



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
6 2008
Số 372

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 45

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272, (04)5121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

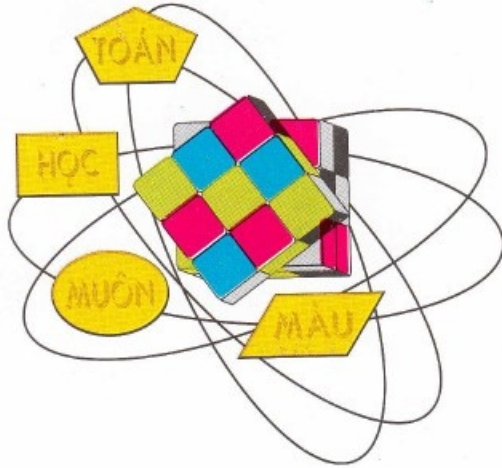
Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre

Thủ sức trước kỳ thi

Cuộc thi vui
GIẢI TRÍ NGÀY HÈ (đợt 2)



Một số điểm cần lưu ý
khi dạy - học Giải tích 12 nâng cao



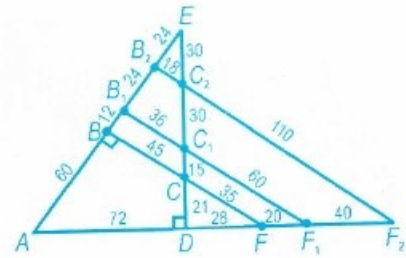
Giải đáp: TÁM ĐOẠN THẲNG CÓ SỐ ĐO NGUYÊN

(Đề đăng trên THPT số 366 tháng 12.2007)

Có nhiều cách vẽ tứ giác lồi $ABCD$ mà các đường thẳng AB , CD cắt nhau tại E (B nằm giữa A và E) và các đường thẳng AD , BC cắt nhau tại F sao cho tám đoạn thẳng AB , BE , AD , DF , BC , CF , CD , CE đều có số đo nguyên (cùng với một đơn vị đo).

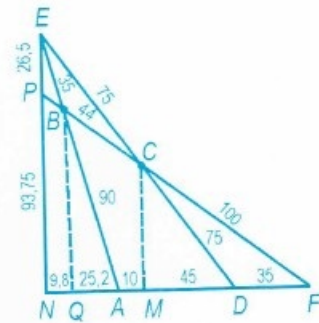
Một cách làm là dựa vào các bộ số nguyên dương Pythagore (x ; y ; z) thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$ để dựng các tam giác vuông mà các cạnh cắt nhau tạo ra tứ giác lồi. Từ tính chất đồng dạng của các tam giác vuông ta tính được độ dài các cạnh của tứ giác đó.

1) Trên hình 1 vẽ các tứ giác $ABCD$, AB_1C_1D , AB_2C_2D với góc BAD nhọn có tính chất trên, trong đó chú ý rằng các tam giác ADE , ABF , AB_1F_1 , AB_2F_2 đều đồng dạng và mỗi tam giác có ba cạnh tỉ lệ với $3 : 4 : 5$.



Hình 1

2) Trên hình 2 vẽ tứ giác $ABCD$ với góc BAD tù có tính chất trên, trong đó chú ý rằng các tam giác DNE , NPF , QBF , MCF đều đồng dạng và các cạnh tỉ lệ với $3 : 4 : 5$, còn tam giác ANE có các cạnh tỉ lệ với $7 : 24 : 25$.



Hình 2

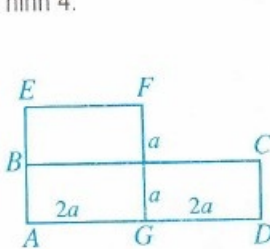
Làm tương tự ta có đáp án khác.

Nhận xét. Một số bạn không có chú ý điều kiện điểm B nằm giữa A và E . Các bạn sau có lời giải đúng:

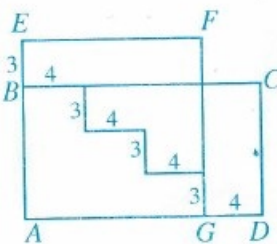
- 1) Dương Văn An, 12A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa, Bà Rịa – Vũng Tàu.
- 2) Trần Thế Phúc, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương.

Phân chia hình chữ nhật, GHÉP THÀNH HÌNH VUÔNG

Ta có thể phân chia mỗi hình chữ nhật $ABCD$ kích thước $a \times 4a$ (cm) và $b^2 \times (b+1)^2$ (cm) thành hai đa giác (lồi hoặc lõm) rồi ghép chúng lại (không chờm lên nhau) được một hình vuông $AEFG$ như ở hình 3 và hình 4.



Hình 3



Hình 4

Nhưng nếu phải phân chia mỗi hình chữ nhật (không là hình vuông) kích thước khác thành các đa giác lồi rồi ghép chúng lại thành hình vuông thì số lượng các đa giác lồi được chia cắt phải nhiều hơn.

Dành cho bạn đọc

Bạn có thể phân chia mỗi hình chữ nhật sau thành ít nhất bao nhiêu đa giác lồi để ghép chúng lại được một hình vuông:

- 1) Hình chữ nhật kích thước 2×7 (cm)?
- 2) Hình chữ nhật kích thước 2×11 (cm)?

PHI PHI



DÙNG BIỂU THỨC LIÊN HỢP VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

LÊ BÁ HOÀNG

(Phòng GD-ĐT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Trong các đề thi học sinh giỏi THCS cũng như đề thi vào lớp 10 THPT, thường có bài về phương trình và hệ phương trình vô tỉ. Việc sử dụng biểu thức liên hợp cho các bài toán này nhiều khi cho ta kết quả nhanh chóng.

Trước hết ta nhắc lại một số công thức sau:

TT	Biểu thức	Biểu thức liên hợp	Tích
1	$\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$	$\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$	$A - B$
2	$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A + B$
3	$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A - B$

Dưới đây là một số thí dụ minh họa.

★ **Thí dụ 1.** Giải PT $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x-6$.

Lời giải. Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$. Khi đó PT đã cho tương đương với

$$\frac{(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x})(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x})}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} = 2(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} = 2(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \text{hoặc } x = 3 \text{ (thỏa mãn) hoặc}$$

$$2 - \frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} = 0 \quad (1)$$

Từ ĐK $x \geq \frac{3}{2} > 1$ suy ra $2 - \frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} > 0$.

Do đó PT (1) vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$. □

★ **Thí dụ 2.** Giải PT $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}$.

Lời giải. Điều kiện $x \geq -\frac{10}{3}$. Khi đó PT đã cho tương đương với

$$(x+3)(x+6) = \frac{2(\sqrt{3x+10}-1)(\sqrt{3x+10}+1)}{\sqrt{3x+10}+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+6) = \frac{6(x+3)}{\sqrt{3x+10}+1}$$

$\Leftrightarrow$ hoặc $x = -3$ (thỏa mãn) hoặc

$$x+6 - \frac{6}{\sqrt{3x+10}+1} = 0 \quad (1)$$

• Với $x > -3$ thì $\frac{6}{\sqrt{3x+10}+1} < 3$ và $x+6 > 3$, nên PT (1) vô nghiệm.

• Với $-\frac{10}{3} \leq x < -3$, tương tự có $\frac{6}{\sqrt{3x+10}+1} > 3$ và $x+6 < 3$ nên PT (1) vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = -3$. □

★ **Thí dụ 3.** Giải PT $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$ (*)

Lời giải. Ta có

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-4=3(x-2)+(\sqrt{x^2+5}-3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2+12}-4)(\sqrt{x^2+12}+4)}{\sqrt{x^2+12}+4}$$

$$= 3(x-2) + \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4} = 3(x-2) + \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$\Leftrightarrow$ hoặc $x = 2$ (thỏa mãn) hoặc

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - 3 - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = 0 \quad (1)$$

Do $\sqrt{x^2+12} > \sqrt{x^2+5}$, từ (*) suy ra $3x > 5$, dẫn đến $x+2 > 0$, từ đó suy ra

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - 3 - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} < 0$$

nên PT (1) vô nghiệm. Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*). $\square$

★ **Thí dụ 4.** Giải PT $2x^2 - 11x + 21 = \sqrt[3]{4x-4}$.

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$(x-3)(2x-5) =$$

$$\frac{3(\sqrt[3]{4x-4}-2)(\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x-5) = \frac{12(x-3)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}$$

$$\Leftrightarrow \text{hoặc } x = 3 \text{ hoặc } 2x-5 - \frac{12}{t^2+2t+4} = 0 \quad (1)$$

với $t = \sqrt[3]{4x-4}$.

• Với $x > 3$ thì $2x-5 > 1$ và $\frac{12}{t^2+2t+4} < 1$, suy ra PT (1) vô nghiệm.

• Với $x < 3$, thì $2x-5 < 1$ và $\frac{12}{t^2+2t+4} > 1$, suy ra PT (1) vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$. $\square$

★ **Thí dụ 5.** Giải PT $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$.

Lời giải. Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$. Khi đó PT đã cho tương đương với

$$\frac{(\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x})(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} = \frac{2(3x-2)}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3x-2)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} = \frac{2(3x-2)}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow \text{hoặc } x = \frac{2}{3},$$

$$\text{hoặc } \sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x} = \sqrt{x^2+4} \quad (1)$$

Bình phương hai vế của (1) ta được

$$4\sqrt{2(2+x)(2-x)} + (2-x)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}(4\sqrt{2(2+x)} + (x+4)\sqrt{2-x}) = 0 \quad (2)$$

Dễ thấy $4\sqrt{2(2+x)} + (x+4)\sqrt{2-x} > 0$ với $-2 \leq x \leq 2$, do đó từ (2) suy ra $x = 2$ (thỏa mãn). Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x = \frac{2}{3}$ hoặc $x = 2$. $\square$

★ **Thí dụ 6.** Giải HPT $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = 3 & (1) \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-2} = 3 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 2$ và $y \geq 2$. Từ HPT đã cho ta suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} &= \sqrt{y+1} - \sqrt{y-2} \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}} &= \frac{(\sqrt{y+1} - \sqrt{y-2})(\sqrt{y+1} + \sqrt{y-2})}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-2}} \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó có } \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{y+1} + \sqrt{y-2}.$$

Nếu $x > y \geq 2$ thì $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} > \sqrt{y+1} + \sqrt{y-2}$;

Nếu $2 \leq x < y$ thì $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} < \sqrt{y+1} + \sqrt{y-2}$.

Do đó $x = y$. Thay vào PT (1) ta được

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x-2)} = 5-x \quad (3)$$

Bình phương hai vế của (3), giải ra được $x = 3$ (thỏa mãn).

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 3)$. $\square$

★ **Thí dụ 7.** Giải HPT $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2+\frac{1}{y}} = 2 & (1) \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2+\frac{1}{x}} = 2 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x > 0, y > 0$. Từ hệ đã cho suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{2+\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} &= \sqrt{2+\frac{1}{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{2+\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\sqrt{2+\frac{1}{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) &= \left(\sqrt{2+\frac{1}{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \left(\sqrt{2+\frac{1}{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \end{aligned}$$

(Xem tiếp trang 30)

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10

Trường THPT chuyên PHAN BỘI CHÂU, Nghệ An

NĂM HỌC 2007-2008

(Đề thi đăng trên THPT số 370, tháng 4 năm 2008)

NGÀY THỨ NHẤT

Câu 1. a) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có

$$P = \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

b) Đáp số. $P = 1 + \sqrt{2}$.

Câu 2. a) $\Delta' = (2m)^2 - 2(2m^2 - 1) = 2 > 0, \forall m$, nên PT (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của PT(1). Theo định lý Viète có $x_1 + x_2 = 2m$. Do x_1 là nghiệm của PT (1) nên có $2x_1^2 - 4mx_1 + 2m^2 - 1 = 0$.

$$\text{Lại có } Q = (2x_1^2 - 4mx_1 + 2m^2 - 1) + 4m(x_1 + x_2)$$

$$= 4m(x_1 + x_2) = 4m \cdot 2m = 8m^2.$$

$$\text{Ta có } Q > 0 \Leftrightarrow 8m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Vậy với $m \neq 0$ thì PT (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn đề bài.

Câu 3. a) Đặt $u = \sqrt{x+1}; v = \sqrt{y}$ ($u \geq 0, v \geq 0$).

$$\text{Hệ đã cho trở thành } \begin{cases} u+v=4 \\ u^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=4 \end{cases}$$

Suy ra $u = 2; v = 2$, từ đó $x = 3$ và $y = 4$. Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 4)$.

b) Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

$$1 \geq x + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ suy ra } \frac{y}{x} \geq 4 \quad (1)$$

Áp dụng (1) và BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{16x} + \frac{15y}{16x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{16x}} + \frac{15 \cdot 4}{16} = \frac{17}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$.

Câu 4. (h. 1). Do tam giác ABC cân tại A nên $AM \perp BC$. Lại có $BD \perp AD$, do đó tứ giác $ABMD$ nội tiếp.

Mặt khác, NI là đường trung bình của tam giác BMD nên $NI \parallel MD$. Do đó

$$\widehat{KNC} = \widehat{DMC}.$$

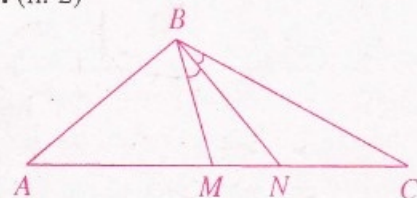
Hơn nữa $\widehat{DMC} = \widehat{KAB}$ (tính chất tứ giác nội tiếp $ABMD$). Suy ra $\widehat{KNC} = \widehat{KAB}$ (1)

Vậy tứ giác $ABNK$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{NKC} = \widehat{ABC}$ (tứ giác $ABNK$ nội tiếp). Từ đây và từ (1) có $\triangle ABC \sim \triangle NKC$.

Suy ra $\frac{BC}{CK} = \frac{AC}{NC}$. Mặt khác, dễ thấy $NC = \frac{3}{4}BC$, do đó $BC^2 = \frac{4}{3}BC \cdot NC = \frac{4}{3}AC \cdot CK$.

Câu 5. (h. 2)



Hình 2

Do BN là tia phân giác trong góc B của tam giác BMC nên $\frac{BM}{BC} = \frac{NM}{NC} = \frac{1}{2}$.

Lại có $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{BM}{BC}$, suy ra BA là tia phân giác ngoài của tam giác BMC .

Theo tính chất của hai đường phân giác trong và phân giác ngoài suy ra $BN \perp BA$ (đpcm).

NGÀY THỨ HAI

Câu 6. a) Ta có PT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 + x = (x^2 - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 1 \\ x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

b) Gọi đa thức đã cho là

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (a \neq 0).$$

Từ giả thiết ta có $e = P(0) : 7$;

$$P(2) - P(1) + P(-2) - P(-1) = 3a : 7, \text{ do đó } a : 7;$$

$$P(2) - P(1) - P(-2) + P(-1) = 3b : 7, \text{ do đó } b : 7;$$

$$c = P(1) + P(-1) - 2e - a : 7;$$

$$d = P(1) - P(-1) - b : 7, \text{ suy ra đpcm.}$$

Câu 7. a) Nhân PT thứ nhất của hệ với 6, nhân PT thứ hai của hệ với $19x$ rồi cộng lại được

$$6(xy)^3 + 19(xy)^2 + 19xy + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy + 1)(2xy + 3)(3xy + 2) = 0.$$

• Với $xy = -1$, thay vào PT thứ nhất của hệ được $x = 0$ (không thỏa mãn).

• Với $xy = -\frac{2}{3}$, tìm được $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; -2\right)$.

• Với $xy = -\frac{3}{2}$, tìm được $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

b) Đặt A là vế trái BĐT cần chứng minh. Ta có

$$A = a - \frac{ab^2}{1+b^2} + b - \frac{bc^2}{1+c^2} + c - \frac{ca^2}{1+a^2}$$

$$= 3 - \left(\frac{ab^2}{1+b^2} + \frac{bc^2}{1+c^2} + \frac{ca^2}{1+a^2} \right)$$

$$\geq 3 - \left(\frac{ab^2}{2b} + \frac{bc^2}{2c} + \frac{ca^2}{2a} \right) \geq 3 - \frac{(a+b+c)^2}{6} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

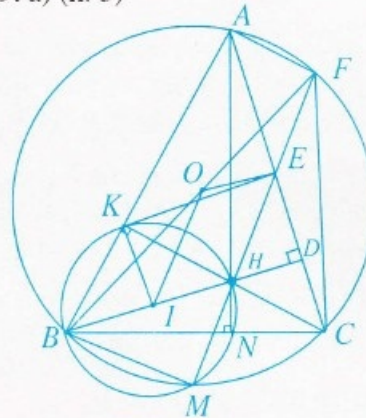
Câu 8. a) *Phản chứng.* Giả sử bất kì hai hình chữ nhật nào trong chín hình chữ nhật nhỏ $H_1, H_2, \dots, H_9$ đều có diện tích phần chung nhỏ hơn $\frac{1}{9}$.

Khi đó diện tích phần H_2 không bị phủ bởi H_1 lớn hơn $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$; diện tích phần H_3 không bị

phủ bởi H_1 và H_2 lớn hơn $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$; ...; diện tích phần H_9 không bị phủ bởi $H_1, \dots, H_8$ lớn hơn $\frac{1}{9}$. Như vậy diện tích của hình chữ nhật

lớn hơn $1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \dots + \frac{1}{9} = 5$ (vô lí).

Câu 9. a) (h. 3)



Hình 3

Ta có tứ giác $BNHK$ nội tiếp đường tròn đường kính BH ($\widehat{BKH} = \widehat{BNH} = 90^\circ$). Gọi I là trung điểm của BH . Các tam giác KBH và KAC vuông nên $\widehat{IKH} = \widehat{IHK}$ và $\widehat{EKC} = \widehat{KCE}$. Lại có $\widehat{IHK} = \widehat{DHC}$ từ đó có $\widehat{EKC} + \widehat{HKI} =$ hay $EK \perp KI$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

b) Kẻ đường kính BF của đường tròn (O) . Dễ thấy tứ giác $AHCF$ là hình bình hành nên E là trung điểm của HF . Theo tính chất đường trung bình ta có $OI \parallel EH$. Mặt khác $OI \perp BM$ (đường nối tâm hai đường tròn vuông góc với dây cung chung). Do đó $EH \perp BM$. Lại có $HM \perp BM$ (do BH là đường kính đường tròn (I)), suy ra E, H, M thẳng hàng và $EM \perp BM$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TRƯỜNG ĐHSPTP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2007-2008

(ĐỀ CHUNG CHO CÁC LỚP CHUYÊN TOÁN, VĂN, PHÁP)

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2 điểm)

1) Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}(16 - \sqrt{x})}{x - 4} + \frac{3 + 2\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} - \frac{2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$$

với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

2) Không giải phương trình $2x^2 + 17x - 13 = 0$,

hãy tính giá trị của biểu thức $S = \frac{4x_1^2 + 7x_1x_2 + 4x_2^2}{3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2}$,

trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 2. (1 điểm)

1) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$.

2) Tìm giá trị của m để đường thẳng (D) là đồ thị hàm số $y = m(x + 1)$ (m khác 0) tiếp xúc với đồ thị (P). Tìm tọa độ tiếp điểm.

Câu 3. (2 điểm).

Giải các phương trình và hệ phương trình sau

1) $x^2 - x - \frac{13}{x^2 - x + 1} = 11$;

2)
$$\begin{cases} \frac{5x}{x+1} + \frac{y}{y-3} = 27 \\ \frac{2x}{x+1} - \frac{3y}{y-3} = 4. \end{cases}$$

Câu 4. (1 điểm). Tìm số tự nhiên bé nhất biết rằng khi chia số đó cho 2005 thì được dư là 23 còn khi chia số đó cho 2007 thì được dư là 32.

Câu 5. (4 điểm). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Điểm M di động trên cung nhỏ BC, M khác B và C. Dây cung AM cắt dây cung BC tại D.

- 1) Chứng minh rằng $AM = BM + CM$.
- 2) Chứng minh rằng tích $AD \cdot AM$ là một hằng số.
- 3) Xác định vị trí điểm M sao cho độ dài đoạn DM lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất này theo R.
- 4) Tia CM cắt tia AB tại K. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKM.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh) giới thiệu.

Câu 10. Giả sử tứ giác lồi

ABCD thỏa mãn

$AD + BC + BD$

$\leq 2\sqrt{2S}$ (h. 4).

Ta thấy,

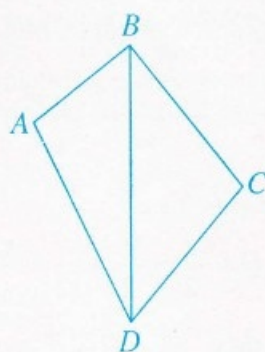
$$2S \leq BD(AD + BC)$$

$$\leq \left(\frac{AD + BC + BD}{2} \right)^2 (*)$$

$$\text{Vậy } AD + BC + BD$$

$$\geq 2\sqrt{2S}.$$

$$\text{Từ đó } AD + BC + BD = 2\sqrt{2S}.$$



Hình 4

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các đẳng thức ở (*)

xảy ra, tức là khi

$$AD \perp BD,$$

$$BC \perp BD \text{ và}$$

$$AD + BC = BD$$

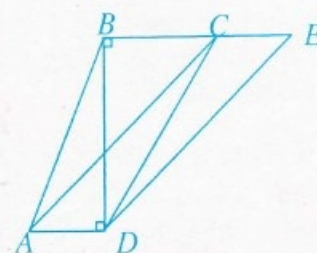
(h. 5).

Dựng hình bình

hành CADE ta

có $\triangle BDE$ vuông cân tại B.

$$\text{Do đó } AC = DE = BD\sqrt{2} = 2\sqrt{S}.$$



Hình 5

THÁI VIỆT THẢO

(Sở GD-ĐT Nghệ An) giới thiệu.



**Chuẩn bị
cho kì thi
tốt nghiệp THPT
và thi vào
Đại học**

Một số phương pháp TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT và GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

ĐẶNG THANH HẢI
(GV Học viện Phòng không -
Không quân, Hà Tây)

Bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của một biểu thức hoặc một hàm số là bài toán thường xuất hiện ở các câu IV, câu V, trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng hay các kì thi học sinh giỏi các cấp. Bài viết xin trình bày một số phương pháp cơ bản để giải các bài toán thuộc dạng này.

Phương pháp 1. ƯỚC LƯỢNG GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC HOẶC CỦA HÀM SỐ.

Phương pháp này chủ yếu sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc (Cauchy, Bunyakovski, ...) hoặc các BĐT cơ bản để ước lượng giá trị của biểu thức hoặc của hàm số. Từ đó tìm điều kiện xảy ra dấu đẳng thức để suy ra GTLN, GTNN cần tìm.

★**Thí dụ 1.** Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thoả mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có $y+z \geq 2\sqrt{yz} = 2\sqrt{\frac{1}{x}}$. Từ đó

$$x^2(y+z) \geq 2x^2\sqrt{\frac{1}{x}} = 2x\sqrt{x}, \text{ suy ra}$$

$$\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}.$$

Xét hai BĐT tương tự nữa, ta thu được

$$P \geq 2 \left(\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \right) \quad (1)$$

Đặt $a = x\sqrt{x}, b = y\sqrt{y}, c = z\sqrt{z}$; thì a, b, c là các số dương và $abc = 1$.

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow P \geq 2 \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \right) = 2S \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Bunyakovski ta có

$$(a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)) \times \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \right) \geq (a+b+c)^2.$$

$$\text{Từ đó } S \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1 \quad (3)$$

Từ (2) suy ra $P \geq 2$.

Vậy GTNN của P là 2, đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. □

★**Thí dụ 2.** Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right).$$

Lời giải. Ta có

$$Q = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} \quad (1)$$

$$\text{Để thấy } x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy

$$Q \geq \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z} \right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta được

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3\sqrt{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \frac{3}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự ta thấy $Q \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

Vậy GTNN của Q là $\frac{9}{2}$, đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. $\square$

Phương pháp 2. XÉT CHIỀU BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Sử dụng công cụ đạo hàm, thiết lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó, từ đó suy ra GTLN, GTNN của hàm số đó.

★ **Thí dụ 3.** Cho hai số thực x, y khác 0 thay đổi thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Lời giải. Từ giả thiết có

$$A = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^3 y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2.$$

Đặt $x = ty$, cũng từ giả thiết $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$ suy ra $(t+1)ty^3 = (t^2 - t + 1)y^2$.

$$\text{Do đó } y = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t}; \quad x = ty = \frac{t^2 - t + 1}{t + 1}.$$

$$\text{Từ đó } A = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - t + 1}\right)^2.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - t + 1} \text{ có } f'(t) = \frac{-3t^2 + 3}{(t^2 - t + 1)^2}.$$

Giải PT $f'(t) = 0$ ta được $t = \pm 1$.

Lại có $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - t + 1}$, từ đó ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(t)$	1		0		4		1

Từ bảng biến thiên, ta có GTLN của A là $f^2(1) = 16$, đạt được khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$. $\square$

★ **Thí dụ 4.** Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|.$$

Lời giải. Trên mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, xét các điểm $M(-1+x; -y)$; $N(1+x; y)$.

Ta có $OM + ON \geq MN$, suy ra

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq \sqrt{4+4y^2} = 2\sqrt{1+y^2} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

$$\text{Từ (1) ta có } B \geq 2\sqrt{1+y^2} + |y-2| \quad (2)$$

Xét hàm số $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + |y-2|$.

Với $y \geq 2$, ta có $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + y - 2$ là hàm số đồng biến. Với $y < 2$, ta có

$$f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2 - y, \quad f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1.$$

Giải PT $f'(y) = 0$, ta được $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(y)$:

y	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$+\infty$
$f'(y)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(y)$			$2+\sqrt{3}$	

Từ bảng biến thiên hàm số, ta có

$$\min B = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow (x; y) = \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad \square$$

Phương pháp 3. TÌM MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $X \subseteq \mathbb{R}$. Để tìm GTLN, GTNN của hàm $y = f(x)$ ta

tìm miền giá trị của y , tức là tìm điều kiện của tham số y để phương trình $y = f(x)$ (ẩn x) có nghiệm trên tập X .

★ **Thí dụ 5.** Cho x là số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} \quad (1)$$

Lời giải. Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} = y - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > x \\ \frac{1}{x} = y^2 - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x \\ 2yx^2 - y^2x + 1 = 0. \end{cases}$$

Để tìm tập giá trị của $y = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$, ta tìm tất cả các giá trị của y sao cho PT (ẩn x):

$$2yx^2 - y^2x + 1 = 0 \quad (2)$$

có nghiệm thỏa mãn $0 < x < y$

Đặt $f(x) = 2yx^2 - y^2x + 1$.

Do $f(0) = 1 > 0$; $f(y) = y^3 + 1 > 0$; $y > 0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{S}{2} < y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 8y \geq 0 \\ \frac{y^2}{4y} < y \end{cases} \Leftrightarrow y \geq 2.$$

Vậy tập giá trị của y là $[2, +\infty)$. Từ đó GTNN của y là 2, đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

★ **Thí dụ 6.** Xác định các số thực a, b sao cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4, và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Lời giải. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta tìm tập giá trị của hàm y , nghĩa là tìm tất cả giá trị của tham số y sao cho PT $\frac{ax+b}{x^2+1} = y$ (ẩn x) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow yx^2 - ax + y - b = 0 \quad (2)$$

Nếu $y = 0$, thì (2) $\Leftrightarrow ax + b = 0$, PT này có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a = b = 0. \end{cases}$

Nếu $y \neq 0$, thì PT (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4y(y-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b - \sqrt{b^2 + a^2}}{2} \leq y \leq \frac{b + \sqrt{b^2 + a^2}}{2}$$

(Do $|b| \leq \sqrt{b^2 + a^2}$ nên

$$\frac{b - \sqrt{b^2 + a^2}}{2} \leq 0 \leq \frac{b + \sqrt{b^2 + a^2}}{2}.)$$

Từ đó suy ra tập giá trị của y là

$$\left[\frac{b - \sqrt{b^2 + a^2}}{2}; \frac{b + \sqrt{b^2 + a^2}}{2} \right].$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \max y = \frac{b + \sqrt{b^2 + a^2}}{2} \\ \min y = \frac{b - \sqrt{b^2 + a^2}}{2} \end{cases}$$

Từ giả thiết đề bài ta tìm được $(a; b) = (4; 3)$ hoặc $(a; b) = (-4; 3)$.

Để kết thúc bài viết, mời các bạn luyện tập theo các phương pháp đã nêu ở trên qua các bài toán sau.

1. Cho $x > y > 0$ là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + \frac{1}{xy(x-y)}$$

2. Xác định số thực k sao cho hàm số $y = \frac{k \sin x + 1}{\cos x + 2}$ có GTNN nhỏ hơn -1.

3. Cho $x \neq 0$; $y \neq 0$ là các số thực thay đổi. Tìm GTNN của biểu thức

$$Q = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

4. Tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$y = x + \sqrt{4 - x^2}.$$

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

(Đề đăng trên THPT số 370, tháng 4 năm 2008)

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

2) ĐK đề (C_m) có ba điểm cực trị là $m < 2$.
Các điểm cực trị của (C_m) là $A(0; m^2 - 5m + 5)$;
 $B(-\sqrt{2-m}; 1-m)$; $C(\sqrt{2-m}; 1-m)$.

Đáp số. $m = 2 - \sqrt{3}$.

Câu 2. 1) Đưa PT về dạng

$$\left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \frac{3x}{2} \right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng

$$\text{giải hai PT } \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \frac{3x}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{và } \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \frac{3x}{2} = -\frac{1}{4},$$

ta được các họ nghiệm của PT đã cho là

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = \pm \frac{2\pi}{3} + m2\pi \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

$$2) \text{ ĐK } \begin{cases} -4 < x < 1, x \neq 0 \\ y > -2; y \neq -1. \end{cases}$$

Đưa PT thứ nhất của hệ về dạng

$$\log_{1-x}(2+y) + \log_{2+y}(1-x) = 2.$$

Đặt $t = \log_{1-x}(2+y)$, tìm được $t = 1$, kết hợp với PT thứ hai của hệ, đối chiếu với ĐK trên, tìm được nghiệm $(x; y) = (-2; 1)$.

$$\text{Câu 3. 1) Đưa } I \text{ về dạng } I = \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x^3} dx,$$

Dùng phương pháp đổi biến số, đặt $t = \frac{1}{x^2} - 1$.

Đáp số. $I = 6$.

2) Từ $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$, suy ra

$$2(a^4 + b^4) \geq a^4 + a^3b + b^4 + ab^3 = (a^3 + b^3)(a+b).$$

$$\text{Vậy } \frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} \geq \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Tương tự cho các BĐT còn lại, suy ra đpcm.

Câu 4. Đáp số. 1) $A(1; 0; -1)$; góc $(\widehat{d, (P)}) = 30^\circ$.

2) Hai đường thẳng thỏa mãn đề bài có PT

$$(\Delta_1): \frac{x-1}{-2+\sqrt{3}} = \frac{z}{-1+\sqrt{3}} = \frac{z+1}{5-3\sqrt{3}};$$

$$(\Delta_2): \frac{x-1}{-2-\sqrt{3}} = \frac{y}{-1-\sqrt{3}} = \frac{z+1}{5+3\sqrt{3}}.$$

Câu 5a. 1) Đáp số. Hai đường tròn thỏa mãn đề bài có PT

$$(C_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10;$$

$$(C_2): (x-17)^2 + (y-10)^2 = 250.$$

2) Đặt S là vế trái hệ thức cần chứng minh, lưu ý $C_n^0 = C_n^n = 1$ và $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta thấy

$$2S = n(C_n^1)^2 + n(C_n^2)^2 + \dots + n(C_n^{n-1})^2 + n(C_n^n)^2 \quad (1)$$

Từ $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. So sánh hệ số của x^n trong khai triển nhị thức Newton của $(1+x)^n(1+x)^n$ và $(1+x)^{2n}$ ta suy ra

$$(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có đpcm.

Câu 5b. 1) ĐK $x > 0$ và $x \neq 1$. Đưa PT về dạng $\log_2(x+3) + \log_2|x-1| = \log_2(4x)$.

Xét hai khả năng $0 < x < 1$ và $x > 1$, đối chiếu với ĐK ta tìm được hai nghiệm của PT là

$$x = -3 + 2\sqrt{3} \text{ và } x = 3.$$

$$2) \text{ Đáp số. } R = \frac{a\sqrt{29}}{8}.$$

HUYỀN TÂN CHÂU

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh,
Tuy Hòa, Phú Yên)

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài: 180 phút)

I. PHẦN CHUNG

Câu 1. (2 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2) Trong trường hợp hàm số (1) đồng biến trong tập số thực $\mathbb{R}$, tìm m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số (1) và hai trục Ox , Oy có diện tích bằng 1.

Câu 2. (2 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm thực:
 $1 - \tan x \cdot \tan 2x = \cos 3x$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số k để phương trình $\sqrt{(k+1)4^x - 2^x} + k = 1 - 2^x$ có nghiệm.

Câu 3. (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip $(E): x^2 + 4y^2 = 4$. Qua điểm $M(1; 2)$ kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (E) tại A và B . Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B .

2) Cho tam giác ABC thỏa mãn

$$\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{5}{2} = 0.$$

Tính độ lớn ba góc của tam giác đó.

Câu 4. (2 điểm)

1) Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos^2 \frac{x}{2} + x \cos x \right) e^{\sin x} dx.$$

2) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $2\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z}.$$

II. PHẦN TỰ CHỌN. Thí sinh chọn câu 5a hoặc câu 5b.

Câu 5a. (Theo chương trình THPT không phân ban) (2 điểm)

1) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$(d_1): \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} y + z = 0 \\ x - 1 = 0. \end{cases}$$

Lập phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng trên.

2) Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số, sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước nó?

Câu 5b. (Theo chương trình THPT phân ban thí điểm) (2 điểm)

1) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi hình chóp với mặt phẳng qua A vuông góc với cạnh SC .

2) Giải bất phương trình

$$\log_{x^2-1} 3 \leq \log_x 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

NGUYỄN LÁI

(GV THPT Lương Văn Chánh,
Tuy Hòa, Phú Yên)

THÔNG BÁO TĂNG GIÁ TẠP CHÍ

Thời gian cuối năm 2007 và đầu năm 2008 giá giấy trên thị trường liên tục tăng. Cũng vì thế, chi phí để xuất bản Tạp chí đã tăng theo. Để đảm bảo cho tạp chí vẫn được in trên giấy với chất lượng tốt và phục vụ cho nhu cầu của bạn đọc, Tạp chí quyết định điều chỉnh giá bán Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ từ 5000 đồng/cuốn lên 6000 đồng/cuốn.

Thời gian áp dụng: từ quý III (từ tháng 7) năm 2008.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin thông báo để bạn đọc được biết.

Xin trân trọng cảm ơn.

THTT

GIẢI ĐÁP THẮC MẮC

CÂU HỎI 1. (của bạn Nguyễn Thanh Tùng, 12A11, THPT Lương Khắc Bằng, Hoàng Hoá, Thanh Hoá)

Bài toán. Tìm giá trị của m sao cho phương trình $(m-2)2^{\log_2 x} + (2m-6)x^{-\log_2 x} - 2(m-1) = 0$ (1)

có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Đây là bài toán ra trong đề thi thử Đại học của trường em. Đáp số của một số bạn là $10 \leq m < 11$; em và một số bạn khác đều nhất trí rằng đáp số là $9 < m < 10$ và $m = 11$ mới là đúng. Vậy mong toà soạn cho một cách giải đúng.

TRẢ LỜI.

Đặt $t = \log_2 x$, thì $x = 2^t$; $x^{-\log_2 x} = 2^{-t^2}$.

Đặt $u = 2^{t^2}$, khi đó PT (1) có dạng

$$(m-2)u^2 - 2(m+1)u + (2m-6) = 0 \quad (2)$$

Với $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$, thì $t \in (-1; 1)$ và $u \in [1; 2)$.

Hơn nữa, $u = 2^{t^2}$ là hàm số chẵn theo t nên mỗi $u \in (1; 2)$ sẽ có hai giá trị đối nhau của $t \in (-1; 1)$ và do đó sẽ có hai giá trị của $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

* Với $m=10$ thì PT (2) ẩn u có hai nghiệm là 1 và $\frac{7}{4}$ đều thuộc $[1; 2)$. Từ đó PT (1) có ba nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ (không thoả mãn).

* Với $m \neq 10$ thì nghiệm của PT (2) (nếu có) luôn khác 1. Vì vậy bài toán đưa về tìm các giá trị khác 10 của m để PT (2) có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

Nếu $m = 2$ thì PT (2) trở thành $-6u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{1}{3}$ (không thoả mãn).

Nếu $m \neq 2$ và $m \neq 10$ thì PT (2) có $\Delta' = -m^2 + 12m - 11$. Xảy ra các trường hợp sau:

1) PT (2) có nghiệm kép thuộc khoảng $(1; 2)$

$$\text{tức là } \begin{cases} -m^2 + 12m - 11 = 0 \\ 1 < \frac{m+1}{m-2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 11.$$

2) PT (2) có hai nghiệm phân biệt u_1, u_2 khác 1, trong đó có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$. Đặt về trái của (2) là $f(u)$

$$\text{+ Nếu } 1 < u_1 < u_2 = 2 \text{ thì } \begin{cases} f(2) = 0 \\ 1 < \frac{m-3}{m-2} < 2 \end{cases} \text{ không có giá trị } m \text{ nào thoả mãn.}$$

$$\text{+ Nếu } 1 < u_1 < 2 < u_2 \text{ hoặc } u_1 < 1 < u_2 < 2 \text{ thì } f(1)f(2) < 0 \Leftrightarrow (m-9)(m-10) < 0 \Leftrightarrow 9 < m < 10.$$

Vậy các giá trị thoả mãn điều kiện bài toán là $9 < m < 10$ và $m = 11$.

Kết quả của bạn là đúng! Chúc bạn đạt kết quả cao trong các kì thi sắp tới.

CÂU HỎI 2. (của bạn Trương Thị Hải Yến, 12E, TTGDTX, Hải Dương)

Bài toán. Có 12 chiếc bánh ngọt khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chúng vào 6 chiếc hộp giống nhau, mỗi hộp có 2 chiếc bánh?

Cách 1. Số cách ghép cặp 2 bánh bằng $C_{12}^2 = 66$. Vì vậy số cách xếp bánh vào 6 hộp bằng $C_{66}^6 = 9085768$.

Cách 2. Chọn 2 bánh xếp vào hộp thứ nhất, có C_{12}^2 cách. Với mỗi cách chọn bánh vào hộp thứ nhất, có C_{10}^2 cách chọn 2 bánh vào hộp thứ hai. Trừ 4 bánh đã chọn, có C_8^2 cách chọn 2 bánh vào hộp thứ ba. Trừ 6 bánh đã chọn, có C_6^2 cách chọn 2 bánh vào hộp thứ tư. Trừ 8 bánh đã chọn, có C_4^2 cách chọn 2 bánh vào hộp thứ năm. Trừ 10 bánh đã chọn, có C_2^2 cách chọn 2 bánh vào hộp thứ sáu. Vì khả năng xếp 2 bánh vào các hộp là như nhau và theo quy tắc nhân, ta có số cách xếp bánh vào 6 hộp thoả mãn bài ra là $6C_{12}^2 C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 44906400$ cách.

Bạn có nhận xét thế nào về hai cách giải trên?

THTT



Tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

TRẦN ĐỨC THIỆN
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Trong SGK Hình học lớp 11 ta đã biết các phương pháp tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Có hai bài toán cơ bản sau đây.

Bài toán 1. Trong không gian cho điểm M không thuộc mặt phẳng (α) , tính khoảng cách $d(M; (\alpha))$ từ M đến mặt phẳng (α) .

Phương pháp giải

Cách 1. + Dựng $MH \perp mp(\alpha)$ tại H .
+ Tính độ dài đoạn thẳng MH .
Khi đó $d(M; (\alpha)) = MH$.

Cách 2. Tìm đường thẳng Δ qua M và Δ cắt $mp(\alpha)$ tại I , trên Δ chọn điểm A ($A \neq I$; $A \neq M$), lúc đó $\frac{d(M; (\alpha))}{d(A; (\alpha))} = \frac{IM}{IA}$, dẫn đến kết quả:

$$d(M; (\alpha)) = \frac{IM}{IA} \cdot d(A; (\alpha)).$$

Chú ý. 1) Nếu trên $mp(\alpha)$ ta tìm được đường thẳng a thích hợp nào đó mà $a \perp mp(\beta)$, với $mp(\beta)$ chứa M thì ta nên làm theo cách 1.

2) Nếu tìm được một đường thẳng thích hợp đi qua M cắt $mp(\alpha)$ tại I thì ta nên làm theo cách 2.

Bài toán 2. Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Tính khoảng cách giữa a và b (kí hiệu $d(a; b)$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b).

Phương pháp giải

Cách 1. (Áp dụng cho trường hợp $a \perp b$).
+ Dựng mặt phẳng (α) chứa b và $(\alpha) \perp a$ tại A .
+ Dựng $AB \perp b$ tại B .
Khi đó $d(a; b) = AB$.

Cách 2. Dựng $mp(\alpha)$ chứa b và $mp(\alpha) \parallel a$, khi đó $d(a; b) = d(a; (\alpha)) = d(M; (\alpha))$ với $M \in a$.

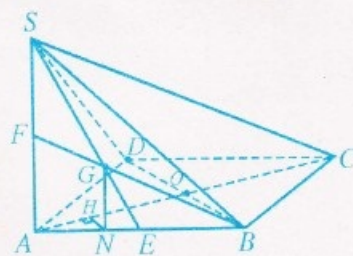
Cách 3. + Dựng $mp(\alpha)$ chứa a và $mp(\alpha) \parallel b$.
+ Dựng $mp(\beta)$ chứa b và $mp(\beta) \parallel a$.
Khi đó $d(a; b) = d((\alpha); (\beta))$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA \perp mp(ABCD)$; $SA = a\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB . Tính khoảng cách từ điểm G đến $mp(SAC)$.

Lời giải

Cách 1. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Đường thẳng BG cắt $mp(SAC)$ tại F (h. 1).



Hình 1

Khi đó

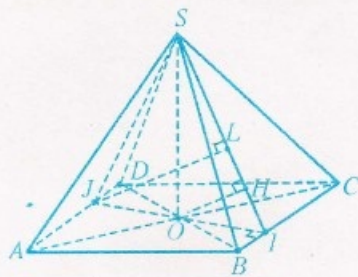
$$\frac{d(G; (SAC))}{d(B; (SAC))} = \frac{FG}{FB} = \frac{1}{3}, \text{ mà } \begin{cases} OB \perp SA \\ OB \perp AC \end{cases} \Rightarrow OB \perp mp(SAC) \text{ nên } d(B; (SAC)) = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } d(G; (SAC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Cách 2. Dựng đường thẳng đi qua G và song song với SA , cắt AB tại N khi đó $d(G; (SAC)) = d(GN; (SAC)) = d(N; (SAC))$. Dựng $NH \perp AC$ tại H , ta có $NH \perp mp(SAC)$, suy ra $d(N; (SAC)) = NH$. Mà $\frac{NH}{OB} = \frac{AN}{AB} = \frac{FG}{FB} = \frac{1}{3}$ nên

$$NH = \frac{1}{3} \cdot OB = \frac{a\sqrt{2}}{6}. \text{ Vậy } d(G; (SAC)) = \frac{a\sqrt{2}}{6}. \square$$

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SO \perp mp(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$.

- a) Tính khoảng cách từ O và từ A đến $mp(SBC)$.
b) Tính khoảng cách giữa AD và SB .



Hình 2

Lời giải.

a) Dựng $OI \perp BC$ tại I (h. 2).

Nhận thấy $BC \perp mp(SOI)$. Dựng $OH \perp SI$ tại H , lúc đó do

$$\begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp BC \end{cases} \text{ nên}$$

$OH \perp mp(SBC)$. Vậy $d(O; (SBC)) = OH$. Từ giả thiết, ta thấy $OI = \frac{OC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kéo dài OI cắt AD tại J , lúc đó $IJ \perp AD$ và $IJ = 2OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta thấy ΔISJ đều, dựng

$JL \perp SI$ tại L thì $JL \perp mp(SBC)$ và $JL = SO = \frac{3a}{4}$.

Vì $AD \parallel mp(SBC)$ nên $d(A; (SBC)) = d(J; (SBC)) = JL = \frac{3a}{4}$. Lại có $OH = \frac{1}{2}JL = \frac{3a}{8}$, suy ra

$$d(O; (SBC)) = \frac{3a}{8} \text{ và } d(A; (SBC)) = \frac{3a}{4}.$$

b) Do $AD \parallel mp(SBC)$ suy ra

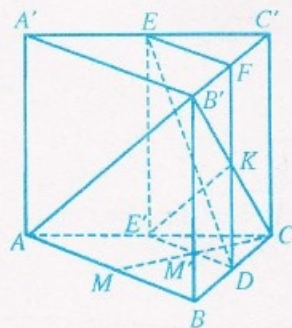
$$d(AD; SB) = d(AD; (SBC)) = JL = \frac{3a}{4}. \quad \square$$

Bài 3. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh $BC, A'C', C'B'$. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng sau:

- a) DE và AB' ;
b) $A'B$ và $B'C'$.

Lời giải. a) (h.3)

Ta thấy DF cắt $B'C$ tại K là trung điểm của mỗi đường. Gọi E' là trung điểm AC thì $E'K \parallel AB'$,



Hình 3

mà $B'C$ cắt $mp(DFEE')$ tại K và $AB' \parallel mp(DFEE')$, suy ra $d(AB'; DE) = d(AB'; DFEE') = d(B'; (DFEE')) = d(C; (DFEE'))$.

Lấy M' là trung điểm DE' và CM' cắt AB tại M . Ta có $d(C; (DFEE')) = CM' = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$\text{Vậy } d(AB'; DE) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

b) (h. 4).

Vì $B'C' \parallel mp(BA'C)$

và $A'B$ thuộc

$mp(BA'C)$ nên

$$d(A'B; B'C') = d(B'C'; (BA'C))$$

$$= d(F; (BA'D)).$$

Dựng $FH \perp A'D$ tại

H thì FH vuông

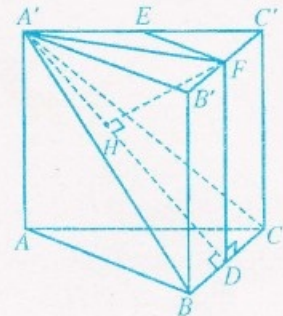
góc với mặt phẳng

$(A'BC)$, do đó $d(F; (BA'D)) = FH$.

$$\text{Mà } \frac{1}{FH^2} = \frac{1}{A'F^2} + \frac{1}{FD^2} = \frac{7}{3a^2},$$

$$\text{nên } FH^2 = \frac{3a^2}{7}, \text{ suy ra } FH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(A'B; B'C') = \frac{a\sqrt{21}}{7}. \quad \square$$



Hình 4

CÁC BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ và $AA' = 1$; đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2$; $AB = \sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a ; I là trung điểm

cạnh AB . Dựng $SI \perp mp(ABCD)$ và $SI = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi $M, N,$

P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, SB . Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng NP và AC ; MN và AP .

Bài 3. Cho hai tia Ax và By chéo nhau, góc giữa Ax và By bằng 60° và $AB = a$ là đoạn vuông góc chung của chúng. Trên By lấy điểm C sao cho $BC = a$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C trên Ax .

a) Tính khoảng cách từ C đến $mp(ABD)$;

b) Tính khoảng cách giữa AC và BD .

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $SO \perp mp(ABCD)$; $AC = 4$; $BD = 2$; $SO = \sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm của SC . Tính:

a) Tính khoảng cách từ A đến $mp(SBC)$;

b) Tính khoảng cách giữa SA và BM .

DIỄN ĐÀN

DAY
HOC
TOAN



Cũng như SGK Đại số & Giải tích 11 nâng cao, SGK Giải tích 12 nâng cao tiếp tục quán triệt và phát triển quan điểm biên soạn SGK Đại số 10 nâng cao là :

Sát thực, tức là sát với thực tiễn học đường, thực tiễn đời sống và thực tiễn khoa học.

Trực quan, tức là coi trực quan là phương pháp chủ đạo giúp HS tiếp thu kiến thức.

Nhẹ nhàng, tức là mức độ yêu cầu vừa phải; tránh hàm lâm; tránh căng thẳng cho HS.

Đổi mới, tức là đổi mới hình thức SGK; góp phần đổi mới phương pháp dạy học và phương pháp đánh giá.

Khi biên soạn SGK, các tác giả đã cố gắng thể hiện đúng nội dung và chuẩn kiến thức chương trình môn Toán Trung học Phổ thông được ban hành theo Quyết định số 16 / 2006/ QĐ - BGDĐT ngày 05-5-2006 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, trên cơ sở tiếp thu các ý kiến tâm huyết của rất nhiều cán bộ, giáo viên trong cả nước sau hai năm giảng dạy thí điểm SGK Giải tích 12 ban KHTN (bộ I). Dưới đây, chúng tôi muốn nhấn mạnh một số nội dung cụ thể cùng với những điểm khác so với SGK chỉnh lí hợp nhất năm 2000.

1) Nội dung KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ (chương 1) có những điểm đáng chú ý sau:

– Mặc dù không yêu cầu khảo sát tính lồi lõm của đồ thị, nhưng do ý nghĩa quan trọng của điểm uốn khi vẽ đồ thị của hàm số nên SGK không thể bỏ qua khái niệm và cách tìm điểm uốn. Tuy nhiên, điểm uốn chỉ được giới thiệu một cách đơn giản, trực quan thông qua hình ảnh "tiếp tuyến xuyên qua đường cong" và gắn với việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của những hàm đa thức.

– Ngay từ lớp 11, đã không có khái niệm giới hạn tại ∞ chung chung mà chỉ có giới hạn tại $+\infty$, giới hạn tại $-\infty$, giới hạn $+\infty$ và

giới hạn $-\infty$. Do đó yêu cầu và cách tìm các đường tiệm cận của một đường cong cũng có nhiều điểm khác trước.

Chẳng hạn, khi tìm tiệm cận ngang của hàm số f , trước đây thường chỉ phải tìm một giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, nay

phải xét cả hai giới hạn : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Đồ thị

hàm số có tiệm cận ngang

khi chỉ cần một trong hai giới

hạn đó là tồn tại và hữu hạn. Nếu hai

giới hạn đó lần lượt là y_1 và y_2 thì khi $y_1 \neq y_2$, đồ thị hàm số sẽ có hai tiệm cận ngang là $y = y_1$ và $y = y_2$; còn khi $y_1 = y_2$ đồ thị có một tiệm cận ngang $y = y_1$. Điều đó cũng xảy ra tương tự đối với tiệm cận xiên.

Cũng như vậy, khi tìm tiệm cận đứng, ta phải xét tất cả các điểm x_0 sao cho một trong các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ là $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Đúng ra, cần phải có thuật ngữ riêng phân biệt các tiệm cận như thế, nhưng để tránh đưa



NGUYỄN HUY ĐOAN
(Chủ biên SGK Giải tích 12 NC)

vào khái niệm mới, các tác giả vẫn sử dụng thuật ngữ như cũ. Khi cần làm rõ thì viết thêm "khi $x \rightarrow +\infty$ " hay "khi $x \rightarrow -\infty$ ", đặt trong ngoặc đơn.

– Về các bước khảo sát hàm số, nếu theo sơ đồ trước đây thì ngoài bảng biến thiên, học sinh thường phải lập cả bảng xét dấu đạo hàm; thực chất bảng này cũng là một phần của bảng biến thiên mà thôi. Trong SGK *Giải tích 12 nâng cao*, các tác giả đã cải tiến về thứ tự những việc phải làm khi thực hiện bước 2 (xét sự biến thiên của hàm số). Cụ thể, các công việc không dùng đến đạo hàm (xét các đường tiệm cận, các giới hạn tại vô cực) được thực hiện trước, sau đó mới tính đạo hàm và thực hiện các việc có liên quan đến đạo hàm. Cách làm này cho phép đưa ngay các kết quả nhận được khi xét tiệm cận và giới hạn tại vô cực vào bảng xét dấu đạo hàm để có bảng biến thiên. Như vậy học sinh chỉ phải lập một bảng biến thiên duy nhất mà thôi.

2) Nội dung HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT (chương 2) có những điểm đáng chú ý sau:

– Ở các lớp dưới, học sinh chỉ được học căn bậc hai và một ít về căn bậc ba mà chưa được học về căn bậc n . Do đó chương trình *Giải tích 12* phải "gánh" thêm việc giới thiệu khái niệm và các phép toán về căn bậc n . Điều này sẽ là một khó khăn cho cả thầy giáo lẫn học sinh vì không có nhiều thời gian luyện tập kỹ năng thực hiện các phép tính về căn thức. Vì vậy, giáo viên không nên khai thác nhiều bài toán khó về biến đổi căn thức.

– Không xét các phương trình, bất phương trình chứa tham số cũng như các phương trình, bất phương trình chứa ẩn đồng thời ở cơ số và số mũ (như $x^{x^2-1}=1$) hay chứa ẩn đồng thời ở cơ số và biểu thức dưới dấu lôgarit (như $\log_x(x^2-1)=1$). Các phương trình như thế thường có lời giải phức tạp và thậm chí còn gây nhiều tranh cãi (chẳng hạn, có nên coi $x=-1$ là nghiệm của phương trình $x^{x^2-1}=1$ được hay không?).

3) Nội dung NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN (chương 3) có những điểm đáng chú ý sau:

– Theo chương trình, học sinh không được học các khái niệm đạo hàm một bên và đạo hàm của hàm số trên một đoạn. Điều đó dẫn đến những khó khăn nhất định khi nói đến nguyên hàm của hàm số trên một đoạn - điều không thể tránh khỏi nếu muốn định nghĩa tích phân nhờ công thức Newton-Leibnitz. Để khắc phục điều này, khái niệm nguyên hàm trên đoạn $[a; b]$ được giải thích như sau:

Hàm số F là nguyên hàm của f trên đoạn $[a; b]$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [a; b]$, trong đó các đẳng thức $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$ tương ứng được hiểu là

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a) \text{ và } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

Giải pháp này tuy công kênh nhưng dễ chấp nhận vì thực tế, các vấn đề tiếp theo hầu như không nói gì đến các giới hạn ấy nữa.

– Các tích phân của hàm f trên đoạn $[a; b]$ đều có chung một giả thiết: Hàm f xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Điều đó dẫn đến những điều tẻ nhị khi chọn bài tập. Thí dụ:

• Do hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ không xác định khi $x = 0$

nên yêu cầu tính tích phân $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ không phù hợp với chương trình và SGK.

• Vì hàm số $y = x^{\frac{1}{3}}$ không xác định khi $x \leq 0$ nên không thể viết tích phân $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} dx$ dưới

dạng $\int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}} dx$.

4) Nội dung SỐ PHỨC (chương 4) có những điểm đáng chú ý sau:

– Khi học sinh chưa học số phức thì "số thực" thường được nói gọn là "số". Nhưng kể từ chương này trở đi, mọi mệnh đề có liên quan đến số thực đều phải được phát biểu rõ ràng...

(Xem tiếp trang 30)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/372. (Lớp 6) Cho

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2007^{2008}}.$$

Chứng minh rằng giá trị của A là số không nguyên.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/372. (Lớp 7) Cho đa thức bậc ba $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n đều tồn tại bộ ba số nguyên phân biệt a_1, a_2, a_3 thỏa mãn hai điều kiện sau :

- i) $|a_i - a_j| < 5$, với $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$;
- ii) $P(a_i) \neq 0$ và $P(a_i) : 5^n$ với $\forall i \in \{1, 2, 3\}$.

NGUYỄN KIM CƯỜNG
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T3/372. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x+1} + \dots + \sqrt[n]{x+n-1} = y \text{ (gồm } m \text{ dấu căn)}$$

với m, n là các số tự nhiên lớn hơn 2.

HÁN QUỐC TRÍ
(TTGDTX Phù Ninh, TTr. Phong Châu, Phú Thọ)

Bài T4/372. Cho $x > 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{2} + \frac{8x^3}{(x-2)(x+2)^2} > 9.$$

NGUYỄN VĂN NHIỆM
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hoá)

Bài T5/372. Cho ngũ giác $ABCDE$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R với $AB = CD = EA = R$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC và DE . Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác đều.

PHẠM TUẤN KHẢI
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/372. Tồn tại hay không hai số nguyên dương phân biệt a, b sao cho $b^n + n$ chia hết cho $a^n + n$ với mọi số nguyên dương n ?

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T7/372. Gọi S là tập hợp các cặp số thực (α, β) thỏa mãn điều kiện phương trình $x^3 - 6x^2 + \alpha x - \beta = 0$ có ba nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt) lớn hơn 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 8\alpha - 3\beta$ khi $(\alpha, \beta) \in S$.

ĐÀO MẠNH THẮNG
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T8/372. Cho tam giác nhọn ABC với Q là tâm đường tròn Euler của nó. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với bán kính R cắt AQ, BQ, CQ lần nữa tại M, N, P theo thứ tự. Chứng minh rằng $\frac{1}{QM} + \frac{1}{QN} + \frac{1}{QP} \geq \frac{3}{R}$.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT chuyên Amsterdam- Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/372. Tìm phần nguyên của A , biết rằng $A = \sqrt[n]{1 - \frac{x}{2008}} + \sqrt[m]{1 + \frac{x}{2008}}$

với x là số thực thuộc đoạn $[-2008; 2008]$, m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $m \geq n \geq 2$.

NGUYỄN VĂN ÁI
(GV THPT Lê Thế Hiếu, Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T10/372. Gọi S là tập hợp các bộ n ($n > 1$) số thực $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn điều kiện

$$3 \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2 = 502 \quad (1)$$

a) Chứng minh rằng

$$\min_{1 \leq i \leq j \leq n} |a_j - a_i| \leq \sqrt{\frac{2008}{n(n^2-1)}} \quad (2)$$

b) Hãy xây dựng bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn điều kiện (1) và đạt dấu bằng ở điều kiện (2).

HÀN NGỌC ĐỨC
(Trung tâm CNTT EVNIT, 16 Lê Đại Hành, Hai Bà Trưng, Hà Nội)

Bài T11/372. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[1; +\infty)$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $f(1) = \frac{1}{2008}$;

ii) $f(x) + 2007(f(x+1))^2 = f(x+1)$ với mọi $x \in [1; +\infty)$.

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \dots + \frac{f(n+1)}{f(n)} \right)$.

NGUYỄN TÀI CHUNG
(GV THPT KBang, Gia Lai)

Bài T12/372. Các đường phân giác trong AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC có chu vi p cắt các đoạn thẳng B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tương ứng tại A_2, B_2, C_2 . Đường thẳng qua A_2 song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại A_3, A_4 . Đường thẳng qua B_2 song song với CA cắt BC, BA theo thứ tự tại B_3, B_4 . Đường thẳng qua C_2 song song với AB cắt CA, CB theo thứ tự tại C_3, C_4 . Chứng minh rằng $AB_4 + BC_4 + CA_4 + BA_3 + CB_3 + AC_3 \leq p$.
Đẳng thức xảy ra khi nào?

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/372. Về phía đầu của một con tàu đang chuyển động với gia tốc không đổi $2,00 \text{ m/s}^2$, người ta đặt một máy phóng bóng

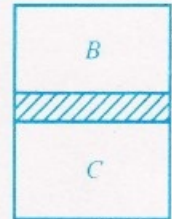
tennis. Máy phóng ra một quả bóng với vận tốc $25,0 \text{ m/s}$ đối với tàu và hướng về phía đuôi con tàu. Quả bóng đạt được độ cao $10,0 \text{ m}$. Bỏ qua sức cản của không khí. Hỏi

a) Độ lớn góc ném (góc tạo bởi phương ném và sàn tàu) là bao nhiêu?

b) Điểm chạm sàn tàu cách máy phóng bao xa?

TÔ GIANG
(Hà Nội) Sưu tầm

Bài L2/372. Một xylanh đặt thẳng đứng có tiết diện $S = 40 \text{ cm}^2$ được chia làm hai ngăn B và C bởi một pittông (hình vẽ). Trọng lực tác dụng lên pittông có độ lớn $F = 60 \text{ N}$. Lúc đầu hai ngăn B và C chứa khí sao



cho pittông nằm đúng chính giữa xylanh và thể tích mỗi ngăn là $V = 2,4 \text{ l}$. Áp suất của khí ở ngăn B là $p = 1,5 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$. Sau đó người ta cho thêm khí vào ngăn B để tăng áp suất khí ở ngăn B lên gấp đôi. Pittông dịch chuyển xuống dưới (ma sát không đáng kể). Tính công mà khí ở ngăn B đã thực hiện để đẩy pittông xuống dưới. Nhiệt độ của khí ở ngăn C coi như không đổi.

HUỖNH CÔNG ĐÁNG LÊ HOA
(GV THPT chuyên Bạc Liêu) sưu tầm

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/372. (For 6th grade). Let

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2007^{2008}}.$$

Prove that A is not an integer.

T2/372. (For 7th grade)

Let $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. Prove that for every natural number n , there exists a triple of distinct integers a_1, a_2, a_3 such that the following two conditions are satisfied:

i) $|a_i - a_j| < 5, \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$;

ii) $P(a_i) \neq 0$ and $P(a_i) \vdots 5^n$ for all $i \in \{1, 2, 3\}$.

T3/372. Find all pairs of integers x, y such that $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x} + \dots + \sqrt[n]{x} = y$ (m times)

where m, n are positive integers which are greater than 2.

T4/372. Given $x > 2$. Prove the inequality

$$\frac{x}{2} + \frac{8x^3}{(x-2)(x+2)^2} > 9.$$

T5/372. A pentagon $ABCDE$ is inscribed in a circle with center at O and radius R such that $AB = CD = EA = R$. Let M, N be respectively the midpoints of BC and DE . Prove that AMN is an equilateral triangle.

(Xem tiếp trang 27)



★ **Bài T1/368.** Xét n điểm liên tiếp $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ cùng thuộc một đường thẳng sao cho $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_{n-1}A_n$. Tìm n , biết rằng trên đường thẳng đó có tất cả 2025 đoạn thẳng nhận một trong các điểm đã cho làm trung điểm.

Lời giải. Ta thấy trong n điểm thỏa mãn đề bài (hình vẽ) thì

A_1 và A_n không là trung điểm của đoạn thẳng nào
 A_2 và A_{n-1} là trung điểm của 1 đoạn thẳng
 A_3 và A_{n-2} là trung điểm của 2 đoạn thẳng

 A_i và A_{n-i+1} là trung điểm của $i - 1$ đoạn thẳng
 với mọi $i = 2, 3, \dots$ mà $2i \leq n$.

$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots \quad A_i \quad \dots \quad A_{n-i+1} \quad \dots \quad A_{n-2} \quad A_{n-1} \quad A_n$

Xét hai trường hợp sau:

• Nếu n lẻ, $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) thì $k < k + 1 = n - k < n - k + 1$ nên có một điểm chính giữa A_{k+1} là trung điểm của k đoạn thẳng, do đó số đoạn thẳng nhận một trong các điểm đã cho làm trung điểm bằng

$$S = 1 + 2 + \dots + (k - 2) + (k - 1) + k \\ + (k - 1) + (k - 2) + \dots + 2 + 1 \\ \text{hay } S = k(k - 1) + k = k^2.$$

Theo giả thiết $k^2 = 2025$ nên $k = 45$ và $n = 2k + 1 = 91$.

• Nếu n chẵn, $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) thì $k < k + 1 = n - k + 1$ nên không có điểm chính giữa, do đó số đoạn thẳng thỏa mãn yêu cầu bằng $S = k(k - 1)$. Ta thấy S là số chẵn mà 2025 là số lẻ, do đó không có n điểm như thế. □

◀ **Nhận xét.** Một số bạn nhầm lẫn khi cho đáp số là $n = 89$, hoặc $n = 90$, hoặc $n = 2027$. Các bạn có lời giải tốt là:

Phú Thọ: Trịnh Hồng Ngọc, Vũ Tuấn Linh, Nguyễn Thị Mai Anh, 6A1, THCS Lâm Thao; **Lạng Sơn:** Vũ Ngọc Nhật Minh, 6A, THCS Chu Văn An, TP. Lạng Sơn; **Bắc Ninh:** Nguyễn Như Ngọc, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Thanh Hóa:** Mai Thu Phương, 6A, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung; **Hà Tĩnh:** Võ Thị Minh Thu, 6C, Phan Thị Cẩm Linh, 6A, Đặng Thị Mỹ Linh, 6A, THCS BC Xuân Diệu, TT. Nghèn, Can Lộc.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/368.** Cho tam giác ABC vuông ở A . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A vẽ các điểm D, E sao cho BD vuông góc và bằng BA , BE vuông góc và bằng BC . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE . Chứng minh rằng ba điểm A, D, M thẳng hàng.

Lời giải.

• Nếu $AB = AC$ thì $M \equiv D$, bài toán đúng.

• Với $AB \neq AC$; $\triangle ABC$ và $\triangle DBE$ có $AB = BD$, $BC = BE$ (gt), $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$ (cùng phụ với $\widehat{CBD}$), do đó $\triangle ABC = \triangle DBE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BAC} = 90^\circ$. Gọi F là giao điểm của ED và AC . Ta có $AB \parallel DF$ (cùng vuông góc với BD), $AF \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) nên $\triangle ABD = \triangle DFA$ (g.c.g). Kết hợp với $AB = BD$ ta có $AB = BD = DF = AF$ (1)

Trong các tam giác vuông BEC và FEC ta có

$$BM = FM = \frac{1}{2}EC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra A, D, M cùng thuộc đường trung trực của đoạn BF . Vậy ba điểm A, D, M thẳng hàng. □

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán có nhiều cách giải. Chẳng hạn, có thể lấy giao điểm M_1 của AD và EC rồi chứng minh M_1 là trung điểm của EC ; hoặc chứng minh $\widehat{ADB} + \widehat{BDE} + \widehat{EDM} = 180^\circ$.

2) Bài toán vẫn đúng khi D, E cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ BC , chứa A .

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Nguyễn Minh Hiếu, Phạm Thị Khánh Linh, 6A2, THCS Yên Lạc, Hà Đình Đức, 6A, Hà

Quang Nhận, 7B, THCS Như Thủy, Lập Thạch; Hà Nội: Hoàng Anh Tú, 7I, THCS Marie Curie, Lê Minh Phúc, 7A5, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; Hải Phòng: Nguyễn Hoàng An, 7A1, THCS Hồng Bàng; Thanh Hóa: Mai Thu Phương, 6A, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung, Lê Quang Thọ, Mai Thanh Hoa, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; Nghệ An: Nguyễn Văn Bảo, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Hà Tĩnh: Nguyễn Thị Kim Oanh, 7G, THCS Bắc Hồng, Hồng Lĩnh; Quảng Bình: Phan Thị Thanh Ngọc, 7A, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; Quảng Ngãi: Đặng Đình Đường, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; Khánh Hòa: Vũ Ngọc Cương, 7¹, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; Bạc Liêu: Nguyễn Công Dũng, Trần Quang Minh, 7/1, THCS Trần Huỳnh, Tx. Bạc Liêu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T3/368. Tìm các số x, y, z nguyên dương sao cho

$$2xy - 1 = z(x-1)(y-1) \quad (1)$$

Lời giải. Với các số x, y, z nguyên dương ta có $2xy - 1$ là số lẻ nên $z(x-1)(y-1)$ là số lẻ. Do đó x và y là số chẵn, còn z là số lẻ.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $x \geq y$.

Cách 1. Đặt $a = x - 1, b = y - 1$ (a, b lẻ và $a \geq b$), PT (1) trở thành

$$2(a+1)(b+1) - 1 = zab \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{ab} \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

• Nếu $a = b$ thì $\frac{4a+1}{a^2} \in \mathbb{N}^*$, suy ra

$$\frac{a(4a+1)}{a^2} = 4 + \frac{1}{a} \in \mathbb{N}^*, \text{ hay } a = 1. \text{ Tìm được } (x; y; z) = (2; 2; 7).$$

• Nếu $a > b \geq 1$.

+ Xét $b \geq 4$ thì $a \geq 5$. Khi đó

$$0 < \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{ab} \leq \frac{2}{5} + \frac{2}{4} + \frac{1}{20} = \frac{19}{20} < 1.$$

$$\text{nên } \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{ab} \notin \mathbb{N}^*.$$

Vậy $b < 4, b$ lẻ nên $b \in \{1; 3\}$.

+ Xét $b = 1$, từ (2) suy ra $\frac{3}{a} \in \mathbb{N}^*$ và $a > 1$. Do đó $a = 3$. Tìm được $(x; y; z) = (2; 4; 5)$.

+ Xét $b = 3$, từ (2) suy ra $\frac{2}{3} + \frac{7}{3a} \in \mathbb{N}^*$ và $a > 3$. Do đó $a = 7$.

Tìm được $(x; y; z) = (4; 8; 3)$.

Cách 2. Biến đổi PT (1) về dạng

$$((z-2)x - z)((z-2)y - z) = z + 2 \quad (3)$$

• Nếu $z = 1$ thì PT (3) có dạng $(x+1)(y+1) = 3$, mâu thuẫn với $x \geq 2, y \geq 2$. Vậy $z \geq 3$. Khi đó $(z-2)x - z \geq (z-2)y - z \geq 2(z-2) = z-4 > 0$. Kết hợp với PT (3) suy ra $z+2 \geq (z-4)^2 \Leftrightarrow (z-2)(z-7) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq z \leq 7$ mà z lẻ nên $z \in \{3; 5; 7\}$.

• Với $z = 3$ thì $(x-3)(y-3) = 5$ và $x \geq y$ nên $\begin{cases} x-3=5 \\ y-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=7. \end{cases}$

• Với $z = 5$ thì $(3x-5)(3y-5) = 7$ và $x \geq y$ nên $\begin{cases} 3x-5=7 \\ 3y-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2. \end{cases}$

• Với $z = 7$ thì $(5x-7)(5y-7) = 9$, tìm được $(x; y) = (2; 2)$.

Kết luận. Do vai trò x, y như nhau nên PT (1) có 5 nghiệm $(x; y; z)$ là $(2; 2; 7), (2; 4; 5), (4; 2; 5), (4; 8; 3), (8; 4; 3)$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn đã nhận ra bài toán này là cách phát biểu dưới dạng khác của bài T3/355 và có cách giải tương tự. Nhiều bạn còn nhầm lẫn khi đánh giá (chẳng hạn từ $x-3 \geq y-3 \Rightarrow (x-3)(y-3) > (y-3)^2$ (!?)) hoặc khi kết luận nghiệm (cách viết $(x; y; z) = (2; 2; 7) = (8; 4; 3) = \dots$ là không chính xác).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Thị Diệu Linh, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy; Vĩnh Phúc: Vũ Trung Hiếu, 6A, Phạm Thị Ngọc Phú, 7, THCS Lập Thạch, Nguyễn Ngân Giang, 6A1, THCS Yên Lạc; Phú Thọ: Triệu Thị Quỳnh Mai, Tạ Hải Nam, 9A3, THCS Lâm Thao; Hà Nam: Nguyễn Tiến Hòa, 9B, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; Bắc Ninh: Nguyễn Ngọc Long, 9A, THCS Vũ Kiệt, Thuận Thành; Thanh Hóa: Nguyễn Thanh Tùng, 9G, THCS Trần Mai Linh; Nghệ An: Cao Xuân Bang, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; Khánh Hòa: Trần Thị Ánh Nguyễn, 9⁷, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; Kiên Giang: Trần Minh Hải, 9A3, THCS Bàn Tân Định, Giồng Riềng.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ Bài T4/368. Giải phương trình

$$4x - x^2 = 3\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện: $\frac{74}{27} \leq x \leq \frac{10}{3}$.

• Ta thấy $x = 3$ là một nghiệm của (1).

- Nếu $\frac{74}{27} \leq x < 3$ thì $3\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} < 3$;

$$(x-1)(x-3) < 0 \Rightarrow 4x - x^2 > 3.$$

Do đó VT(1) > VP(1).

- Nếu $3 < x \leq \frac{10}{3}$ thì $3\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} > 3$;

$$(x-1)(x-3) > 0 \Rightarrow 4x - x^2 < 3.$$

Do đó VT(1) < VP(1).

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của (1). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Nếu đặt $a = x - 2$, $b = \sqrt{10 - 3x} \geq 0$,
 $c = \sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} \geq 0$, thì từ (1) ta có hệ

$$\begin{cases} a^2 = 4 - 3c \\ b^2 = 4 - 3a \text{ với } b \geq 0, c \geq 0. \\ c^2 = 4 - 3b \end{cases}$$

Để thấy $a \geq 0$. Do vai trò của a, b, c trong hệ là bình đẳng nên ta chứng minh được $a = b = c = 1$. Vậy $x = 3$.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

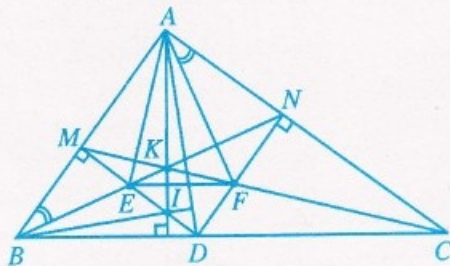
Phú Thọ: Nguyễn Trường Giang, 9A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Nguyễn Quốc Hùng**, 8E, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Kim Tuyến, 9A1, THCS Yên Lạc, Lý Duy Cương, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Bắc Ninh:** Nguyễn Trọng Nghĩa, 6C, THCS Yên Phong; **Thái Bình:** Tạ Minh Tùng, 9A2, THCS TTtr. Diêm Điền, Thái Thụy; **Nam Định:** Nguyễn Văn Quý, 9A, Bùi Văn Vượng, 9B, THCS Hải Hậu; **Thanh Hóa:** Đinh Uýt Nảy, 7B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **La Hồng Quân**, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Ngọc Thạch, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T5/368.** Cho tam giác ABC vuông ở A . Kẻ phân giác AD . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC . BN cắt CM tại K , AK cắt DM tại I . Tính số đo của góc BID .

Lời giải

Trường hợp 1. $AB < AC$, lúc này I nằm giữa M và D (h. 1).



Hình 1

Gọi E là giao điểm của BN và MD , F là giao điểm của CM và DN . Từ giả thiết bài ra, ta thấy tứ giác $AMDN$ là hình vuông và

$$\frac{MF}{FC} = \frac{BD}{DC} = \frac{BM}{MA} = \frac{BM}{DN} = \frac{ME}{ED},$$

suy ra $EF \parallel CD$, hay $EF \parallel BC$

(1)

Theo định lý Thales, ta có

$$\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB} = \frac{NC}{AC} = \frac{NF}{AM} = \frac{NF}{AN},$$

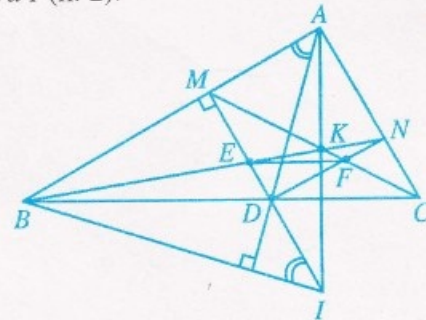
dẫn đến $\triangle NAF \sim \triangle ABN$. Từ đó $\widehat{NAF} = \widehat{NBA} \Rightarrow AF \perp BN$. Lập luận tương tự có $AE \perp CM$. Do đó K là trực tâm tam giác AEF , suy ra $AK \perp EF$

(2)

Từ (1) và (2) ta thấy $AI \perp BD$, kết hợp với $DM \perp AB$, suy ra I là trực tâm tam giác ABD .

Vậy $\widehat{BID} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 135^\circ$.

Trường hợp 2. $AB > AC$, lúc này D nằm giữa M và I (h. 2).



Hình 2

Thực hiện công việc tương tự như trường hợp 1 chúng ta tìm được $\widehat{BID} = 45^\circ$.

Trường hợp 3. $AB = AC$, lúc này D trùng với I nên góc $\widehat{BID}$ không xác định.

Tóm lại: • Nếu $AB < AC$ thì $\widehat{BID} = 135^\circ$.

• Nếu $AB > AC$ thì $\widehat{BID} = 45^\circ$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Nhiều bạn chỉ giải bài toán trong trường hợp I nằm giữa M và D nên chỉ đưa ra một đáp số $\widehat{BID} = 135^\circ$ (!). Điểm mấu chốt của bài toán là chỉ ra I là trực tâm của $\triangle ABD$. Đa số các bạn đều sử dụng định lý Céva cho $\triangle ABC$ với ba đường đồng quy: BN , CM và AK để chứng minh tính chất này. Các bạn sau có lời giải đúng:

Bắc Ninh: Nguyễn Văn Long, 9A, THCS Yên Phong, Hà Ngọc Thịnh, 9C, THCS Vũ Kiệt, Thuận Thành;

Hà Nam: Nguyễn Tiến Hòa, Lê Minh Thiệu, 9B, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; **Thái Bình:** Nguyễn Pha, Xóm 2, Trà Giang, Kiến Xương, Tạ Minh Tùng, 9A2, THCS TTtr. Diêm Điền, Thái Thụy; **Nam Định:** Mai Ngọc Đức, 9A11, THCS Phùng Chí Kiên, TP. Nam Định, Nguyễn Văn Quý, 9A, THCS Hải Hậu; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Nguyễn Thanh Tùng, 9G, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** Hoàng Văn Đông, Nguyễn Văn Thắng, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Lưu Tuấn Quang, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Phú Yên:** Phạm Quang Thịnh, 9I, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T6/368.** Cho đa thức

$$f(x) = 2009x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2006x + 1.$$

Chứng minh rằng, với n là số nguyên tùy ý thì các số $f(n)$, $f(f(n))$, $f(f(f(n)))$, ... đôi một nguyên tố cùng nhau.

Lời giải. Đặt $f_k(x) = f(f(\dots f(x)\dots))$ với f có mặt k lần ở vế phải. Giả sử $k \geq 1$ là số tự nhiên bất kỳ và p là một ước số nguyên tố của $f_k(n)$. Ta có $f_{k+1}(n) \equiv f(f_k(n)) \equiv f(0) \equiv 1 \pmod{p}$;
 $f_{k+2}(n) \equiv f(f_{k+1}(n)) \equiv f(1) \equiv 1 \pmod{p}$.

Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được $f_m(n) \equiv 1 \pmod{p}$ với mọi $m > k$.

Tức là $f_k(n)$ và $f_m(n)$ nguyên tố cùng nhau với mọi $m > k$. Do k là một số nguyên tùy ý nên suy ra $f(n)$, $f(f(n))$, $f(f(f(n)))$, ... đôi một nguyên tố cùng nhau.

◀ **Nhận xét.** 1) Điểm mấu chốt của bài toán là sử dụng kết quả: Nếu $a \equiv b \pmod{q}$ thì $h(a) \equiv h(b) \pmod{q}$ với $h(x)$ là một đa thức hệ số nguyên bất kỳ. Một số bạn đã tổng quát bài toán cho đa thức $f(x)$ dạng $f(x) = x(x-1)Q(x) + 1$, trong đó $Q(x)$ là một đa thức hệ số nguyên tùy ý.

2) Các bạn sau có lời giải tốt.

Vĩnh Phúc: Trần Quang Sự, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; Trần Thị Phương, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hà Nội:** Nguyễn Khánh Việt, 10A2 Toán, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; Vũ Minh Thắng, 10 Toán 1, Nguyễn Quý Tuấn, 11T, Khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Hải Dương:** Trần Văn Hạnh, 11A5, THPT Ninh Giang; **Hà Nam:** Nguyễn Văn Hùng, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Nghệ An:** Lang Văn Thành, 12A, BTVH Hữu Nghị Việt - Lào, Hà Tây; **Hà Tĩnh:** Thiệu Đăng Ba, 10 Toán, Dương Danh, 12T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** Nguyễn Thị Diễm Thuỳ, 10A2, THPT Hướng Hóa.

THANH HỒNG

★ **Bài T7/368.** Tìm các số a, b để $\max_{0 \leq x \leq 16} |\sqrt{x+ax+b}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tính giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải. Kí hiệu $f(x) = \sqrt{x+ax+b}$, thế thì $f(0) = b$, $f(4) = 4a+b+2$, $f(16) = 16a+b+4$.

$$\text{Do đó } 4f(4) - f(16) - 3f(0) = 4(4a+b+2) - (16a+b+4) - 3b = 4.$$

Đặt $M = \max_{0 \leq x \leq 16} |f(x)|$, suy ra

$$8M \geq |f(16)| + 4|f(4)| + 3|f(0)| \quad (1)$$

$$\text{Lại có } |f(16)| + 4|f(4)| + 3|f(0)| \geq |4f(4) - f(16) - 3f(0)| = 4 \quad (2)$$

Đẳng thức ở (2) xảy ra khi $f(16) = f(0) = -f(4)$.

$$\text{Ta được } \begin{cases} 16a+b+4 = b \\ 4a+b+2 = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ngược lại với $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$, ta có

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$\text{hay } f(x) = -\frac{1}{4}(\sqrt{x}-2)^2 + \frac{1}{2} \quad (3)$$

Khi $0 \leq x \leq 16 \Rightarrow -2 \leq \sqrt{x}-2 \leq 2$

$$\Rightarrow 0 \leq (\sqrt{x}-2)^2 \leq 4. \text{ Suy ra}$$

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4}(\sqrt{x}-2)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Do đó hàm số (3) có $M = \max_{0 \leq x \leq 16} |f(x)| = \frac{1}{2}$ và giá trị đó đạt được khi $x = 0$, $x = 4$, $x = 16$.

Từ (1), (2) suy ra $M \geq \frac{1}{2}$ và dấu đẳng thức

đạt được với hàm số $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

Vậy $\min M = \frac{1}{2}$ khi $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn sau khi đưa ra BĐT $8M \geq |f(16)| + 4|f(4)| + 3|f(0)| \geq 4$ và thấy rằng $|f(16)| + 4|f(4)| + 3|f(0)| = 4$ khi $a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}$, đã vội kết luận $\min M = \frac{1}{2}$. Làm như vậy là không chặt chẽ và không đầy đủ.

2) Có thể giải bài toán bằng cách xét các trường hợp: $a > -\frac{1}{4}, a < -\frac{1}{4}$, nhưng lời giải không được tự nhiên.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghe An: Đoàn Văn Tùng, 11A1, THPT Quỳnh Lưu 3, Quỳnh Lưu; **Hải Dương:** Đỗ Thị Thu Thảo, 12T1, THPT Nguyễn Trãi; **Hà Nội:** Mai Tiến Khải, 10A2 Toán, Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG; **TP Huế:** Võ Thành Văn, 11 Toán, Khối THPT chuyên, ĐHKH Huế.

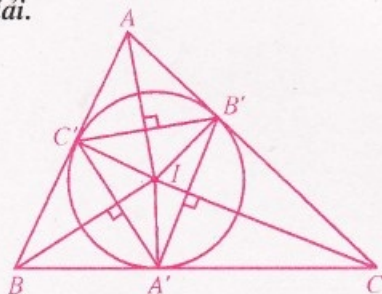
NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T8/368.** Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A', B', C'. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & AB^2 + BC^2 + CA^2 \\ & \geq AB \cdot B'C' + BC \cdot C'A' + CA \cdot A'B' \\ & \geq B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.



Đặt $AC' = AB' = x$; $BC' = BA' = y$; $CA' = CB' = z$.

Khi đó $B'C' = 2x \sin \frac{A}{2}$; $A'C' = 2y \sin \frac{B}{2}$;

$A'B' = 2z \sin \frac{C}{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 \\ & \geq x^2 \left(2 \sin \frac{A}{2} \right) + y^2 \left(2 \sin \frac{B}{2} \right) + z^2 \left(2 \sin \frac{C}{2} \right) \\ & \geq x^2 \left(4 \sin^2 \frac{A}{2} \right) + y^2 \left(4 \sin^2 \frac{B}{2} \right) + z^2 \left(4 \sin^2 \frac{C}{2} \right) (*) \end{aligned}$$

• Nhận xét rằng, nếu $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ thì

$$\sin \frac{A}{2} \leq \sin \frac{B}{2} \leq \sin \frac{C}{2}.$$

Từ BDT Chebyshev cho hai dãy đơn điệu ngược chiều là $x^2; y^2; z^2$ và

$2 \sin \frac{A}{2}; 2 \sin \frac{B}{2}; 2 \sin \frac{C}{2}$ ta thu được

$$\begin{aligned} & x^2 \left(2 \sin \frac{A}{2} \right) + y^2 \left(2 \sin \frac{B}{2} \right) + z^2 \left(2 \sin \frac{C}{2} \right) \\ & \leq \frac{1}{3} (x^2 + y^2 + z^2) \left(2 \sin \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \right). \end{aligned}$$

Mặt khác do $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$, nên

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 \geq \\ & \geq x^2 \left(2 \sin \frac{A}{2} \right) + y^2 \left(2 \sin \frac{B}{2} \right) + z^2 \left(2 \sin \frac{C}{2} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

• Lưu ý rằng với $\sin \frac{A}{2} \leq \sin \frac{B}{2} \leq \sin \frac{C}{2}$ thì

$$x^2 \cdot \sin \frac{A}{2} \geq y^2 \cdot \sin \frac{B}{2} \geq z^2 \cdot \sin \frac{C}{2}$$

Lại áp dụng BDT Chebyshev cho hai dãy đơn điệu ngược chiều là

$$4x^2 \sin \frac{A}{2}; 4y^2 \sin \frac{B}{2}; 4z^2 \sin \frac{C}{2}$$

và $\sin \frac{A}{2}; \sin \frac{B}{2}; \sin \frac{C}{2}$ ta thu được

$$\begin{aligned} & x^2 \left(4 \sin^2 \frac{A}{2} \right) + y^2 \left(4 \sin^2 \frac{B}{2} \right) + z^2 \left(4 \sin^2 \frac{C}{2} \right) \\ & \leq \frac{1}{3} \left(4x^2 \sin \frac{A}{2} + 4y^2 \sin \frac{B}{2} + 4z^2 \sin \frac{C}{2} \right) \times \\ & \times \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \\ & \leq x^2 \left(2 \sin \frac{A}{2} \right) + y^2 \left(2 \sin \frac{B}{2} \right) + z^2 \left(2 \sin \frac{C}{2} \right) (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta thấy BDT (*) được chứng minh. Đẳng thức ở (1) hoặc (2) xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. □

◀ **Nhận xét.** 1) Bạn Nguyễn Duy Khánh, 12C, THPT Lê Quý Đôn, Trục Ninh, Nam Định đã sử dụng kết quả:

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \sqrt{2 + \frac{r}{2R}}, \text{ trong đó } R, r \text{ lần lượt}$$

là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp $\triangle ABC$, để dễ xuất BDT mạnh hơn:

$$\begin{aligned} AB'^2 + BC'^2 + CA'^2 &\geq \frac{3(AB' \cdot B'C' + BC' \cdot C'A' + CA' \cdot A'B')}{2\sqrt{2 + \frac{r}{2R}}} \\ &\geq \frac{9(B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2)}{4\left(2 + \frac{r}{2R}\right)}. \end{aligned}$$

2) Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Trần Thế Khải, 10A1, Hoàng Anh Tuấn, 11A1, Trinh Ngọc Dương, 12A1, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Kim Đình Sơn, 10A1, Nguyễn Hoàng Hải, Khổng Hoàng Thao, Nguyễn Huy Hoàng, Trần Quang Sự, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Trần Văn Hạnh, 11A5, THPT Ninh Giang, Vũ Thanh Tú, 11A1, THPT Kê Sặt, Bình Giang, Nguyễn Đức Anh, Nguyễn Thị Nhân, 10A2, THPT Tứ Kỳ; **Nam Định:** Trần Thị Hồng Vân, 11A, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Kim Thu, 10A2, Khối THPT chuyên ĐH Vinh; **Đà Nẵng:** Phạm Trọng Khôi, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Dương Xuân Vinh, 11A1, THPT Phan Đình Phùng, Sông Cầu; **Vĩnh Long:** Châu Tuấn Kiệt, 11A1, Huỳnh Minh Tuấn, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

Một số bạn quên ghi tên và địa chỉ vào bài làm của mình.

HỒ LÊ MAI

★ **Bài T9/368.** Với số nguyên dương k bất kì, ta phân tích k thành tích các thừa số nguyên tố (không nhất thiết phân biệt, chẳng hạn $k = 18 = 3.3.2$). Gọi $T(k)$ là tổng của tất cả các thừa số đó. Tìm hằng số C lớn nhất sao cho $T(k) \geq C \ln k$, với mọi số nguyên dương k .

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Văn Hùng, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam).

$$\text{Xét } k = 3 \text{ ta có } T(3) \geq C \ln 3 \Rightarrow C \leq \frac{T(3)}{\ln 3} = \frac{3}{\ln 3} \quad (1)$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } T(k) \geq \frac{3}{\ln 3} \ln k \quad (2)$$

$$\text{Thật vậy giả sử } k = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \Rightarrow T(k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i.$$

Chú ý rằng hàm số $\frac{x}{\ln x}$ đồng biến trên

$$(3; +\infty), \text{ do đó } \frac{p_i}{\ln p_i} \geq \frac{3}{\ln 3} \text{ nếu } p_i \geq 3.$$

$$\text{Với } p_i = 2 \text{ ta cũng có } \frac{2}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 4} \geq \frac{3}{\ln 3}.$$

$$\text{Vậy } \frac{p_i}{\ln p_i} \geq \frac{3}{\ln 3} \text{ với mọi } p_i. \text{ Thành thử}$$

$$\alpha_i p_i \geq \frac{3}{\ln 3} \alpha_i \ln p_i$$

$$\Rightarrow T(k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \geq \frac{3}{\ln 3} \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln p_i = \frac{3}{\ln 3} \ln k.$$

Vậy BDT (2) được chứng minh.

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } C_{\max} = \frac{3}{\ln 3}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Tất cả các bạn tham gia giải bài toán này đều làm đúng. Ngoài bạn Hùng, các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Trần Quang Sự, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Vũ Minh Thắng, Lưu Văn Đan, 10A1, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Bùi Tiến Mạnh, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Đà Nẵng:** Phạm Trọng Khôi, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Kiên Giang:** Bùi Trần Minh Thành, 11 Toán, THPT chuyên Kiên Giang; **Tuyên Quang:** Nguyễn Sĩ Quân, 11B1, THPT Hàm Yên; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Huỳnh Hạc, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

2) Bạn Nguyễn Huỳnh Hạc có nhận xét đúng là bài toán cần quy ước $T(1) = 1$, vì số 1 không phân tích được thành thừa số nguyên tố. Với quy ước đó ta luôn có $T(1) = 1 > \frac{3}{\ln 3} \ln 1 = 0$. Do vậy bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương k .

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/368.** Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bình phương bằng 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc.$$

Lời giải. Do vai trò của các số a, b, c trong bài toán có tính hoán vị vòng quanh, nên không mất tính tổng quát ta giả sử b là số ở giữa hai số a và c , lúc đó $(b-a)(b-c) \leq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc \\ &= (bc^2 + a^2b) + (ab^2 + ca^2 - a^2b - abc) \\ &= b(c^2 + a^2) + a(b-a)(b-c) \\ &\leq b(c^2 + a^2) = 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{c^2 + a^2}{2} \cdot \frac{c^2 + a^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq 2 \sqrt{\frac{\left(b^2 + 2\left(\frac{c^2 + a^2}{2}\right)\right)^3}{27}} = 2.$$

(Ở đây ta dùng bất đẳng thức Cauchy cho ba số $b^2, \frac{c^2 + a^2}{2}, \frac{c^2 + a^2}{2}$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 3 \\ a(b-a)(b-c) = 0 \\ b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 1 \\ a = 0, b = 1, c = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2. $\square$

Nhận xét. Đây là bài toán hơi lạ với nhiều bạn học sinh (xét số ở giữa hai số còn lại), các kĩ thuật còn lại không có gì mới lạ. Các bạn THCS sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Quốc Hùng, 8E, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Bắc Ninh:** Hà Ngọc Thịnh, 9C, THCS Vũ Kiệt, Thuận Thành; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Đăng Hiếu, Nguyễn Mạnh Quân, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Hà Tây:** Nguyễn Quân Dương, 8B, THCS Thanh Mai, Thanh Oai; **Thái Bình:** Tạ Minh Tùng, 9A2, THCS TTr. Diêm Điền, Thái Thụy; **Nghệ An:** Trịnh Văn Quân, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Phú Yên:** Phạm Đức Hưng, 9H, THCS Lương Thế Vinh, Phạm Quang Thịnh, 9I, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ Bài T11/368. Cho dãy số (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4 + \dots + x_n^{2007} - x_n^{2008} \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Trước hết, ta có các kết quả sau.

Định lý 1. (Trung bình Cesaro). Nếu dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là a thì dãy số các trung bình cộng $\left(\frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)\right)$ cũng có giới hạn là a .

Định lý này có thể phát biểu dưới dạng tương đương sau:

Định lý 2. (Định lý Stolz). Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = a$

thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = a$.

Ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $a = 0$. Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ luôn

tồn tại N_0 sao cho với mọi $n \geq N_0$, ta có $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$. Khi đó, với mọi $n > N_0$ ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_n}{n} \right| &\leq \frac{1}{n} (|u_{N_0}| + |u_{N_0+1} - u_{N_0}| + \dots + |u_n - u_{n-1}|) \\ &< |u_{N_0}| \frac{1}{n} + (n - N_0) \frac{\varepsilon}{n}. \end{aligned}$$

Giữ N_0 cố định, ta có thể tìm được $N_1 > N_0$ sao cho $\frac{1}{N_1} |u_{N_0}| < \varepsilon$. Khi đó với mọi $n > N_1$ ta sẽ

$$\left| \frac{u_n}{n} \right| < 2\varepsilon. \text{ Vậy nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

Quay trở lại bài toán. Từ giả thiết suy ra

$$x_n x_{n+1} = x_n^2 - x_n^3 + \dots + x_n^{2008} - x_n^{2009} \quad (2)$$

Cộng theo vế của (1) và (2), ta được

$$x_{n+1} = \frac{x_n - x_n^{2009}}{1 + x_n}.$$

Vì $0 < x_1 = \frac{1}{2} < 1$ nên dễ thấy ngay rằng $x_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh bằng quy nạp BĐT sau

$$x_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ với } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3)$$

Ta thấy (3) đúng với $n = 1$. Giả sử (3) đúng với $n = k$, ta chứng minh nó cũng đúng với

$$n = k + 1, \text{ nghĩa là } x_{k+1} \leq \frac{1}{k+2}. \text{ Thật vậy}$$

$$\frac{1}{k+2} - x_{k+1} = \frac{(1 - (k+1)x_k) + (k+2)x_k^{2009}}{(k+2)(x_k + 1)} > 0$$

do $0 < x_k < \frac{1}{k+1}$ (theo giả thiết quy nạp).

Từ đó suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

$$\text{Xét hiệu } \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \frac{1 + x_n^{2007}}{1 - x_n^{2008}}.$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) = 1$.

Từ đó theo định lí trung bình Cesaro thì

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx_n} = 1$ hay $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nx_n) = 1$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Đây là bài toán về giới hạn của dãy số cần sử dụng kết quả bổ trợ của định lí trung bình Cesaro hoặc định lí Stolz, vì vậy không có nhiều lời giải gửi tới tòa soạn, đa số các bạn đều giải theo cách trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Phạm Văn Thành, Nguyễn Hoàng Hải, Trần Quang Sự, Nguyễn Huy Hoàng, Khổng Hoàng Thao, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Mai Tiến Khải, Hoàng Tấn Vinh, 10A2, chuyên Toán Tin, ĐHKHTN Hà Nội; **Hà Tây:** Nguyễn Văn Quyển, 11T, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Đà Nẵng:** Hoàng Bùi Khánh, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hải Phòng:** Nguyễn Hữu Định, 11B4, THPT Phạm Ngũ Lão; **Hải Dương:** Bùi Tiến Mạnh, Đỗ Thị Thu Thảo, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Quảng Ninh:** Phạm Đức Mạnh, 12T, THPT chuyên Hạ Long; **Kiên Giang:** Bùi Trần Minh Thành, Vũ Đại Nghĩa, 11T, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá.

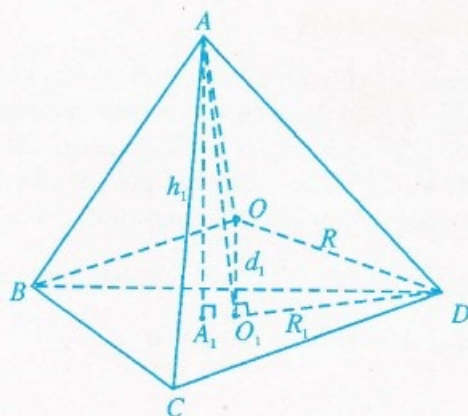
NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/368.** Giả sử $ABCD$ là một tứ diện có các đường cao đồng quy. Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện; h_1, h_2, h_3, h_4 theo thứ tự là độ dài các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C, D của tứ diện; R_1, R_2, R_3, R_4 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các mặt đối diện các đỉnh A, B, C, D của tứ diện. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{h_1 + 2\sqrt{2}R_1} + \frac{1}{h_2 + 2\sqrt{2}R_2} + \frac{1}{h_3 + 2\sqrt{2}R_3} + \frac{1}{h_4 + 2\sqrt{2}R_4} \geq \frac{1}{R} \quad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Đức Công, 11A1, THPT Đô Lương I, Nghệ An).



Kẻ đường cao AA_1 , $AA_1 = h_1$. Gọi O và O_1 lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện và đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$. Thế thì $OO_1 \perp mp(BCD)$ tại O_1 , đặt $OO_1 = d_1$. Ta có $O_1B = O_1C = O_1D = R_1$ và $R_1^2 + d_1^2 = R^2$ (1)

Mặt khác, dễ thấy $AA_1 \leq AO_1 \leq AO + OO_1$, nghĩa là $h_1 \leq R + d_1$ (2)

Suy ra $h_1 + 2R_1\sqrt{2} \leq R + (d_1 + 2\sqrt{2}R_1)$ (3)

Lại theo BĐT Bunyakovski ta có

$$(d_1 + 2\sqrt{2}R_1)^2 \leq (1^2 + (2\sqrt{2})^2)(d_1^2 + R_1^2) = 9R^2 \quad (4)$$

Và do đó, đối chiếu (3) và (4) ta được BĐT: $h_1 + 2R_1\sqrt{2} \leq 4R$ (5)

Dấu đẳng thức xảy ra ở (5) khi và chỉ khi dấu đẳng thức đồng thời xảy ra ở (2), (3) và (4), nghĩa là khi và chỉ khi $O \in (AO_1)$, $O_1 \equiv A_1$ và $R_1 = d_1 = 2\sqrt{2}$ hay $R_1 = 2d_1\sqrt{2}$, trong đó $R_1^2 + d_1^2 = R^2$,

do đó $d_1 = \frac{1}{3}R$. Vì vậy $ABCD$ là một chóp tam

giác "tựa cân" đỉnh A tức là $AB = AC = AD$. chứng minh tương tự, ta được ba BĐT nữa như (5), trong đó chỉ số $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$h_i + 2R_i\sqrt{2} \leq 4R \Leftrightarrow \frac{1}{h_i + 2R_i\sqrt{2}} \geq \frac{1}{4R}$$

Từ đó ta có BĐT cần chứng minh.

Đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình chóp tam giác "tựa cân" ở mọi đỉnh A, B, C, D của nó, có nghĩa $ABCD$ là một tứ diện đều ($AB = AC = AD = BC = BD = CD$). $\square$

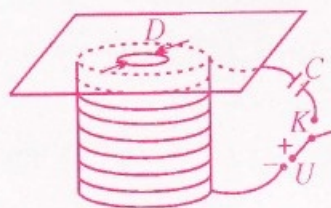
◀ **Nhận xét.** 1) Lời giải trên đây rõ ràng hoàn toàn không sử dụng đến giả thiết của bài toán đòi hỏi $ABCD$ phải là một tứ diện trục tâm, bởi vậy giả thiết đó là thừa.

2) Ngoài bạn Nguyễn Đức Công, các bạn sau đây đều đáng được biểu dương:

Hà Nội: Trịnh Ngọc Dương, 12A2 Toán, Khối THPT chuyên Toán - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tây:** Phạm Việt Hà, 11A2, THPT Tùng Thiện, Sơn Tây; **Thanh Hóa:** Lê Xuân Thắng, 11A1, THPT Triệu Sơn 3; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Dương Văn An, 12A1, THPT Châu Thành.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

★ **Bài L1/368.** Phía trên của một hình solenoid đặt thẳng đứng có một tấm bìa cứng nằm ngang, trên đó đặt một vòng tròn nhỏ siêu dẫn có đường kính là D làm từ dây kim



loại có đường kính tiết diện dây là d_1 , ($d_1 \ll D$). Nối solenoid với nguồn và tụ điện (hình vẽ), đóng khóa K

thì vòng tròn sẽ nảy lên khi hiệu điện thế $U \geq U_0$ (U_0 là hiệu điện thế xác định). Thay vòng tròn trên bằng vòng siêu dẫn khác cùng kim loại trên và cùng đường kính D còn đường kính tiết diện dây là d_2 . Hỏi hiệu điện thế nguồn điện là bao nhiêu để khi đóng khóa K thì vòng vừa được thay nảy lên? Biết độ tự cảm của vòng là $L = kD \ln\left(\frac{1,4D}{d}\right)$ (k là hằng số), điện trở thuần của solenoid và dây nối được bỏ qua.

Lời giải. Chọn gốc thời gian $t = 0$ là lúc đóng khóa K . Áp dụng định luật Ohm cho mạch:

$$U = Li' + \frac{q}{c}. \text{ Mặt khác } i = q' \text{ nên ta có}$$

$$q'' + \frac{1}{LC}(q - CU) = 0.$$

Phương trình trên có nghiệm

$$q - CU = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Sử dụng điều kiện ban đầu $t = 0, q = 0, i' = 0$ ta được $q = CU(1 - \cos \omega t)$ (1)

Cường độ dòng điện trong mạch:

$$i = q' = CU \omega \sin \omega t \quad (2)$$

Gọi Φ là từ thông do solenoid gửi qua vòng, i_v là cường độ dòng điện chạy trong vòng, L_v là độ tự cảm của vòng. Ta có: $\Phi = -L_v i_v \Rightarrow$

$$\Phi + L_v i_v = 0 \Rightarrow i_v = -\frac{\Phi}{L_v}. \text{ Từ thông } \Phi \text{ tỉ lệ}$$

với cường độ dòng điện cực đại trong solenoid và diện tích của vòng dây: $\Phi \sim I_0 D^2 \sim U D^2$.

Do đó $I_{ov} \sim \frac{D^2 U}{L_v}$. Lực tác dụng lên vòng

cực đại tỉ lệ với đường kính của vòng và cường độ dòng điện cực đại trong solenoid và

$$\text{trong dây siêu dẫn: } F \sim D I_0 I_{ov} \sim \frac{D^3 U^2}{L_v}.$$

Trọng lực tác dụng lên vòng tỉ lệ với $D d^2$.

Để vòng bắt đầu nảy lên thì

$$\frac{D^3 U^2}{L_v} \sim D d^2 \Rightarrow U \sim \sqrt{L_v} \cdot \frac{d}{D}.$$

Trong trường hợp đầu: $U \sim d_1 \left[\ln\left(\frac{1,4D}{d_1}\right) \right]^{\frac{1}{2}}.$

Trường hợp sau: $U' \sim d_2 \left[\ln\left(\frac{1,4D}{d_2}\right) \right]^{\frac{1}{2}}.$

Để vòng nảy lên được thì

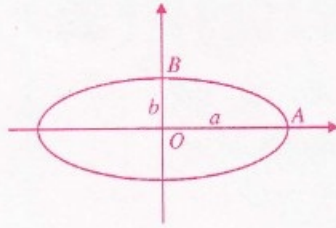
$$U' \geq U \frac{d_2}{d_1} \left(\frac{\ln \frac{1,4D}{d_1}}{\ln \frac{1,4D}{d_2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Bạn Nguyễn Mạnh Quân, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây có lời giải tốt.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/368.** Một ô tô chuyển động với vận tốc không đổi $v = 90 \text{ km/h}$ theo một đường kín nằm ngang có dạng elip với bán trục lớn $a = 500 \text{ m}$ và bán trục nhỏ $b = 250 \text{ m}$. Tìm gia tốc cực đại và gia tốc cực tiểu của ô tô. Hệ số ma sát k giữa mặt đường và lốp ô tô bằng bao nhiêu để ô tô không bị trượt tuyết khi chuyển động theo elip đó?

Lời giải. Vì vận tốc của ô tô có độ lớn không đổi khi chuyển động theo elip nên thành phần gia tốc tiếp tuyến của ô tô bằng không. Do đó, tại bất kỳ điểm nào trên elip, gia tốc của ô tô bằng thành phần gia tốc pháp tuyến: $\vec{a} = \vec{a}_n$, về độ lớn $a = a_n = \frac{v^2}{R}$, với R là bán kính cong của quỹ đạo tại điểm đang xét.



Quỹ đạo của ô tô là elip nên bán kính cong của quỹ đạo sẽ nhỏ nhất $R = R_{\min}$ tại A và lớn nhất nhất khi ô tô ở A

và nhỏ nhất khi ô tô ở B. $R = R_{\max}$ tại B (hình vẽ), do đó gia tốc của ô tô sẽ lớn

Tại A: $a = a_{\max} = \frac{v^2}{R_{\min}} = 2,5 \text{ m/s}^2$ (1)

Tại B: $a = a_{\min} = \frac{v^2}{R_{\max}} = 1,25 \text{ m/s}^2$ (2)

Lực làm cho xe chuyển động theo elip là lực ma sát f_{ms} do mặt đường tác dụng lên lốp xe; lực này có phương hướng vào tâm O.

Lực ma sát này gây nên gia tốc pháp tuyến, nên $f_{ms} = \frac{mv^2}{R}$ (3)

Vật ở giới hạn trượt khi f_{ms} đạt giá trị cực đại kN (ở đây N là phản lực của mặt đường lên ô tô, $N = mg$). Vì bài toán đề cập đúng đến trường hợp này nên ta đặt $f_{ms} = kN$ (4)

Thay $N = mg$, từ (3) và (4) ta có

$kmg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow k = \frac{v^2}{gR}$ (5)

Vì v và g không đổi, nên từ (5) ta thấy k có giá trị lớn nhất khi $R = R_{\min}$ (tại điểm A).

$k_{\max} = \frac{v^2}{gR_{\min}} = 0,25$; (ở đây lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Vậy khi hệ số ma sát $k \geq 0,25$ thì ô tô không bị trượt khi chuyển động theo elip. $\square$

◀ **Nhận xét.** Bạn Nguyễn Mạnh Quân, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây có lời giải tốt.

NGUYỄN VĂN THUẬN

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/372. Do there exist two distinct positive integers a, b such that $b^n + n$ is a multiple of $a^n + n$ for every positive integer n ?

T7/372. Let S be the set of all pairs of real numbers (α, β) such that the equation $x^3 - 6x^2 + \alpha x - \beta = 0$ has three real roots (not necessarily distinct) and they are all greater than 1. Find the maximum value of $T = 8\alpha - 3\beta$ for $(\alpha, \beta) \in S$.

T8/372. Let ABC be an acute triangle and denote by Q the center of its Euler's circle. The circumcircle of ABC , which has radius R , meets AQ, BQ , and CQ respectively at M, N , and P .

Prove the inequality $\frac{1}{QM} + \frac{1}{QN} + \frac{1}{QP} \geq \frac{3}{R}$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/372. Find the integer part of

$$A = \sqrt[n]{1 - \frac{x}{2008}} + \sqrt[n]{1 + \frac{x}{2008}}$$

where x is a real number in $[-2008; 2008]$, and m, n are natural numbers, $m \geq n \geq 2$.

T10/372. Let S be denote the set of all n -tuples ($n > 1$) of real numbers $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ such that

$3 \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2 = 502$ (1)

a) Prove that $\min_{1 \leq j \leq n} |a_j - a_i| \leq \sqrt{\frac{2008}{n(n^2-1)}}$ (2)

b) Give an example of an n -tuple $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ such that condition (1) holds and for which there is an equality in (2).

T11/372. A function $f(x)$, whose domain is the interval $[1; +\infty)$, has the following two properties:

i) $f(1) = \frac{1}{2008}$;

ii) $f(x) + 2007(f(x+1))^2 = f(x+1)$ for all $x \in [1; +\infty)$.

Find the limit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \dots + \frac{f(n+1)}{f(n)} \right)$.

T12/372. The angle-bisectors AA_1, BB_1, CC_1 of a triangle ABC with perimeter p meet B_1C_1, C_1A_1 , and A_1B_1 respectively at A_2, B_2 , and C_2 . The line through A_2 and parallel to BC meets AB, AC at A_3, A_4 . Construct the points B_3, B_4 and C_3, C_4 in a similar way. Prove the inequality

$AB_4 + BC_4 + CA_4 + BA_3 + CB_3 + AC_3 \leq p$.

When does equality holds?

Translated by LE MINH HA

CUỘC VẬN ĐỘNG

Học sinh sử dụng lại Sách Giáo khoa cũ và tặng Sách Giáo khoa cho nhà trường CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Trong tình hình giá cả các mặt hàng tiêu dùng đều có nhiều biến động phức tạp, ảnh hưởng đến đời sống của người dân, đặc biệt là các hộ nghèo, thực hành chủ trương tiết kiệm, chống lãng phí theo tinh thần chỉ đạo của Chính phủ, ngày 13-3-2008, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã có công văn số 2034/BGDĐT-VP chỉ đạo các Sở Giáo dục & Đào tạo trong cả nước tổ chức tuyên truyền vận động *Học sinh sử dụng lại sách giáo khoa (SGK) cũ*, phát động các hình thức quyên góp, tặng bạn, xây dựng tủ SGK dùng chung nhằm sử dụng SGK trong nhiều năm. Tiếp đó, ngày 19-3-2008, công văn số 4313/BGDĐT-VP về cuộc vận động *Học sinh tặng SGK cũ cho nhà trường*, Bộ Giáo dục và Đào tạo hướng dẫn các Sở Giáo dục & Đào tạo một số công việc cụ thể cần thực hiện như: Tổ chức *Tuần lễ quyên góp sách giáo khoa cũ* vào dịp bế giảng năm học 2007-2008; các trường phải sử dụng kinh phí tối thiểu từ 6-10% tổng ngân sách chi cho GDPT hàng năm để mua sắm trang thiết bị, SGK cho thư viện tăng cường tủ SGK dùng chung; tăng cường lượng sách cho học sinh mượn từ 15-20%. nhằm đảm bảo mọi học sinh, đặc biệt là học sinh nghèo có đủ SGK để học.

Hưởng ứng cuộc vận động này, Nhà xuất bản Giáo dục (NXBGD) đã chỉ đạo các đơn vị thành viên, các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương triển khai thực hiện các hoạt động cụ thể như: tuyên truyền rộng rãi chủ trương này của Bộ Giáo dục và Đào tạo đến các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh, các em học sinh tổ chức tốt *Tuần lễ tặng SGK cũ* tại các trường học. Trong hai tháng phát hành Sách giáo dục phục vụ năm học 2008 - 2009, các công ti Sách - Thiết bị trường học sẽ tổ chức các cửa hàng mua SGK cũ. Số sách này một

phần sẽ bán lại cho học sinh với giá rẻ, một phần sẽ tặng cho các học sinh nghèo không đủ tiền mua sách và tặng cho các Thư viện trường học. Tính đến ngày 26-5-2008, NXBGD đã trích 3 795 500 000 đồng cho các công ti Sách-Thiết bị trường học để tổ chức mua - bán SGK cũ, các địa phương đã tổ chức 1 263 điểm mua - bán SGK cũ và số lượng SGK đã mua và quyên góp được trong tuần lễ đầu tiên là 39 785 bản. Tham mưu với Sở GD-ĐT chỉ đạo các trường tiếp tục củng cố tủ SGK dùng chung cho học sinh mượn sách. Ngoài ra, NXBGD có công văn số 996/NXBGD ngày 25-5-2008 phối hợp với Sở GD-ĐT chỉ đạo các công ti Sách- Thiết bị trường học hướng dẫn các trường phổ thông tại địa phương thống kê số lượng học sinh con thương binh (có hạng), con liệt sĩ để cấp không SGK. Tổ chức tặng SGK cho các trường kết nghĩa. Phối hợp với Quỹ bảo trợ trẻ em TP. Hà Nội, Đà Nẵng, TP. Hồ Chí Minh tổ chức tặng SGK cho học sinh nghèo, vượt khó. Hướng dẫn các Công ti Sách - Thiết bị trường học phát phiếu ưu tiên giảm giá SGK 10 - 12% cho các đối tượng học sinh nghèo, học sinh học giỏi gia đình chính sách. Đảm bảo vào năm học mới không để một học sinh nào vì thiếu SGK mà bỏ học.

Theo đánh giá của dư luận báo chí, cuộc vận động *Học sinh sử dụng lại SGK cũ và tặng SGK cũ cho tủ sách dùng chung của nhà trường* của Bộ Giáo dục và Đào tạo với sự đóng góp tích cực của NXBGD chắc chắn sẽ đạt được hiệu quả cao không chỉ về mặt giáo dục (học sinh có ý thức bảo quản tốt SGK để học và tặng lại cho các bạn học sinh nghèo), về mặt kinh tế mà còn góp phần vào việc thực hiện những chủ trương chính sách về kinh tế, xã hội, chính trị của Đảng và Chính phủ trong tình hình hiện nay.

PV

KÌ THI HỌC SINH GIỎI THPT CHUYÊN

KHU VỰC DUYÊN HẢI BẮC BỘ

lần thứ nhất - năm học 2007 - 2008

Kì thi HSG dành cho học sinh lớp 10 và lớp 11 khu vực Duyên hải Bắc bộ lần thứ nhất được tổ chức tại Hải Phòng vào ngày 3/5/2008 với sự tham gia của sáu đội tuyển thuộc sáu tỉnh: Thái Bình, Hà Nam, Hải Dương, Quảng Ninh, Hưng Yên và Hải Phòng. Kì thi diễn ra trong 1 ngày với tất cả các bộ môn. Sáng tổ chức thi, chiều chấm và công bố giải thưởng. Đội tuyển của mỗi tỉnh ở mỗi môn, mỗi khối đều có ba học sinh tham dự. Kì thi là sân chơi bổ ích cho học sinh giỏi và góp phần cổ vũ phong trào học sinh giỏi của khu vực.

ĐỀ THI MÔN TOÁN LỚP 10

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Bài 1. (4 điểm). Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 21} = \sqrt{x^2 + 19x - 42}.$$

Bài 2. (4 điểm). Tứ giác $ABCD$ lồi, nội tiếp thoả mãn $CD = AD + BC$. Chứng minh rằng các đường phân giác góc $\widehat{DAB}$, góc $\widehat{ABC}$ và cạnh CD đồng quy.

Bài 3. (4 điểm). Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 - p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 4. (4 điểm). Cho các số $a_1, a_2, \dots, a_{2008} \in$

$[-2; 2]$ sao cho $\sum_{i=1}^{2008} a_i = 0$. Chứng minh

rằng $|a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2008}^3| \leq 4016$.

Bài 5. (4 điểm). Cho một 2008 – giác có tính chất: Tất cả các đỉnh có tọa độ nguyên và độ dài của tất cả các cạnh là những số nguyên. Chứng minh rằng chu vi của đa giác là một số chẵn.

ĐỀ THI MÔN TOÁN LỚP 11

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Bài 1. (4 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_3 x + \sqrt{(\log_3 x - 1)^2 + 1} = \frac{y}{3} + 1 \\ \log_3 y + \sqrt{(\log_3 y - 1)^2 + 1} = \frac{x}{3} + 1. \end{cases}$$

Bài 2. (4 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = 1$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức $A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z}$.

Bài 3. (4 điểm). Cho K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm của AC và AB . Đường thẳng C_1K cắt đường thẳng AC tại B_2 , đường thẳng B_1K cắt đường thẳng AB tại C_2 . Giả sử diện tích tam giác ABC bằng diện tích tam giác AB_2C_2 . Tính độ lớn góc $\widehat{BAC}$.

Bài 4. (4 điểm). Tồn tại hay không hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ không đồng nhất bằng 0, thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $f(xy + x + y + 1) = yf(x + 1) + xf(y + 1) + f(x + 1) + f(y + 1)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

ii) $f(x - y) = f(x^{2008}) - f(y^{2008})$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$?

Bài 5. (4 điểm). Cho tập hợp S gồm 2008 phần tử. Giả sử $S_1, S_2, \dots, S_{50}$ là 50 tập con của S thoả mãn các điều kiện sau: $|S_i| = 100$, $\forall i = \overline{1; 50}$ (kí hiệu $|S_i|$ là số phần

tử của S_i) và $\bigcup_{i=1}^{50} S_i = S$. Chứng minh rằng tồn

tại hai tập con S_i, S_j (với $i \neq j$) mà $|S_i \cap S_j| \geq 4$.

ĐẶNG XUÂN SƠN

(GV THPT NK Trần Phú, Hải Phòng) giới thiệu

English through math problems and solutions

UNIT 9

Problem. Pyramid *EARLY* has rectangular base *EARL* and apex *Y*, $ER = \sqrt{1105}$, and *EY* is perpendicular to *RY*. If *EA*, *EY*, *RY*, and *LY* are distinct integers, compute the area of the smallest face of the pyramid.

Vocabulary

pyramid (*n.*) = hình chóp
apex (*n.*) = đỉnh
perpendicular (*adj.*) = vuông góc.

Solution. (Chờ bạn đọc gửi về)

VU THE KHOI
(Institute of Mathematics)

MỘT SỐ LƯU Ý... (Tiếp trang 15)

Thí dụ: Phương trình $x^3 - 1 = 0$ có một nghiệm thực duy nhất là $x = 1$.

– Trong SGK có nêu một số bài toán liên quan đến biểu diễn hình học của số phức. Điều đó chỉ để minh họa, gây hứng thú và giúp học sinh hiểu rõ hơn về số phức. Giáo viên không nên cho thêm các bài toán đi sâu vào ứng dụng của số phức trong hình học.

Để kết thúc bài viết này, chúng tôi xin nêu một nhận xét rất đáng chú ý trong việc thực hiện chương trình và SGK mới, là: có không ít giáo viên vẫn chưa từ bỏ được thói quen giảng dạy theo nội dung của SGK Cải cách Giáo dục; hơn nữa, nhiều giáo viên yêu cầu kỹ năng giải bài tập cao quá mức cần thiết, vượt xa quy định của chương trình và SGK (cả về mức độ khó lẫn số lượng bài tập 12p). Phải chăng đó cũng là một trong nhiều nguyên nhân khiến dư luận xã hội cho rằng chương trình và SGK hiện nay là "quá tải"?

DÙNG BIỂU THỨC... (Tiếp trang 2)

$$\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{y}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}}}.$$

$$\text{Từ đó có } \sqrt{2+\frac{1}{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2+\frac{1}{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}} \quad (3)$$

$$\text{Nếu } x > y > 0 \text{ thì } \sqrt{2+\frac{1}{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{2+\frac{1}{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}};$$

$$\text{Nếu } 0 < x < y \text{ thì } \sqrt{2+\frac{1}{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}} > \sqrt{2+\frac{1}{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Vậy từ (3) suy ra $x = y$. Thay vào PT (1) ta có

$$\sqrt{2+\frac{1}{x}}=2-\frac{1}{\sqrt{x}}. \text{ Bình phương hai vế được}$$

$$2+\frac{1}{x}=4+\frac{1}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=4 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (4; 4)$. $\square$

Để kết thúc bài viết xin mời các bạn giải các PT và HPT sau:

$$1. a) \sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4};$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=1.$$

$$2. a) x^3-3x^2-8x+40=8\sqrt[4]{4x+4};$$

$$b) \sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3.$$

$$3. a) \frac{6x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}=3+\sqrt{x-x^2};$$

$$b) \sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}.$$

4. Giải các hệ phương trình sau.

$$a) \begin{cases} \sqrt{x+10}+\sqrt{y-2}=6 \\ \sqrt{y+10}+\sqrt{x-2}=6; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (x+\sqrt{2007+x^2})(y+\sqrt{2007+y^2})=2007 \\ 2x^2+y^2=3x-2y+2. \end{cases}$$



Chọn ai, ai chọn BÂY GIỜ CHỌN AI?

Một giám đốc xí nghiệp muốn tuyển chọn một nhân viên mới trong số hàng trăm ứng cử viên. Ông ta phỏng vấn từng người một. Sau mỗi cuộc phỏng vấn ông ta có một và chỉ một trong hai lựa chọn:

1. Nhận người được phỏng vấn vào làm việc. Cuộc phỏng vấn chấm dứt, những người xếp hàng sau đó để được phỏng vấn có thể ra về.
2. Không nhận người được phỏng vấn. Người này ra về, không trở lại nữa. Người xếp hàng liền sau đó tiếp tục được phỏng vấn.

Chú ý là ông ta không được thay đổi ý kiến. Cái khó của ông giám đốc là ở chỗ: Nếu chấp nhận người đang phỏng vấn, thì biết đâu sẽ bỏ qua một người khác sau đó có khả năng tốt hơn? Còn nếu bỏ qua người đang phỏng vấn, thì liệu những người sau có ai bằng được người này không? Chọn sớm quá có thể "hớ", chọn muộn quá có thể "tuột"! Dừng lại ở đâu là tối ưu?

Năm 1960 Martin Gardner đã đưa ra bài toán này lần đầu tiên như là một "trò chơi toán học". Trong bài toán của Gardner đưa ra hồi đó, nếu có 100 ứng cử viên, người ta đã chứng tỏ rằng nhà tuyển dụng nên bỏ qua 37 trường hợp đầu tiên, mà chỉ chọn ứng cử viên đạt yêu cầu từ người thứ 38 trở đi. Người ta nói rằng, một cách tổng quát, kích cỡ của mẫu đầu tiên chiếm tỉ lệ 0,37 của tổng số. Chú ý rằng

$$0,37 \approx \frac{1}{e} \quad (e \text{ là cơ số của logarit tự nhiên}).$$

Tất nhiên chiến thuật trên thất bại nếu để lọt mất người sáng giá nhất nằm trong số 37 người bị bỏ rơi. Nhưng làm sao được, vì đây là vấn đề "khả năng cao nhất để tìm người sáng giá", chứ

không phải "biện pháp tối ưu để tìm người sáng giá" trong số 100 người! Có rất nhiều giải pháp đã được đưa ra, đặc biệt giải pháp trong đó người ta xét đến việc tối ưu hóa sự sắp xếp trung bình của ứng cử viên.

Các nhà nghiên cứu Thụy Điển Kimmo Eriksson và Pontus Strimling de Västerås, cũng như Jonas Sjöstrand ở Stockholm đã chú ý đến trường hợp có nhiều nhà tuyển chọn và các ứng cử viên có nhiều lựa chọn các ông chủ. Bằng cách gián tiếp, họ trình bày bài toán dưới dạng hôn nhân: Một số lớn nam và nữ gặp nhau từng cặp. Họ chọn nhau để sánh đôi (nam, nữ), người này chọn người kia để tiếp xúc; hợp thì thành đôi, không thì bỏ để chọn người khác. Mỗi người chỉ được chọn người khác 1 lần, không được chọn đi rồi chọn lại. Giả sử mỗi người chỉ được chọn tối đa là N người. Kết quả chính thức được các nhà nghiên cứu đưa ra là:

Nếu N khá lớn, các thành viên hành động khôn ngoan nhất có thể được, và không phối hợp với nhau (không cho nhau biết ý kiến của mình về người khác), thì mỗi người có thể hi vọng kết hôn với người khác ở lượt người tiếp xúc thứ m với $m \approx \sqrt{N}$. Thí dụ nếu số người có thể tiếp xúc là 50, thì hi vọng cao nhất tìm được ý trung nhân ở người tiếp xúc thứ 7.

Các tác giả cho rằng nếu các thành viên có hợp tác và bàn bạc với nhau thì con số $\sqrt{N}$ có thể

rút xuống thấp hơn thành $\sqrt{\frac{27}{32}}N$. Nhưng khả

năng phối hợp nhau rất khó, vì có những quyền lợi riêng đối chọi nhau, ai cũng muốn tìm người ưng ý nhất, không muốn người khác "phỏng" tay trên...

Tác giả bài viết này cũng không hiểu các nhà nghiên cứu lấy

$$\text{các số } \sqrt{N}, \sqrt{\frac{27}{32}}N$$

ở đâu, nhưng cũng thuật lại để vui cùng bạn đọc.



PHAN THANH QUANG

(Theo Benoit Rittaud
trong Recherche số 1/2005).

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 372(6.2008)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.5121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272, 04.5121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUỲ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,

TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,

PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,

TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,

GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY,

GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

1. Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools

Lê Bá Hoàng – Dùng biểu thức liên hợp vào giải phương trình và hệ phương trình vô tỉ.

3. Lời giải đề thi vào lớp 10 Trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, năm học 2007–2008.

5. Đề thi vào lớp 10 chuyên Trường ĐHSP TP. Hồ Chí Minh, năm học 2007 – 2008.

6. Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation

Đặng Thanh Hải – Một số phương pháp tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

9. Thử sức trước kì thi

– Hướng dẫn giải Đề số 2.

– Đề số 4.

11. Giải đáp thắc mắc

12. Phương pháp giải toán–Math Problem Solving
Trần Đức Thiện – Tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

14. Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum

Nguyễn Huy Doan – Một số điểm cần lưu ý khi dạy – học Giải tích 12 nâng cao.

16. Đề ra kì này – Problems in This Issue

T1/372, ..., T12/372, L1/372, L2/372.

18. Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.

Giải các bài của số 368.

28. PV – Cuộc vận động Học sinh sử dụng lại SGK cũ và tặng SGK cho nhà trường của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

29. Đặng Xuân Sơn – Kì thi học sinh giỏi THPT chuyên khu vực Duyên hải Bắc bộ lần thứ nhất, năm học 2007–2008.

30. Tiếng Anh qua các bài toán và lời giải – English through Math Problems and Solutions
Vũ Thế Khôi – Unit 9.

31. Toán học & đời sống – Math and Life

Phan Thanh Quang – Chọn ai, ai chọn bây giờ chọn ai.

Bìa 2. Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics

Bìa 3. Câu lạc bộ – Math Club

Bìa 4. Cuộc thi vui Giải trí ngày hè

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.

Trị sự, phát hành : HCÀNG THÀNH ĐỨC, VŨ ANH THƯ

Mỹ thuật : MINH THO

Chế bản : NGUYỄN THỊ CÀNH



Bạn hiểu Đường NHƯ THẾ NÀO?

đồ thị của hàm số đó; đường cũng có trong các hình vẽ, ...

Còn trong kĩ thuật, trong đời sống xã hội, văn học, ... **đường** có **nghĩa đen** và **nghĩa bóng** như thế nào? Bạn hãy tìm các thí dụ minh họa cho nghĩa bóng của **đường** thông qua các thành ngữ, tục ngữ, ca dao, câu văn, ... (nhưng chỉ xem **đường** là danh từ và không kể các nghĩa khác biệt hẳn như: đường là chất ngọt, công đường, thơ đời Đường....).

Giải đáp: THÁNG BA, MỘT SỐ SỰ KIỆN LỊCH SỬ

(Đề đăng trên THPT số 369, tháng 3.2008)

- ❖ Ngày 6.3.1946 tại Hà Nội, Hiệp định Sơ bộ Pháp – Việt được kí kết, công nhận Việt Nam là một Quốc gia tự do trong Liên bang Đông Dương thuộc khối Liên hiệp Pháp. Ta kí Hiệp định này để đẩy quân Tưởng Giới Thạch ra khỏi miền Bắc Việt Nam.
- ❖ Ngày 8.3.1899 tại hai thành phố Chicago và New York ở Hoa Kỳ đã nổ ra cuộc đấu tranh của nữ công nhân ngành dệt may đòi tăng lương, giảm giờ làm.
Ngày 26-27.8.1910 Đại hội lần thứ hai Phụ nữ Quốc tế họp tại Copenhagen, Đan Mạch, đã quyết định lấy ngày 8.3 làm ngày Quốc tế Phụ nữ.
- ❖ Ngày 9.3.1945 Nhật đảo chính Pháp tại Đông Dương. Đảng Cộng sản Đông Dương ra chỉ thị **Nhật Pháp bắn nhau và hành động của chúng ta**, vạch hướng cho các tổ chức Việt Minh chuẩn bị khởi nghĩa giành Chính quyền.
- ❖ Ngày 19.3.1950 khoảng 300.000 đồng bào Sài Gòn biểu tình chống Mỹ, sau trở thành Ngày toàn quốc chống Mỹ cho đến khi thống nhất đất nước.

Ngày 19.3 cũng là Ngày truyền thống của Bộ đội Đặc công từ 1967.

- ❖ Ngày 26.3.1931 Hội nghị Ban Chấp hành Trung ương Đảng Cộng sản Đông Dương ra Nghị quyết thành lập Đoàn Thanh niên Cộng sản Đông Dương. Sau này Đoàn đổi tên thành Đoàn Thanh niên Lao động Việt Nam, rồi thành Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh. Ngày 22.3.1961 Đại hội Đoàn Thanh niên Lao động Việt Nam quyết định lấy ngày 26.3 làm ngày kỉ niệm thành lập Đoàn.

Các bạn có tên sau đã trả lời tốt, được nhận tặng phẩm:

- 1) Hoàng Phúc Nguyên, 10 Toán – Tin, THPT chuyên Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi, Quảng Ngãi.
- 2) Lê Trung Văn, 12C1, THPT Vạn Tường, Quảng Ngãi.
- 3) Nguyễn Thị Loan, 10A1, THPT Đô Lương 2, Đô Lương, Nghệ An.
- 4) Trần Ngọc Chung, 9E, THCS Vinh Tân, TP. Vinh, Nghệ An.

VÂN KHANH

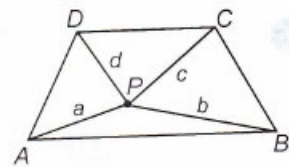
Cuộc thi VUI

GIẢI TRÍ NGÀY HÈ

Các bạn đã hoàn thành ba bài đố vui: Quả bóng, Ghép thành hình vuông và Biển số xe buýt chưa? Lần này THPT giới thiệu tiếp với các bạn ba bài đố vui thú vị nữa. Hãy gửi sớm đáp án của các bài dưới đây về Tòa soạn trước ngày 31/8/2008 nhé!

Bài 4. TẠO TỨ GIÁC

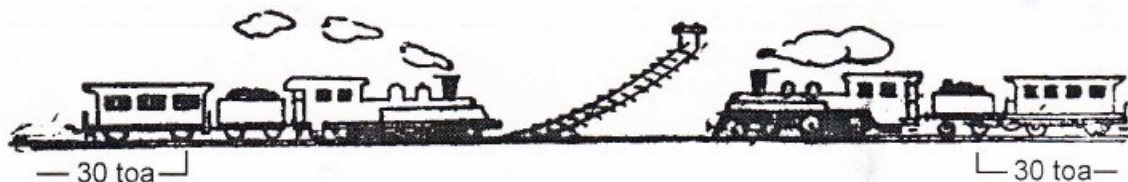
Để làm giá đỡ thêm cho một tấm tôn to có khung là hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD$), người ta tận dụng bốn thanh sắt có độ dài a, b, c, d và sẽ hàn chúng tại các điểm P, A, B, C, D với $PA = a, PB = b, PC = c, PD = d$ như hình vẽ. Một bạn trẻ yêu toán nhìn thấy đề đề nghị một phương án là hàn bốn thanh sắt có độ dài như trên thành một tứ giác sao cho bốn đỉnh của nó nằm trên khung. Bạn có thể vẽ hình theo phương án đó không?



HOÀNG NGUYỄN

Bài 5. XE LỬA TRÁNH NHAU

Hai đoàn xe lửa, mỗi đoàn kéo 30 toa gặp nhau tại một quãng đường (như hình vẽ) mà ở đó chỉ có một quãng đường ray rẽ nhánh có thể chứa đủ một đoàn xe lửa với 10 toa thôi. Hai tổ phụ trách đầu máy đã hội ý với nhau cách giải quyết rồi sau đó cả hai đoàn xe lửa tiếp tục được cuộc hành trình của mình một cách nguyên vẹn. Các bạn nghĩ xem hai tổ phụ trách đã giải quyết như thế nào?



THANH LOAN

Bài 6. Vận động viên điền kinh yêu toán

Trong một cuộc thi Marathon, các vận động viên đăng kí theo thứ tự bắt đầu từ số 1. Một vận động viên yêu toán đã nhận ra rằng tổng các số đăng kí nhỏ hơn số đăng kí của anh ta bằng tổng các số đăng kí lớn hơn số đăng kí của anh ta và nếu gấp đôi số vận động viên tham dự ta được một số chính phương. Biết rằng số vận động viên tham gia nằm trong khoảng từ 100 đến 500. Hãy xác định số vận động viên tham gia và số đăng kí của người vận động viên yêu toán đó.

THANH HÀ

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT06M8

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2008

Giá : 5000 đồng

Năm nghìn đồng