nhờ định lý này người ta biết được số $\sqrt{2}$ (hằng số Pythagore) là một số vô tỉ.

Từ mục 2 ta suy ra biểu diễn thập phân của $\sqrt{2}$ là vô hạn không tuần hoàn,

vì vậy không thể biết được toàn bộ biểu diễn thập phân của nó. Ý tưởng chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỉ (phản chứng) có thể được dùng trong chứng minh nhiều số khác là số vô tỉ, đặc biệt là trong chứng minh mệnh đề sau:

Giả sử phương trình $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ với các hệ số nguyên nhận một số không nguyên α là nghiệm. Khi đó α là số vô tỉ.

Nhận xét. Bài toán "Đựng một đoạn thẳng có độ dài là nghiệm của phương trình $x^3 - ax + b = 0$ " tương đương với bài toán nổi tiếng "Chia ba một góc cho trước", mà ta biết rằng không giải được bằng thước và compa. Thậm chí sự tồn tại của đoạn thẳng có độ dài $\sqrt[3]{2}$ cũng không giải được bằng thước kẻ và compa.

4. Số thực

Chúng ta cảm nhận rõ ràng sự tồn tại của số $\sqrt[3]{2}$, tuy nhiên các công cụ toán học mà chúng

ta có không cho chúng ta chứng minh điều này (khác với số $\sqrt{2}$ khi mà chúng ta có thể xây dựng được chính xác số này). Rõ ràng ta có thể xây dựng được các số thập phân: 1; 1,2; 1,25; 1,259; 1,2599... mà lập phương của chúng sai khác 2 ngày càng ít. Từ đó, chúng ta mặc nhiên công nhận sự tồn tại của số $\sqrt[3]{2}$ cùng với biểu diễn thập phân vô hạn không tuần hoàn của nó, tức là ta có một *Tiên đề mới, Tiên đề về tính đầy đủ của tập số thực*: Số thập phân cho bởi một dãy vô hạn các chữ số $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ xác định một số thực (nằm trong đoạn $[0; 1]$).

Chú ý. Số 0,99...9... xác định số 1.

Một cách trực quan, trên một đường thẳng ta có định một điểm 0 và một điểm khác là điểm 1, độ dài đoạn $[0; 1]$ là độ dài đơn vị. Như vậy với mỗi điểm A trên đường thẳng, độ dài của $[0; A]$ theo đơn vị này cho ta một số thực, hữu tỉ hoặc vô tỉ. Số thực này biểu diễn trong hệ thập phân bằng một số thập phân vô hạn hoặc hữu hạn. Tiên đề trên khẳng định điều ngược lại, mỗi số thập phân xác định một số thực, và như vậy một điểm trên đường thẳng. Do vậy, tiên đề trên còn được gọi là *Tiên đề về tính liên tục của tập số thực (hay đường thẳng thực)*.

5. Xấp xỉ số vô tỉ bằng số hữu tỉ

Tiên đề về tính liên tục của tập số thực cho ta một cách xác định số thực về mặt nguyên tắc chứ không cho phép ta miêu tả cụ thể về nó (vì ta không biết được tất cả các chữ số trong khai triển thập phân của một số vô tỉ). Đối với những số vô tỉ là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên tính chất của chúng có thể được khai thác qua các đa thức đó. Câu hỏi đặt ra là: *Liệu một số vô tỉ bất kỳ có là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên nào đó không?*

Câu trả lời là "Không"! Một số vô tỉ được gọi là *số đại số* nếu nó là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên. Số vô tỉ mà không là *số đại số* được gọi là *số siêu việt*. Có hai phương pháp chứng minh sự tồn tại của *số siêu việt*. Phương pháp thứ nhất dựa vào việc xấp xỉ các số vô tỉ bằng số hữu tỉ mà ta sẽ xét ở mục này.

Ta coi phép xấp xỉ của số vô tỉ α bằng một phân số tối giản $\frac{p}{q}$ là tốt khi đại lượng $|q\alpha - p|$ là nhỏ.

Nói chung, độ chính xác của xấp xỉ bằng khai triển thoả mãn bất đẳng thức $|q\alpha - p| < 1$.



L. Dirichlet

Định lí xấp xỉ của nhà toán học Đức L. Dirichlet (1805 – 1859) khẳng định rằng với mọi số vô tỉ α tồn

tại phân số $\frac{p}{q}$ sao cho

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{q}.$$

Thật vậy, cố định một số tự nhiên $n > 1$ và xét tập hợp các giá trị $k\alpha - [k\alpha]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai giá trị $k \neq l$ sao cho

$$|(k\alpha - [k\alpha]) - (l\alpha - [l\alpha])| \leq \frac{1}{n}$$

hay nói cách khác, tồn tại số nguyên p sao cho

$$|(k-l)\alpha - p| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{k-l}.$$

Câu hỏi: Liệu có thể thay q bằng một lũy thừa lớn hơn 1 của nó trong bất đẳng thức trên hay không? từng là một câu hỏi lớn của Số học. Năm 1955, nhà toán học người Anh K. Roth đã chứng minh câu trả lời là phủ định. Công trình này đã mang lại cho ông giải thưởng Fields năm 1958.



K. Roth



L. Liouville

Đối với các số đại số, năm 1844, nhà toán học Pháp L. Liouville (1809 – 1882) đã đưa ra một câu trả lời phủ định khác mà hệ quả của nó là sự tồn tại của các số siêu việt. Giả sử α là một nghiệm vô tỉ của một phương trình đa thức với hệ số nguyên

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, a_i \in \mathbb{Z}.$$

Khi đó tồn tại một số thực dương c sao cho với mọi phân số $\frac{p}{q}$, $q > 0$ ta có bất đẳng thức sau:

$$|q\alpha - p| > \frac{c}{q^{n-1}}.$$

Giả sử $P(x)$ là đa thức có bậc nhỏ nhất nhận α làm nghiệm và do đó $P(x)$ không có nghiệm hữu

tỉ. Chọn $c > 0$ sao cho với mọi $t \in [\alpha - 1; \alpha + 1]$, $|P'(t)| < \frac{1}{c}$.

Theo định lí Rolle, với mọi $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1; \alpha + 1]$

tồn tại $t \in \left[\alpha; \frac{p}{q}\right]$ sao cho

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = P\left(\frac{p}{q}\right) - P(\alpha) = \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) P'(t).$$

$$\text{Từ đó } \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| = \frac{P\left(\frac{p}{q}\right)}{P'(t)} > cP\left(\frac{p}{q}\right).$$

Mặt khác, vì $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên và

$\frac{p}{q}$ không là nghiệm của $P(x)$, ta có

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |q^{-n}(a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \dots + a_{n-1}p + a_n)| > \frac{1}{q^n}.$$

Theo định lí Liouville, nếu α là một số vô tỉ sao cho với mỗi số tự nhiên n tồn tại phân số $\frac{p}{q}$ để

$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$, thì α là một số siêu việt. Một số siêu việt như vậy gọi là số siêu việt Liouville.

Bài tập. Hãy chỉ ra một số siêu việt Liouville.

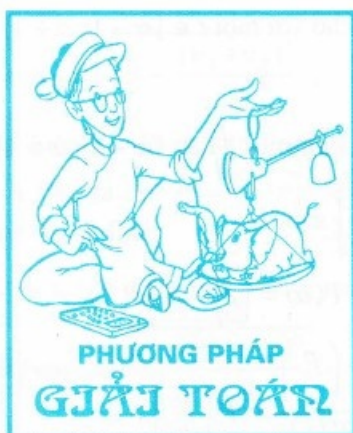
Dựa vào bất đẳng thức của Liouville, chúng ta có thể chỉ ra được vô số số siêu việt. Nhà toán học Đức G. Cantor (1845-1918) còn đưa ra một phương pháp khác cho phép chứng minh rằng hầu hết các số thực đều là số siêu việt. Ông khẳng định rằng

chúng ta có thể liệt kê hết tất cả các số hữu tỉ và vô tỉ đại số nhưng các số thực còn lại (tức là các số siêu việt) thì vẫn còn nhiều đến mức không thể liệt kê ra được. Tuy nhiên cả hai phương pháp đều không giúp chúng ta trả lời câu hỏi liệu e và π là số siêu việt hay số đại số, hay khó hơn nữa là các số e^x và π^x .

Có thể nói việc hiểu hết về các số thực đã đang và sẽ mãi mãi là thách thức lớn đối với Toán học.



G. Cantor



Về bài toán đường tròn TRONG HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ

NGUYỄN ĐỀ
(Hải Phòng)

Trong bài báo này chúng tôi xin giới thiệu một cách biện luận số nghiệm của hệ phương trình (PT) hai ẩn có chứa tham số, một vấn đề mà nhiều bạn đọc quan tâm. Cụ thể là một số hệ có dạng sau:

Dạng 1. Cả hai PT của hệ đều là PT của một đường tròn trong hệ trục tọa độ Oxy.

Dạng 2. Một PT của hệ là phương trình một đường tròn. PT còn lại của hệ là PT của một đường thẳng hoặc PT của một đường cong bậc hai trong hệ trục Oxy.

Đối với dạng 1 thì việc biện luận số nghiệm của hệ PT được quy về việc xét vị trí tương đối của hai đường tròn. Đối với dạng 2 thì chúng ta xét vị trí tương đối của đường tròn với đường thẳng hoặc với đường cong bậc hai. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

★ **Thí dụ 1.** Với những giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1-4m)^2 + (y-1-3m)^2 = 9m^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 = 4 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất?

Lời giải. PT thứ nhất của hệ đã cho là PT đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1+4m; 1+3m)$, bán kính $R_1 = 3|m|$; PT thứ hai của hệ là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(5; 3)$, bán kính $R_2 = 2$.

Để hệ PT có nghiệm duy nhất thì (C_1) và (C_2) phải tiếp xúc với nhau.

Trường hợp 1. Hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau.

Ta có $I_1I_2 = R_1 + R_2$

$$\text{hay } \sqrt{(5-1-4m)^2 + (3-1-3m)^2} = 3|m| + 2.$$

Bình phương hai vế, đi đến

$$4m^2 - 11m - 3|m| + 4 = 0$$

• Nếu $m > 0$, thì (1) có dạng

$$2m^2 - 7m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4} > 0.$$

• Nếu $m < 0$, thì (1) có dạng

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 > 0 \text{ (loại)}.$$

Trường hợp 2. Hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong với nhau, lúc đó có $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4-4m)^2 + (2-3m)^2} = |2-3|m||.$$

Bình phương hai vế, ta được

$$4m^2 - 11m + 3|m| + 4 = 0 \quad (2)$$

• Nếu $m > 0$, thì (2) có dạng

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 > 0.$$

• Nếu $m < 0$, thì (2) có dạng

$$4m^2 - 14m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4} > 0 \text{ (loại)}.$$

$$\text{Đáp số. } m = 1, m = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 2.** Tìm tất cả giá trị của tham số a , sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4 = 4(x+y) \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = a^2 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

Lời giải. Hệ đã cho được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = a^2. \end{cases}$$

Rõ ràng, hai PT của hệ đều là PT đường tròn lần lượt có tâm và bán kính: $I_1(2; 2)$, $R_1 = 2$; $I_2(3; 4)$, $R_2 = |a|$.

Vậy với mỗi giá trị của a , hệ PT có nghiệm duy nhất chỉ khi hai đường tròn đó tiếp xúc trong, hoặc tiếp xúc ngoài.

Áp dụng cách giải Thí dụ 1) ta tìm được giá trị của a thỏa mãn điều kiện bài toán là:
 $a = \pm(\sqrt{5}-2); a = \pm(\sqrt{5}+2)$. $\square$

★ **Thí dụ 3.** Hãy xác định giá trị của tham số b , sao cho với giá trị bất kì của tham số a , hệ PT

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0 \\ ax + y + ab = 0 \end{cases}$$

có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải. Hệ đã cho được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = \frac{45}{4} \\ ax + y + ab = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = \frac{45}{4} \\ ax + y + ab = 0 \end{cases} \quad (2)$$

PT (1) là PT đường tròn có tâm $I\left(\frac{5}{2}; -3\right)$, bán

kính $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; PT (2) là PT đường thẳng (d)

đi qua điểm $M(-b; 0)$. Vậy để hệ PT có hai nghiệm phân biệt với a bất kì, thì điều kiện cần và đủ là điểm M nằm trong đường tròn, nghĩa là

$$MI < R \Leftrightarrow \left(-b - \frac{5}{2}\right)^2 + 3^2 < \frac{45}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < b + \frac{5}{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -4 < b < -1. \square$$

★ **Thí dụ 4.** Tìm tất cả giá trị của tham số a , sao cho hệ PT

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases}$$

có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (2y-a)(x-a) = 2 \\ 4(x-a)^2 + (2y-a)^2 = 12a^2 + 20a \end{cases}$$

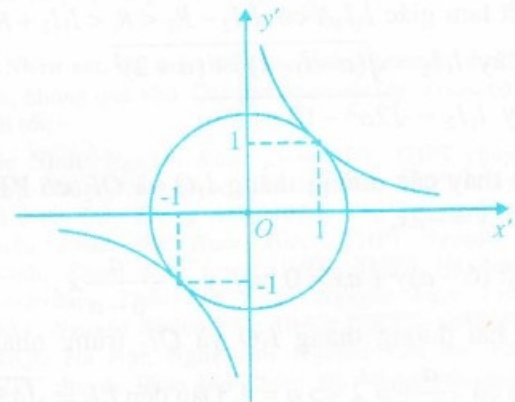
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y - \frac{a}{2}\right)(x-a) = 1 \\ (x-a)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 3a^2 + 5a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'y' = 1 \\ x'^2 + y'^2 = 3a^2 + 5a \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'y' = 1 \\ x'^2 + y'^2 = 3a^2 + 5a \end{cases} \quad (2)$$

ở đây ta đặt $x' = x - a, y' = y - \frac{a}{2}$.

Để ý rằng PT (1) là PT đường hyperbol, còn PT(2) là PT đường tròn có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \sqrt{3a^2 + 5a}$. Bởi vậy hệ PT có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường tròn tiếp xúc với hyperbol tại hai điểm $(1; 1)$ và $(-1; -1)$ (h. 1).



Hình 1

Khi đó $3a^2 + 5a = 2$. Tìm được $a = -2$ hoặc $a = \frac{1}{3}$. $\square$

★ **Thí dụ 5.** Tìm tất cả giá trị của các tham số a và b , sao cho với các giá trị đó hệ PT

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y \\ x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27 \end{cases}$$

có hai nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{x_1 + x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}$$

Lời giải. Hệ đã cho được viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = b^2 \\ (x+6-a)^2 + (y-a)^2 = 3^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = b^2 \\ (x+6-a)^2 + (y-a)^2 = 3^2 \end{cases} \quad (2)$$

Từ hệ PT trên ta thấy (1) là PT đường tròn có tâm $I_1(1; -2)$, bán kính $R_1 = |b|$, còn (2) là PT đường tròn có tâm $I_2(a-6; a)$, bán kính $R_2 = 3$.

Từ ĐK bài ra ta thấy hai đường tròn phải cắt nhau tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Mặt khác lại có

$$x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Vậy nếu O là gốc tọa độ thì

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}; OB = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \text{ Nhưng } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2, \text{ nên } OA = OB.$$

Vì I_1I_2 là trung trực của đoạn AB , bởi vậy ba điểm I_1, O, I_2 thẳng hàng.

Xét tam giác I_1I_2A có $I_1I_2 - R_2 < R_1 < I_1I_2 + R_2$,

$$\text{ở đây } I_1I_2 = \sqrt{(a-6-1)^2 + (a+2)^2}$$

$$\text{hay } I_1I_2 = \sqrt{2a^2 - 10a + 53a}.$$

Dễ thấy các đường thẳng I_1O và OI_2 có PT:

$$I_1O: y = -2x, \\ OI_2: (6-a)y + ax = 0 \text{ hay } y = -\frac{a}{6-a}x.$$

Vì hai đường thẳng I_1O và OI_2 trùng nhau, nên có $\frac{a}{6-a} = 2 \Leftrightarrow a = 4$. Dẫn đến $I_1I_2 = \sqrt{45}$.

$$\text{Suy ra } \sqrt{45} - 3 < |b| < \sqrt{45} + 3 \quad (*)$$

Vậy với $a = 4$ và từ (*) ta có kết quả:

$$b \in (-3 - \sqrt{45}; 3 - \sqrt{45}) \cup (-3 + \sqrt{45}; 3 + \sqrt{45}). \square$$

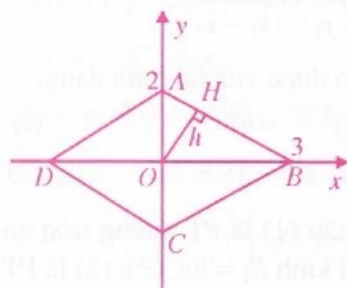
★Thí dụ 6. Với giá trị nào của a thì hệ PT

$$\begin{cases} 2|x| + 3|y| = 6 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

có số nghiệm lớn nhất?

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2|x| + 3|y| = 6 \Leftrightarrow |y| = -\frac{2}{3}|x| + 2 \quad (1)$$



Hình 2

Trong mặt phẳng Oxy , ta vẽ đồ thị của (1), đồ thị này là hình thoi $ABCD$ có tâm $O(0;0)$, $OA=2$, $OB=3$ (h. 2).

Rõ ràng nếu $a > 0$ thì PT thứ hai của hệ là PT đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = \sqrt{a}$. Vậy để hệ có số nghiệm lớn nhất thì đường tròn trên phải cắt mỗi cạnh của hình thoi tại hai điểm. Điều này xảy ra chỉ khi bán kính R của đường tròn lớn hơn khoảng cách từ O đến AB , nhưng bé hơn nửa đường chéo AC của hình thoi.

Giả sử khoảng cách từ O đến AB là $h = OH$, ở đây H là chân đường vuông góc hạ từ O

$$\text{xuống } AB. \text{ Ta có } h = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{6}{\sqrt{13}} < \sqrt{a} < 2, \text{ hay } \frac{36}{13} < a < 4. \square$$

BÀI TẬP

1. Tìm tất cả giá trị của tham số a , sao cho hệ PT

$$\begin{cases} (x-2a-5)^2 + (y-3a+5)^2 = 16 \\ (x-a-2)^2 + (y-2a+1)^2 = 81 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

2. Tìm tất cả giá trị của a , sao cho hệ PT

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 64 - 16x} + \sqrt{x^2 + y^2 + 12y + 36} = 10 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

3. Chứng minh rằng hệ PT sau đây có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 14y - 14 = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 18x + 4y + 85} + \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 12y + 45} = 4\sqrt{13}. \end{cases}$$

4. Cho hệ PT $\begin{cases} x + ay - a = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$

a) Tìm tất cả giá trị của a để hệ PT đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ là các nghiệm của hệ PT đã cho. Chứng minh rằng

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq 1.$$

5. Tìm tất cả giá trị của a , sao cho hệ PT sau đây có đúng bốn nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + |x| - a = 0 \end{cases}$$



MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐẶC BIỆT CỦA TAM GIÁC ĐỀU

TRẦN QUANG HÙNG
(SV K49A1T ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

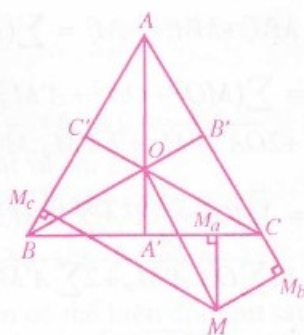
Trong bài báo này chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh một số tính chất đẹp của tam giác đều dựa trên một đẳng thức cơ bản của vectơ và sau đó sẽ mở rộng tương tự cho đa giác đều.

❖ **Bài toán 1.** (Bài toán cơ bản). Cho O là tâm tam giác đều ABC và M là điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO} \quad (*)$$

Lời giải. Cách 1. Chúng ta sẽ dùng các khái niệm diện tích đại số và độ dài đại số. Kí hiệu diện tích đại số các tam giác MBC, MCA, MAB, ABC tương ứng là $[S_a], [S_b], [S_c], [S]$ và AA', BB', CC' là các đường cao của ABC (h. 1).

Khi đó $\frac{[S_a]}{[S]} = \frac{MM_a}{AA'}$.



Hình 1

$$\text{Vì vậy } \overrightarrow{MM_a} = \frac{MM_a}{AA'} \overrightarrow{AA'} = \frac{3[S_a]}{2[S]} \overrightarrow{AO}.$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{MM_b} = \frac{3[S_b]}{2[S]} \overrightarrow{BO}, \quad \overrightarrow{MM_c} = \frac{3[S_c]}{2[S]} \overrightarrow{CO}.$$

$$\text{Kí hiệu } \overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \sum \overrightarrow{MM_a}.$$

Tương tự với các tổng của những số hạng được lấy hoán vị vòng quanh. Lúc đó sử dụng các hệ thức cơ bản về diện tích đại số:

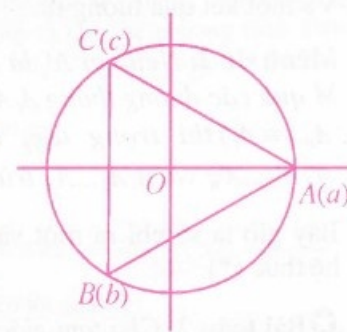
$$[S_a] \overrightarrow{MA} + [S_b] \overrightarrow{MB} + [S_c] \overrightarrow{MC} = \vec{0},$$

$$[S_a] + [S_b] + [S_c] = [S], \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned} \sum \overrightarrow{MM_a} &= \sum \frac{3[S_a]}{2[S]} \overrightarrow{AO} \\ &= \frac{3}{2[S]} \left(\sum [S_a] (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO}) \right) \\ &= \frac{3}{2[S]} \left(\sum [S_a] \overrightarrow{AM} \right) + \frac{3}{2[S]} \left(\sum [S_a] \overrightarrow{MO} \right) = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}. \quad \square \end{aligned}$$

Cách 2. Ta sẽ đưa ra lời giải bằng công cụ số phức.

Chọn hệ tọa độ phức sao cho $A(a), B(b), C(c)$, với các tọa độ a, b, c là ba nghiệm của PT $x^3 = 1$ (h. 2).



Hình 2

Chúng ta đều biết công thức tìm tọa độ hình chiếu $S(s)$ của điểm $M(m)$ tới đường thẳng qua $A(a), B(b)$ là $s = \frac{1}{2}(a+b+m-ab\bar{m})$.

Sử dụng công thức đó, ta thấy nếu $M_a(m_a), M_b(m_b), M_c(m_c)$ theo thứ tự là các hình chiếu của $M(m)$ tới các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng thì

$$m_a = \frac{1}{2}(b+c+m-bc\bar{m}); \quad m_b = \frac{1}{2}(c+a+m-ca\bar{m})$$

$$m_c = \frac{1}{2}(a+b+m-ab\bar{m}).$$

$$\begin{aligned} \text{Nhu vậy } \sum \overrightarrow{MM_a} &= \sum (m_a - m) = \left(\sum m_a \right) - 3m \\ &= a+b+c - \frac{1}{2}\bar{m}(ab+bc+ca) - \frac{3}{2}m. \end{aligned}$$

Dễ thấy $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca=0$, vì a, b, c là các nghiệm của phương trình $x^3=1$.

Do đó $\overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{m} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$. $\square$

◀Nhận xét. Nếu lấy A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng BC, CA, AB ta thấy hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Với lời giải bằng số phức ta có thể mở rộng bài toán tương tự cho đa giác đều n cạnh như sau:

Mệnh đề 1. Cho O là tâm của đa giác đều $A_1A_2...A_n$ và M là điểm bất kì trên mặt phẳng. Gọi M_i lần lượt là các hình chiếu của M trên đường thẳng A_iA_{i+1} ($i=1, 2, ..., n; A_{n+1} \equiv A_1$). Khi đó ta có hệ thức

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + ... + \overrightarrow{MM_n} = \frac{n}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Và một kết quả tương tự.

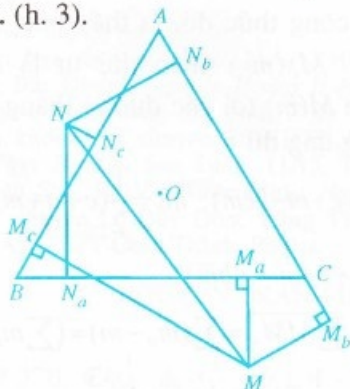
Mệnh đề 2. Nếu gọi A'_i là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng A_iA_{i+1} ($i=1, 2, ..., n; A_{n+1} \equiv A_1$) thì trọng tâm của hai đa giác $A'_1A'_2...A'_n$ và $A_1A_2...A_n$ trùng nhau.

Bây giờ ta sẽ chỉ ra một vài ứng dụng đẹp từ hệ thức (*).

★Bài toán 2. Cho tam giác đều ABC và M, N là hai điểm bất kì trên mặt phẳng. Gọi M_a, N_a theo thứ tự là hình chiếu của M, N trên đường thẳng BC . Các điểm M_b, N_b, M_c, N_c được xác định một cách tương tự. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{M_aN_a} + \overrightarrow{M_bN_b} + \overrightarrow{M_cN_c} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}.$$

Lời giải. (h. 3).



Hình 3

Từ hệ thức (*) ta có

$$\overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO};$$

$$\overrightarrow{NN_a} + \overrightarrow{NN_b} + \overrightarrow{NN_c} = \frac{3}{2}\overrightarrow{NO}.$$

Từ đó $\sum \overrightarrow{M_aN_a} = \sum (\overrightarrow{M_aM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN_a})$

$$= \sum \overrightarrow{M_aM} + 3\overrightarrow{MN} + \sum \overrightarrow{NN_a}$$

$$= -\frac{3}{2}\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{MN} + \frac{3}{2}\overrightarrow{NO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}. \square$$

Hoàn toàn tương tự ta có thể mở rộng kết quả trên cho đa giác đều n cạnh.

★Bài toán 3. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ và M, N là hai điểm bất kì trên mặt phẳng. Gọi M_i, N_i theo thứ tự là hình chiếu của M, N trên đường thẳng A_iA_{i+1} ($i=1, 2, ..., n; A_{n+1} \equiv A_1$). Khi đó ta có hệ thức

$$\overrightarrow{M_1N_1} + \overrightarrow{M_2N_2} + ... + \overrightarrow{M_nN_n} = \frac{n}{2}\overrightarrow{MN}.$$

★Bài toán 4. Gọi O là tâm tam giác đều ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp R và M là điểm bất kì trên mặt phẳng. Gọi M_a, M_b, M_c theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh hệ thức

$$MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = \frac{3}{2}MO^2 + \frac{3}{4}R^2.$$

Lời giải. Gọi A', B', C' theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB , ta có

$$MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = \sum (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M_a})^2$$

$$= \sum (MO^2 + OA'^2 + A'M_a^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA'} + 2\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{A'M_a} + 2\overrightarrow{A'M_a} \cdot \overrightarrow{MO})$$

$$= 3MO^2 + \frac{3}{4}R^2 + \sum A'M_a^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\sum \overrightarrow{OA'}) + 2\sum \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{A'M_a} + 2\sum \overrightarrow{A'M_a} \cdot \overrightarrow{MO} \quad (1)$$

Ở đây $\sum \overrightarrow{OA'} = \vec{0}$ và A', M_a theo thứ tự là các hình chiếu của các điểm O, M trên BC . Vì vậy $\overrightarrow{A'M_a} \cdot \overrightarrow{MO} = -A'M_a^2$ và $\overrightarrow{OA'} \perp \overrightarrow{A'M_a}$ suy ra $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{A'M_a} = 0$. Tương tự với các đỉnh B, C chúng ta sẽ nhận được từ (1):

$$\begin{aligned} & MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 \\ &= 3MO^2 + \frac{3}{4}R^2 + \left(\sum \overrightarrow{A'M_a}\right) \cdot \overrightarrow{MO} \\ &= 3MO^2 + \frac{3}{4}R^2 - \frac{3}{2}MO^2 = \frac{3}{2}MO^2 + \frac{3}{4}R^2. \end{aligned}$$

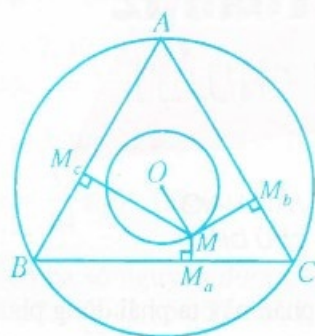
Ở đây chú ý rằng A', B', C' là các hình chiếu của O tới các đường thẳng tương ứng BC, CA, AB .

Từ đó ta có $\sum \overrightarrow{A'M_a} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$. $\square$

Chúng ta có ba kết quả đẹp từ bài toán này.

Mệnh đề 3. Với giả thiết bài toán 3, khi M thuộc đường tròn tâm O bán kính r tùy ý thì ta có hệ thức

$$MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = \frac{3}{2}r^2 + \frac{3}{4}R^2.$$



Hình 4

Mệnh đề 4. Với giả thiết bài toán 3, quỹ tích các điểm M sao cho $MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = k$ (với $k \geq \frac{3}{4}R^2$) là một đường tròn tâm O bán kính bằng $\frac{2}{3}\sqrt{k - \frac{3}{4}R^2}$.

Mệnh đề 5. Với giả thiết bài toán 3, ta có bất đẳng thức $MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 \geq \frac{3}{4}R^2$ với mọi điểm M trên mặt phẳng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv O$.

Bằng cách chứng minh tương tự bài toán 3 ta sẽ có bài toán tổng quát đối với đa giác đều.

✪ **Bài toán 5.** Gọi O là tâm đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ với bán kính đường tròn ngoại tiếp

R và M là điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_i là hình chiếu của M trên đường thẳng A_iA_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n$; $A_{n+1} \equiv A_1$), chứng minh rằng

$$MM_1^2 + MM_2^2 + \dots + MM_n^2 = \frac{n}{2}MO^2 + n\left(\cos^2 \frac{\pi}{2}\right)R^2.$$

Mệnh đề 6. Khi M thuộc đường tròn tâm O bán kính r tùy ý thì

$$MM_1^2 + MM_2^2 + \dots + MM_n^2 = \frac{n}{2}r^2 + n\left(\cos^2 \frac{\pi}{n}\right)R^2.$$

Mệnh đề 7. Với giả thiết bài toán 4, Quỹ tích các điểm M trên mặt phẳng sao cho

$$MM_1^2 + MM_2^2 + \dots + MM_n^2 = k \text{ (với } k \geq n\left(\cos^2 \frac{\pi}{n}\right)R^2)$$

là một đường tròn tâm O bán kính bằng

$$\frac{2}{n}\sqrt{k - n\left(\cos^2 \frac{\pi}{n}\right)R^2}.$$

Mệnh đề 8. Với giả thiết bài toán 4, ta có bất đẳng thức

$$MM_1^2 + MM_2^2 + \dots + MM_n^2 \geq n\left(\cos^2 \frac{\pi}{n}\right)R^2,$$

với mọi điểm M trên mặt phẳng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv O$.

✪ **Bài toán 6.** Cho tam giác đều ABC với M, N là hai điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_a, N_a theo thứ tự là hình chiếu của M, N trên đường thẳng BC . Các điểm M_b, N_b, M_c, N_c được xác định cách tương tự. Chứng minh hệ thức

$$M_aN_a^2 + M_bN_b^2 + M_cN_c^2 = \frac{3}{2}MN^2.$$

Lời giải. Vì M_a, N_a là các hình chiếu của M, N trên đường thẳng BC , nên theo định lý hình chiếu $\overrightarrow{M_aN_a} \cdot \overrightarrow{MN} = M_aN_a^2$. Do đó

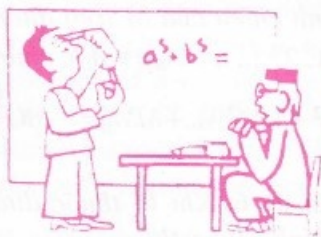
$$\begin{aligned} \sum M_aN_a^2 &= \sum \overrightarrow{M_aN_a} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \cdot \left(\sum \overrightarrow{M_aN_a}\right) \\ &= \overrightarrow{MN} \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}MN^2. \quad \square \end{aligned}$$

Lời giải bài toán 6 tuy đơn giản song chúng ta có thể nhận được một kết quả đẹp sau đây:

(Xem tiếp trang 30)

DIỄN ĐÀN

DAY HỌC TOÁN



Như đã giới thiệu về sách giáo khoa (SGK) Toán 11 trong số tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tháng 6 năm 2007, do việc hoán đổi một số chương từ lớp 12 xuống lớp 11 và ngược lại, nên chương trình và SGK Toán 12 có nhiều thay đổi so với SGK Toán 12 hiện hành.

Về sách giáo khoa Toán 12 THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

TRẦN VĂN HẠO
(Tổng chủ biên)

Trước hết về *Giải tích*, sau khi chuyển hai chương *Đạo hàm* và *Tổ hợp - Xác suất* xuống lớp 11 để phục vụ cho việc học hai môn Vật lý và Sinh học, SGK Toán 12 tiếp nhận chương *Hàm số lũy thừa, hàm số mũ, hàm số logarit*, vốn ở SGK Toán 11 trước đây.

Có ý kiến cho rằng nên trình bày chương *Hàm số lũy thừa, hàm số mũ, hàm số logarit* ở ngay đầu lớp 12 rồi sau đó trình bày chương *Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số* thì trọn vẹn hơn. Tuy nhiên trong chương trình chuẩn, chỉ khảo sát và vẽ đồ thị đối với các hàm số bậc ba, bậc bốn trùng phương và hàm số $\frac{ax+b}{cx+d}$, vì vậy nên để

chương này từ đầu năm, ngay sau chương *Đạo hàm* ở cuối lớp 11 thì liên tục hơn.

Đối với chương *Hàm số lũy thừa, hàm số mũ, hàm số logarit*, sau khi học sinh đã học lũy thừa với số mũ nguyên dương ở THCS, SGK *Giải tích 12* trình bày tiếp lũy thừa với số mũ

nguyên. Sau đó, từ phương trình $x^n = b$ với n nguyên và $n \geq 2$, SGK giới thiệu căn bậc n của một số thực, rồi trình bày lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tuy nhiên, đến đây có sự khác biệt mà bạn đọc cần lưu ý. Theo chương trình, ta có thể viết $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ nhưng không thể viết $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}}$, vì chương trình quy định rằng đối với lũy thừa với số mũ hữu tỉ thì cơ số phải dương! Chính vì vậy, đến chương *Nguyên hàm - Tích phân và ứng dụng*, việc tính tích phân theo cách sau đây là không hợp lệ:

$$\int_{-2}^1 \sqrt[3]{x} dx = \int_{-2}^1 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_{-2}^1 = \frac{3}{4} (1 - \sqrt[3]{16}).$$

Để tính tích phân này ta phải dùng phương pháp đổi biến số. Đặt $x = t^3$ thì $\sqrt[3]{x} = t$, $dx = 3t^2 dt$, nên ta có

$$\int_{-2}^1 \sqrt[3]{x} dx = \int_{\sqrt[3]{-2}}^1 3t^3 dt = \frac{3}{4} t^4 \Big|_{\sqrt[3]{-2}}^1 = \frac{3}{4} (1 - \sqrt[3]{16}).$$

Tuy nhiên, chương trình chuẩn cũng quy định việc tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số thì trong đề ra phải cho trước phép đổi biến số đó.

Cuối lớp 12, SGK trình bày chương *Số phức* để hoàn chỉnh sự phát triển của tập hợp số từ số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ, số thực đến số phức.

Về *Hình học* lớp 12, phần *Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng* ở SGK hiện hành đã được đưa xuống lớp 10. Thay vào đó, SGK theo chương trình chuẩn trình bày hai chương mới là *Khối đa diện* và *Khối tròn xoay*. Một số khái niệm trước đây học sinh đã tiếp nhận một cách trực quan như Thể tích khối đa diện

hay Hai đa diện bằng nhau thì bây giờ được trình bày một cách chính xác hơn.

Chương cuối của SGK Hình học 12 trình bày *Phương pháp tọa độ trong không gian*, mà trọng tâm là phương trình mặt phẳng và phương trình đường thẳng trong không gian.

Tương tự *phương pháp tọa độ* trong mặt phẳng, SGK trình bày hệ tọa độ trong không gian, tọa độ của điểm và của vectơ, tích vô hướng của hai vectơ trong không gian. Tuy nhiên, theo chương trình chuẩn, SGK không trình bày tích có hướng (tích vectơ) như một nội dung chính thức, mà chỉ đề cập đến khi trình bày vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Do đó SGK không cung cấp các công thức liên quan đến tích có hướng để tính diện tích và khoảng cách, chẳng hạn công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Đối với mặt phẳng, SGK chỉ giới thiệu phương trình tổng quát của mặt phẳng (và trường hợp đặc biệt là phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn), khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Đối với đường thẳng, SGK chỉ giới thiệu phương trình tham số của đường thẳng, trong đó chỉ rõ tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng và vectơ chỉ phương của đường thẳng đó. Ngoài ra, nếu $M(x_0; y_0; z_0)$ là một điểm thuộc đường thẳng d và vectơ chỉ phương

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ của đường thẳng d thỏa mãn điều kiện $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ thì đường thẳng d có phương trình chính tắc là

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

SGK cũng xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' , SGK không trình bày công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d' . Muốn tìm khoảng cách này, bạn đọc có thể làm theo cách sau: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d' và song song với đường thẳng d , sau đó tìm khoảng cách từ một điểm M bất kỳ thuộc d tới mặt phẳng (α) . Đó chính là khoảng cách giữa d và d' .

Về phương pháp, SGK Toán 12 vẫn theo tinh thần như SGK Toán 10 và 11 là cố gắng dẫn dắt để hình thành các khái niệm, chứ không áp đặt các định nghĩa một cách máy móc, đặc biệt đối với các khái niệm khó như: khái niệm mặt tròn xoay...

Những vấn đề có trong chương trình nâng cao nhưng chưa có trong chương trình chuẩn sẽ được trình bày đầy đủ trong cuốn *Tài liệu tự chọn nâng cao Toán 12*. Hi vọng SGK Toán 12 theo chương trình chuẩn cùng với Tài liệu tự chọn này sẽ giúp cho các bạn học sinh nắm vững tất cả các kiến thức và kỹ năng cần thiết cuối cấp Trung học phổ thông.

Hội thi Tin học trẻ toàn quốc lần thứ XIV, năm 2008

Nhằm động viên tuổi trẻ tích cực học tập công nghệ thông tin, tạo phong trào học tập tin học rộng rãi trong thanh, thiếu nhi, góp phần thực hiện có hiệu quả Chỉ thị 58-CT/TW ngày 17/10/2000 của Bộ Chính trị về "Đẩy mạnh ứng dụng và phát triển Công nghệ thông tin phục vụ sự nghiệp Công nghiệp hóa, Hiện đại hóa đất nước"; Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, Bộ Khoa học và Công nghệ, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bộ Thông tin và Truyền thông, Đài Truyền hình Việt Nam và Hội Tin học Việt Nam đã phối hợp tổ chức Hội thi Tin học trẻ toàn quốc lần thứ XIV tại TP. Đà Nẵng, từ ngày 29/7 đến ngày 31/7/2008.

Những nét mới trong hội thi năm nay

❖ Thay đổi tên gọi của Hội thi: Hội thi Tin học trẻ toàn quốc thay cho tên gọi cũ: Hội thi Tin học trẻ không chuyên toàn quốc.

❖ Về đối tượng dự thi: Không phân biệt thí sinh dự thi là chuyên hay không chuyên đối với các thí sinh dự thi khối THPT (Bảng C).

❖ Về nội dung thi: Đề thi Bảng C năm nay được đổi mới. Tập trung đánh giá năng lực thực hành, không nặng về lý thuyết. Vì vậy được Ban tổ chức Hội thi thông báo và cho biết trước chủ đề. Các Tỉnh, Thành, Ngành phổ biến chủ đề cho các thí sinh Bảng C chuẩn bị chương trình máy tính từ nhà và hoàn thiện bài thi của mình trong thời gian 180 phút tại Hội thi toàn quốc.

Có thể nói, Hội thi Tin học trẻ tổ chức hàng năm đã và đang thực sự trở thành phong trào học tập tin học rộng rãi trong thanh, thiếu nhi ở các cơ sở địa phương. Góp phần phát hiện nhiều tài năng trẻ về CNTT cho nước nhà.

QUANG PHÚC



CÁC LỚP THCS

Bài T1/374. (Lớp 6) Tìm tất cả các bộ ba số tự nhiên a, b, c nhỏ hơn 20 và thỏa mãn điều kiện $a(a+1) + b(b+1) = c(c+1)$, trong đó a là số nguyên tố và b chia hết cho 3.

PHẠM HUY THÔNG
(Hà Nội)

Bài T2/374. (Lớp 7). Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$ với n là số nguyên dương. Đặt

$$P_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)}$$

Chứng minh rằng $P_1 + P_2 + \dots + P_n < \frac{1}{2}$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/374. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{(y+z)^2}{y^2+z^2} - \frac{(x+z)^2}{x^2+z^2}$, trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x > y; z > 0$ và $z^2 \geq xy$.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T4/374. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{14-x^3} + x = 2(1 + \sqrt{x^2 - 2x - 1}).$$

ĐỖ BÁ CHỦ
(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

Bài T5/374. Giả sử ABC là tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi I, D, E là chân các đường cao lần lượt hạ từ A, B, C xuống các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng chu vi tam giác IDE không đổi khi A, B, C thay

đổi trên đường tròn $(O; R)$ sao cho diện tích của tam giác ABC luôn bằng a^2 .

ĐỖ QUANG MINH
(GV THCS Nguyễn Bá Ngọc, An Xuân, Tuy An, Phú Yên)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/374. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+91} = \sqrt{y-2} + y^2 \\ \sqrt{y^2+91} = \sqrt{x-2} + x^2. \end{cases}$$

NGUYỄN ĐỨC TRUNG
(GV THPT Nam Giang, Quảng Nam)

Bài T7/374. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $4(a+b+c) - 9 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = (a + \sqrt{a^2+1})^b (b + \sqrt{b^2+1})^c (c + \sqrt{c^2+1})^a.$$

LÊ VĂN LỤC
(GV THPT Đoàn Thượng, Gia Lộc, Hải Dương)

Bài T8/374. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , ngoại tiếp đường tròn tâm I và góc AIO bằng 90° . Chứng minh rằng diện tích tam

giác ABC nhỏ hơn $\frac{3\sqrt{3}}{4} AI^2$.

TRƯƠNG XUÂN NHÃ
(GV THPT Lê Lợi, Đông Hà, Quảng Trị)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/374. Cho a, b, n là những số nguyên dương, $b > 1$ và a chia hết cho $b^n - 1$. Chứng minh rằng khi biểu diễn số a trong hệ cơ số b thì được số chứa ít nhất n chữ số khác 0.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T10/374. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $0 < z \leq y \leq x \leq 8$ và

$$3x + 4y \geq \max \left\{ xy; \frac{1}{2}xyz - 8z \right\}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = x^5 + y^5 + z^5.$$

NGUYỄN SƠN HÀ
(GV khối THPT chuyên DHSP Hà Nội)

Bài T11/374. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(f(x) + y^2) = f^2(x) - f(x)f(y) + xy + x.$$

TA HOÀNG THÔNG

(GV TT Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

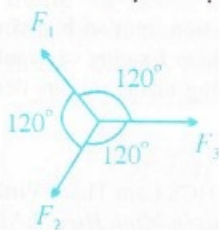
Bài T12/374. Xét tứ giác $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau ở K và $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$; $AC = AB + AD$. Chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABK , ADK bằng nhau.

NGUYỄN MINH HÀ

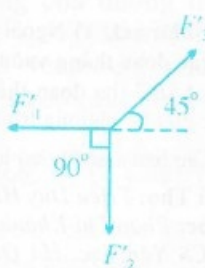
(GV khối THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/374. Ba sợi dây cao su, một đầu được nối với nhau, còn đầu kia được kéo chậm ra theo các hướng khác nhau (h. 1). Tại một thời điểm nào đó, độ dài của ba dây bằng nhau và bằng $L_1 = 20\text{cm}$. Sau đó các dây được kéo dần dưới các góc khác nhau (h. 2). Trong trường hợp sau, độ dài của ba dây bằng nhau và bằng $L_2 = 30\text{cm}$. Biết rằng độ dài tự nhiên của dây dài nhất bằng $l_1 = 15\text{cm}$. Hãy tìm độ dài tự nhiên của hai dây kia và tỉ số độ cứng của các dây. Coi các dây cao su tuân theo định luật Húc.



Hình 1



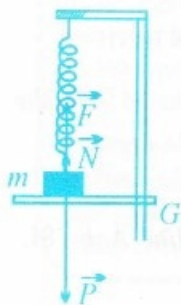
Hình 2

TÔ GIANG

(Hà Nội) Sưu tầm

Bài L2/374. Một đoạn mạch điện AD có hiệu điện thế U_{AD} không đổi và có ba điện trở R_1 , R_2 , R_3 mắc nối tiếp với $R_1 = r$, $R_2 = 2r$, $R_3 = 3r$.

Nếu mắc hai cực của một vôn kế V vào A và B thì vôn kế chỉ $10,8\text{V}$; nếu mắc vôn kế V vào B và C thì vôn kế chỉ $20,79\text{V}$. Hỏi nếu mắc V vào C và D thì vôn kế V chỉ bao nhiêu? Hãy tính U_{AD} .



NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/374. (For 6th grade)

Find all triple of natural numbers a, b, c less than 20 such that $a(a+1) + b(b+1) = c(c+1)$, where a is a prime number and b is a multiple of 3.

T2/374. (For 7th grade)

Let $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$, where n is a positive integer and let

$$P_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \cdots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \cdots f(2n)}.$$

Prove the inequality: $P_1 + P_2 + \dots + P_n < \frac{1}{2}$.

T3/374. Find the maximum value of the

expression $T = \frac{(y+z)^2}{y^2+z^2} - \frac{(x+z)^2}{x^2+z^2}$, where x, y, z are real numbers such that $x > y$; $z > 0$ and $z^2 \geq xy$.

T4/374. Solve for x :

$$\sqrt[3]{14-x^3} + x = 2(1 + \sqrt{x^2 - 2x - 1}).$$

T5/374. An acute triangle ABC is inscribed in a fixed circle with center at O . Let AI , BD , and CE denote the altitudes through A , B , and C respectively. Prove that the perimeter of the triangle IDE does not change when A , B , and C move on the circle (O) such that the area of the triangle ABC is always equal to a^2 .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/374. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{y-2} + y^2 \\ \sqrt{y^2 + 91} = \sqrt{x-2} + x^2 \end{cases}$$

T7/374. Let a, b, c be real numbers such that $4(a+b+c) - 9 = 0$. Find the maximum value of the sum

$$S = (a + \sqrt{a^2 + 1})^b (b + \sqrt{b^2 + 1})^c (c + \sqrt{c^2 + 1})^a.$$

(Xem tiếp trang 27)



★ Bài T1/370. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{11}{8} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{4n-1}{2^n} < 7$$

với mọi số nguyên dương n .

Lời giải. Với mỗi $m \geq 2$, biến đổi ta được

$$\frac{4m-1}{2^m} = \frac{4m+3}{2^{m-1}} - \frac{4m+7}{2^m}$$

Áp dụng hệ thức trên với mỗi m bằng 2, 3, ..., n , ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{11}{8} + \dots + \frac{4(n-1)-1}{2^{n-1}} + \frac{4n-1}{2^n} \\ &= \frac{3}{2} + \left(\frac{11}{2} - \frac{15}{2^2} \right) + \left(\frac{15}{2^2} - \frac{19}{2^3} \right) + \dots + \left(\frac{4n-1}{2^{n-2}} - \frac{4n+3}{2^{n-1}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{4n+3}{2^{n-1}} - \frac{4n+7}{2^n} \right) = 7 - \frac{4n+7}{2^n} \end{aligned}$$

Vậy $S < 7$ với mọi số nguyên dương n . □

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn tính $S = 2S - S$ nên biến đổi dài hơn cách trên. Các bạn sau có lời giải gọn:

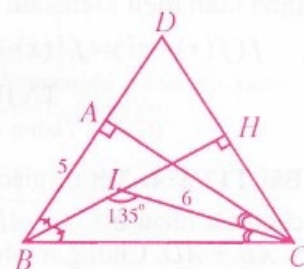
Vĩnh Phúc: Hà Đình Đức, 6A, THCS Như Thụy, Lập Thạch, Nguyễn Ngọc Sơn, 6A, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Như Ngọc, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, Nguyễn Hữu Dũng, 6A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Bắc Giang:** Hoàng Thu Vân, 6A1, THCS Ngô Sĩ Liên, TP. Bắc Giang; **Thanh Hóa:** Hoàng Tiến Dũng, 6A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Hà Tĩnh:** Phạm Bá Hạnh, 6C, THCS Hồng Lộc, Lộc Hà; **Đắk Lắk:** Nguyễn Tấn Thi, 6A4, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Ealpam, Cưngar; **TP. Hồ Chí Minh:** Phạm Tuấn Huy, 6A1, THPT Trần Đại Nghĩa.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/370. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5\text{cm}$, $IC = 6\text{cm}$ với I là giao điểm

của các đường phân giác trong. Tính độ dài cạnh BC .

Lời giải. Dễ dàng chứng minh được $\widehat{BIC} = 135^\circ$. Kẻ $CH \perp BI$ (H thuộc đường thẳng BI), gọi D là giao điểm của AB và CH .



Tam giác BCD cân tại B , suy ra $HC = HD$, $BC = BD$.

Tam giác IHC vuông cân tại H , suy ra $HC = \frac{IC}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow CD = 2CH = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$. Đặt $BC = x$ thì $AD = BD - BA = x - 5$.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông ABC và ADC ta có

$$AD^2 + AC^2 = DC^2$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 + (x^2-25) = 72$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - 36 = 0 \Rightarrow x = 9.$$

Vậy $BC = 9\text{cm}$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải trên, một số bạn còn kẻ các đoạn thẳng vuông góc từ điểm I xuống các cạnh của $\triangle ABC$ (ba đoạn thẳng này bằng nhau) rồi đưa đến việc giải hệ phương trình hai ẩn.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Triệu Duy Hải, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Phan Thị Khánh Linh, Nguyễn Minh Hiếu, 6A1, THCS Yên Lạc, Hà Quang Nhân, 7B, Hà Đình Đức, 6A, THCS Như Thụy, Lập Thạch; **Hà Nội:** Hoàng Anh Tú, 7I, THCS Marie Curie; **Nghe An:** Cao Minh Sơn, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Dũng, 7B, Nguyễn Thị Hà Linh, 7A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Trị:** Nguyễn Văn Hải Như, 7I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị; **Khánh Hòa:** Vũ Ngọc Cương, 7/1, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bạc Liêu:** Trần Quang Minh, 7/1, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T3/370. Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$5xyz = x + 5y + 7z + 10 \quad (1)$$

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Hữu Ánh, 8I, THCS Thành Cổ, Quảng Trị).

• Với $x = 1$ thì (1) trở thành:

$$5xyz = 5y + 7z + 11 \Leftrightarrow (5y - 7)(z - 1) = 18 \quad (2)$$

Vì x, y, z nguyên dương và $5y - 7$ chia cho 5 dư 3, nên

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 5y - 7 = 3; & z - 1 = 6 \\ 5y - 7 = 18; & z - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, & z = 7 \\ y = 5, & z = 2. \end{cases}$$

• Với $x \geq 2$, ta thấy

$$(1) \Leftrightarrow 5y + 7z + 10 = x(5yz - 1) \geq 2(5yz - 1).$$

$$\text{Dẫn đến } 10yz - 5y - 7z - 12 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (10y - 7)(2z - 1) \leq 31 \quad (3)$$

Suy ra $y \leq 3$.

*) Khi $y = 1$, từ (1) có $5xz = x + 7z + 15 \Leftrightarrow (5x - 7)(5z - 1) = 82$. Dễ thấy phương trình này không có nghiệm nguyên dương x, z .

*) Khi $y = 2$, từ (3) suy ra $z = 1$, thay vào (1) ta tìm được $x = 3$.

*) Khi $y = 3$, từ (3) suy ra $z = 1$, thay vào (1) ta được $x = \frac{32}{14} \notin \mathbb{Z}^+$ (loại).

Vậy các bộ ba số nguyên dương $(x; y; z)$ cần tìm là: $(1; 2; 7), (1; 5; 2), (3; 2; 1)$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có nhiều cách giải khác nhau của bài toán này. Có hai cách mà nhiều bạn làm là:

• Chứng minh trong các số nguyên dương x, y, z tồn tại ít nhất một số bằng 1. Sau đó xét từng trường hợp: $x = 1; y = 1; z = 1$ để giải.

• Chứng minh $x \leq 5$. Sau đó xét từng trường hợp $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ để giải. (Những bạn làm theo cách này có lời giải khá dài!).

2) Một số bạn không tìm đủ các bộ nghiệm của bài toán. Một trong những lí do của việc tìm thiếu nghiệm là các bạn đã nhầm khi cho rằng vai trò của x, y, z trong (1) bình đẳng nên giả thiết $1 \leq x \leq y \leq z$ và khi tìm được một hoặc hai bộ nghiệm đã không xét các trường hợp còn lại.

3) Các bạn có lời giải hay và gọn là: **Bắc Ninh:** Nguyễn Như Ngọc, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Vĩnh Phúc:** Đinh Hữu Dũng, 9C, THCS Tam Dương; **Hải Dương:** Nguyễn Thị Thanh Yên, 8A2, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hà Nam:** Nguyễn Tiến Hòa, 9B, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 9B, THCS Nguyễn Tất Thành; **Phạm Quang Thịnh,** 9I, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T4/370. Giải phương trình

$$x^4 - 2x^2 - 16x + 1 = 0 \quad (1)$$

Lời giải. Biến đổi PT (1) về dạng

$$(x^4 + 6x^2 + 9) - (8x^2 + 16x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3)^2 - 8(x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2\sqrt{2}x + 3 + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 - 2\sqrt{2}) = 0.$$

Nhận thấy

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 3 + 2\sqrt{2} = (x + \sqrt{2})^2 + 1 + 2\sqrt{2} > 0$$

$$\text{với mọi } x \text{ nên } x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 - 2\sqrt{2} = 0 \quad (2)$$

Giải phương trình (2) tìm được

$$x_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}.$$

Vậy tập nghiệm của PT (1) là

$$\{\sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể biến đổi PT (1) về dạng $(x^2 - 1)^2 = 16x$ rồi nhận xét $x \geq 0$ để chuyển về giải $\begin{cases} x^2 - 4\sqrt{x} - 1 = 0 \\ x^2 + 4\sqrt{x} - 1 = 0. \end{cases}$

2) Rất nhiều bạn tham giải bài này. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Thị Diệu Linh, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Dũng, 6A, THCS Hàn Thuyên, Đàm Thị Thanh Hương, 8B, THCS Từ Sơn; **Hà Tây:** Nguyễn Thế Linh, 9B, THCS Thạch Thất, Lê Huyền Trang, 9A1, THCS Nguyễn Trục; **Phú Thọ:** Tạ Hải Nam, Trần Thị Quỳnh Mai, 9A3, THCS Lâm Thao, Trần Xuân Thủy, 7A, THCS Cấp Dẫn; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Mạnh Quân, 9C, THCS Vĩnh Tường, Đại Thanh Quang, 7A1, THCS Yên Lạc; **Nam Định:** Trần Nguyễn Quý, 9C, THCS Hải Giang, Nguyễn Văn Quý, 9A, THCS Hải Hậu; **Quảng Ninh:** Bùi Mai Thu, 9D, THCS Trọng Điểm, TX. Hạ Long; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Nguyễn Thanh Tùng, 9G, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Thắng, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Đậu Thế Vũ, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Trị:** Nguyễn Văn Hải Như, 7I, Nguyễn Hữu Ánh, 8I, THCS Thành Cổ; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Diễm My, Nguyễn Thị Trâm, 8A, THCS Hành Trung, Hồ Tấn Vũ, Đặng Đình Cường, 8A, THCS Hành Phước; **Phú Yên:** Phạm Quang Thịnh, 9I, THCS Hùng Vương, Huỳnh Thái Huy, 8A, THCS Nguyễn Du; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyên, 9, THCS Nguyễn Văn Trỗi, **Bạc Liêu:** Trần Quang Minh, 7/1, THCS Trần Huỳnh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/370.** Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AA' , BB' , CC' cắt nhau tại H . Gọi A_1 , B_1 , C_1 lần lượt là trực tâm của các tam giác $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$. Biết H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$, chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

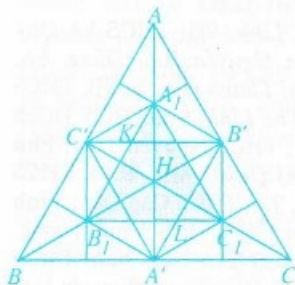
Lời giải. Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên các tứ giác: $BA'HC'$, $CA'HB'$, $CB'HC'$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{C'A'H} = \widehat{C'BH} = \widehat{HCB'} = \widehat{HA'B'}$, hay $A'H$ là phân giác của góc $\widehat{C'A'B'}$.

Tương tự $B'H$ là phân giác của góc $\widehat{A'B'C'}$. Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$.

Ta có $C'A_1 \parallel HB'$ (vì cùng vuông góc với AC) và $B'A_1 \parallel HC'$ (vì cùng vuông góc với AB) nên $A_1B'HC'$ là hình bình hành.

Tương tự $C'HA'B_1$ là hình bình hành. Từ đó $A_1B'A'B_1$ là hình bình hành (vì A_1B' và $A'B_1$ cùng song song và bằng $C'H$). Do đó $A_1B_1 \parallel A'B'$ (1)

Tương tự cũng có $B_1C_1 \parallel B'C'$ (2)



Gọi K , L theo thứ tự là giao điểm của A_1B_1 và $B'C'$; B_1C_1 và $A'B'$. Từ (1) và (2) ta có $B'KB_1L$ là hình bình hành. Trong hình

hình bình hành $B'KB_1L$, các đường phân giác của các góc B' và B_1 hoặc song song hoặc trùng nhau, nhưng chúng có điểm chung là H (do H là tâm đường tròn nội tiếp của cả hai tam giác $A'B'C'$ và $A_1B_1C_1$) nên chúng trùng nhau. Suy ra B', H, B_1 thẳng hàng.

Do BB' vuông góc với cả AC và $A'C'$, nên $AC \parallel A'C'$. Kết hợp với tứ giác $AC'A'C$ nội tiếp, ta thấy $\widehat{BAC} = \widehat{BC'A'} = \widehat{BCA}$. Tương tự có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Vậy ABC là tam giác đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể chứng minh B', H, B_1 thẳng hàng bằng cách chỉ ra H là tâm đường tròn nội tiếp của hai tam giác bằng nhau $A'B'C'$ và $A_1B_1C_1$, do đó $HA_1 = HA'$, $HB_1 = HB'$. Kết hợp với kết quả $A'A_1$ và $B'B_1$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra H là trung điểm của $A'A_1$ và $B'B_1$. Đây cũng là cách giải của bạn *La Hồng Quân*, lớp 9B, Trường THCS Nguyễn Chí, Đồng Sơn, Thanh Hóa.

2) Những bạn sau đây cũng có lời giải tốt: *Nguyễn Văn Quý*, 9A, THCS Hải Hậu, **Nam Định**; *Nguyễn Hữu Trường*, *Đỗ Vũ Thạch*, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thị Lệ Dung*, 9E, THCS Đông Hưng, **Thái Bình**; *Mạc Đức Huy*, 9C, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn, **Hải Dương**; *Nguyễn Văn Linh*, 9A₁, THCS Nguyễn Đăng Đạo, **Bắc Ninh**; *Vũ Đình Long*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đồ Lương, **Nghệ An**; *Phạm Quang Thịnh*, 9I, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa, **Phú Yên**.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/370.** Cho tam giác ABC có $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC} = 140^\circ$. Gọi AN là phân giác trong và AH là đường cao của tam giác đó. Chứng minh rằng $2BH \cdot CN = a^2$.

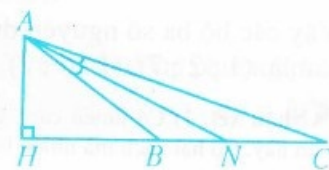
Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Từ giả thiết bài ra ta có

$$\widehat{HAB} = 50^\circ,$$

$$\widehat{ACB} = 20^\circ.$$

Do đó, xét tam



giác vuông ABH ta thấy $BH = AB \cdot \sin \widehat{HAB} = a \cdot \sin 50^\circ$. Sử dụng tính chất đường phân giác và định lý sin trong tam giác ABC ta thu được

$$\frac{CN}{BN} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{\sin 140^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}.$$

$$\text{Từ đó } \frac{CN}{CN + BN} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ}, \text{ suy ra}$$

$$CN = \frac{a \cdot \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ}.$$

$$\text{Vậy } 2BH \cdot CN = \frac{2a^2 \sin 50^\circ \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ}$$

$$= \frac{2a^2 \cos 40^\circ \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ} = \frac{a^2 \sin 80^\circ}{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ} = a^2. \square$$

◀ **Nhận xét.** Có rất nhiều bạn tham gia giải đề toán này. Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng và trình bày tương tự như cách giải trên. Một số bạn sử dụng phương pháp tọa độ cũng đi đến hệ thức cần chứng minh. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Lưu Văn Đan, Trần Thế Khải, 10A1, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, Vũ Minh Thắng, 10T1, khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Bắc Ninh:** Nguyễn Ngọc Long, 9A, THCS Vũ Kiệt, Thuận Thành; **Vĩnh Phúc:** Kim Đình Sơn, 10A1, Trần Quang Sự, Khổng Hoàng Thao, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tây:** Nguyễn Văn Hiếu, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TP. Hà Đông, Nguyễn Sơn Tùng, 11A2, THPT Ngô Quyền, Ba Vì; **Hải Dương:** Trần Văn Hạnh, 11A5, THPT Ninh Giang, Vũ Thanh Tú, 11A1, THPT Kẻ Sắt, Bình Giang; **Nam Định:** Bùi Văn Vương, 9B, THCS Hải Hậu; **Thái Bình:** Nguyễn Văn Pha, 11A3, THPT Bắc Kiến Xương; **Thanh Hóa:** Đàm Triệu Đạt, 10B1, THPT Triệu Sơn 3; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Hà Trang, 10A1, Nguyễn Viết Phương, 11A2, khối THPT chuyên, ĐH Vinh, Nguyễn Văn An, Trần Tuấn An, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nguyễn Đức Công, 11A1, THPT Đô Lương I, Hồ Hữu Quân, 10A1, THPT Quỳnh Lưu I; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Luật, 11A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn; **Đắk Lắk:** Trương Thành Công, 9A, THPT Nguyễn Khuyến, Eakar; **Phú Yên:** Ngô Tấn Kha, 10A2, THPT Nguyễn Huệ, TP. Tuy Hòa; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** Dương Văn An, 12A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Đồng Nai:** Nguyễn Thành Nhân, 11A9, THPT Long Khánh; **An Giang:** Trần Thanh Phố, 10A1, THPT Tân Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** Tăng Văn Báu, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T7/370.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = (32x^5 - 40x^3 + 10x - 1)^{2006} + (16x^3 - 12x + \sqrt{5} - 1)^{2008}.$$

Lời giải. Nhận thấy $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0 \\ 16x^3 - 12x + \sqrt{5} - 1 = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có thể biến đổi như sau :

$$\begin{cases} 2x^2(16x^3 - 12x) - (16x^3 - 12x) - 2x - 1 = 0 \\ 16x^3 - 12x = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\sqrt{5} - 1)x^2 + 2x - \sqrt{5} + 2 = 0 \\ 16x^3 - 12x = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 + 2(\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{5} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(2x - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)(8x^2 + 2(\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{5} - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 2(\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{5} - 3 = 0.$$

Giải phương trình trên, ta được

$$x = \frac{-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{8}$$

$$\text{hoặc } x = \frac{-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{8}.$$

$$\text{Vậy } \min f(x) = 0 \text{ khi } x = \frac{-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{8}$$

$$\text{hoặc } x = \frac{-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{8}. \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể giải hệ phương trình bằng cách khác như sau : Chứng tỏ rằng hệ phương trình không thoả mãn khi $|\lambda| > 1$; với $|\lambda| \leq 1$ đặt $x = \sin t$, ta được

$$\begin{cases} \sin 3t = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \sin \frac{\pi}{10} \\ \sin 5t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó tìm được } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sin \frac{\pi}{30}; x = -\sin \frac{11\pi}{30}.$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Bắc Giang: Nguyễn Hoàng Hiệp, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nội:** Lưu Văn Đan, 10A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN – ĐHQG, Đào Trọng Anh, 10A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Hoàng Hải, Mạc Thế Trường, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hoá:** Mai Chí Đạt, 10E, THPT Hà Trung; **Đà Nẵng:** Trần Đình Tuấn, 10A1, Lê Văn Tấn Quyền, 10A2, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Luật, 11A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn; **Đồng Nai:** Nguyễn Thành Nhân, 11A9, THPT Long Khánh; **Bình Phước:** Trần Phương Nam, 11A, THPT Chuyên Quang Trung; **Đắk Lắk:** Nguyễn Minh Vũ, 11B6, THPT Buôn Ma Thuột; **Hà Tây:** Nguyễn Mạnh Quân, 11 Lí, THPT Chuyên Nguyễn Huệ.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T8/370.** Chứng minh rằng phương trình $A.a^x + B.b^x = A + B$ (1) (với $a > 1, 0 < b < 1, A, B \in \mathbb{R}$) có nhiều nhất hai nghiệm.

Lời giải. • Trường hợp $A = B = 0$ thì phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• Trường hợp $A^2 + B^2 \neq 0$. Không giảm tính tổng quát có thể giả sử $A \neq 0$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow A.a^x + B.b^x - A - B = 0$$

$$\text{Đặt } f(x) = A.a^x + B.b^x - A - B$$

Giả sử phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt, theo hệ quả của định lý Rolle suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt (*)

$$\text{Mặt khác } f'(x) = A \cdot \ln a \cdot a^x + B \cdot \ln b \cdot b^x;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = -\frac{B \ln b}{A \ln a} \quad (\text{do } A \neq 0) \quad (2)$$

Nếu $A.B > 0$ thì $-\frac{B \ln b}{A \ln a} > 0$, suy ra phương

trình (2) có nghiệm duy nhất $x = \log_a \left(-\frac{B \ln b}{A \ln a} \right)$

Nếu $A.B \leq 0$ thì $-\frac{B \ln b}{A \ln a} \leq 0$, suy ra phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm, mâu thuẫn với (*).

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm (đpcm). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán cần có thêm giả thiết A và B không đồng thời bằng 0. Một số bạn sai lầm khi giải

phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = -\frac{B \ln b}{A \ln a}$ đã vội vàng

khẳng định phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất!. Một số sử dụng định lý Rolle bằng cách chứng minh phương trình $f'(x) = 0$ vô nghiệm, suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm, do đó phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Hoàng Hải, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** Nguyễn Hoàng Hiệp, 11Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nội:** Trần Thế Khải, 10A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tây:** Nguyễn Sơn Tùng, 11A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì; **Bình Định:** Nguyễn Phú, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vũng Tàu:** Dương Văn An, 12A1, THPT Châu Thành, Bà Rịa.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T9/370.** Cho $a_1 = \frac{1}{2}$ và với mỗi số tự nhiên n lớn hơn 1 ta đặt

$$a_n = \frac{1}{d_1+1} + \frac{1}{d_2+1} + \dots + \frac{1}{d_k+1}$$

trong đó $d_1, d_2, \dots, d_k$ là tất cả các ước số dương phân biệt của n . Chứng minh rằng

$$n - \ln n < a_1 + a_2 + \dots + a_n < n.$$

Lời giải. (Theo bạn Đào Phúc Quang Trí, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, Lâm Đồng).

Mỗi lần xuất hiện số hạng $\frac{1}{d+1}$ tương ứng với mỗi bội số $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ của d . Vì trong tập $\{1, 2, \dots, n\}$ có đúng $\left[\frac{n}{d}\right]$ bội số của d nên phân số $\frac{1}{d+1}$ xuất hiện $\left[\frac{n}{d}\right]$ lần. Thành thử

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k}\right] \frac{1}{k+1} \quad (1)$$

*) Ta có $\left[\frac{n}{k}\right] \leq \frac{n}{k}$ nên

$$S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k(k+1)} = n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) < n.$$

*) Ta có $a_1 + a_2 = \frac{4}{3} > 2 - \ln 2$ nên BĐT

$n - \ln n < S_n$ (2) đúng với $n = 2$. Ta chứng

minh (2) đúng với $n > 2$. Ta có $\left[\frac{n}{k}\right] > \frac{n}{k} - 1 \Rightarrow$

$$\left[\frac{n}{k}\right] k > n - k \Rightarrow \left[\frac{n}{k}\right] k \geq n - k + 1 \Rightarrow \left[\frac{n}{k}\right] \geq \frac{n+1}{k} - 1.$$

$$\text{Vậy } S_n \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+1}{k} - 1 \right) \frac{1}{k+1} = n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}.$$

Thành thử (2) được chứng minh nếu ta chứng

$$\text{minh được } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} < \ln n \quad (3)$$

Theo định lý Lagrange tồn tại c với $k < c < k+1$

$$\text{sao cho } \ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c} > \frac{1}{k+1} > \frac{1}{k+2} \quad (4)$$

Lấy tổng của (4) từ $k = 3$ đến $n-1$ ta được

$$\ln n - \ln 3 > \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n+1} \quad (5)$$

Vì $\ln 3 > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ nên từ (5) suy ra

$$\ln n > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}.$$

Bất đẳng thức (3) được chứng minh. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Lưu Xuân Khôi, 11T, THPT chuyên Thái Nguyên; **Vinh Phúc:** Trần Quang Sự, 11A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Thanh Hóa:** Đinh Quang Lộc, Nguyễn Thái Hoàn, lớp A3, Hậu Lộc; **Thừa Thiên - Huế:** Võ Thành Văn, 11 chuyên, ĐHKHTN Huế; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Huỳnh Hạc, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/370.** Cho n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ thuộc đoạn $[-1; 2]$ và có tổng bằng 0. Đặt

$$U_k = \frac{a_k \sqrt{4k-1}}{(4k-3)(4k+1)} \text{ với } k = 1, 2, \dots, n. \text{ Chứng}$$

minh rằng $|U_1 + U_2 + \dots + U_n| < \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Lời giải. Theo bất đẳng thức Bunyakovski

$$\begin{aligned} (U_1 + U_2 + \dots + U_n)^2 &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k \sqrt{4k-1}}{(4k-3)(4k+1)} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{4k-1}{(4k-3)^2(4k+1)^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Vì $a_k \in [-1; 2]$ nên $(a_k + 1)(a_k - 2) \leq 0$. Suy ra $a_k^2 \leq a_k + 2$.

$$\text{Do đó } \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \sum_{k=1}^n (a_k + 2) = 2n \quad (2)$$

Với mỗi $k = 1, 2, \dots, n$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{4k-1}{(4k-3)^2(4k+1)^2} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{(4k+1)^2 - (4k-3)^2}{(4k-3)^2(4k+1)^2} \\ &= \frac{1}{8(4k-3)^2} - \frac{1}{8(4k+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Bởi vậy } \sum_{k=1}^n \frac{4k-1}{(4k-3)^2(4k+1)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(4k-3)^2} - \frac{1}{(4(k+1)-3)^2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(4n+1)^2} \right) < \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra

$$(U_1 + U_2 + \dots + U_n)^2 < 2n \cdot \frac{1}{8} = \frac{n}{4}.$$

$$\text{Tức là } |U_1 + U_2 + \dots + U_n| < \frac{\sqrt{n}}{2}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản, không quá khó. Các bạn học sinh lớp 10 sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Nguyễn Khắc Đàm, 10T, THPT chuyên; **Vinh Phúc:** Phan Quốc Khánh, 10A1, THPT chuyên; **Hà Nội:** Đào Trọng Anh, 10A4, THPT Nguyễn Gia Thiều; Phạm Đức Nam, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Phạm Duy Long, 10T1, THPT Hà Nội - Amsterdam; Trần Thế Khải, Nguyễn Ngọc Trung, 10A1, Nguyễn Khánh Việt, 10A2, PTCTT- ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nghệ An:** Nguyễn Văn An, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Đà Nẵng:** Hoàng Bùi Khánh, Nguyễn Anh Khoa, 10A1, Lê Văn Tấn Quyền, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Lê Hồng Nam, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **TP. Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Cà Mau:** Nguyễn Thu Hiền, 10T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiền.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T11/370.** Xác định hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

sao cho $f(x+y) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 f\left(\frac{1}{y}\right)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^*$. (1)

Lời giải. Cách 1. (Theo đa số các bạn).

Thay $y = x$ trong (1) ta thu được

$$f(2x) = 2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*,$$

$$\text{suy ra } f(x+y) = \frac{f(2x)+f(2y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^* \quad (2)$$

Từ (2) ta thu được

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= \frac{f(4x)+f(4y)+2f(2z)}{2}, \\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}^* \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{và } f(x+y+z) = \frac{f(4x)+f(4z)+2f(2y)}{2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$f(4y) - 2f(2y) = f(4z) - 2f(2z), \forall y, z \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{hay } f(2x) - 2f(x) = c, c = \text{const}, \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Mặt khác, thay $x = y = 1$ vào (1), ta thu được $f(2) = 2f(1)$ nên $c = 0$ hay $f(2x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Kết hợp với (2), ta có

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^* \quad (5)$$

Mặt khác, theo (1) thì

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{xy}\right) &= f\left(\frac{1}{x(x+y)} + \frac{1}{y(x+y)}\right) \\ &= \frac{f(x^2+xy)}{x^2(x+y)^2} + \frac{f(y^2+xy)}{y^2(x+y)^2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^* \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) ta thấy

$$f\left(\frac{1}{xy}\right) = \frac{y^2(f(x^2)+f(xy))+x^2(f(y^2)+f(xy))}{x^2y^2(x+y)^2}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*.$$

$$\text{Suy ra } f(xy) = x^2y^2f\left(\frac{1}{xy}\right)$$

$$= x^2y^2 \left(\frac{y^2(f(x^2)+f(xy))+x^2(f(y^2)+f(xy))}{x^2y^2(x+y)^2} \right),$$

$$\text{hay } 2xyf(xy) = y^2f(x^2) + x^2f(y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}^* \quad (7)$$

Chọn $y = 1$, ta thu được

$$f(x^2) = 2f(x) - x^2f(1), \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Kết hợp với (7) ta nhận được hệ thức

$$2xyf(xy) = 2xy(yf(x) + xf(y)) - 2x^2y^2f(1),$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \text{ hay}$$

$$f(xy) = yf(x) + xf(y) - xyf(1), \forall x, y \in \mathbb{R}^*.$$

Chọn x, y sao cho $xy = 1$, ta thu được

$$f(1) = \frac{f(x)}{x} + xf\left(\frac{1}{x}\right) - f(1) = \frac{f(x)}{x} + x \frac{f(x)}{x^2} - f(1)$$

$$\text{hay } f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}^*, \text{ với } a = f(1) \text{ và}$$

$$f(0) = f(x-x) = x^2f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2f\left(-\frac{1}{x}\right) = ax - ax = 0.$$

$$\text{Vậy nên } f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn bài ra với mọi $a \in \mathbb{R}$ cho trước.

Cách 2. (Theo bạn Lê Xuân Khôi, 11T, THPT chuyên Thái Nguyên).

Thay $y = x$ trong (1) ta được

$$f(2x) = 2x^2f\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Thay $y = -x$ trong (1) ta được

$$f(2x) = x^2 \left(f\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{x}\right) \right), \forall x \in \mathbb{R}^*,$$

$$\text{suy ra } 2f(0) = f(2x) + f(-2x), \forall x \in \mathbb{R}^* \quad (2)$$

Ta tính $f\left(\frac{x+1}{x}\right)$ bằng hai cách

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{1}{x^2}f(x) + f(1), \forall x \in \mathbb{R}^* \quad (3)$$

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2\left(\frac{x+1}{2x}\right)^2 f\left(\frac{2x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2x^2} f\left(2 - \frac{2}{x+1}\right)$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2x^2} \left(4f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{(x+1)^2} f\left(-\frac{x+1}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2x^2} \left(4f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{(x+1)^2} \left(2f(0) - f\left(-\frac{x+1}{2}\right) \right) \right)$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2x^2} \left(4f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{(x+1)^2} \left(2f(0) - \frac{1}{2}(f(x) + f(1)) \right) \right) \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } \frac{1}{x^2}f(x) + f(1)$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2x^2} \left(4f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{(x+1)^2} \left(2f(0) - \frac{1}{2}(f(x) + f(1)) \right) \right)$$

hay

$$2f(x) = x^2 + \left(2f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\right)4xf\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f(0) - f(1).$$

Thay $x = 1$ vào đẳng thức trên ta được

$$f(1) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) \text{ suy ra}$$

$$2f(x) = -x^2 f(0) + 4xf\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(0).$$

Thay $x = \frac{1}{2}$, ta thu được $f(0) = 0$ và $f(x) = cx$ với c là hằng số tùy ý. $\square$

◀ **Nhận xét.** Đây là đề toán về phương trình hàm quen biết nhưng không thuộc dạng toán cơ bản vì không tìm nghiệm trong lớp hàm liên tục. Nhiều bạn đã nhầm lẫn với phương trình hàm Cauchy, nên tuy có lời giải rất ngắn gọn nhưng là lời giải sai. Các bạn sau có lời giải đúng:

Vinh Phúc: Khổng Hoàng Thao, 11A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Hà Nội:** Trần Thế Khải, 10A1T, ĐHKHTN Hà Nội; **Đà Nẵng:** Phạm Việt Cường, Lê Văn Tấn Quyển, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vinh Long:** Huỳnh Minh Tuấn, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/370.** Lấy điểm P trên mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$. Gọi G_a, G_b, G_c, G_d theo thứ tự là trọng tâm các tứ diện $PBCD, PCDA, PDAB, PABC$. Chứng minh rằng các đường thẳng AG_a, BG_b, CG_c, DG_d đồng quy tại một điểm và tìm quỹ tích điểm đó khi P di chuyển trên mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải. • Lấy điểm Q sao cho

$$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QP} = \vec{0} \quad (1)$$

(Chú ý: điểm Q tồn tại và duy nhất).

Vì G_a là trọng tâm tứ diện $PBCD$, nên từ (1) suy ra $\overrightarrow{QA} + 4\overrightarrow{QG} = \vec{0} \Rightarrow Q \in AG_a$.

Tương tự $Q \in BG_b, Q \in CG_c, Q \in DG_d$. Vậy AG_a, BG_b, CG_c, DG_d đồng quy tại điểm Q .

• Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Từ (1) có $4\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{QP} = \vec{0} \Rightarrow 5\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GP} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GQ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{GP}$.

Do đó phép vị tự $V_G^{\frac{1}{5}}: P \rightarrow Q$.

Từ đó, với chú ý rằng P chuyển động trên mặt cầu (I) nội tiếp tứ diện $ABCD$, ta có:

$$(Q) = V_G^{\frac{1}{5}}((I)). \quad \square$$

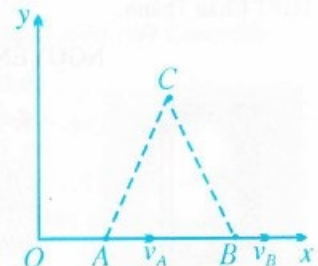
◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Hải Dương: Vũ Thanh Tú, 11A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Thái Bình:** Nguyễn Văn Pha, 11A3, THPT Bắc Kiến Xương; **Thanh Hóa:** Lê Xuân Thắng, 11A1, THPT Triệu Sơn 3; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** Dương Văn An, 12A1, THPT Châu Thành; **Vinh Long:** Huỳnh Minh Tuấn, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TX. Vinh Long.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/370.** Xe buýt và xe đạp chạy cùng chiều trên cùng một đường thẳng với vận tốc không đổi thứ tự là 63km/h và 33km/h. Một xe tải chạy trên đường thẳng khác với vận tốc không đổi là 52km/h. Khoảng cách từ xe tải đến xe buýt luôn luôn bằng khoảng cách từ xe tải đến xe đạp. Tìm vận tốc của xe tải đối với xe buýt.

Lời giải. Xe buýt (A), xe đạp (B) và xe tải (C) khi chuyển động luôn tạo thành một tam giác cân với đỉnh là C. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



• Với xe buýt A: $\begin{cases} x_A = x_{OA} + v_A t \\ y_A = 0. \end{cases}$

• Với xe đạp B: $\begin{cases} x_B = x_{OB} + v_B t \\ y_B = 0. \end{cases}$

• Với xe tải C: $\begin{cases} x_C = \frac{x_{OA} + x_{OB}}{2} + \frac{(v_A + v_B)}{2} t \\ y_C = y_{OC} + v_{Cy} t. \end{cases}$

Ta có $v_C^2 = \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + v_{Cy}^2$

$$\Rightarrow v_{Cy} = \sqrt{v_C^2 - \frac{(v_A + v_B)^2}{4}}$$

Kí hiệu $\vec{U}$ là vận tốc tương đối của (C) đối với (A), ta có: $\vec{U} = \vec{v}_C - \vec{v}_A$. Chiếu lên hai trục tọa độ ta được

$$U_x = v_{Cx} - v_{Ax} = \frac{v_A + v_B}{2} - v_A = \frac{v_B - v_A}{2};$$

$$U_y = v_{Cy} = \sqrt{v_C^2 - \frac{(v_A + v_B)^2}{4}}$$

$$\text{Do vậy } U^2 = U_x^2 + U_y^2 = v_C^2 - v_A \cdot v_B$$

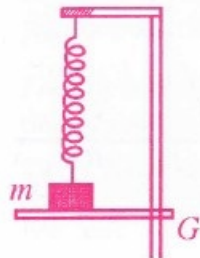
$$\Rightarrow U = \sqrt{v_C^2 - v_A \cdot v_B}$$

Thay số, ta được $U = 25 \text{ km/h}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Rất nhiều bạn tham gia giải bài này và tất cả đều giải đúng. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

Hà Nam: Phan Thanh Hải, 11A1, THPT B Kim Bảng;
Hà Tây: Nguyễn Sơn Tùng, 11A2, THPT Ngô Quyền, Ba Vì;
Hải Dương: Phạm Đình Tuấn, 11A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang;
Hải Phòng: Trần Hoàng Bá, 12 Toán, THPT NK Trần Phú;
Thái Bình: Nguyễn Khương Duy, 11A1, THPT Tân Thụy Anh, Thái Thụy;
Thanh Hóa: Lê Thanh Hà, 11B12, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa;
Bình Phước: Lê Ngọc Sáng, 11A, THPT chuyên Quang Trung;
Bà Rịa - Vũng Tàu: Dương Văn An, 12A1, THPT Châu Thành.

NGUYỄN XUÂN QUANG

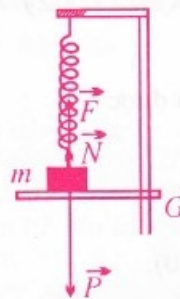


★ **Bài L2/370.** Trên một giá đỡ G có một vật khối lượng $m = 0,1 \text{ kg}$ gắn vào một lò xo có khối lượng không đáng kể và có độ cứng $k = 20 \text{ N/m}$ (hình vẽ). Lúc đầu lò xo chưa

biến dạng. Cho giá đỡ G rơi xuống từ nghỉ với gia tốc $a = 2 \text{ m/s}^2$. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$ và bỏ qua lực cản của không khí.

- 1) Hỏi sau bao lâu giá đỡ rời khỏi vật?
- 2) Tính biên độ dao động của vật khi vật rời khỏi giá đỡ.
- 3) Tìm phương trình chuyển động của vật sau khi vật rời khỏi giá đỡ. Lấy gốc tính thời gian

là lúc vật rời giá đỡ với chiều dương hướng xuống.



Lời giải. 1) Khi vật chưa rời khỏi giá đỡ thì theo định luật II Newton ta có

$$P - F_{dh} - N = ma \quad (1)$$

Khi vật bắt đầu rời khỏi giá đỡ thì phản lực $N = 0$, vậy phương trình (1) trở thành:

$$P - F_{dh} = ma \quad (2)$$

(ở đây $F_{dh} = kx$ (3); x là độ giãn của lò xo).

Từ (2) và (3) suy ra

$$x = \frac{m(g-a)}{k} = \frac{0,1(10-2)}{20} = 0,04 \text{ m}.$$

Thời gian từ lúc giá đỡ bắt đầu rơi xuống cho đến khi giá đỡ rời khỏi vật là:

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(g-a)m}{ak}} = \sqrt{\frac{2(10-2) \cdot 0,1}{2 \cdot 20}} = 0,2 \text{ s}.$$

2) Vận tốc của vật ngay sau khi rời khỏi giá đỡ là: $v = at = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ m/s}$.

Chọn gốc tọa độ ở vị trí cân bằng của vật. Tại vị trí cân bằng thì lực đàn hồi cân bằng với trọng lực của vật, ta có

$$kx_0 = mg, \text{ suy ra } x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0,1 \cdot 10}{20} = 0,05 \text{ m}.$$

Vị trí của vật khi rời khỏi giá đỡ là:

$$\Delta x = x - x_0 = 0,04 - 0,05 = -0,01 \text{ m}.$$

Biên độ của vật khi rời khỏi giá đỡ là:

$$A = \sqrt{\Delta x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}, \text{ ở đây } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\sqrt{2} \text{ rad/s}.$$

Thay số ta được $A = 0,03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$.

3) Phương trình dao động của vật có dạng:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = 3 \text{ cm}, \omega = 10\sqrt{2} \text{ rad/s}$$

tại $t = 0$, $x = -1 \text{ cm}$, vận tốc của vật $v > 0$

Ta có $\sin\varphi = -\frac{1}{3}$, $\cos\varphi > 0$, suy ra $\varphi = -0,34 \text{ rad}$.

Vậy $x = 3\sin(10\sqrt{2} - 0,34) \text{ cm}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Văn Đông, 11A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, Nguyễn Tuấn Duy, 11A10, Nguyễn Thị Trang, 11A4, Mạc Thế Trường, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tây:** Nguyễn Mạnh Quân, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hải Dương:** Bùi Tiến Mạnh, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Phạm Đình Tuấn, 11A1, THPT Kê Sặt, Bình Giang; **Hải Phòng:** Trần Hoàng Bá, 12 Toán, THPT NK Trần Phú; **Thanh Hóa:** Đỗ Trung Dũng, 12A4, THPT Như Thanh, Nguyễn Duy Hùng, 12F, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Lâm Hoàng, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Quang Dũng, 11A1, THPT Nam Đàn I.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Đọc lại cho đúng

Trong bài *Sử dụng tính chất của các phân tử thuộc đoạn $[0; 1]$, $[-1; 1]$ để giải toán có một số lỗi*. Xin sửa lại như sau:

* Trang 8, cột trái 3↑, đọc lại là:

"Vậy A đạt GTLN là k^2 khi $x = y = z = \pm \sqrt{\frac{k}{3}}$."

* Trang 10, cột phải 13↓, bỏ câu:

"hoặc $(x; y; z; t) = \left(-\frac{9}{5}; -\frac{12}{5}; -\frac{16}{5}; -\frac{12}{5}\right)$."

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T8/374. Let I and O denote respectively the incenter and the circumcenter of a triangle ABC . Given that $\widehat{AIO} = 90^\circ$, prove that the area of the triangle ABC is less than $\frac{3\sqrt{3}}{4} AI^2$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/374. Let a, b, n be positive integers, $b > 1$ and a is a multiple of $b^n - 1$. Rewritten a to the base b , prove that the resulting contains at least n non-zero digits.

T10/374. Let x, y, z be real numbers such that $0 < z \leq y \leq x \leq 8$ and

$$3x + 4y \geq \max \left\{ xy; \frac{1}{2}xyz - 8z \right\}.$$

Find the maximum value of $A = x^5 + y^5 + z^5$.

T11/374. Find all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f(f(x) + y^2) = f^2(x) - f(x)f(y) + xy + x$.

T12/374. Let K denote the intersection of the two diagonals of a quadrilateral $ABCD$ where $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$; and $AC = AB + AD$. Prove that the radii of the inscribed of the triangles ABK and ADK are equal.

Translated by LE MINH HA

Sách sắp phát hành

QUYỂN 4

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

Đây là cuốn sách tiếp theo (Quyển 4) thuộc bộ sách Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ bao gồm các bài viết được chọn lọc trên tạp chí THTT. Cuốn sách rất thiết thực và bổ ích cho học sinh bậc THCS và bậc THPT, các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh học sinh và các bạn yêu toán.

Sách dày khoảng 200 trang, khổ 19 x 26,5 cm. Giá bìa: 38.500 đồng, sẽ được phát hành vào cuối tháng 8 năm 2008.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ Hà Nội. ĐT-FAX: 04.5121606.

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

Số 374 (8-2008)

TOÁN HỌC
& Tuổi trẻ 27

KÌ THI OLYMPIC ... (Tiếp bài 2)

NGÀY THỨ NHẤT (16/7/2008)

Bài 1. Tam giác nhọn ABC có trực tâm H . Đường tròn đi qua H với tâm là trung điểm của BC giao với đường BC tại A_1 và A_2 . Tương tự, đường tròn đi qua H với tâm là trung điểm của CA giao với đường CA tại B_1 và B_2 , đường tròn qua H với tâm là trung điểm của AB giao với đường AB tại C_1 và C_2 . Chứng minh rằng $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 2. a) Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

với mọi số thực x, y, z , mỗi số đều khác 1 và thỏa mãn $xyz = 1$.

b) Chứng minh rằng đẳng thức xảy ra đối với vô hạn bộ ba các số hữu tỉ x, y, z , mỗi số đều khác 1 và thỏa mãn $xyz = 1$.

Bài 3. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho $n^2 + 1$ có ước nguyên tố lớn hơn $2n + \sqrt{2n}$.

NGÀY THỨ HAI (17/7/2008)

Bài 4. Tìm tất cả các hàm $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sao cho

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

với mọi số thực dương w, x, y, z mà $wx = yz$.

Bài 5. Giả sử n và k là các số nguyên dương với $k \geq n$ và $k - n$ là số chẵn. Cho $2n$ bóng đèn được đánh số từ 1 đến $2n$; mỗi bóng có thể sáng hoặc tắt. Tại thời điểm ban đầu, mọi bóng đều tắt. Xét các dãy gồm các bước: tại mỗi bước, công tắc của một trong các bóng đèn được bật (từ sáng chuyển thành tắt hoặc từ tắt chuyển thành sáng). Giả sử N là số các dãy mà mỗi dãy gồm k bước và kết thúc ở trạng thái: các bóng đèn từ 1 đến n sáng, các bóng từ $n+1$ đến $2n$ tắt. Giả sử M là số các

dãy mà mỗi dãy gồm k bước và cũng kết thúc ở trạng thái: các bóng đèn từ 1 đến n sáng, các bóng từ $n+1$ đến $2n$ tắt, nhưng trong quá trình đó không một công tắc nào của các bóng từ $n+1$ đến $2n$ được bật.

Tính tỉ số $\frac{N}{M}$.

Bài 6. Giả sử $ABCD$ là một tứ giác lồi với $|BA| \neq |BC|$. Kí hiệu các đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC và ADC tương ứng là ω_1 và ω_2 . Giả sử tồn tại đường tròn ω tiếp xúc với nửa đường thẳng BA tại một điểm ở sau A và tiếp xúc với nửa đường thẳng BC tại một điểm ở sau C , đồng thời đường tròn đó cũng tiếp xúc với các đường thẳng AD và CD . Chứng minh rằng các tiếp tuyến chung ngoài của ω_1 và ω_2 giao nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ω .

*

* *

Như thông lệ, các bài 1, 4 được xem là các bài dễ, các bài 2, 5 là các bài trung bình, các bài 3, 6 là các bài khó. Tuy nhiên, nhiều học sinh giỏi vẫn mất điểm ở các bài dễ (điều này có thể thấy ngay đối với đoàn Việt Nam). Kết quả của đoàn Việt Nam năm nay có thể xem là khá thành công. Đặc biệt, cả hai bài khó đều có các em giải được trọn vẹn. Điều này không phải năm nào cũng có được đối với đội tuyển của chúng ta (ngay cả năm 2007, khi đoàn Việt Nam xếp thứ ba).

Ngoài việc tham gia thi, các học sinh còn được tham quan nhiều nơi trên đất nước Tây Ban Nha: Thủ đô Madrid, các thành phố cổ Toledo, Segovia, Escoria, xem biểu diễn điệu Flamenco nổi tiếng (được trình diễn trong sân đấu bò).

Các kì thi IMO tiếp theo sẽ được tổ chức tại các Quốc gia sau: Đức (năm 2009), Kazakhstan (năm 2010), Hà Lan (năm 2011), Aentina (năm 2012).

Kì thi THÁCH THỨC TOÁN HỌC QUỐC TẾ tại Singapore

Kì thi "Thách thức Toán học Quốc tế" được tổ chức hai năm một lần. Đây là một kì thi có nội dung khác hẳn với các kì thi Toán Quốc tế. Các trường năng khiếu nổi tiếng trên Thế giới được cử từ 1 đến 3 đội. Mỗi đội 3 học sinh và giải thưởng được trao cho từng đội. Năm nay, đoàn học sinh Khối chuyên Toán – Tin, Trường ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội gồm 2 thầy giáo và 9 học sinh (chia làm 3 đội), đại diện học sinh Việt Nam, lần đầu tiên tham dự kì thi "Thách thức Toán học Quốc tế" được tổ chức tại Singapore. Các trường ở Việt Nam, Thái Lan, Nhật Bản, Hàn Quốc, Malaysia, vì chưa có nhiều kinh nghiệm nên đều chọn các đội gồm toàn học sinh năng khiếu Toán. Các trường của Singapore, Trung Quốc đã có nhiều năm kinh nghiệm tham gia các kì thi này đều chọn đồng bộ mỗi đội gồm: 1 học sinh giỏi Toán, 1 học sinh giỏi Tin và 1 học sinh giỏi Tiếng Anh nên đạt thành tích cao nhất. Một đội của Khối chuyên Toán-Tin trường ĐHKHTN – ĐHQGHN được Giải Nhì- Một thành tích hoàn toàn nhờ thuật toán quá mạnh.

Bài thi gồm hai vòng:

VÒNG 1 là một bài toán thực tế yêu cầu đưa ra các thuật toán giải càng gần tiêu chuẩn tối ưu càng tốt. bao gồm các bước sau: Các đội chuyển bài toán thực tế thành bài toán cụ thể bằng các phương trình toán học; Xây dựng thuật toán giải; Viết chương trình bằng ngôn ngữ Pascal; Ban Giám khảo đưa ra một bộ số liệu cụ thể và chạy kiểm nghiệm trên máy tính.

VÒNG 2 (là vòng khó nhất, mà học sinh phải giải bài thi trong thời gian hơn một ngày).

NGUYỄN VŨ LƯƠNG
(Trường ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

ĐẠI HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM LẦN THỨ VII tại Quy Nhơn

T trong các ngày từ 4 đến 8 tháng 8 năm 2008 vừa qua, Hội Toán học Việt Nam và Trường Đại học Quy Nhơn đã phối hợp tổ chức Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ VII tại Trường Đại học Quy Nhơn, TP. Quy Nhơn, Bình Định.

Đại hội Toán học Việt Nam là sinh hoạt khoa học lớn nhất của cộng đồng toán học Việt Nam. Đây là dịp để các nhà nghiên cứu, ứng dụng và giảng dạy toán trong cả nước trình bày nghiên cứu của mình trong vòng 5 – 6 năm gần đây. Đồng thời trao đổi, thảo luận về những vấn đề thời sự cấp thiết trong phát triển toán học của đất nước. Tham dự Đại hội có hơn 500 đại biểu ở các Vụ, các Viện, các trường Đại học, Cao đẳng, các trường THPT, Nhà Xuất bản Giáo dục. Có 281 báo cáo được trình bày tại Hội nghị trong đó có 7 báo cáo mời (ở 7 phiên toàn thể), còn lại được báo cáo ở 8 tiểu ban: *Đại số – Hình học – Tô pô*; *Giải tích toán học*; *Phương trình vi phân*; *Tối ưu và tính toán khoa học*; *Xác suất và Thống kê toán học*; *Toán học rời rạc và Tin học lý thuyết*; *Ứng dụng toán học*; *Giảng dạy và Lịch sử toán học*. Ngoài ra, Đại hội còn tổ chức 2 Hội nghị bàn tròn về chương trình và sách giáo khoa, về viết và dịch sách Giáo trình Đại học và Sau Đại học. Đại hội được sự quan tâm đặc biệt của Bộ Khoa học và Công nghệ, Ủy ban Nhân dân tỉnh Bình Định, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Viện Toán học Việt Nam.

Điểm mới của Đại hội lần này là lần đầu tiên có sự kết hợp giữa Hội nghị Khoa học và Đại hội đại biểu Hội Toán học Việt Nam. Đại hội lần này nhằm đánh giá, tổng kết những thành tựu phát triển toán học trong 4 năm qua, đồng thời vạch ra đề cương phát triển toán học trong 5 năm tới và bầu ra Ban Chấp hành khóa VII để lãnh đạo Hội Toán học.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin chúc mừng thành công của Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ VII.

PV.

TỪ MỘT BÀI TOÁN... (Tiếp trang 4)

Bài 4. Cho tam giác đều ABC , M là một điểm nằm trong tam giác.

a) Biết $AM = 1$, $BM = \sqrt{3}$ và $CM = 2$. Tính độ dài AB và số đo các góc $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$.

b) Biết $AM = 1$, $BM = \sqrt{2}$ và $\widehat{AMB} = 135^\circ$. Tính độ dài CM và số đo của góc $\widehat{BMC}$.

Bài 5. Cho M là một điểm nằm trong tam giác đều ABC và D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB . Đặt $AM : BM : CM = a : b : c$. Biết rằng $a^2 = b^2 + c^2$. Tính số đo của góc $\widehat{EDF}$.

Bài 6. Cho M là một điểm nằm trong tam giác đều ABC và D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB . Các điểm P, Q, R theo thứ tự nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $MP \parallel AB, MQ \parallel BC, MR \parallel CA$. Kí hiệu S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích tam giác ABC, PQR, DEF .

a) Chứng minh rằng $\frac{S_2}{S_1}$ là hằng số;

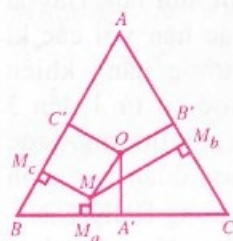
b) Tìm tập hợp điểm M . Biết rằng $S_2 = \frac{15}{64} S$.

Bài 7. Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O . E và F theo thứ tự chạy trên các đường thẳng d và d' sao cho $EF = a$ cho trước. Các đường thẳng vuông góc với d tại E và vuông góc với d' tại F cắt nhau tại M . Tìm tập hợp các điểm M .

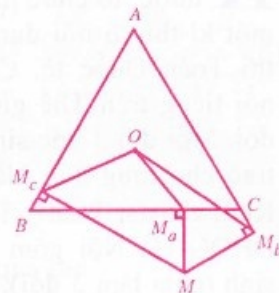


MỘT SỐ TÍNH CHẤT... (Tiếp trang 13)

Cho $N \equiv O$ (h. 5, h. 6) và gọi A', B', C' theo thứ tự là hình chiếu của O tới BC, CA, AB (đây cũng là các chân đường cao của tam giác ABC). Từ kết quả trên ta có $\sum M_a A'^2 = \frac{3}{2} MO^2$.



Hình 5



Hình 6

Từ định lý Pythagore ta thấy $M_a A'^2 = OM_a^2 - OA'^2$ và tương tự cho các đỉnh B, C . Ta có

$$\begin{aligned} \sum (OM_a^2 - OA'^2) &= \frac{3}{2} MO^2 \\ \Leftrightarrow OM_a^2 + OM_b^2 + OM_c^2 &= \frac{3}{2} MO^2 + 3 \left(\frac{R}{2} \right)^2 \\ &= \frac{3}{2} MO^2 + \frac{3}{4} R^2. \end{aligned}$$

Kết hợp với bài toán 3 ta thu được:

Mệnh đề 9.

$$MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = OM_a^2 + OM_b^2 + OM_c^2.$$

Từ bài toán 6 ta lại nhận được một bài toán tương tự và kết quả tương tự cho đa giác đều:

✪ **Bài toán 7.** Cho đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_n$ và M, N là hai điểm bất kì trên mặt phẳng. Gọi M_i, N_i là hình chiếu của M, N trên đường thẳng $A_i A_{i+1}$, ($i = 1, 2, \dots, n; A_{n+1} \equiv A_1$). Khi đó

$$M_1 N_1^2 + M_2 N_2^2 + \dots + M_n N_n^2 = \frac{n}{2} MN^2.$$

Mệnh đề 10. $MM_1^2 + MM_2^2 + \dots + MM_n^2$

$$= OM_1^2 + OM_2^2 + \dots + OM_n^2, \text{ với } O \text{ là tâm đa giác đều } A_1 A_2 \dots A_n.$$

Rất mong bạn đọc tìm kiếm thêm các kết quả khác trong tam giác đều và đa giác đều n -cạnh.

Chúc các bạn thành công!



THÔNG BÁO

về sách giáo khoa phục vụ năm học 2008 - 2009



Nhà xuất bản Giáo dục trân trọng thông báo đến các Quý thầy cô giáo và các em học sinh trong cả nước về việc xuất bản và cung ứng sách giáo khoa (SGK) phục vụ năm học 2008-2009 :

1. SGK từ lớp 1 đến lớp 12, trong đó SGK từ lớp 1 đến lớp 11 là sách tái bản, nội dung không thay đổi so với sách đã xuất bản từ năm 2007 trở về trước. Riêng SGK lớp 12 được in mới, thay cho sách cũ đã xuất bản từ năm 2007 trở về trước.

Bộ SGK	Số cuốn	Giá bìa (đồng)
Lớp 1	6	40.800
Lớp 2	6	38.900
Lớp 3	6	42.300
Lớp 4	9	66.100
Lớp 5	9	67.200
Lớp 6	12	83.500
Lớp 7	13	97.000
Lớp 8	13	105.500
Lớp 9	13	102.700
Lớp 10 (chuẩn)	13	112.800
Lớp 11 (chuẩn)	13	114.200
Lớp 12 (chuẩn)	13	124.000

(Ghi chú: Giá bộ SGK chỉ tính sách ngoại ngữ là Tiếng Anh. Bàn danh mục giá bán lẻ được niêm yết ở tất cả các cửa hàng sách, nhà sách và đại lý có bán SGK tại các tỉnh, thành phố trong cả nước.)

Ngoài ra, Nhà xuất bản Giáo dục tổ chức cung ứng các sản phẩm phục vụ học sinh, giáo viên năm học 2008-2009 :

2. Các sách tham khảo bổ trợ SGK từ lớp 1 đến lớp 12 (gồm các sách bài tập và vở bài tập của các môn học do các nhóm tác giả SGK biên soạn).

3. Các sách tham khảo - Nâng cao kiến thức ở các lĩnh vực khoa học tự nhiên, khoa học xã hội,... phục vụ các đối tượng là thầy cô giáo, các cán bộ quản lý giáo dục, các em học sinh, sinh viên và các bậc phụ huynh học sinh,...

4. Các loại tranh ảnh, bản đồ giáo dục, các băng hình, băng tiếng, đĩa CD-Rom giáo khoa và

các loại thiết bị đồ dùng dạy học phục vụ chương trình, SGK hiện hành, đặc biệt là tranh ảnh, bản đồ, băng đĩa, thiết bị phục vụ chương trình và SGK mới lớp 12.

5. Các loại sách mẫu giáo, truyện tranh, truyện lịch sử phục vụ ngành học Mầm non do các nhóm tác giả chuyên ngành trong nước biên soạn và một số loại sách được hợp tác với các nhà xuất bản nước ngoài (Úc, Mỹ, Nhật, Canada, v.v...).

6. Các loại tập vở học sinh phục vụ theo yêu cầu, các loại sổ ghi tên, ghi điểm, học bạ, bài soạn giáo án theo mẫu quy định, phục vụ học sinh và giáo viên thuận lợi trong học tập và giảng dạy.

Để cung ứng các sản phẩm trên đến các thầy cô giáo, các em học sinh và các trường học, Nhà xuất bản Giáo dục cùng với các Công ty (CP) Sách - TBTH ở các tỉnh, thành phố tổ chức hai Tháng phát hành cao điểm để phục vụ năm học mới 2008-2009 :

* Tháng phát hành phục vụ Hè 2008:
Từ 15 - 5 đến 15 - 6.

* Tháng phát hành phục vụ Khai giảng :
Từ 10 - 8 đến 10 - 9.

Đồng thời với việc phát hành và cung ứng các sản phẩm mới nói trên, Nhà xuất bản Giáo dục phối hợp với các Sở Giáo dục - Đào tạo, các Công ty (CP) Sách - TBTH, các tổ chức xã hội triển khai cuộc vận động dùng lại SGK cũ theo sự chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Mọi liên hệ việc mua - bán, trao tặng SGK cũ, xin liên hệ với Nhà xuất bản Giáo dục ở từng khu vực :

❖ TP. Hà Nội : Số 187B Giảng Võ,
ĐT: 04 8562496.

❖ TP. Đà Nẵng : Số 15 Nguyễn Chí Thanh,
ĐT : 0511 3827373.

❖ TP. Hồ Chí Minh : Số 231 Nguyễn Văn Cừ,
ĐT : 08 8358423.

Và các Công ty (CP) Sách - TBTH tại các tỉnh, thành phố trong cả nước.

Trân trọng thông báo.

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 374(8.2008)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.5121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272, 04.5121608

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,

TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,

PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,

TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,

GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY,

GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**

Nguyễn Duy Liên – Hành trình đi đến bài toán tổng quát.

- 3 **Trịnh Khôi – Từ một bài toán hình học.**

- 5 **Lịch sử toán học – History of Maths**

Phùng Hồ Hải – Số hữu tỉ và số vô tỉ.

- 8 **Phương pháp giải toán–Math Problem Solving**

Nguyễn Đức – Về bài toán đường tròn trong hệ phương trình có tham số.

- 11 **Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**

Trần Quang Hùng – Một số tính chất đặc biệt của tam giác đều.

- 14 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**

Trần Văn Hạo – Về sách giáo khoa Toán 12 theo chương trình chuẩn.

- 15 **Quang Phúc – Hội thi Tin học trẻ toàn quốc lần thứ XIV, năm 2008.**

- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**

T1/374, ..., T12/374, L1/374, L2/374.

- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.**

Giải các bài của số 370.

- 29 **PV – Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ VII tại Quy Nhơn.**

- 29 **Nguyễn Vũ Lương – Kì thi "Thách thức toán học Quốc tế" tại Singapore.**

- 31 **NXBGD – Thông báo về sách giáo khoa phục vụ năm học 2008 – 2009.**

Bìa 1. Cán bộ, học sinh Việt Nam tại IMO lần thứ 49. Từ trái qua phải:

Hàng trước: Dương Trọng Hoàng, Nguyễn Phạm Đạt, Lê Ngọc Anh, Hoàng Đức Ý, Đỗ Thị Thu Thảo, Đặng Trần Tiến Vinh.

Hàng sau: Thầy Nguyễn Khắc Minh, Ngô Văn Sáng, GS. Hà Huy Khoái, Thầy Mạc Đăng Nghị, Thầy Trịnh Văn Hoa, Thầy Phan Tuấn Cộng.

Bìa 2. Kì thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 49.

Bìa 3. Câu lạc bộ – Math Club

Bìa 4. Trường THPT Bán công Kinh Môn, Hải Dương, 5 năm xây dựng và trưởng thành.

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.

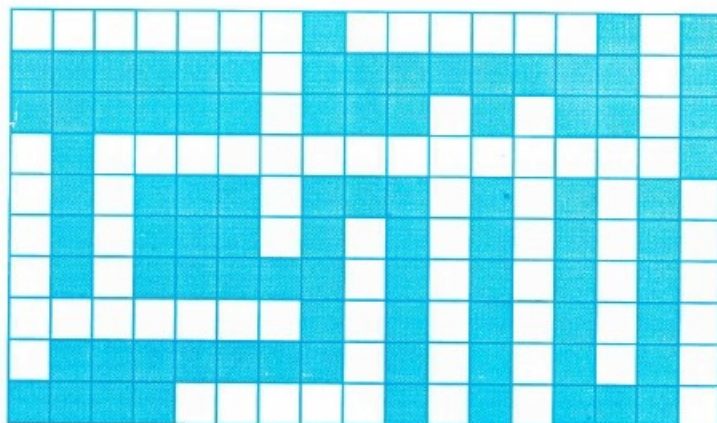
Trị sự, phát hành : HOÀNG THÀNH ĐỨC, VŨ ANH THU

Mĩ thuật : MINH THƠ

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



Chuẩn bị VÀO NĂM HỌC MỚI



Một học sinh lớp 8 đang chuẩn bị sách, vở vào năm học mới nhưng lúng túng vì không nhớ rõ có bao nhiêu môn học. Bạn hãy giúp học sinh đó bằng cách điền tên các môn học vào các ô trắng trong ô chữ bên để đọc theo hàng ngang (từ trái sang phải) và theo cột dọc (từ trên xuống dưới).

Giải đáp: Năm 2008, kỉ niệm một số nhà toán học (Đề đăng trên THPT số 370, tháng 4.2008)

Ta sắp xếp tư liệu về các nhà toán học theo bốn mục sau:

- a) Họ và tên; b) Năm sinh và năm mất; c) Nơi sinh;
d) Công trình quen biết về toán sơ cấp.

- 1) a) Ceva Giovanni
b) (1648 – 1734)
c) Milan, Italia
d) Điều kiện để ba đường thẳng qua ba đỉnh của một tam giác đồng quy.
- 2) a) Khayyam Omar
b) (1048 – 1131)
c) Nichapur, Ba Tư
d) Cách giải phương trình bậc hai và một số phương trình bậc ba, bậc bốn.
- 3) a) Brahmagupta
b) (598 – 660)
c) Multan, Pakistan
d) Sử dụng số 0, số âm đầu tiên. Giải một số phương trình nghiệm nguyên hai ẩn.

Ghi chú: Năm 1947 Ấn Độ thoát khỏi sự cai trị của thực dân Anh, nhưng do xung đột tôn giáo nên tách ra thành hai quốc gia độc lập là Ấn Độ (phần lớn dân theo đạo Hindu) và Pakistan (phần lớn dân theo Hồi giáo). Vùng đất Multan nay thuộc Pakistan.

- 4) a) Mersenne Marin
b) (1588 – 1648)
c) Sarthe, Pháp
d) Số dạng $2^p - 1$ với p là số nguyên tố.
- 5) a) Torricelli Evangelista
b) (1608 - 1647)
c) Faenza, Italia
d) Định lí: Dựng ba tam giác đều ABC' , BCA' , CAB' về phía ngoài tam giác ABC thì ba đường thẳng AA' , BB' , CC' đồng quy.

Các bạn sau có lời giải tốt, được nhận tặng phẩm:
Hà Thành Trung, 10T1, khối PTCTT, ĐHSPT Hà Nội; *Nguyễn Thu Thủy*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái; *Nguyễn Thanh Tùng*, 11T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa; *Hoàng Bích Phương*, 11A1, THPT Lương Tài 1, Bắc Ninh; *Hoàng Phúc Nguyên*, 10 Toán Tin, THPT chuyên Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi; *Nguyễn Anh Tuấn*, 11B3, THPT An Dương, Hải Phòng.

Nhắn tin: Các bạn lớp 9 và 12 đạt giải các mục Câu lạc bộ, Toán học muôn màu, Giải trí toán học, Sai lầm ở đâu? gửi gấp địa chỉ mới về Tòa soạn để nhận tặng phẩm.

VÂN KHANH

TRƯỜNG THPT BÁN CÔNG KINH MÔN, HẢI DƯƠNG

5 Năm Xây dựng và trưởng thành



Hiệu trưởng
NGUYỄN NGỌC XÂY

Trường THPT bán công Kinh Môn, được thành lập ngày 23.01.2003. Thầy giáo Nguyễn Ngọc Xây, nguyên là Phó Hiệu trưởng trường THPT Phúc Thành - người có 20 năm kinh nghiệm xây dựng trường lớp, được cử làm Hiệu trưởng Nhà trường.

◆ Năm đầu thành lập (khóa học 2003 - 2004), trường chỉ có 9 lớp 10 với số học sinh là 525 em, có 3 cán bộ biên chế (1 Hiệu trưởng, 1 Giáo viên và 1 Kế toán) còn lại là giáo viên thử việc và thỉnh giảng. Trường

chưa có nhà, lớp học nên phải đi học nhờ trường Tiểu học xã Hiệp Sơn.

◆ Năm học 2004 - 2005, trường có 9 lớp 11 và 12 lớp 10 với số học sinh là 1221 em. Trường đã tuyển được 11 giáo viên cơ hữu và 16 giáo viên thử việc. Ban Giám hiệu được bổ sung thêm 1 Hiệu phó.

◆ Năm học 2005 - 2006, trường có 33 lớp với số học sinh là 1879 em. Đây là năm đầu tiên trường có học sinh thi tốt nghiệp đạt tỉ lệ 99,8 % và có 51 học sinh đỗ vào các trường Cao đẳng và Đại học.

◆ Năm học 2006 - 2007, trường có 36 lớp với số học sinh là 2269 em. Đội ngũ giáo viên đã có 34 giáo viên cơ hữu, 18 giáo viên thử việc và 8 giáo viên thỉnh giảng. Đây là năm học đầu tiên trường thực hiện phong trào thi đua "Hai không" của Bộ Giáo dục và Đào tạo phát động. Tỉ lệ học sinh đỗ tốt nghiệp vẫn đạt cao 81,6%, trong đó có 151 học sinh đỗ Cao đẳng và Đại học, có nhiều em thi đỗ hai khối, có em đỗ trường top đầu như Đại học Kinh tế Quốc dân, Học viện An ninh...

◆ Năm học 2007 - 2008, trường có 34 lớp (do huyện đã mở thêm trường tư thục) với số học sinh là 1859 em. Trường có đủ 54 giáo viên cơ hữu, có cán bộ phụ trách thiết bị, thư viện, y tế, văn thư, Ban Giám hiệu có đủ 3 người.

Trên bước đường phát triển giáo dục của mình, Ban Giám hiệu nhà trường luôn suy nghĩ phải khắc phục khó khăn ban đầu về cơ sở vật chất và hạn chế về đội ngũ giáo viên. Theo phương thức Nhà nước và nhân dân cùng làm. Nhà trường đã gạt hái được thành công trong xây dựng trường, tuyển chọn được đội

ngũ giáo viên có sức khỏe, trình độ chuyên môn vững vàng và say sưa với nghề. Hiện nay cơ sở vật chất của trường đã khang trang với đủ 21 phòng học, phòng vi tính, phòng thực hành, các phòng làm việc của ban giám hiệu, tổ bộ môn. Các tổ chức đoàn thể hoạt động tốt, có đầy đủ sân chơi, bãi tập, 6 phòng bộ môn đang gấp rút hoàn thành. Trường đã làm được điều mà cả tập thể cán bộ, giáo viên đặt ra là : Dạy cho các em học sinh không đủ điểm vào học ở các trường THPT công lập có khả năng học tập thi đỗ Cao đẳng, Đại học. Nhà trường rất chú ý đến giáo dục toàn diện cho học sinh, phong trào TDTT của trường rất mạnh. Đội tuyển điền kinh của trường ba năm liên đứng thứ hai toàn tỉnh. Hội khỏe Phù Đổng lần thứ sáu của tỉnh, trường xếp thứ 2; Hội khỏe Phù Đổng lần thứ bảy (năm 2008) trường đứng thứ 4/54 với 4 Huy chương Vàng, 1 Huy chương Đồng và có 3 em được chọn vào đội tuyển thi Hội khỏe Phù Đổng toàn quốc.

Trong 5 năm vừa xây dựng vừa trưởng thành, nhà trường đã khẳng định được mô hình trường bán công là : *Hiệu quả, phù hợp với tình hình kinh tế - xã hội của địa phương*. Trường là địa chỉ tin cậy của ngành, của nhân dân và học sinh toàn huyện.

Thực hiện kế hoạch của Sở Giáo dục - Đào tạo, từ năm 2008 - 2010 quy mô của nhà trường gồm 30 lớp với 1500 học sinh, 60 cán bộ giáo viên. Trường phấn đấu từng bước trở thành trường chuẩn trong giai đoạn II. Trường kính mong được sự giúp đỡ của ngành, của Sở Giáo dục - Đào tạo tỉnh Hải Dương, của Huyện ủy UBND huyện Kinh Môn để trường phát triển vững vàng về mọi mặt, luôn xứng đáng với niềm tin yêu của học sinh và phụ huynh và học sinh huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương.



Lễ trao giải thưởng Hội thi kể chuyện học tập và làm theo tấm gương đạo đức Hồ Chí Minh

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT08M8

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2008

Giá : 6000 đồng

Sáu nghìn đồng