



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

3 2008
Số 369

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 45

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272, (04)5121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre



Chào mừng



NGÀY QUỐC TẾ PHỤ NỮ

NGÀY THÀNH LẬP ĐOÀN THANH NIÊN CỘNG SẢN HỒ CHÍ MINH



LỚP TOÁN ĐẠI CƯƠNG ĐẦU TIÊN CỦA NƯỚC VIỆT NAM DÂN CHỦ CỘNG HOÀ

TRẦN ĐÌNH VIỆN
(Hà Nội)

Đầu năm học 1947-1948, Bộ trưởng Bộ Giáo dục *Nguyễn Văn Huyên* đã ký quyết định cho phép Sở Giáo dục Liên khu IV mở lớp **Toán học Đại cương** theo chương trình của Pháp. Giáo sư *Nguyễn Thúc Hào*, khi đó là Thanh tra của Bộ về các trường trung học ở Trung bộ, được cử làm Hiệu trưởng kiêm giảng viên của lớp. Những người đồ Tú tài muốn lấy Bằng Cử nhân Toán phải có ba chứng chỉ: **Toán học Đại cương, Cơ học thuần lý và Giải tích.**

Niên học đầu tiên 1947-1948, lớp đóng tại xã Xuân La (nay là xã Xuân Lâm, Nam Đàn), bên bờ tả ngạn sông Lam. Bên kia bờ là xã Tân Hợp có trường trung học *Nguyễn Công Trứ*. Giảng đường lên lớp tại nhà thờ họ *Nguyễn Thạc*. Văn phòng nhà trường vừa là nơi ăn, nghỉ của Hiệu trưởng vừa là nhà khách của ông *Nguyễn Thạc Phi*.

Khóa 1 chỉ có bốn sinh viên là các ông *Nguyễn Trọng Di*, *Kỳ Quan Lập*, *Cung Quang Chương* và *Hà Văn Mạo*. Đa số là giáo viên của trường *Nguyễn Công Trứ*.

Khóa 2 (1948 - 1949), lớp dời về xã Hùng Tiến, Nam Đàn (cách Xuân La độ 4km về phía đông bắc). Giảng đường đặt tại nhà thờ họ ông *Chất Cừ*. Khóa này số sinh viên có khoảng hơn mười người, trong đó có *Nguyễn Văn Trương*, *Đinh Ngọc Lân*, *Đinh Phương Sô*, *Phạm Doãn Hân*, *Nguyễn Văn Ngo*, *Phạm Hưng*, *Lê Nguyên Sôc*, *Nguyễn Quang Côn*, *Nguyễn Văn Phương*, *Hà Mạnh*.

Khóa 3 (1949-1950) có *Nguyễn Hữu Chinh*, *Trịnh Ngọc Thái*, *Nguyễn Tất Tê*, ...

Khóa 4 (1950-1951) có *Nguyễn Đình Tú*, *Nguyễn Văn Cung*, *Nguyễn Hoàng Phương*, *Hà Học Trạc*, *Vũ Ngọc Mai*, *Nguyễn Mậu Tùng*, *Lê Hải Châu*.

Cuối mỗi khóa, Sở Giáo dục Liên khu IV tổ chức thi tốt nghiệp (thi viết và vấn đáp). Chánh chủ khảo là ông *Phạm Đình Ái* (Giám đốc Sở Giáo dục). Hội đồng chấm có GS. *Nguyễn Thúc Hào* và GS. *Đặng Phúc Thông* (lúc đó là Giám đốc trường Giao thông Công chính, Thanh Hóa). Trụ sở Hội đồng tại Đền Vua Mai, cách thị trấn Nam Đàn gần 1km.

Từ năm 1951, tại Thanh Hóa, Bộ mở trường Sư phạm cao cấp, GS. *Nguyễn Thúc Hào* được Bộ cử vào Ban Giám đốc nhà trường cùng với các GS. *Trần Văn Giàu*, GS. *Đặng Thai Mai*. Phần lớn các sinh viên của các lớp Toán Đại cương lại gặp nhau ở trường đại học mới này.

Hồi đó chưa có hệ tại chức hoặc hàm thụ như bây giờ, nhưng ở Quảng Nam có anh thanh niên đậu tú tài, biết tin có lớp Toán Đại cương của thầy *Hào*, do chiến tranh không có điều kiện ra Nam Đàn thụ học, anh đã viết thư cho thầy xin tài liệu để tự học. Cuối khóa anh xin được dự thi tốt nghiệp. GS. *Nguyễn Thúc Hào* đã xin phép Bộ cho gửi đề thi niêm phong từ Nam Đàn vào Liên khu V. Sở Giáo dục Liên khu V mở kì thi riêng cho một thí sinh, thu bài cho vào phong bì gắn xi gửi ra cho Hội đồng chấm thi Liên khu IV (Hội đồng chấm thi chung cho cả khóa). Kì thi đó anh trúng tuyển. Anh thanh niên hiếu học ở Quảng Nam, sinh viên "hệ tại chức" của lớp Toán Đại cương của thầy *Hào* 60 năm trước, rất quen thuộc và gần gũi với chúng ta, chính là GS. *Hoàng Tuy*, nhà toán học lớn của Việt Nam.

Nhắc lại chuyện xưa đã hơn 60 năm rồi. Chúng ta, những người say mê toán thế hệ ngày nay, vô cùng biết ơn các bậc tiền bối đã gieo và vun xới những hạt mầm toán học trong một hoàn cảnh cực kì khó khăn. Đối với tôi, những sinh viên của lớp Toán Đại cương ngày xưa đều là những người thầy trực tiếp dạy tôi như thầy *Di*, thầy *Châu*, thầy *Sô*, thầy *Trương*, thầy *Sôc* dưới mái trường thời kháng chiến chống Pháp; thầy *Tuy*, thầy *Phương* sau ngày hoà bình lập lại ở miền Bắc. Sô còn lại, tuy không được học trực tiếp nhưng họ vẫn là những người thầy của tôi.

Ngày nay, trên đất nước chúng ta, những hạt mầm toán học ngày xưa đã ra hoa, kết quả. Vườn cây toán học Việt Nam ngày một sum xuê, trong đó đã có những cây đại thụ.

Nhân ngày nhà giáo Việt Nam 20-11-2007, với tư cách là học trò cũ trong các năm 1956, 1957 của trường ĐHSPT Hà Nội, tôi đến thăm và chúc mừng vợ chồng GS. *Nguyễn Thúc Hào*. Vị lão sư tuy đã ở tuổi 95, yếu và hình như nhỏ lại, nhưng trí tuệ còn minh mẫn. Nhắc đến chuyện xưa, thầy đọc hai câu thơ

Xuân La, Hùng Tiến, Nam Đàn

Có trường Đại học về làng từ đây.

Thật may mắn và tự hào cho quê hương chúng tôi, được vinh dự đón một lớp học đào tạo các nhà toán học đầu tiên của Nhà nước Việt Nam Dân chủ Cộng hoà về làng. Dân quê tôi lâu nay vẫn xem đó như là một Trường Đại học.



BA ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU TẠI MỘT ĐIỂM

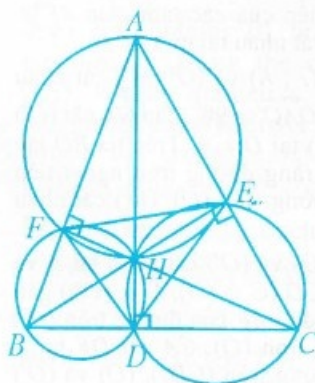
THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Khánh Hoà)

Trong chương trình hình học THCS ta hay gặp các bài toán chứng minh ba đường tròn cắt nhau tại một điểm, tức là ba đường tròn có chung một điểm và đôi một cắt nhau (mỗi cặp có thêm một điểm chung khác). Dưới đây là một số phương pháp thường dùng trong bài toán chứng minh ba đường tròn cắt nhau tại một điểm.

PHƯƠNG PHÁP 1. Dự đoán điểm chung của ba đường tròn (từ hình vẽ) rồi chứng minh điểm đó thuộc mỗi đường tròn. Tiếp theo chứng tỏ rằng ba đường tròn đó đôi một cắt nhau.

❖ **Thí dụ 1.** Cho tam giác ABC không vuông có ba đường cao AD, BE, CF . Chứng minh rằng ba đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác AEF, BDF, CDE cắt nhau tại một điểm.



Hình 1

Lời giải. (h. 1).

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC .

Vì $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ nên A, E, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH .

Tương tự B, D, H, F cùng thuộc

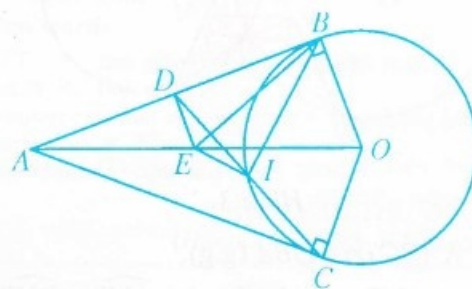
đường tròn đường kính BH và C, D, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính CH .

Do đó ba đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác AEF, BDF, CDE có chung điểm H và đôi một cắt nhau (vì có hai điểm chung) nên chúng cắt nhau tại H . $\square$

PHƯƠNG PHÁP 2. Tìm một điểm thuộc một đường tròn rồi chứng minh điểm đó thuộc hai đường tròn còn lại. Tiếp theo chứng tỏ rằng ba đường tròn đó đôi một cắt nhau.

❖ **Thí dụ 2.** Từ một điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$ với $OA \neq 2R$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn đó (B và C là tiếp điểm). Gọi E là trung điểm của AO . Chứng minh rằng đường tròn (O) , đường tròn đường kính BE và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC cắt nhau tại một điểm.

Lời giải. (h. 2). Gọi D là trung điểm cạnh AB ; I là giao điểm thứ hai của CD và (O) , suy ra $I \neq E$ (vì $OE \neq R$).



Hình 2

Xét $AO > 2R$ (chứng minh tương tự khi $AO < 2R$). Ta có tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn tâm E đường kính AO nên $ED \perp AB$ và $\widehat{BED} = \frac{1}{2}\widehat{BEA} = \widehat{BOA} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{BID}$.

Suy ra tứ giác $BDEI$ nội tiếp đường tròn đường kính BF (1)

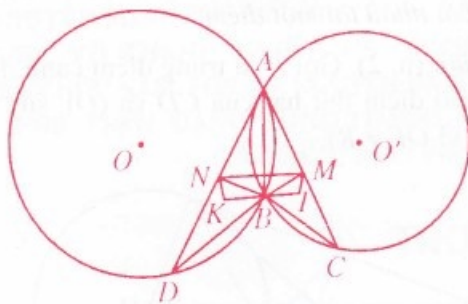
Từ đó, $\widehat{DIE} = \widehat{DBE} = \widehat{DAE} = \widehat{EAC}$, suy ra tứ giác $AEIC$ nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) ta thấy đường tròn (O) , đường tròn đường kính BE và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC có chung điểm I . Hiển nhiên ba đường tròn trên đôi một cắt nhau (vì có hai điểm chung), do đó ba đường tròn trên cắt nhau tại I . $\square$

PHƯƠNG PHÁP 3. Tìm một điểm chung của hai trong ba đường tròn rồi chứng minh điểm đó thuộc đường tròn còn lại. Tiếp theo chứng tỏ rằng ba đường tròn đó đôi một cắt nhau.

Thí dụ 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho $\widehat{OAO'} \neq 90^\circ$. Vẽ dây AC của (O') là tiếp tuyến của (O) , vẽ dây AD của (O) là tiếp tuyến của (O') . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và AD . Chứng minh rằng ba đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác AMN , BCM và BDN cắt nhau tại một điểm.

Lời giải. (h. 3). Xét O và O' ở khác phía đối với AB (chứng minh tương tự khi O và O' ở cùng phía đối với AB).



Hình 3

Ta có $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ (g.g).

Suy ra $\triangle AMB \sim \triangle DNB$, nên $\widehat{AMB} = \widehat{DNB}$.

Vậy tứ giác $AMBN$ nội tiếp, do đó ba đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác BCM , BDN và BDN có điểm chung B . Gọi I và K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCM và BDN .

Giả sử I, B, K thẳng hàng, ta có $\widehat{ADB} = \widehat{CAB} = \widehat{MNB}$. Suy ra MN là tiếp tuyến của đường tròn (K) , do đó $MN \perp KN$. Tương tự có

$$MN \perp IM \Rightarrow \widehat{MIK} + \widehat{NKI} = 180^\circ$$

mà $\widehat{MIK} = 2\widehat{MCB} = 2\widehat{DAB}$ và $\widehat{NKI} = 2\widehat{NDB} = 2\widehat{CAB}$ nên $\widehat{DAB} + \widehat{CAB} = 90^\circ$ hay $\widehat{CAD} = 90^\circ$, suy ra $N \equiv O$ và $M \equiv O'$. Do đó $\widehat{OAO'} = 90^\circ$ trái giả thiết. Vậy I, B, K không thẳng hàng.

Do đó các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM và BDN cắt nhau. Để thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCM và BDN .

Vậy ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác AMN , BCM , BDN cắt nhau tại B . $\square$

Bài tập

1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Hai đường phân giác BF và CE . Chứng minh rằng đường tròn đường kính BF , đường tròn đường kính CE và đường tròn $(A; AB)$ cắt nhau tại một điểm.
2. Cho tam giác ABC vuông tại A , M là trung điểm của AC . Đường vuông góc với MB tại M và đường vuông góc với AC tại C cắt nhau tại D . Chứng minh rằng ba đường tròn với ba đường kính MB , MD và AC cắt nhau tại một điểm.
3. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho $\widehat{OAO'} \neq 90^\circ$. Đường OA' cắt (O') tại $C \neq A$. Chứng minh rằng ba đường tròn (O) , (O') và $(OO'C)$ cắt nhau tại một điểm.
4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên tia đối của tia AB lấy điểm $M \neq A$. Vẽ cát tuyến MCD không qua O (C nằm giữa M và D). Chứng minh ba đường tròn (MAD) , (OAC) và (OBD) cắt nhau tại một điểm.
5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Về phía nửa mặt phẳng bờ OO' chứa B vẽ tiếp tuyến chung EF ($E \in (O)$ và $F \in (O')$). Qua A vẽ cát tuyến CD ($C \in (O)$ và $D \in (O')$) song song với EF . CE và DF cắt nhau tại I . Chứng minh rằng ba đường tròn (O) , (O') và (IEF) cắt nhau tại một điểm.
6. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn đó (B và C là tiếp điểm). Trên tia đối của tia OA và ở ngoài (O) lấy điểm D . Qua O kẻ đường vuông góc với CD cắt AC ở F . Chứng minh rằng ba đường tròn (BOD) , (COF) và (O) cắt nhau tại một điểm.
7. Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Trên tia đối của tia OA lấy điểm F sao cho $OF = \frac{R}{2}$. Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AFM , BFC và đường tròn (O) cắt nhau tại một điểm.
8. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B với $R < R'$ và $\widehat{OAO'} \neq 90^\circ$. Tia OA cắt (O') tại $C \neq A$, tia $O'A$ cắt (O) tại $D \neq A$. Trên tia BD lấy $BE = BC$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác CED và hai đường tròn (O) , (O') cắt nhau tại một điểm.
9. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Vẽ tiếp tuyến chung CD ($C \in (O)$, $D \in (O')$) gần điểm A hơn điểm B . Vẽ dây AF của đường tròn (O') là tiếp tuyến của đường tròn (O) , CA cắt DF tại I . Chứng minh rằng ba đường tròn (CDI) , (O) và (O') cắt nhau tại một điểm.

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10

trường phổ thông năng khiếu ĐHQG TP. Hồ Chí Minh

NĂM HỌC 2007-2008

(Đề thi đăng trên THPT số 367, tháng 1 năm 2008)

Câu 1. a) HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + 6y = 6x \\ x^2 + 6y^2 + y^2 + 9 = 6x + 2xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6y = 6x \\ (x-y-3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 18 \\ y = x-3 \end{cases}$$

Hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là

$$(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}-3) \text{ và } (-3\sqrt{2}; -3\sqrt{2}-3).$$

b) Ta có $a = \sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2},$

$$b = \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2}.$$

Suy ra $a + b = 6$ và $a.b = 7$. Vậy a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 7 = 0$.

c) Ta có $c^2 = \sqrt[3]{(6\sqrt{3}+10)^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^6}$
 $= (\sqrt{3}+1)^2 = 4+2\sqrt{3}.$

Tương tự $d^2 = \sqrt[3]{(6\sqrt{3}-10)^2} = 4-2\sqrt{3}.$

Suy ra $c^2 + d^2 = 8; c^2 d^2 = 4$. Vậy c^2 và d^2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 4 = 0$.

Câu 2. (h. 1) a) Kẻ $AH \perp BC, H$ thuộc BC . Ta có $\widehat{BMA} = \widehat{BHA} = 90^\circ$, suy ra tứ giác $AMBH$ nội tiếp, dẫn đến $\widehat{AHM} = \widehat{ABM}$. Lại có tứ giác $ABPC$ nội tiếp (giả thiết) nên $\widehat{ABM} = \widehat{ACP}$. Do đó $\widehat{AHM} = \widehat{ACP}$ (1)

Mặt khác, $\widehat{AHC} = \widehat{ANC} = 90^\circ$ nên tứ giác $AHNC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ACP} + \widehat{AHN} = 180^\circ$ (2)

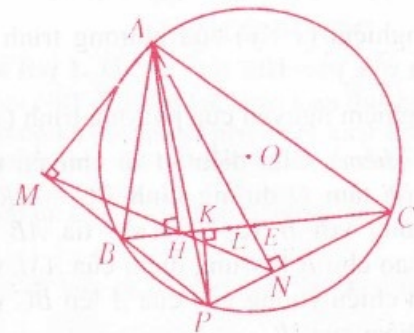
Từ (1) và (2) ta thấy $\widehat{AHM} + \widehat{AHN} = 180^\circ$.

Từ đó đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định H .

b) Kẻ $PK \perp BC$ tại K . Ta có

$$T = AM.BP + AN.PC = 2(S_{ABP} + S_{APC})$$

$$= 2(S_{ABC} + S_{BCP}).$$



Hình 1

Vậy T lớn nhất khi và chỉ khi $S_{BCP} = PK.BC$ lớn nhất hay PK lớn nhất. Lúc này P là điểm chính giữa cung BC không chứa A .

Câu 3. Sử dụng $ab = cd = 1$ và $a, b, c, d > 0$, BDT cần chứng minh tương đương với

$$ac + ad + bc + bd + 4 - 2a - 2b - 2c - 2d \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (c+d-2)(a+b-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (c+d-2\sqrt{cd})(a+b-2\sqrt{ab}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{c}-\sqrt{d})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

b) Từ giả thiết suy ra ac, bd, ad, bc là các số dương và $(ac)(bd) = (ad)(bc) = 1$.

Áp dụng câu a) có

$$(ab+cd)(ad+bc)+4 \geq 2(ac+bd+ad+bc) \quad (1)$$

Sử dụng giả thiết $abcd = 1$ ta có

$$ac + bd + ad + bc - 4$$

$$= (\sqrt{ac} - \sqrt{bd})^2 + (\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy

$$(ab+cd)(ad+bc) \geq ac + bd + ad + bc$$

$$\Leftrightarrow (ab+cd)(ad+bc) \geq (a+b)(c+d) \text{ (đpcm).}$$

Câu 4. (h. 2). Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AD, BC, CD ; E là tiếp điểm của đường tròn đường kính CD với cạnh AB . Ta có $BD = 2NO = 2MO = AC$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

TRƯỜNG THPT AMSTERDAM VÀ THPT CHU VĂN AN HÀ NỘI

NĂM HỌC 2007-2008

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1 (3 điểm). Cho phương trình

$$x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0 \quad (1)$$

1) Tìm nghiệm $(x; y)$ của phương trình (1) thoả mãn $x^2 + y^2 = 10$.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình (1).

Bài 2 (4 điểm). Cho điểm A di chuyển trên đường tròn tâm O đường kính $BC = 2R$ (A không trùng với B và C). Trên tia AB lấy điểm M sao cho B là trung điểm của AM . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC và I là trung điểm của HC .

1) Chứng minh rằng M chuyển động trên một đường tròn cố định.

2) Chứng minh rằng $\triangle AHM \sim \triangle CIA$.

3) Chứng minh rằng MH vuông góc với AI .

4) MH cắt đường tròn (O) tại E và F , AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G . Chứng

minh rằng tổng các bình phương các cạnh của tứ giác $AEFG$ không đổi.

Bài 3 (1 điểm). Tìm số nhỏ nhất trong các số nguyên dương là bội của 2007 và có bốn chữ số cuối cùng là 2008.

Bài 4 (1 điểm). Cho một lưới vuông kích thước 5×5 . Người ta điền vào mỗi ô của lưới một trong các số $-1; 0; 1$. Xét tổng của các số được tính theo từng cột, theo từng hàng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài 5 (1 điểm). Tính tổng sau theo n ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$S = 2^{n-1} + 2.2^{n-2} + 3.2^{n-3} + \dots + (n-1).2 + n.$$

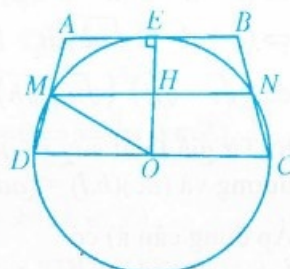
VŨ QUỐC LƯƠNG

(GV THCS Chu Văn An, Hà Nội)

Sưu tầm và giới thiệu

Suy ra $ABCD$ là hình thang cân.

Gọi H là giao điểm của MN và OE , suy ra H là trung điểm OE . AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD nên $OE \perp AB$, suy ra $MN \perp OE$.



Hình 2

Tam giác OHM vuông tại H và $OM = 2.HO$, suy ra $\widehat{MOH} = 60^\circ$. Lại có $\widehat{HOD} = 90^\circ$ nên $\widehat{MOD} = 30^\circ$.

Tam giác MOD cân tại O và $\widehat{MOD} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{MDO} = 75^\circ$.

Từ đó, $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 75^\circ$; $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = 105^\circ$.

Câu 5. a) $x^2 - 2ax + b = 0$ (1);

$$x^2 - 2bx + c = 0$$
 (2); $x^2 - 2cx + a = 0$ (3)

Ta có $\Delta_1 = a^2 - b$; $\Delta_2 = b^2 - c$; $\Delta_3 = c^2 - a$.

Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$.

• Với $a > b > c$ thì từ $a + b + c = 3$ suy ra $a > 1$ và $c < 1$. Từ đó, $\Delta_1 = a^2 - b > a - b > 0$, vậy PT (1) có hai nghiệm phân biệt.

Mặt khác $\Delta_3 = c^2 - a < c - a < 0$, vậy PT(3) vô nghiệm.

• Với $a > c > b$ thì tương tự như trên suy ra PT (1) có hai nghiệm phân biệt và PT (2) vô nghiệm.

b) **Nhận xét:** Một số chính phương hoặc chia hết cho 4 hoặc chia 4 dư 1.

• Nếu $S = \{a; b; c\}$ gồm ba số lẻ thì từ giả thiết và từ nhận xét trên suy ra $a + b \vdots 4$; $b + c \vdots 4$ và $c + a \vdots 4$. Suy ra $(a + b) + (a + c) - (b + c) \vdots 4$ hay $2a \vdots 4$, suy ra $a \vdots 2$, mâu thuẫn.

• Nếu $S = \{a; b; c\}$ có hai số a, b lẻ và c chẵn thì từ giả thiết và từ nhận xét suy ra $a + b \vdots 4$; $a + c - 1 \vdots 4$ và $b + c - 1 \vdots 4$. Suy ra $(a + b) + (a + c - 1) - (b + c - 1) \vdots 4$ hay $2a \vdots 4$, suy ra $a \vdots 2$, mâu thuẫn.

Vậy trong tập S có không quá một số lẻ.



ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM và khảo sát hàm số

THANH LOAN
(Hà Nội)

Về hàm số và đồ thị học sinh cần nắm được các kiến thức cơ bản và các dạng toán sau đây.

I. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hàm số, tính đơn điệu của hàm số. Mỗi liên hệ giữa sự đồng biến, nghịch biến của một hàm số và dấu đạo hàm cấp một của nó.
2. Điểm cực đại, điểm cực tiểu, điểm cực trị của hàm số. Các điều kiện đủ để có điểm cực trị của hàm số.
3. Giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số trên một tập hợp số.
4. Các phép biến đổi đơn giản đồ thị của hàm số (phép tịnh tiến song song với các trục tọa độ, phép đối xứng qua trục tọa độ).
5. Đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên của đồ thị.
6. Sơ đồ tổng quát để khảo sát các hàm số (tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị):

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0);$$

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0; ad - bc \neq 0);$$

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'} \quad (aa' \neq 0).$$

II. CÁC DẠNG TOÁN

1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Thí dụ 1. Tìm a để hàm số

$$y = (a + 2)x^3 - 3x^2 - 3x + 2 \text{ luôn nghịch biến.}$$

Lời giải. Tính $y' = 3(a + 2)x^2 - 6x - 3$. Hàm số luôn nghịch biến khi $y' \leq 0$ với mọi x , tức

$$\text{là } \begin{cases} a + 2 < 0 \\ \Delta' = 9a + 27 \leq 0 \end{cases} \text{ hay } a \leq -3.$$

Thí dụ 2. Xác định m để hàm số

$$y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - 1}$$

đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Hướng dẫn. Điều kiện

$$y' = \frac{2x^2 - 4x + 3 - m}{(x - 1)^2} \geq 0, \text{ với mọi } x > 3$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x^2 - 4x + 3 - m \geq 0, \text{ với mọi } x > 3.$$

$$\text{ĐS: } m \leq 9.$$

Lưu ý 1. Khi tìm m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $(a; b)$, ta làm như sau :

- Tính đạo hàm cấp một $f'(x)$.
- Xác định m để $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in (a; b)$ bằng cách vận dụng định lý về dấu của nhị thức bậc nhất hoặc dấu của tam thức bậc hai.

2. Tìm cực trị của hàm số; tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn, một khoảng

Thí dụ 3. Tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$y = f(x) = 2 \cos x - \frac{4}{3} \cos^3 x \text{ trên đoạn } [0; \pi].$$

Lời giải. $y' = 2 \sin x \cos 2x$. Trên $[0; \pi]$, $y' = 0$ tại $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \pi$. Ta có $f(0) = \frac{2}{3}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

$$f(\pi) = -\frac{2}{3}. \text{ Vậy trên } [0; \pi], \max f(x) = \frac{2}{3};$$

$$\min f(x) = -\frac{2}{3}.$$

Thí dụ 4. Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính 4cm, hãy tìm hình trụ có thể tích lớn nhất.

Lời giải. Gọi đường cao và bán kính đáy của hình trụ thứ tự là h cm và r cm ($0 < h < 8$,

$0 < r < 4$). Khi đó $r^2 = 16 - \frac{h^2}{4}$ nên thể tích của hình trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \left(16h - \frac{h^3}{4} \right)$. Nhận thấy V là hàm số của h xác định trên khoảng $(0; 8)$.

$V' = \pi \left(16 - \frac{3h^2}{4} \right)$; $V' = 0$ tại $h = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Ta có

h	0	$\frac{8}{\sqrt{3}}$	4
V'	+	0	-
V		$\frac{16\pi}{3\sqrt{3}}$	

Vậy $\max V = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}}$ tại $h = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính 4cm, hình trụ có đường cao bằng $\frac{8}{\sqrt{3}}$ cm sẽ có thể tích lớn nhất.

Lưu ý 2. Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $(a; b)$ (hoặc $[a; b]$) ta có thể làm như sau:

- Tính đạo hàm cấp một $f'(x)$
- Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, \dots, x_n$ trên $(a; b)$, rồi tính $f(x_1), \dots, f(x_n)$. Khi đó

$$\max_{[a; b]} f(x) = \max \{ f(a), f(x_1), \dots, f(x_n), f(b) \};$$

$$\min_{[a; b]} f(x) = \min \{ f(a), f(x_1), \dots, f(x_n), f(b) \}.$$

- Ta cũng có thể lập bảng biến thiên để tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $(a; b)$.

3. Bài toán liên quan đến các đường tiệm cận, điểm cực trị, điểm uốn của đồ thị

Thí dụ 5. Cho hàm số $y = \frac{mx-3}{x+n}$. Tìm m, n

để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 2$ làm tiệm cận ngang và nhận đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng.

(ĐS: $m = 2; n = -2$)

Thí dụ 6. Tìm a để đồ thị hàm số $y = x^4 - ax^2 + 3$ có hai điểm uốn.

Lời giải. Tính $y'' = 12x^2 - 2a$.

Đồ thị hàm số có hai điểm uốn khi $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $a > 0$.

Thí dụ 7. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + 3ax + 2a + 1}{x + 2}$.

Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị hàm số luôn đi qua một điểm cố định. Tìm những điểm mà tiệm cận xiên của đồ thị hàm số không bao giờ đi qua với mọi a .

Lời giải. Viết $y = ax + a + \frac{1}{x-2}$, đồ thị hàm số

có tiệm cận xiên $(d): y = ax + a$. Gọi $I(x_0; y_0)$ là điểm mà (d) luôn đi qua với mọi a , thì $y_0 = ax_0 + a$ với mọi a . Suy ra $a(1 + x_0) - y_0 = 0$ với mọi a . Dẫn đến $\begin{cases} 1 + x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$. Vậy $I(-1; 0)$.

Gọi $K(x_1; y_1)$ là điểm mà (d) không bao giờ đi qua với mọi a , khi đó PT $y_1 = ax_1 + a$ vô nghiệm $\Leftrightarrow a(x_1 + 1) - y_1 = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow x_1 + 1 = 0$ và $y_1 \neq 0$. Vậy $K(-1; k)$ với $k \neq 0$.

Lưu ý 3. Cần nhớ

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow x = a$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b$ là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Leftrightarrow y = ax + b$ ($a \neq 0$) là tiệm cận xiên.

- Để tìm điểm $I(x_0; y_0)$ mà họ đồ thị $y = f(x, m)$ luôn đi qua với mọi m cần điều kiện $y_0 - f(x_0, m) = 0$ với mọi m . Đa thức $y_0 - f(x_0, m)$ biến m phải có các hệ số đều bằng 0, dẫn đến HPT hai ẩn x_0 và y_0 . Số nghiệm của hệ chính là số điểm cố định của họ đồ thị $y = f(x, m)$.

- Để tìm điểm $K(x_1; y_1)$ mà họ đồ thị $y = F(x, m)$ luôn không đi qua với mọi m cần điều kiện PT (ẩn m): $y_1 - F(x_1, m) = 0$ vô nghiệm. Chú ý rằng $Am + B = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow A = 0$ và $B \neq 0$;

$Am^2 + Bm + C = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow A = B = 0$ và $C \neq 0$; hoặc $A \neq 0$ và $B^2 - 4AC < 0$.

4. Viết phương trình tiếp tuyến (PTTT) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C)

Lưu ý 4.

i) PTTT của (C) tại điểm có hoành độ x_0 là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (1)$$

ii) PTTT của (C) đi qua điểm $A(a; b)$:

Cách 1. Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0 , theo (1) ta có $b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$.

Tìm x_0 , trở về trường hợp i).

Cách 2. PT đường thẳng đi qua $A(a; b)$ với hệ số góc k là $y = k(x - a) + b$ sẽ tiếp xúc với

(C) khi HPT $\begin{cases} f(x) = k(x - a) + b \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm,

dẫn đến PT $f(x) = f'(x_0)(x - a) + b$ có nghiệm. Giải PT tìm được nghiệm $x_1, \dots, x_n$. Trở về trường hợp i).

iii) PTTT của (C) có hệ số góc k :

Giải phương trình $f'(x) = k$ tìm nghiệm $x_1, \dots, x_n$, đây chính là hoành độ tiếp điểm, rồi trở về trường hợp i).

Thí dụ 8. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ (C).

a) Viết PTTT của (C) tại điểm có hoành độ $x = 1$.

b) Viết PTTT của (C) đi qua gốc tọa độ.

ĐS: a) $y = 9x - 4$; b) $y = -3x$ và $y = \frac{15}{4}x$.

Thí dụ 9. a) Viết PTTT của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 2}$, biết rằng các tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 3x + 2008$.

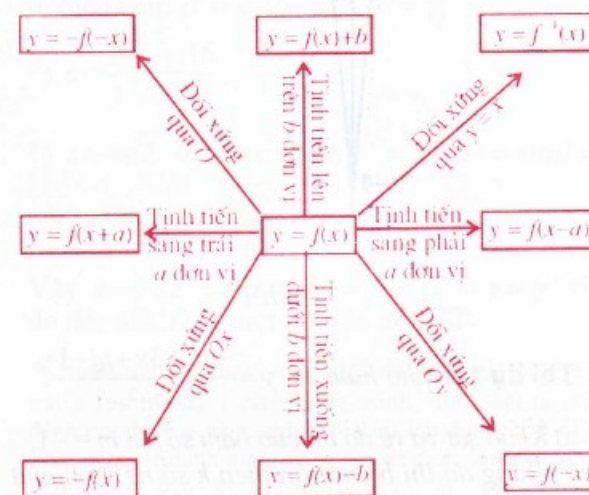
ĐS: $y = 3x - 3$ và $y = 3x - 11$.

b) Viết PTTT của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$, biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên.

ĐS. $y = -x + 2\sqrt{2} - 5$ và $y = -x - 2\sqrt{2} - 5$.

5. Các phép biến đổi đơn giản đồ thị của hàm số. Dùng đồ thị của hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình

Lưu ý 5. Lấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ làm gốc, ta có sơ đồ biến đổi đồ thị như sau:



• Nhờ đồ thị này, ta có thể biện luận số nghiệm của phương trình $f(x, m) = 0$ theo m bằng cách biến đổi về $g(x) = h(m)$, rồi vẽ đồ thị hai hàm số $y = g(x)$ và $y = g(m)$ trên cùng hệ trục, số giao điểm (tuỳ theo m) của chúng chính là số nghiệm của phương trình.

Thí dụ 10. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$.

Lời giải. a) Học sinh tự làm.

b) Ta có $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$.

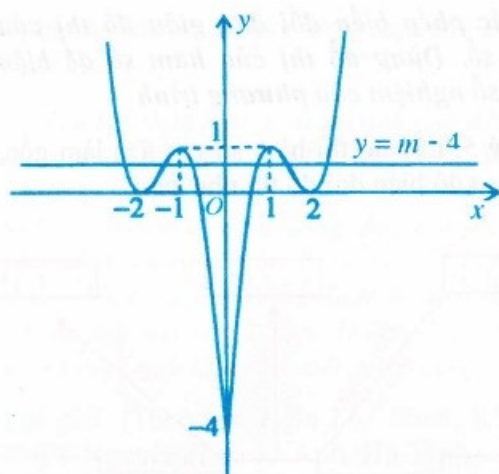
$y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ là hàm số chẵn, đồ thị của nó được suy ra từ câu a) bằng cách giữ nguyên phần đồ thị nằm bên phải trục Oy và lấy đối xứng phần đó qua trục tung (h.1). Số nghiệm của PT đã cho bằng số giao điểm của đồ thị $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ với đường thẳng $y = m - 4$. Do đó

$m < 0$: PT vô nghiệm

$m = 0$: có 1 nghiệm; $0 < m < 4$: có 2 nghiệm

$m = 4$: có 4 nghiệm; $4 < m < 5$: có 6 nghiệm

$m = 5$: có 4 nghiệm; $m > 5$: có 2 nghiệm.



Hình 1

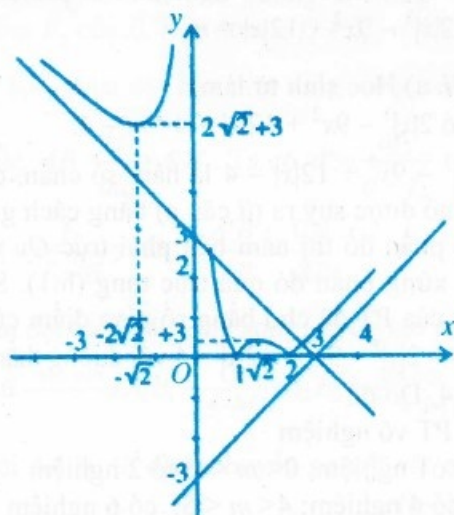
Thí dụ 11. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + m - 1}{x + m^2 - 1}$.

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$.
b) Bằng đồ thị biện luận theo k số nghiệm của phương trình $\left| x + \frac{2}{x} - 3 \right| = k$.

Hướng dẫn

a) $m = -1$ thì $y = f(x) = -x - \frac{2}{x} + 3$.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ không nằm dưới trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm dưới trục hoành qua trục hoành (h.2).



Hình 2

6. Bài toán liên quan đến khoảng cách

Thí dụ 12. Cho hàm số

$$y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1 \quad (1)$$

Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực trị này cách đều gốc tọa độ O .

Hướng dẫn. Hàm số (1) có hai cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$. Tìm được tọa độ hai điểm cực trị $A(1 - m; -2 - 2m^3)$; $B(1 + m; -2 + 2m^3)$.

$$OA = OB \Leftrightarrow 8m^3 = 2m \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}.$$

Thí dụ 13. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1} \quad (2)$$

Chứng minh rằng với mọi m , hàm số (2) luôn có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa chúng không phụ thuộc vào m

ĐS: Khoảng cách là $2\sqrt{5}$.

Thí dụ 14. Cho hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ (3)

Tìm m để hàm số (3) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực đại đến tiệm cận xiên bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn. $m > 0$.

Điểm cực đại $M\left(-\frac{1}{\sqrt{m}}; -2\sqrt{m}\right)$, tiệm cận

xiên (Δ): $mx - y = 0$,

$$d(M, \Delta) = \frac{|-\sqrt{m} + 2\sqrt{m}|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = 1.$$

BÀI TẬP

1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$.

b) $y = x^3 - 3x^2$ trên khoảng $(-2; 4)$.

c) $y = \sin x - \cos^2 x + \frac{1}{2}$.

2. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết nó đi qua điểm $I(0; 10)$.

c) Biện luận theo m bằng đồ thị số nghiệm của phương trình $\frac{1}{4}x^3 = 9x - 12\sqrt{3}m$.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian làm bài: 180 phút)

I. PHẦN CHUNG

Câu 1. (2 điểm)

Cho họ đồ thị $(C_m) = \frac{x^2 + 2x + m - 1}{x - 1}$.

- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = 1$.
- Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, điểm cực tiểu và gốc tọa độ O lập thành tam giác vuông tại O .

Câu 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x \\ x \cdot \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 y. \end{cases}$$

Câu 3. (2 điểm)

a) Tính các tích phân sau:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1+x^3}}; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^4 x} dx.$$

- Cho bốn điểm $A(5; 1; 3)$, $B(1; 6; 2)$, $C(5; 0; 4)$, $D(4; 0; 6)$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD chéo nhau. Tính khoảng cách giữa AB và CD và viết phương trình đường vuông góc chung của chúng.

Câu 4. (2 điểm)

a) Giải phương trình

$$2(x-2)(\sqrt[3]{4x-4} + \sqrt{2x-2}) = 3x-1.$$

- Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng $2 \geq \frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(1+b^3)}$.

II. PHẦN TỰ CHỌN

(Học sinh chỉ được chọn câu 5A hoặc câu 5B)

Câu 5A. (2 điểm) (Dành cho THPT không phân ban)

- Cho n là số nguyên dương với $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$1^2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + 3^2 \cdot C_n^3 + \dots + n^2 \cdot C_n^n = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

- Cho tam giác ABC . Xét tập hợp gồm năm đường thẳng song song với AB ; sáu đường thẳng song song với BC và bảy đường thẳng song song với CA . Hỏi các đường thẳng này tạo ra bao nhiêu hình bình hành, bao nhiêu hình thang?

Câu 5B. (2 điểm) (Dành cho THPT phân ban)

Cho đường thẳng (Δ) có phương trình $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ và elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Giả sử đường thẳng (Δ) cắt (E) tại hai điểm B và C .

- Tìm điểm A thuộc elip (E) để tam giác ABC cân tại A .
- Tìm điểm A thuộc elip (E) để diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất.

NGUYỄN VĂN THÔNG

(GV trường THPT chuyên Lê Quý Đôn,
Đà Nẵng)

**ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ QUÝ II NĂM 2008
TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC**

**TOÁN HỌC
& Tuổi trẻ**

Số 369 (3-2008)

9

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN THPT

NĂM HỌC 2007-2008

NGUYỄN KHẮC MINH
(Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT năm học 2007-2008 đã được tổ chức vào ngày 29/01/2008, cho 11 môn học (Toán, Vật lý, Hóa học, Sinh học, Tin học, Ngữ văn, Lịch sử, Địa lý, Tiếng Anh, Tiếng Pháp và Tiếng Nga). Tham dự kì thi, ở môn Toán có 394 học sinh thuộc 68 đơn vị dự thi. Theo quy chế hiện hành, mỗi đơn vị có không quá 06 học sinh dự thi; ngoại trừ Đại học Quốc gia Hà Nội được lãnh đạo Bộ Giáo dục và Đào tạo cho phép cử 10 học sinh dự thi. Đề thi gồm 07 câu (bài toán) với thời gian làm bài là 180 phút.

I. ĐỀ THI

Câu 1 (3 điểm).

Hãy xác định số nghiệm của hệ phương trình

$$(\text{ẩn } x, y) \text{ sau: } \begin{cases} x^2 + y^3 = 29 \\ \log_3 x \cdot \log_2 y = 1. \end{cases}$$

Câu 2 (3 điểm).

Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BEC}$ là góc nhọn, trong đó E là trung điểm của AB . Trên tia EC lấy điểm M sao cho $\widehat{BME} = \widehat{ECA}$. Kí hiệu α là số đo của góc $\widehat{BEC}$, hãy tính tỉ số $\frac{MC}{AB}$ theo α .

Câu 3 (2 điểm).

Đặt $m = 2007^{2008}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên n mà $n < m$ và $n(2n+1)(5n+2)$ chia hết cho m ?

Câu 4 (3 điểm).

Cho dãy số thực (x_n) được xác định như sau:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2 \quad \text{và} \quad x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2} \quad \text{với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Câu 5 (3 điểm).

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm tối đa 2008 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9?

Câu 6 (3 điểm).

Cho x, y, z là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right) \geq 4.$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào?

Câu 7 (3 điểm).

Cho tam giác ABC , trung tuyến AD . Cho đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AD . Xét điểm M nằm trên d . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của MB và MC . Đường thẳng đi qua E và vuông góc với d cắt đường thẳng AB tại P , đường thẳng đi qua F và vuông góc với d cắt đường thẳng AC tại Q . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định, khi điểm M di động trên đường thẳng d .

II. KẾT QUẢ

Việc chấm thi được bắt đầu vào ngày 18/02/2008 và kết thúc vào ngày 22/02/2008. Tất cả các thành viên của tổ chấm thi môn Toán đã làm việc hết sức khách quan và nghiêm túc nhằm đảm bảo đánh giá một cách công bằng và chính xác bài làm của các thí sinh, trên cơ sở thang điểm đã được lãnh đạo Ban chấm thi phê duyệt.

Căn cứ kết quả chấm thi và quy chế hiện hành, lãnh đạo Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định trao giải cho 33 thí sinh (chiếm 8,38% tổng số thí sinh dự thi) có điểm bài thi từ 12 điểm trở lên; trong đó, có 03 thí sinh (cùng đạt 16 điểm) được trao giải Nhì, 10 thí sinh được trao giải Ba và 20 thí sinh được trao giải Khuyến khích. Kết quả cụ thể như sau:

- **Giải Nhất:** Không có.
- **Giải Nhì:** Nguyễn Thị Hạnh (THPT chuyên Hà Nam, Hà Nam), Đỗ Thị Thu Thảo (THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương) và Vũ Ngọc Đào (THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định).
- **Giải Ba:** Lê Ngọc Sơn (THPT chuyên Bắc Giang, Bắc Giang); Hà Khương Duy (Dân tộc Nùng, Khối THPT chuyên Toán - Tin học, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội); Nguyễn Viết Xuân (THPT chuyên Hà Nam,

Hà Nam); Nguyễn Đào Tùng, Nguyễn Anh Hoàng (PTNK Trần Phú, **Hải Phòng**); Lê Tiến Nam (THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**); Lê Ngọc Anh, Hoàng Đức Ý (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); Nguyễn Vũ Thanh Long (Quốc học Huế, **Thừa Thiên - Huế**); Nguyễn Ngọc Đại (THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**).

• **Giải Khuyến khích:** Đặng Trần Tiến Vinh (PTNK, ĐHQG Tp. **Hồ Chí Minh**); Nguyễn Phạm Đạt, Nguyễn Thọ Tùng (Khối THPT chuyên, **ĐHSP Hà Nội**); Mai Văn Minh, Dương Trọng Hoàng (Khối THPT chuyên, **Đại học Vinh**); Mai Tuấn Anh, Lê Ngọc Khang (THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**); Phan Tiến Thành, Đỗ Đức Tài, Nguyễn Tuấn Thành (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); Phan Tuấn Hiệp (PTNK Trần Phú, **Hải Phòng**); Cao Đức Thắng (THPT chuyên Lào Cai); Lê Hồng Kỳ, Bùi Đức Bình, Vũ Duy Thành (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); Nguyễn Thanh Thảo (THPT Chu Văn An, **Ninh Thuận**); Lê Thị Như Quỳnh (THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); Đỗ Phương (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); Hoàng Thị Thúy Hồng và Phạm Văn Giang (THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**).

III. MỘT SỐ NHẬN XÉT VÀ ĐÁNH GIÁ

1. Khác những năm từ 2006 trở về trước, trước kì thi năm nay tất cả các đơn vị dự thi đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo cho biết cấu trúc của Đề thi, trong đó nêu rõ vấn đề sẽ được đề cập ở từng câu của Đề thi (chẳng hạn, Câu 1 sẽ là một bài toán về phương trình, hệ phương trình, hay câu 7 sẽ là một bài hình học giải tích hoặc hình học không gian,...). Đây là một lợi thế lớn cho học sinh dự thi trong việc ôn thi và làm bài thi. Tuy nhiên, kết quả thi cho thấy các thí sinh đã không quan tâm đúng mức tới việc khai thác lợi thế này. Việc 320 thí sinh (chiếm 81,2% tổng số thí sinh dự thi) bị điểm 0 ở Câu 7 (Hình học giải tích, mức độ trung bình dễ đối với học sinh khá, giỏi Toán) là một trong những minh chứng cho nhận xét vừa nêu.

2. Xây dựng một Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT gồm 7 câu với thời gian làm bài 180 phút vừa hay về mặt Toán học, vừa đảm bảo phân loại tốt trình độ của thí sinh dự thi, vừa động viên, khích lệ được các học sinh khá, giỏi Toán bậc phổ thông say mê học Toán, ... là một việc rất khó. Các thành viên tổ soạn thảo đề thi môn Toán đã ưu tiên các tiêu chí sau trong quá trình xây dựng Đề thi: tính chính xác khoa học, tính mới của các bài toán thi, bám sát nội dung giảng dạy môn Toán cho học sinh

chuyên Toán và nội dung bồi dưỡng học sinh khá, giỏi Toán cấp THPT theo hướng dẫn của Bộ Giáo dục và Đào tạo, tuân thủ nghiêm ngặt cấu trúc Đề thi đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo ấn định, đảm bảo sự tương xứng giữa thời gian làm bài và mức độ khó - dễ của Đề thi (cụ thể: đảm bảo trong thời gian 180 phút, thí sinh có trình độ tương đương học sinh đoạt giải Khuyến khích của những năm trước làm hoàn chỉnh được ít nhất 4 câu, thí sinh có trình độ tương đương học sinh đoạt giải Ba của những năm trước làm hoàn chỉnh được ít nhất 5 câu, ...).

Đánh giá về Đề thi năm nay, tất cả các thành viên tổ chấm thi môn Toán đều nhất trí cho rằng trong Đề thi có tới 5 câu (các câu 1, 2, 4, 6 và 7) thuộc loại bài cơ bản đối với học sinh giỏi Toán cấp THPT. Câu 3 (Số học, 2 điểm) được đánh giá là câu khó nhất của Đề thi. Như vậy, việc đạt được ít nhất 12 điểm không phải là một việc khó đối với học sinh giỏi Toán.

3. Căn cứ các đánh giá về Đề thi và kết quả làm bài của các thí sinh, tất cả các thành viên tổ chấm thi đều thống nhất nhận định: Ở kì thi năm nay có quá nhiều thí sinh không nắm vững các kiến thức cơ bản trong phạm vi nội dung giảng dạy, bồi dưỡng môn Toán cho học sinh khá, giỏi Toán bậc phổ thông theo hướng dẫn của Bộ GD&ĐT. Các số liệu thống kê dưới đây là những minh chứng cho nhận định vừa nêu:

- 58 thí sinh (14,72%) có điểm bài thi từ 10 điểm trở lên.

- 212 thí sinh (53,80%) có điểm bài thi dưới 5 điểm.

- 52 thí sinh (13,19%) có điểm bài thi dưới 0,5 điểm.

- Ở câu 1: có 114 thí sinh (28,93%) đạt từ 2,5 điểm trở lên và có tới 176 thí sinh (44,67%) có điểm dưới 0,5.

- Ở câu 4: có 110 thí sinh (27,91%) đạt từ 2,5 điểm trở lên và có tới 220 thí sinh (55,83%) có điểm dưới 0,5.

- Ở câu 6: có 52 thí sinh (13,19%) đạt từ 2,5 điểm trở lên và có tới 322 thí sinh (81,72%) có điểm dưới 0,5.

(Trong các số liệu trên, số nằm trong ngoặc chỉ tỉ lệ phần trăm so với tổng số thí sinh dự thi).

TIN TỨC DẠY - HỌC TOÁN

Ngày 30-3-2008 sắp tới, tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội, Hội Toán học Hà Nội sẽ tổ chức kì thi học sinh giỏi Toán Hà Nội mở rộng năm 2008 (lần 5) dành cho những học sinh giỏi Toán và biết viết lời giải bằng tiếng Anh thuộc hai loại đối tượng:

- Loại Junior (như THCS) gồm các em sinh sau ngày 01-01-1994.
- Loại Senior (như THPT) gồm các em sinh sau ngày 01-01-1992.

Thời gian thi từ 9h30 đến 12h. Thí sinh có mặt lúc 9h tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, 334 đường Nguyễn Trãi, quận Thanh Xuân, Hà Nội.

Mỗi địa phương (tỉnh, thành phố) được cử 2 đội: đội Junior và đội Senior, mỗi đội 5 em (riêng Hà Nội mỗi đội 15 em) do địa phương tự tuyển chọn và gửi danh sách học sinh dự thi về Ban tổ chức trước ngày 20-3-2008. Những học sinh đoạt giải cao sẽ được chọn dự thi Olympic Singapor mở rộng năm 2008.

PV

4. Kết quả kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán THPT năm nay cần được những người có trách nhiệm, tâm huyết với phong trào học sinh giỏi Toán nhìn nhận, phân tích một cách nghiêm túc, thấu đáo, toàn diện, để tìm ra các giải pháp hữu hiệu duy trì và phát triển phong trào. Thể hiện trách nhiệm của mình, trong Biên bản tổng kết chấm thi, các thành viên tổ chấm thi đã kiến nghị với các cấp có thẩm quyền những điều dưới đây:

- Đề nghị có các biện pháp hữu hiệu động viên, khích lệ các học sinh khá, giỏi Toán hăng hái tham dự kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT (ví dụ: tăng quyền lợi cho học sinh đạt giải, bỏ hoặc giảm ngưỡng điểm xét giải, ...);
- Để có thể xây dựng được một đề thi tốt cho kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT, đề nghị giảm số câu của đề thi từ 7 câu xuống 4 hoặc 5 câu, đồng thời tăng thời lượng làm bài từ 180 phút lên 240 phút (nếu vẫn tổ chức thi trong một ngày).



CÂU HỎI. (Vũ Lê Minh, lớp 12A1, trường THPT Kim Liên, Q. Đống Đa, Hà Nội).

Cho x, y, z là các số thực không âm sao cho $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $A=x^2+y^2+z^2+4xyz$.

TRẢ LỜI

Vì x, y, z là các số không âm thỏa mãn $x+y+z=1$ nên ít nhất một trong ba số x, y, z thuộc đoạn $\left[0; \frac{1}{3}\right]$. Giả sử $z \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$.

Với mỗi giá trị z , thay $y=1-z-x$ và biến đổi, ta được $A=2(1-2z)x^2-2(2z^2-3z+1)x+2z^2-2z+1=f(x)$.

Vì $f(x)$ là hàm số bậc hai với hệ số $a=2(1-2z)>0$ nên nó đạt GTNN khi $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1-z}{2} \Rightarrow y=\frac{1-z}{2}$.

Khi đó $A \geq f\left(\frac{1-z}{2}\right)=z^3-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2}=g(z)$;

Lại có $g'(z)=z(3z-1) \leq 0 \quad \forall z \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$; hàm số $g(z)$ nghịch biến trong $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ nên $A \geq g(z) \geq g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{27}$.

Ta được $\min A = \frac{13}{27}$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Lưu ý. 1) Nếu ba số thực không âm có tổng bằng a thì ít nhất một trong các số đó thuộc đoạn $\left[0; \frac{a}{3}\right]$ và một số thuộc đoạn $\left[\frac{2a}{3}; a\right]$.

2) Khi tìm GTNN (hoặc GTLN) của biểu thức $P=P(x, y, z)$ với x, y, z thỏa mãn một điều kiện nào đó, trong nhiều trường hợp, ta có thể làm như sau:

- Tính y theo x, z .
- Viết $P=f(x)$, coi z là một tham số.
- Tìm GTNN (hoặc GTLN) của $f(x)$, ta được $P=f(x) \geq g(z)$ (hoặc $P=f(x) \leq g(z)$).
- Tìm GTNN (hoặc GTLN) của $g(z)$; suy ra GTNN (hoặc GTLN) của P .

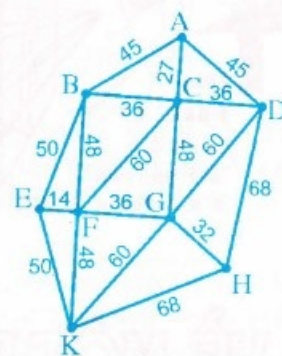
NGUYỄN ANH DŨNG



Đường đi ngắn nhất

Một khu đô thị mới xây dựng xong với các tuyến đường ô tô nối các điểm dân cư A, B, C, D, E, F, G, H, K như ở sơ đồ, trong đó số ghi trên mỗi đoạn đường nối hai điểm kề nhau tính theo kilômét.

Một nhân viên thanh tra xuất phát từ A muốn đi kiểm tra tất cả các đoạn đường, mỗi đoạn đường ít nhất một lần (điểm cuối cùng tùy



ý) thì đường đi ngắn nhất theo bạn là bao nhiêu kilômét? Bạn hãy giải thích cách chọn một đường đi như thế.

Giải đáp bài: Tình huống bất ngờ

(Đề thi đăng trên THPT số 365, tháng 11 năm 2007)

Gọi phần gia tài được chia cho người mẹ trẻ, con trai, con gái theo thứ tự là m , t , g . Theo bản di chúc thì hoặc có $t = \frac{2}{3}$ (gia tài), $m = \frac{1}{3}$ (gia tài) (a);

hoặc có $g = \frac{1}{3}$ (gia tài), $m = \frac{2}{3}$ (gia tài) (b).

Ba phương án chia gia tài như sau.

1) Nhà xã hội học chú ý đến tỉ lệ $t : m = 2$ theo (a) và $m : g = 2$ theo (b) mà $t + m + g = 1$ (cả gia tài) nên $4g + 2g + g = 1 \Rightarrow 7g = 1 \Rightarrow g = \frac{1}{7}$ (gia tài), $m = \frac{2}{7}$ (gia tài), $t = \frac{4}{7}$ (gia tài).

2) Người phụ nữ cho rằng trong cả hai cách chia theo di chúc thì $m \geq \frac{1}{3}$ (gia tài) nên trước hết phải chia cho người mẹ $m = \frac{1}{3}$ gia tài. Phần còn lại $\frac{2}{3}$ gia tài chia cho hai con theo tỉ lệ trong

bản di chúc là $t : g = 4 : 1$ hay $\frac{g}{t+g} = \frac{1}{5}$ và

$\frac{t}{t+g} = \frac{4}{5}$. Vậy $g = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ (gia tài),

$t = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ (gia tài) và $m = \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ (gia tài).

3) Nhà thần học khẳng định rằng mỗi người có giờ phút sinh riêng, ngay cả khi sinh đôi thì phải có đứa con này chào đời trước đứa con kia.

• Nếu con trai được sinh ra trước thì theo di chúc chia ngay cho con trai $t = \frac{2}{3}$ (gia tài) và

còn lại $\frac{1}{3}$ gia tài. Khi người mẹ sinh tiếp con gái thì chia phần gia tài còn lại theo tỉ lệ $m : g = 2 : 1$, nghĩa là $\frac{m}{m+g} = \frac{2}{3}$ và $\frac{g}{m+g} = \frac{1}{3}$. Vậy

$m = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ (gia tài), $g = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ (gia tài) và $t = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ (gia tài).

• Nếu con gái được sinh ra trước thì theo di chúc chia ngay cho con gái $g = \frac{1}{3}$ (gia tài), còn

lại $\frac{2}{3}$ gia tài. Khi người mẹ sinh tiếp con trai thì chia phần gia tài còn lại theo tỉ lệ $t : m = 2 : 1$, nghĩa là $\frac{m}{m+t} = \frac{1}{3}$ và $\frac{t}{m+t} = \frac{2}{3}$. Vậy

$m = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ (gia tài), $t = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ (gia tài) và $g = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ (gia tài).

Nhận xét. Một số bạn đưa ra cách chia khác (chẳng hạn người mẹ được nửa gia tài) nhưng các cách chia này không dựa vào ý nào của di chúc. Các bạn có lời giải tốt được nhận tặng phẩm là: Lê Quý Dương, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, Trịnh Đình Hưng, 12B2, THPT Lê Lai, Ngọc Lạc, Thanh Hóa, Ngô Trần Việt Hà, 9A4, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên.

ĐAN QUỲNH



VỀ MỘT BÀI TOÁN xác định đa thức

NGUYỄN HỮU TÂM

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Mở đầu bài viết này ta xét các thí dụ sau:

★ **Thí dụ 1.** Xác định tam thức bậc hai

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (A \neq 0)$$

với đạo hàm cấp một $f'(x) = 2Ax + B$

sao cho $f(0) = 1, f(-1) = 0, f'(-1) = 2$.

Lời giải. Từ giả thiết ta dễ dàng tìm được $A = -1, B = 0$ và $C = 1$.

Do đó $f(x) = -x^2 + 1$. Dễ thấy $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Vậy tam thức cần tìm là $f(x) = -x^2 + 1$. □

★ **Thí dụ 2.** Xác định đa thức $f(x)$ có bậc không vượt quá 3 sao cho $f(0) = 1, f'(0) = -1, f(2) = 2, f'(2) = 0$.

Lời giải của thí dụ này dành cho bạn đọc.

Trên đây là hai thí dụ đơn giản về bài toán xác định đa thức khi biết giá trị của đa thức và giá trị của đạo hàm cấp một tại hai điểm. Bây giờ ta xét bài toán sau.

✧ **Bài toán 1.** Cho x_1, x_2 là hai số thực phân biệt. Xác định đa thức $f(x)$ có bậc không vượt quá 2 sao cho $f(x_1) = a_{01}, f(x_2) = a_{02}, f'(x_2) = a_{12}$.

Lời giải. Giả sử $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, theo giả thiết ta có $Ax_1^2 + Bx_1 + C = a_{01}, Ax_2^2 + Bx_2 + C = a_{02}, 2Ax_2 + B = a_{12}$.

Giải hệ này ta thu được

$$\begin{cases} A = \frac{a_{01} - a_{02}}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{a_{12}}{x_2 - x_1} \\ B = \frac{a_{02}(x_1 + x_2) - 2a_{01}x_2}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{a_{02} - a_{12}(x_1 + x_2)}{x_2 - x_1} \\ C = \frac{(a_{01}x_2 - a_{02}x_1)x_2}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{(a_{12}x_2 - a_{02}x_1)x_1}{x_2 - x_1} \end{cases} \quad (1)$$

Với A, B, C xác định ở (1) thử lại thấy $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ là đa thức thỏa mãn các điều kiện bài toán. Ta chứng minh đa thức này là nghiệm duy nhất của bài toán.

Thật vậy, giả sử tồn tại đa thức $g(x)$ có bậc không vượt quá 2 và cũng thỏa mãn điều kiện của bài toán. Khi đó đa thức $P(x) = f(x) - g(x)$ cũng có bậc không vượt quá 2 và thỏa mãn $P(x_1) = P(x_2) = P'(x_2) = 0$.

Theo như cách xác định của đa thức $f(x)$ ứng với trường hợp $a_{01} = a_{02} = a_{12} = 0$ ta suy ra $P(x) \equiv 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x) = g(x)$.

Vậy đa thức $f(x)$ với các hệ số xác định ở (1) là nghiệm duy nhất của bài toán. □

Tương tự, ta có bài toán tổng quát của thí dụ 2.

✧ **Bài toán 2.** Cho x_1, x_2 là hai số thực phân biệt. Xác định đa thức $f(x)$ có bậc không vượt quá 3 sao cho $f(x_1) = a_{01}, f(x_2) = a_{02}, f'(x_1) = a_{11}, f'(x_2) = a_{12}$.

Hai bài toán trên đều là trường hợp riêng của bài toán tổng quát sau đây.

✧ **Bài toán 3.** Cho $x_i, a_{ki} \in \mathbb{R}$, với $i = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, \dots, p_i - 1$ và $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, trong đó $p_1 + p_2 + \dots + p_n = N$.

Xác định đa thức $H(x)$ có bậc không vượt quá $N - 1$ thỏa mãn điều kiện $H^{(k)}(x_i) = a_{ki}$, với mọi $i = 1, 2, \dots, n$; mọi $k = 0, 1, \dots, p_i - 1$.

Đây là bài toán nội suy Hermite, là trường hợp tổng quát của nội suy Lagrange và nội suy Taylor. Các bạn có thể tìm hiểu sâu hơn về bài toán này trong sách "Các bài toán nội suy và áp dụng" của tác giả Nguyễn Văn Mậu.

Bây giờ ta xét bài toán 1 và đưa ra một vài thí dụ áp dụng. Để ý rằng đây là trường hợp riêng của bài toán 3 khi $n = 2$ và $p_1 + p_2 = 1 + 2 = 3$.

Nhận xét. Trong bài toán 1, với các hệ số A, B, C xác định ở (1), đa thức $f(x)$ tìm được có thể viết lại dưới dạng sau:

$$f(x) = \frac{a_{01}}{(x_1 - x_2)^2}(x - x_2)^2 + a_{02}(x - x_1)\left(\frac{1}{x_2 - x_1} - \frac{x - x_2}{(x_2 - x_1)^2}\right) + a_{12}(x - x_2)(x - x_1)\frac{1}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

★ **Bài toán 4.** Cho tam thức bậc hai

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ sao cho với mọi $x \in [0; 1]$ thì $\max\{|f(x)|, |f'(x)|\} \leq 2$.

Chứng minh rằng

$$|a| \leq \frac{6}{(\cos \alpha - \cos \beta)^2},$$

với mọi $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \neq \beta$.

Lời giải. Áp dụng bài toán 1 cho đa thức $ax^2 + bx + c$, sau đó so sánh hệ số của x^2 ta suy ra

$$a = \frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{2ax_2 + b}{x_2 - x_1} - \frac{ax_2^2 + bx_2 + c}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Từ đó

$$|a| \leq \left| \frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{(x_1 - x_2)^2} \right| + \left| \frac{2ax_2 + b}{x_2 - x_1} \right| + \left| \frac{ax_2^2 + bx_2 + c}{(x_1 - x_2)^2} \right| \leq \frac{2}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{2}{|x_2 - x_1|} + \frac{2}{(x_1 - x_2)^2}, \forall x_1, x_2 \in [0; 1].$$

Vậy $|a| \leq \frac{6}{(\cos \alpha - \cos \beta)^2}$, với mọi $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \neq \beta$ ($x_1 = \cos \alpha, x_2 = \cos \beta$). □

★ **Bài toán 5.** Cho $f(x)$ là đa thức có bậc không vượt quá 2 và x_1, x_2 là hai số thực tùy ý khác nhau. Giả sử

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)^2} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{(x - x_2)^2}.$$

$$\text{Chứng minh } A = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)^2}, B = \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1},$$

$$C = \frac{f'(x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)^2}.$$

Lời giải. Từ công thức (2) ta suy ra

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)^2} = \frac{a_{01}}{(x_1 - x_2)^2(x - x_1)} + \frac{a_{02}}{(x_2 - x_1)(x - x_2)} + \frac{a_{12}}{(x_2 - x_1)} - \frac{a_{02}}{(x_2 - x_1)^2(x - x_2)^2}.$$

Từ đó thay $a_{01} = f(x_1)$, $a_{02} = f(x_2)$, $a_{12} = f'(x_2)$ ta được điều cần chứng minh. □

Nhận xét. Trong các thí dụ trên ta chỉ mới xét bài toán 1 và chỉ xét hệ số của x^2 . Nếu xét hệ số của x hoặc hệ số tự do với những đa thức bậc không vượt quá 2 khác nhau ta sẽ thu được rất nhiều bài toán mới khá thú vị. Sau đây là một số bài tập để các bạn rèn luyện.

Bài tập 1. Cho tam thức bậc hai

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} |f(x)| \leq (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \\ |f'(x)| \leq \sqrt{3} - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

a) $|a| \leq 3$;

b) $|c| \leq 1 + 3\sqrt{6}$.

Bài tập 2. Cho a, b, c phân biệt thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{3a^2 - 1}{(a - b)^3(a - c)^3} + \frac{3b^2 - 1}{(b - a)^3(b - c)^3} + \frac{3c^2 - 1}{(c - a)^3(c - b)^3} = 0.$$

Bài tập 3. Cho các số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng có công sai d và thỏa điều kiện

$$2(5c - 6)bc^2 - (b + c)a^3 - 2b^3(3b + c) = c^3 - 16b^3 - 6b^2c = 1.$$

Chứng minh rằng d là nghiệm phương trình $2t^4 - t - 1 = 0$.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/369. (Lớp 6) Với mỗi số tự nhiên n lớn hơn 6, gọi A_n là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn n và không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$. Hãy tìm n sao cho trong A_n không có số chính phương nào.

NGUYỄN HỮU BÀNG

(GV THCS Hưng Hoà, TP Vinh, Nghệ An)

Bài T2/369. (Lớp 7) Cho tam giác nhọn ABC có góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Trên các cạnh AC và AB theo thứ tự lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EBC} = \widehat{FCB} = 30^\circ$. Chứng minh rằng

$$BF = FE = EC \geq \frac{BC}{2}.$$

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN

(GV THCS Hồng Bàng, Hai Phòng)

Bài T3/369. Tìm bốn số nguyên a, b, c, d phân biệt trong tập hợp $\{10; 21; 37; 51\}$ sao cho $ab + bc - ad = 637$.

PHẠM HUY THÔNG

(Hà Nội)

Bài T4/369. Giải phương trình

$$(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)} = 28-x.$$

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T5/369. Cho tam giác ABC với $\widehat{BAC} \neq 45^\circ$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) sao cho $\widehat{AIO} = 90^\circ$. Trên tia BC lấy điểm D sao cho $BD = AB + AC$. Qua D kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại E . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng DE ở F ; CF cắt đường tròn (O)

lần nữa tại K . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng IG song song với EK .

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/369. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên dương tùy ý thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $a_i < 2008$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

ii) Bội số chung nhỏ nhất của hai số bất kì trong chúng đều lớn hơn 2008.

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} < 2$.

NGUYỄN HOÀNG NAM

(GV THPT K'Bang, Gia Lai)

Bài T7/369. Chứng minh bất đẳng thức

$$(3a+2b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{45}{2}$$

trong đó các số a, b, c thuộc đoạn $[1; 2]$.

Dấu bằng xảy ra khi nào?

TRỊNH MINH TUẤN

(GV THPT Thái Phiên, Thanh Khê, Đà Nẵng)

Bài T8/369. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB ; A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là điểm chính giữa các cung $\widehat{BC}$ (không chứa A), $\widehat{CA}$ (không chứa B), $\widehat{AB}$ (không chứa C). Vẽ các đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ theo thứ tự có đường kính là A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 . Chứng minh bất đẳng thức

$$\mathcal{P}_{A/(O_1)} + \mathcal{P}_{B/(O_2)} + \mathcal{P}_{C/(O_3)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

TRẦN QUỐC DŨNG

(GV THPT Diên Châu 4, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/369. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z, n thỏa mãn điều kiện

$$x! + y! + z! = 5 \cdot n!$$

trong đó kí hiệu $k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$.

ĐÀO MẠNH THẮNG

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T10/369. Cho hai số thực a, b thuộc khoảng $(0; 4)$. Dãy số (a_n) , $(n = 0, 1, \dots)$ được xác định bởi:

$$a_0 = a; a_1 = b; a_{n+2} = \frac{2(a_{n+1} + a_n)}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}}.$$

Chứng minh rằng dãy số (a_n) , $(n = 0, 1, \dots)$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

HUỖNH TẤN CHÂU

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T11/369. Xác định hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho

$$f(f(x)) + f(x) = \left(26^{3^{2008}} + (26^{3^{2008}})^2\right)x.$$

NGUYỄN NHẬT LINH

(Hà Tĩnh)

Bài T12/369. Gọi S là diện tích toàn phần của một tứ diện. Chứng minh rằng tổng diện tích tất cả các thiết diện tạo bởi các mặt phẳng phân giác các góc nhị diện của tứ diện đó

không lớn hơn $\frac{\sqrt{6}}{2}S$.

NGUYỄN MINH NHIÊN

(GV THPT Quê Võ số 1, Bắc Ninh)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/369. Một đồng xu có bề dày d và đường kính D chưa được tích điện. Tại một điểm trên trục qua tâm vuông góc với mặt đồng xu và cách tâm một khoảng L có đặt một điện tích điểm Q . Cho biết $d \ll D \ll L$ và $\varepsilon = 1$.

- Tính điện tích hưởng ứng trên các mặt đồng xu.
- Tính lực tương tác điện giữa đồng xu với điện tích điểm Q .

NGUYỄN XUÂN QUANG

(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài L2/369. Một vật khối lượng $m = 1$ kg được ném thẳng đứng lên từ mặt đất. Hiệu độ lớn vận tốc lúc ném lên và lúc rơi trở lại mặt đất là $\Delta v = 1$ m/s. Tính công suất trung bình của lực cản không khí trong thời gian chuyển động, nếu lực cản tỉ lệ thuận với vận tốc chuyển động của vật.

TRẦN KHÁNH HẢI

(GV THPT Quốc học Huế, Tp Huế)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/369. (For 6th grade) For each integer n greater than 6, denote by A_n the collection of integers which are less than n and not less than $\frac{n}{2}$. Find n such that there are no perfect square in A_n .

T2/369. (For 7th grade) Let ABC be an acute triangle with $\widehat{BAC} = 60^\circ$. E and F are two points on AC and AB respectively such that $\widehat{EBC} = \widehat{FCB} = 30^\circ$.

Prove that $BF = FE = EC \geq \frac{BC}{2}$.

T3/369. Find four distinct integers a, b, c, d in the set $\{10; 21; 37; 51\}$ such that

$$ab + bc - ad = 637.$$

T4/369. Solve for x :

$$(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)} = 28-x.$$

T5/369. Let ABC be a triangle with $\widehat{BAC} \neq 45^\circ$ and $\widehat{AIO} = 90^\circ$ where (O) and (I) are its circumcircle and incircle, respectively. Choose a point D on the ray BC such that $BD = AB + AC$. The tangent line through D touches (O) at E . The tangent line through B of (O) meets DE at F ; CF meets (O) at another point denoted by K . Let G be the centroid of the triangle ABC . Prove that IG is parallel to EK .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOL

T6/369. Let $a_1, a_2, \dots, a_n$ be positive integers such that the following two properties hold:

- $a_i < 2008$ for all $i = 1, 2, \dots, n$.
- The greatest common divisor of any pair of numbers is greater than 2008.

Prove that $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} < 2$.

T7/369. Prove the following inequality

$$(3a+2b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{45}{2}$$

where a, b , and c are in the interval $[1; 2]$.

When does equality occur?

(Xem tiếp trang 31)



★ **Bài T1/365.** Viết số 2005^{2006} thành tổng của các số tự nhiên rồi đem cộng tổng các chữ số của chúng lại. Hỏi kết quả nhận được có thể là 2006 hoặc 2007 được không? Vì sao?

Lời giải. • Chú ý rằng nếu hai số chia 3 dư 1 thì tích của chúng cũng chia 3 dư 1.

Ta có $2005 = 3.668 + 1$ nên

$$2005^{2006} = (3u+1)^{2006} = 3x+1 \quad (1)$$

• Giả sử $2005^{2006} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ với $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên dương. Gọi b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là tổng các chữ số của số a_i thì theo dấu hiệu chia hết cho 3 ta có $a_i - b_i = 3t_i$ hay $a_i = 3t_i + b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Từ đó và (1) có

$$\begin{aligned} B &= b_1 + b_2 + \dots + b_n \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_n - 3(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \\ &= 3x + 1 - 3(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = 3y + 1 \end{aligned} \quad (2)$$

• Vì $2006 = 3.668 + 2$ và $2007 = 3.669$ đều không có dạng $3y + 1$ nên B không thể là 2006 hoặc 2007. □

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn chỉ xét tổng các chữ số của số 2005^{2006} rồi kết luận ngay mà không xét tổng các chữ số của các số hạng $a_1, a_2, \dots, a_n$.

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

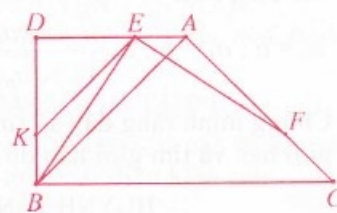
Vinh Phúc: Hoàng Minh Phương, Nguyễn Thị Vịnh, Nguyễn Minh Hiếu, 6A1, THCS Yên Lạc; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Phương, 6B, THCS Thụy Duyên, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** Hoàng Tiến Dũng, 6A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Hà Tĩnh:** Ngô Kiều Ngân, 6A, THCS BC Xuân Diệu, TTr. Nghèn, Can Lộc.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/365.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Lấy điểm D thuộc nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C sao cho tam giác DAB vuông

cân tại D ; điểm E (khác A) thuộc đoạn AD . Đường thẳng qua E , vuông góc với BE cắt AC tại F . Chứng minh rằng $EF = EB$.

Lời giải. Trên đoạn BD lấy điểm K sao cho $BK = EA$ (1)
Vì tam giác DAB vuông cân tại D nên $\triangle DKE$



vuông cân tại D , suy ra $\widehat{DKE} = 45^\circ$, do đó $\widehat{BKE} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, mà $\widehat{EAF} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ nên $\widehat{BKE} = \widehat{EAF}$ (2)

Mặt khác, $\widehat{KBE} = 90^\circ - \widehat{DEB} = \widehat{AEF}$ (3)
(do $\widehat{BEF} = 90^\circ$).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\triangle BKE = \triangle EAF$ (g. c. g), từ đó $EF = EB$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải trên đây, có thể lấy trung điểm O của BF để chứng minh tam giác BEF vuông cân tại E , hoặc từ E hạ các đường vuông góc EM, EN xuống các đường thẳng AB, AC ($EM = EN$).

2) Một số bạn có nhận xét chỉ cần tam giác ABC vuông ở A , bài toán vẫn đúng.

3) Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn:

Vinh Phúc: Nguyễn Thị Hải Yến, Trương Khắc Công, Nguyễn Văn Hậu, 7A, THCS Yên Lạc; Đỗ Văn Giang, 6C, THCS Lăng Công, Lập Thạch; **Hà Nội:** Hoàng Anh Tú, 7I, THCS Marie Curie; **Thanh Hóa:** Lê Quang Thọ, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** Hồ Khánh Duy, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; Nguyễn Văn Bảo, 7D, Thái Thị Thương Hoài, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Kim Oanh, 7G, THCS Bắc Hồng, Hồng Lĩnh, Trần Quốc Dũng, Võ Thị Phương Thảo, 7B, THCS BC Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Trị:** Trương Công Anh Quốc, 7G, THCS Nguyễn Trãi, TX. Đông Hà; **Khánh Hòa:** Vũ Ngọc Cương, 7/1, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Diễm My, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Vĩnh Long:** Hồ Diên Việt Anh, 7A, THCS TTr. Cái Vồn, Bình Minh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/365.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{x-y}{x^4+y^4+6} \quad (1)$$

Lời giải. Ta có $x^4 + 1 \geq 2x^2$; $y^4 + 1 \geq 2y^2$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } x^4 + y^4 + 6 &\geq 2x^2 + 2y^2 + 4 \\ &= (x+y)^2 + (x-y)^2 + 4 \geq (x-y)^2 + 4 \\ &\geq 2\sqrt{(x-y)^2 \cdot 4} = 4|x-y|. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } -\frac{1}{4} \leq \frac{x-y}{x^4+y^4+6} \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Với } x=1, y=-1 \text{ thì } \frac{x-y}{x^4+y^4+6} = \frac{1}{4};$$

$$\text{với } x=-1, y=1 \text{ thì } \frac{x-y}{x^4+y^4+6} = -\frac{1}{4}.$$

Vậy biểu thức (1) có giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}$, có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{1}{4}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn đã có những nhận xét đúng về quan hệ giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức (1): Với các số x, y sao cho giá trị của biểu thức (1) bằng P thì với các số $-x, -y$ sẽ cho giá trị của biểu thức (1) là $-P$. Do đó nếu $P \leq M$ và đẳng thức xảy ra thì $-P \geq -M$ và cũng có đẳng thức xảy ra. Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức (1) là hai số đối nhau. Do đó tìm được giá trị lớn nhất sẽ suy ra giá trị nhỏ nhất và ngược lại.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Phú Thọ: Hà Thị Huyền Nhung, 8A1, Tạ Hải Nam, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Phan Quốc Khánh, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** Đỗ Văn Thạch, Nguyễn Hữu Trường, 9A, THCS Yên Phong; **Bắc Giang:** Nguyễn Văn Thắng, 9D, THCS TTr. Cao Thượng, Tân Yên; **Hà Tây:** Nguyễn Quân Dương, 8B, THCS Thanh Mai, Thanh Oai; **Nam Định:** Nguyễn Văn Quý, 9A, THCS Hải Hậu; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Thắng, 8B, Nguyễn Văn Bảo, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bùi Bắc Nam,** 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hoàng Trọng Đường,** 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Phú Yên:** Lê Cao Thắng, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T4/365. Giải phương trình

$$\sqrt{2(x^2+8)} = 5\sqrt{x^3+8} \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -2$ (*)

Cách 1. Với điều kiện (*) cả hai vế của (1) đều không âm nên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2(x^2+8)^2 = 25(x^3+8) \\ &\Leftrightarrow 2x^4 - 25x^3 + 32x^2 - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x^2 - 5x + 6)(x^2 - 10x - 12) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Nhận thấy } (2x^2 - 5x + 6) = 2\left(x^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} > 0$$

với mọi x . Do đó (2) $\Leftrightarrow x^2 - 10x - 12 = 0$.

PT này có hai nghiệm $x_1 = 5 - \sqrt{37}$ và $x_2 = 5 + \sqrt{37}$ đều thỏa mãn (*). Vậy tập nghiệm của PT (1) là $\{5 + \sqrt{37}; 5 - \sqrt{37}\}$.

Cách 2. Đặt $u = \sqrt{x+2}$, $v = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ ($u \geq 0$, $v > 0$). Khi đó $u^2 = x + 2$, $v^2 = x^2 - 2x + 4$, $u^2v^2 = x^3 + 8$, $2u^2 + v^2 = x^2 + 8$. PT (1) có dạng $\sqrt{2}(2u^2 + v^2) = 5uv \Leftrightarrow (2\sqrt{2}u - v)(u - \sqrt{2}v) = 0$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}u = v$ hoặc $u = \sqrt{2}v$.

- Với $u = \sqrt{2}v$ thì $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x^2 - 4x + 8}$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 6 = 0$. PT này vô nghiệm.

- Với $2\sqrt{2}u = v$ thì $2\sqrt{2x+4} = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$
 $\Leftrightarrow x^2 - 10x - 12 = 0$. PT này có hai nghiệm là $5 \pm \sqrt{37}$ đều thỏa mãn (*). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán này thuộc dạng cơ bản nên có rất nhiều bạn tham gia và đều cho đáp số đúng. Tuy nhiên, nhiều bạn còn quên đặt điều kiện hoặc có đặt điều kiện $x \geq -2$ nhưng quên đổi chiều với kết quả tìm được.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

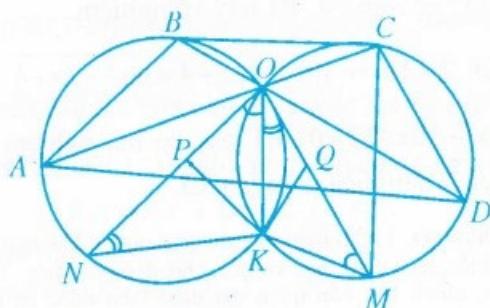
Vĩnh Phúc: Hà Quang Nhân, 7B, THCS Như Thụy, Lập Thạch, Nguyễn Hoàng Vũ, 9C, THCS Vĩnh Yên, Dương Hồng Quân, 9A, THCS Lập Thạch, Lê Thị Tuyết Mai, Nguyễn Thị Kim Tuyến, 9A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Nguyễn Quang Sơn, 9A1, THCS Chu Văn An; **Bắc Ninh:** Nguyễn Quang Rực, 9A THCS Yên Phong; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Thắng, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Hoàng Văn Thắng, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Thanh Hóa:** Lê Thị Liên, 9A, THCS Hoàng Minh, Hoàng Hóa; **Quảng Ninh:** Bùi Mai Thu, 9D, THCS Trọng Diêm; **Thái Nguyên:** Tạ Quang Tuấn, 9A1, THCS Tân Thành; **Phú Thọ:** Nguyễn Trường Giang, 9A2, THCS Giầy Phong Châu; **Bình Định:** Huỳnh Kim Linh, 8A3, THCS Phước An, Trần Quốc Thạch, 9A6, THCS Phước Hưng; **Khánh Hòa:** Nguyễn Hoàng Quyên, 9/1, THCS Võ Thị Sáu; **Đà Nẵng:** Đỗ Trần Tuấn Anh, 8/5, THCS Nguyễn Khuyến.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/365.** Hai đường chéo AC và BD của tứ giác nội tiếp ABCD cắt nhau tại O. Đường

tròn (S_1) ngoại tiếp tam giác ABO và đường tròn (S_2) ngoại tiếp tam giác CDO cắt nhau tại O và K . Đường thẳng qua O song song với AB cắt (S_1) tại N và đường thẳng qua O song song với CD cắt (S_2) tại M . Gọi P và Q theo thứ tự là các điểm thuộc ON và OM sao cho $\frac{OP}{PN} = \frac{MQ}{QO}$. Chứng minh rằng bốn điểm O, K, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $\widehat{ABO} \geq \widehat{BAO}$. Từ giả thiết tứ giác $ABCD$ nội tiếp và $ON \parallel AB$; $OM \parallel CD$ ta có $\widehat{NOA} = \widehat{OAB} = \widehat{ODC} = \widehat{DOM} = \widehat{DCM} = \widehat{CMO}$. Mặt khác $\widehat{KMC} = 180^\circ - \widehat{KOC} = \widehat{KOA}$. Từ đó $\widehat{KMO} = \widehat{KON}$.



Tương tự ta cũng chứng minh được $\widehat{KNO} = \widehat{KOM}$.

Do đó $\triangle KOM \sim \triangle KNO$, suy ra $\frac{KM}{OM} = \frac{KO}{ON}$ (1)

Lại từ giả thiết $\frac{OP}{PN} = \frac{MQ}{QO} \Rightarrow \frac{OM}{MQ} = \frac{ON}{OP}$ (2)

Từ (1) và (2) thu được $\frac{KM}{MQ} = \frac{KO}{OP}$, kết hợp với

$\widehat{KMQ} = \widehat{KOP}$ ta nhận thấy $\triangle KMQ \sim \triangle KOP$, dẫn đến $\widehat{KPO} = \widehat{KQM} = 180^\circ - \widehat{KQO}$.

Vậy bốn điểm O, K, P, Q cùng nằm trên một đường tròn (đpcm). $\square$

Nhận xét. 1) Số bạn gửi lời giải cho bài này không nhiều. Điểm căn bản để đi đến kết luận ở trên là việc phát hiện được cặp tam giác đồng dạng KMQ và KOP từ giả thiết bài ra $\frac{OP}{PN} = \frac{MQ}{QO}$ cùng với $\widehat{KMQ} = \widehat{KOP}$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Nguyễn Hoàng Vũ, 9C, THCS Vĩnh Yên, Nguyễn Mạnh Quân, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Thái Bình:** Hoàng Minh Lập, 9E, THCS Quang Trung, Kiến Xương, Trần Hoàng Khánh Linh, 7A1, THCS Lương Thế Vinh, TP. Thái Bình; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 9B, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn, Đinh Uýt Nảy, 7B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Nguyễn Thị Thu Hiền, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Vũ Đình Long, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** Phạm Quang Thịnh, 9I, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa; **Bình Thuận:** Trình Quang Lộc, 9K, THCS Tân An, TX. Lagi.

HỒ QUANG VINH

★ Bài T6/365. Một hộp đựng chín thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải rút ra ít nhất bao nhiêu thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\frac{5}{6}$?

Lời giải. Nhận thấy trong chín thẻ đã cho có hai thẻ ghi số chia hết cho 4 (các thẻ ghi số 4 hoặc 8); bảy thẻ còn lại ghi số không chia hết cho 4.

Giả sử ta rút ra x thẻ ($1 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$); số cách chọn x từ 9 thẻ trong hộp là C_9^x ; số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_9^x$.

Gọi A là biến cố "trong số x thẻ rút ra, có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4", thì biến cố đối của A là $\bar{A}$: "trong số x thẻ rút ra, không có thẻ nào ghi số chia hết cho 4".

Số cách chọn tương ứng với biến cố $\bar{A}$ là $n(\bar{A}) = C_7^x$. Ta có

$$p(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{C_7^x}{C_9^x} = \frac{(9-x)(8-x)}{72}$$

Do đó

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) > \frac{5}{6} \Leftrightarrow p(\bar{A}) = \frac{(9-x)(8-x)}{72} < \frac{1}{6}$$

hay $x^2 - 17x + 60 < 0 \Leftrightarrow 5 < x < 12$; suy ra $6 \leq x \leq 9$ (vì $1 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$).

Giá trị nhỏ nhất của x là 6. Vậy số thẻ phải rút ra ít nhất mà ta phải tìm là 6. $\square$

Nhận xét. 1) Một số bạn đã tính trực tiếp số cách chọn tương ứng với biến cố A nên lời giải dài hơn. Lưu

ý rằng trong nhiều bài toán, khi tính xác suất của biến cố A , ta có thể sử dụng công thức $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ với $\bar{A}$ là biến cố đối của A .

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Lê Tuấn Anh, 11CB5, THPT Việt Đức, Q. Hoàn Kiếm; Nguyễn Đình Thành, 1A, THPT Đa Phúc, Sóc Sơn; **Hà Tây:** Nguyễn Sơn Tùng, 11A, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì; **Quảng Ninh:** Ngô Đức Long, 10 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Điện Biên:** Nguyễn Thị Thuỷ Dương, Nguyễn Thuỷ Dương, 11B1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Điện Biên; **Phú Yên:** Phan Sơn Dương, 11 Toán 2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP Tuy Hoà; Dương Xuân Vinh, 11A1, THPT Phan Đình Phùng, Sông Cầu; **Bình Định:** Nguyễn Thị Thanh Hằng, 11A6, THPT số II An Nhơn; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ; **Đông Tháp:** Huỳnh Vĩnh Sang, THPT TX Sa Đéc; **Kiên Giang:** Vũ Đại Nghĩa, 11T, THPT chuyên Huỳnh Tấn Mậu, TP Rạch Giá; **Quảng Ngãi:** Bùi Anh Vũ, 10 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Phước:** Lê Ngọc Sáng, 11A, THPT chuyên Quang Trung; **Đak Lak:** Nguyễn Minh Vũ, 11B6, THPT Buôn Ma Thuột; Trương Công Thành, 11T1, THPT Ngô Gia Tự, Eakar.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T7/365.** Cho n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc $[a; b]$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. (Theo đa số bạn). Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left(x_i^2 - (a+b)x_i + \frac{(a+b)^2}{4} \right) \\ & \geq \sum_{i=1}^n \left(x_i^2 - \frac{2}{n} x_i \sum_{j=1}^n x_j + \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right) \\ & \Leftrightarrow n \cdot \frac{(a+b)^2}{4} - (a+b) \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt{n} \frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).} \end{aligned}$$

Vậy BĐT đã cho luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{a+b}{2}$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn nhận xét đúng rằng bài toán không cần dùng giả thiết $x_i \in [a; b]$, thực chất BĐT cần chứng minh có thể viết lại dưới dạng

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2 \geq \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2$$

trong đó $\alpha, x_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các số thực bất kì.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Phan Quốc Khánh, 10A1, Nguyễn Hải Hà, Trần Quan Sự, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Nguyễn Đình Thành, 11D, THPT Đa Phúc, Sóc Sơn; Trần Thế Khải, Nguyễn Minh Hiếu, 10A1 Toán, khối PTCTT, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Hà Tây:** Nguyễn Sơn Tùng, 11A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì; **Thái Bình:** Hoàng Minh Lập, 9E, THCS Quang Trung, Kiến Xương; **Hà Tĩnh:** Thiều Đăng Ba, 10 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thanh Hoá:** Phạm Ngọc Thuận, 11A1, THPT Thọ Xuân IV; **Hải Dương:** Vũ Thanh Tú, 11A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; Trần Văn Hạnh, 11A5, THPT Ninh Giang; **Nghệ An:** Đinh Văn Hoà, Vũ Đình Tâm, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh; **Đà Lạt:** Đào Phúc Quang Trí, 2/14B Phạm Hồng Thái, Phường 10, TP. Đà Lạt; **Gia Lai:** Lê Huy Thái, 10A1, THPT Hùng Vương, Pleiku; **Kiên Giang:** Lê Viết Sơn, 11T, THPT Huỳnh Mẫn Đạt, Rạch Giá.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T8/365.** Gọi H là trực tâm của một tam giác nhọn ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{HA^2 + HB^2 + HC^2}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{(\cot A \cot B)^2 + (\cot B \cot C)^2 + (\cot C \cot A)^2}{2}.$$

Lời giải. Trước hết, xin phát biểu không chứng minh bốn nhận xét đơn giản (kí hiệu Σ là tổng được lấy dưới dạng hoán vị vòng quanh).

Nhận xét 1. Cho tam giác ABC , điểm M và các số α, β, γ . Ta có

$$(\Sigma \alpha)(\Sigma \alpha MA^2) \geq \Sigma \beta \gamma BC^2.$$

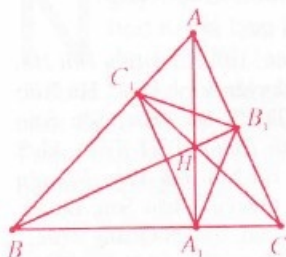
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\Sigma \alpha \overline{MA} = \vec{0}$.

Nhận xét 2. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H . Ta có

$$\begin{aligned} \frac{HA_1}{AA_1} &= \cot B \cot C; & \frac{HB_1}{BB_1} &= \cot C \cot A; \\ \frac{HC_1}{CC_1} &= \cot A \cot B. \end{aligned}$$

Nhận xét 3. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H . Ta có $\Sigma B_1 C_1 \overline{HA_1} = \vec{0}$.

Nhận xét 4. Cho tam giác ABC nhọn, H là trực tâm, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có $HA=2R\cos A$; $HB=2R\cos B$; $HC=2R\cos C$.



Trở lại việc chứng minh bài toán (hình vẽ).

Áp dụng nhận xét 1 cho tam giác $A_1B_1C_1$, điểm H và các số a^2, b^2, c^2 , ta có

$$(\sum a^2)(\sum a^2 HA_1^2) \geq \sum b^2 c^2 B_1 C_1^2.$$

Từ đó, với chú ý rằng $B_1 C_1 = HA \sin A$; $C_1 A_1 = HB \sin B$; $A_1 B_1 = HC \sin C$, ta thấy $(\sum a^2)(\sum a^2 HA_1^2) \geq \sum HA^2 b^2 c^2 \sin^2 A$.

Suy ra $(\sum a^2)(\sum 4S_a^2) \geq \sum HA^2 4S^2$. (S_a, S_b, S_c, S theo thứ tự là diện tích của các tam giác HBC, HCA, HAB, ABC). Do đó, theo nhận xét 2,

$$\frac{\sum HA^2}{\sum a^2} \leq \sum \left(\frac{S_a}{S} \right)^2 = \sum \left(\frac{HA_1}{AA_1} \right)^2 = \sum (\cot B \cot C)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sum a^2 \overline{HA_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{B_1 C_1}{a^2} = \frac{C_1 A_1}{b^2} = \frac{A_1 B_1}{c^2}$$

(theo nhận xét 3)

$$\Leftrightarrow \frac{2R \cos A \sin A}{4R^2 \sin^2 A} = \frac{2R \cos B \sin B}{4R^2 \sin^2 B} = \frac{2R \cos C \sin C}{4R^2 \sin^2 C}$$

(theo nhận xét 4)

$$\Leftrightarrow \cot A = \cot B = \cot C \Leftrightarrow A = B = C$$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có 22 bạn tham gia giải và tất cả đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên, vì không sử dụng nhận xét 1 nên cả 22 bạn đều chuyển bất đẳng thức cần chứng minh thành một bất đẳng thức đại số tương đương (khá khó).

2) Bạn Vũ Minh Thắng (10T₁ - Khối THPT chuyên - Trường ĐHSP Hà Nội) đã chuyển bất đẳng thức cần chứng minh thành bất đẳng thức đại số tương đương (khó) sau:

$$16S^2 \sum a^2 (b^2 + c^2 - a^2) \leq (\sum a^2) \sum (c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2).$$

Sau đó, sử dụng công thức Heron và sử dụng bất đẳng thức Schur (THTT số 348 tháng 6 năm 2006) để chứng minh bất đẳng thức trên.

Với cách giải trên, bạn Thắng đã mở rộng được bài toán đã cho (không cần giả thiết tam giác nhọn).

3) Ngoài bạn Thắng, các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Khổng Hoàng Thao, Trần Quang Sự, Nguyễn Hoàng Hải, Mạc Thế Trường, 11A₁, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** Dương Lê Huyền Trang, THPT chuyên Hà Nam; **Hà Tây:** Phạm Việt Hà, 11A₂, THPT Tùng Thiện; **Hải Dương:** Trần Văn Hạnh, 11A₃, THPT Ninh Giang; **Thái Bình:** Nguyễn Văn Pha, 11A₃, THPT Bắc Kiến Xương, Nguyễn Tiến Hướng, 11A₁, THPT Quỳnh Phụ; **Thanh Hoá:** Hà Văn Toàn, 11G, THPT Mai Anh Tuấn, Nga Sơn; **Nghe An:** Vũ Đình Tâm, Đinh Văn Hoà, 10A₁, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Đinh Văn Học, 11TK16, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** Nguyễn Phú, 10T, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Bùi Vũ Anh, 10T, THPT chuyên Lê Khiết; **Đà Nẵng:** Nguyễn Tăng Thành, 10A₁, Lê Văn Tấn Quyển, 10A₂, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** Huỳnh Vĩnh Sang, 11A₁, THPT Sa Đéc.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T9/365.** Cho p là số nguyên tố lớn hơn

3 và $k = \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor$. (Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x). Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^k C_p^i$ chia hết cho p^2 .

Lời giải. (Theo bạn Hoàng Nghĩa Đức, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghe An**).

$$\text{Ta có } C_p^i = \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{i!} = px_i, \text{ ở đó}$$

$$x_i = \frac{(p-1)\dots(p-i+1)}{i!} \in \mathbb{Z} \text{ (do } 1 \leq i < p).$$

$$\text{Vậy } i!x_i = (p-1)\dots(p-i+1) \equiv (-1)^{i-1}(i-1)! \pmod{p}.$$

$$\text{Suy ra } ix_i \equiv (-1)^{i-1} \pmod{p} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } y_i = \frac{(p-1)!}{i} \text{ thì } iy_i = (p-1)! \quad (2)$$

$$\text{Theo định lí Willson ta có } (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}, \text{ nên từ (2) suy ra } iy_i \equiv -1 \pmod{p} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (3) ta có } x_i \equiv (-1)^i y_i \pmod{p}.$$

$$\text{Bài toán qui về chứng minh } \sum_{i=1}^k x_i \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\text{hay } S = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} y_i \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ta có $S = \sum_{i=1}^k y_i - 2 \sum_{2 \leq i} y_{2i} = \sum_{i=1}^k y_i - \sum_{2 \leq i} y_i$ (vì $2y_{2i} = y_i$).

• Trường hợp $p = 6l + 1$. Khi đó $k = 4l$. Ta có

$$\sum_{i=1}^{4l} y_i - \sum_{i=1}^{2l} y_i = \sum_{i=2l+1}^{4l} y_i.$$

Chú ý rằng $y_i + y_{p-i} = \frac{(p-1)!}{i(p-i)} \cdot p$ nên

$$y_{2l+1} + y_{4l} \equiv y_{2l+2} + y_{4l-1} \equiv \dots \equiv y_{3l} + y_{3l+1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Do đó $S \equiv 0 \pmod{p}$.

• Trường hợp $p = 6l + 5$. Khi đó $k = 4l + 3$. Ta

$$S = \sum_{i=1}^{4l+3} y_i - \sum_{i=1}^{2l+1} y_i = \sum_{i=2l+2}^{4l+3} y_i.$$

Vì $y_{2l+2} + y_{4l+3} \equiv y_{2l+3} + y_{4l+2} \equiv \dots \equiv y_{3l+2} + y_{3l+3} \equiv 0 \pmod{p}$ nên $S \equiv 0 \pmod{p}$. $\square$

◀ Nhận xét. 1) Nhiều bạn giải không chính xác bài này khi viết $\sum_{i=1}^k \frac{C_i}{p} \equiv 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k} \pmod{p}$ hoặc giải quá vắn tắt.

2) Một số bạn có nhận xét đây là bài toán A5 trong kì thi Putnam ở Mỹ năm 1996 hoặc là bài toán A.271 trang 105 trong cuốn sách "Tuyển chọn các bài toán từ cuộc thi một số nước Đông Âu" tập I, NXBGD, 2004.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vinh Phúc**: Mạc Thế Trường, 11A1 chuyên; **Nghe An**: Trần Tuấn An, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Thừa Thiên - Huế**: Võ Thành Văn, 11 Toán, ĐHKHTN Huế; **Thái Bình**: Lương Thu Hương, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/365.** Hãy xác định các góc của tam giác ABC, biết rằng

$$\cos \frac{5A}{2} + \cos \frac{5B}{2} + \cos \frac{5C}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải. Trước hết ta có các nhận xét sau

1) $\cos \frac{5A}{2} + \cos \frac{5B}{2} + \cos \frac{5C}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 2$, suy ra cả

ba $\cos \frac{5A}{2}, \cos \frac{5B}{2}, \cos \frac{5C}{2}$ đều là các số dương.

2) Với $0 < x < \pi$ và $\cos \frac{5x}{2} > 0$ thì hoặc

$0 < x < \frac{\pi}{5}$ hoặc $\frac{3\pi}{5} < x < \pi$. Do vai trò của ba

góc A, B, C là như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $A \geq B, A \geq C$. Từ hai nhận xét trên suy ra $0 < B, C < \frac{\pi}{5}$ và $\frac{3\pi}{5} < A < \pi$.

Ta có nhận xét thứ ba:

3) Nếu $-\frac{\pi}{2} < x, t, z, t < \frac{\pi}{2}$ thì

$$\begin{aligned} & \cos x + \cos y + \cos z + \cos t \\ &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} + 2 \cos \frac{z+t}{2} \cdot \cos \frac{z-t}{2} \\ &\leq 2 \cos \frac{x+y}{2} + 2 \cos \frac{z+t}{2} \\ &= 4 \cos \frac{x+y+z+t}{4} \cos \frac{x+y-z-t}{4} \\ &\leq 4 \cos \frac{x+y+z+t}{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t$ (Đây là một trường hợp riêng của bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi $\cos x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$).

Áp dụng nhận xét 3) với $x = \frac{5B}{2}, y = \frac{5C}{2},$

$z = \frac{5A}{2} - 2\pi, t = \frac{\pi}{6}$ ta có

$$\begin{aligned} & \cos \frac{5A}{2} + \cos \frac{5B}{2} + \cos \frac{5C}{2} + \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \cos z + \cos x + \cos y + \cos t \leq 4 \cos \frac{x+y+z+t}{4} = 4 \cos \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \cos \frac{5A}{2} + \cos \frac{5B}{2} + \cos \frac{5C}{2} \leq 3 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Như vậy theo giả thiết thì đẳng thức xảy ra.

Bởi vậy $\frac{5A}{2} - 2\pi = \frac{5B}{2} = \frac{5C}{2} = \frac{\pi}{6}$, tức là $A = \frac{13\pi}{15},$

$$B = C = \frac{\pi}{15}.$$

Kết luận. Trong ba góc A, B, C có một góc có số đo bằng $\frac{13\pi}{15}$ và hai góc còn lại có số đo

bằng $\frac{\pi}{15}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Một số bạn học sinh nhận xét: đây là bài đề nghị của kì thi Olympic 30-4 lần thứ XII, năm 2006. Rất đông các bạn học sinh tham gia gửi lời giải tới tòa soạn, tất cả đều giải đúng. Hoan nghênh một số bạn học sinh lớp 10 sau có lời giải gọn:

Ninh Bình: Lương Văn Thiện, 10T, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Vinh Phúc:** Nguyễn Hải Quân, Nguyễn Văn Sơn, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Nguyễn Trung Kiên, Hà Thành Trung, 10T1, Khối THPT chuyên, ĐHSPT Hà Nội, Nguyễn Khánh Việt, 10A2 Toán, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Nghệ An:** Nguyễn Văn An, Nguyễn Thanh Đức, Nguyễn Thị Thu Hiền, Dương Hoàng Hương, Đinh Văn Hòa, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Thị Hồng Thủy, 10A1, khối THPT chuyên, ĐH Vinh; **Bình Định:** Bùi Trọng Trí, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Nguyễn Thị Ka Ly, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T11/365.** Cho (x_n) , $(n = 1, 2, \dots)$ là một dãy số bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện

$$x_{n+2} \geq \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n \text{ với mọi } n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) , $(n = 1, 2, \dots)$ có giới hạn khi n tăng lên vô hạn.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Gọi A là cận trên của dãy (x_n) và xét dãy (A_n) với $A_n = \min\{x_n, x_{n+1}\}$. Khi đó hiển nhiên dãy (A_n) cũng bị chặn trên bởi A . Do

$$\begin{aligned} A_n &= \min\{x_n, x_{n+1}\} = \min\left\{x_n, x_{n+1}, \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n\right\} \\ &\leq \min\left\{x_{n+1}, \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n\right\} = \min\{x_{n+1}, x_{n+2}\} = A_{n+1}. \end{aligned}$$

Ta thấy dãy (A_n) là đơn điệu tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = B$. Ta chứng

minh dãy đã cho cũng có giới hạn bằng B . Theo định nghĩa thì từ $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = B$ suy ra với

mọi $\varepsilon > 0$ đều tồn tại $N_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n > N_0$ ta đều có $B - \frac{\varepsilon}{7} < A_n < B + \frac{\varepsilon}{7}$.

Xét các chỉ số $m > N_0$ thì $x_{m-1} \geq x_m > B - \frac{\varepsilon}{7}$.

Xét hai trường hợp:

1) Nếu $x_m < B + \frac{\varepsilon}{7}$ thì $B - \frac{\varepsilon}{7} < A_m \leq x_m < B + \frac{\varepsilon}{7}$ (*)

2) Nếu $x_m \geq B + \frac{\varepsilon}{7}$ thì từ định nghĩa dãy (A_n)

ta có $x_{m+1} < B + \frac{\varepsilon}{7}$. Suy ra

$$x_m \geq 4x_{m+1} - 3x_{m-1} < 4\left(B + \frac{\varepsilon}{7}\right) - 3\left(B - \frac{\varepsilon}{7}\right) = B + \varepsilon$$

nên $B - \varepsilon < B + \frac{\varepsilon}{7} \leq x_m < B + \varepsilon$ (2)

* Từ (1) và (2) suy ra với mọi $m > N_0$, ta đều có $B - \varepsilon < x_m < B + \varepsilon$, điều phải chứng minh. ◻

◀ **Nhận xét.** Đây là một bài toán về giới hạn của dãy số sinh bởi hàm số sơ cấp và ứng dụng nguyên lý kẹp, thuộc dạng không quen thuộc ở bậc phổ thông nên có không nhiều bạn tham giải giải. Đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên. Một số bạn mở

rộng bài toán theo hướng thay $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ bởi cặp số dương có tổng bằng 1. Các bạn sau có lời giải tốt:

Bắc Giang: Nguyễn Quang Chức, 11T, THPT chuyên Bắc Giang; **Bắc Ninh:** Nguyễn Viết Diệp, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vinh Phúc:** Nguyễn Hoàng Hải, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Mai Tiến Khải, Nguyễn Minh Hiền, Trần Thế Khải, 10A1, Trần Nhật Tân, 11T chuyên Toán – Tin, ĐHKHTN Hà Nội, Lưu Phi Khanh, 11T1, ĐHSPT Hà Nội; **Hà Tây:** Nguyễn Bao Sách, 11T, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hà Nam:** Lại Việt An, 11T, THPT chuyên Hà Nam; **Hải Dương:** Bùi Tiến Mạnh, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Trần Văn Hạnh, 11A5, THPT Ninh Giang, Nguyễn Văn Trung, 12K, THPT Kim Thành; **Quảng Ninh:** Phạm Đức Mạnh, 12T, THPT chuyên Hạ Long; **Thanh Hóa:** Nguyễn Cao Tuấn, 11T, THPT Lam Sơn, Lê Xuân Thắng, 11A1, THPT Triệu Sơn; **Nghệ An:** Võ Quang Dũng, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Thu Trang, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên – Huế:** Võ Thành Văn, 11T, ĐHKH Huế; **Đắk Lắk:** Trương Công Thành, 11T1, THPT Ngô Gia Tự, Bùi Đình An, Lê Duy Tùng, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Vĩnh Long:** Huỳnh Minh Tuấn, Chương Công Danh, 12T1, THPT Nguyễn Bình Khiêm; **Phú Yên:** Phan Sơn Dương, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

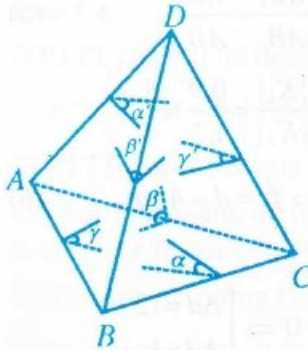
NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/365.** Gọi $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'$ và γ, γ' tương ứng là số đo các cặp góc nhị diện đối diện cạnh $BC, DA; CA, DB$ và AB, DC của một tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng

$$\sin \alpha + \sin \alpha' + \sin \beta + \sin \beta' + \sin \gamma + \sin \gamma' \leq 4\sqrt{2} \quad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. (Theo bạn *Châu Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Vĩnh Long** và *Nguyễn Thị Cẩm Hằng*, 12 Toán, THPT chuyên **Hà Tĩnh**).



• Kí hiệu a, b, c, d lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$. Đặt:
 $u = \sum \cos^2 \alpha$ và
 $v = \sum \sin^2 \alpha$.

• Để thiết lập BĐT (*), trước hết ta tìm cách đánh giá u và v .

Theo công thức hình chiếu (về diện tích), ta có

$$d = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma \quad (1)$$

Áp dụng BDT Bunyakovski, ta được

$$d^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra

$$1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (3)$$

Sau đó, cộng vế đối vế bốn BDT có dạng (3) ta thu được BDT sau

$$2(u+2) \geq \frac{1}{3}(x+y+z+t) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq \frac{16}{3} \quad (4)$$

trong đó x, y, z, t được xác định bởi

$$x + a^2 = y + b^2 = z + c^2 = t + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Đến đây, từ (4) và $u + v = 6$ ta đánh giá được

$$u \geq \frac{2}{3} \text{ và } v \leq \frac{16}{3} \quad (5)$$

• Để đánh giá được $s = \sin \alpha + \sin \alpha' + \sin \beta + \sin \beta' + \sin \gamma + \sin \gamma' = (\sum \sin \alpha)$ ta dựa vào BDT giữa trung bình cộng và trung bình nhân. Từ (5) có

$$s^2 = (\sum \sin \alpha)^2 \leq 6(\sum \sin^2 \alpha) = 6v \leq 6 \cdot \frac{16}{3} = 32 \quad (6)$$

Từ đó ta thu được $s \leq 4\sqrt{2}$, đpcm (*)

• Dấu đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi đồng thời xảy ra ở (2), (4), (5) và (6) nghĩa là:

$$*) a : b : c = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma, \text{ v.v...}$$

$$*) x = y = z = t \Leftrightarrow a = b = c = d \Leftrightarrow ABCD \text{ là tứ diện đều: } \alpha' = \alpha, \beta' = \beta, \gamma' = \gamma,$$

$$*) u = \frac{2}{3}; v = \frac{16}{3},$$

$$*) s = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin \alpha' = \sin \beta' = \sin \beta = \sin \gamma = \sin \gamma' = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy $s = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \gamma = \gamma'$ và do đó, $ABCD$ là một tứ diện đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Điểm mấu chốt để đánh giá được vế trái s của BDT (*) cần chứng minh, trước hết ta cần đánh giá được u và v , nghĩa là thiết lập được BDT (5). Có 2 cách để đánh giá u và v . Ngoài cách đánh giá nêu trên có 5 bạn xuất phát từ định lí "con nhím" $\sum_i a \vec{n}_i = \vec{0}$, trong đó $\vec{n}_i$ là vectơ pháp tuyến đơn vị, vuông góc với mặt đối diện đỉnh A_i ($i = 1, 2, 3, 4$ tương ứng với các đỉnh A, B, C, D). Từ đó thiết lập được BDT kép sau đây (có sử dụng BDT $\sum (a^2 - b^2)^2 \geq 0$):

$$\frac{1}{4}(\sum a^2)^2 \leq (\sum a^2 b^2) u \leq \frac{3}{8}(\sum a^2)^2 u.$$

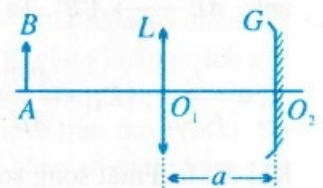
Từ đó suy ra được (5) và (6).

Tuy nhiên có 3 bạn chỉ thiết lập được BDT đúng $\sum \cos \alpha = s' \leq 2$, nhưng sau đó đã ngộ nhận chỉ từ $s' \leq 2$ suy ra được (5) và (6).

2) Ngoài hai bạn *Kiệt* và *Hằng*, các bạn sau có lời giải tốt: **Thanh Hóa:** Lê Xuân Thắng, 11A1, THPT Triệu Sơn 3; **Thái Bình:** Nguyễn Văn Pha, 11A3, THPT Kiến Xương.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

★ **Bài L1/365.** Đặt vật AB vuông góc với trục chính O_1O_2 của thấu kính L và gương cầu lõm G như hình vẽ. Thấu kính L có tiêu cự $f_1 = 20\text{cm}$, gương cầu lõm G có tiêu cự $f_2 = 12\text{cm}$.

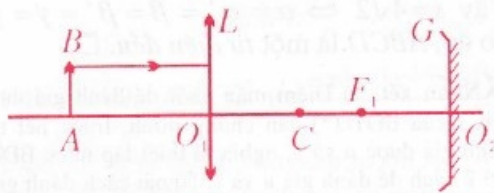


1) Xác định giá trị $a = O_1O_2$ để ảnh của AB tạo bởi hệ có chiều cao không đổi khi

dịch chuyển vật AB dọc theo trục chính trước thấu kính L.

2) Nếu lấy thấu kính L đi thì ảnh của AB hứng được trên một màn ảnh E cao 0,9cm. Sau khi lấy thấu kính L đi và thay vào đó một bản thủy tinh có hai mặt song song dày $e = 2\text{cm}$ thì phải dịch chuyển màn E ra xa hệ thêm một đoạn 13cm ta mới hứng được ảnh rõ nét của AB và ảnh này cao 1,2cm. Hãy tính chiết suất n của thủy tinh làm bản mặt song song.

Lời giải. (Theo bạn Trần Thế Minh, K33A1, THPT Nguyễn Huệ, Kỳ Anh, Hà Tĩnh).



1) Khi dịch chuyển AB dọc theo trục chính của quang hệ, thì tia tới từ B song song với trục chính tới quang hệ luôn không đổi. Do đó để ảnh của AB tạo bởi quang hệ có chiều cao không đổi thì tia ló khỏi quang hệ của tia tới nói trên phải song song với trục chính. Như vậy có thể có hai trường hợp:

- Đỉnh gương O_2 trùng với tiêu điểm F_1 của L. Khi đó $a = f_1 = 20(\text{cm})$.
- Quang tâm C của gương G trùng với tiêu điểm F_1 của L. Khi đó $a = f_1 + 2f_2 = 44(\text{cm})$.

2) Khi chưa đặt bản mặt song song, sơ đồ tạo

ảnh: $AB \xrightarrow{G} A'B'$. Ta có $d' = \frac{df_2}{d - f_2}$ (1)

$K_1 = \frac{f_2}{f_2 - d}$; $|K_1| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{0,9}{AB}$ (2)

Khi đặt bản mặt song song, sơ đồ tạo ảnh:

$AB \xrightarrow{\text{bản mặt}} A_1B_1 \xrightarrow{G} A_2B_2 \xrightarrow{\text{bản mặt}} A_3B_3$

Với Δd là độ dịch chuyển so với vật của ảnh tạo bởi bản mặt song song: $\Delta d = \frac{e(n-1)}{n}$ (3)

Ta có $d' + b - \Delta d = \frac{(d - \Delta d)f_2}{d - \Delta d - f_2}$ (4)

Lại có $K_2 = \frac{f_2}{f_2 - (d - \Delta d)}$;
 $|K_2| = \frac{A_2B_2}{AB} = \frac{A_3B_3}{AB} = \frac{1,2}{AB}$ (5)

Từ (2) và (5), ta thấy $\frac{|K_1|}{|K_2|} = \frac{0,9}{1,2} = \frac{3}{4}$
 $\Rightarrow \frac{f_2 - (d - \Delta d)}{f_2 - d} = \frac{3}{4} \Rightarrow f_2 = d - 4\Delta d$ (6)

Từ (1), (4) và (6), rút ra

$(\Delta d)^2 - 13(\Delta d) + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta d = 12 \\ \Delta d = 1. \end{cases}$

* Với $\Delta d = 12$. Từ (3) được $n = -\frac{1}{5}$ (loại).

* Với $\Delta d = 1$. Từ (3) được $n = 2$ (nhận).

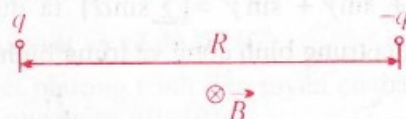
Vậy chiết suất của chất làm bản mặt song song là $n = 2$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Ngoài bạn Minh, các bạn sau có lời giải tốt:

Bác Ninh: Nguyễn Văn Bảo, Trần Việt Long, 12 Lý, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** Nguyễn Khắc Quyến, 12B, khối chuyên Lý, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Phạm Đình Tuấn, 11A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Hải Phòng:** Trần Hoàng Bá, 12 Toán, THPT NK Trần Phú; **Thái Bình:** Vũ Quang Hiệu, 12A4, THPT Quỳnh Côi; **Thanh Hóa:** Hà Văn Toàn, 11G, THPT Mai Anh Tuấn, Nga Sơn, Hoàng Tuấn Anh, 12A11, THPT Lương Đắc Bằng, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Đinh Viết Thắng, 12A1, THPT Diễn Châu IV, Trần Văn Giai, A3, K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Đình Nhâm, A4, K48 Khối THPT chuyên, ĐH Vinh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/365.** Hai hạt có cùng khối lượng m , mang điện tích là q và $-q$ bắt đầu chuyển động với vận tốc ban đầu bằng 0 trong một từ trường đều $\vec{B}$, vuông góc với đoạn thẳng nối chúng có độ dài R (hình vẽ).

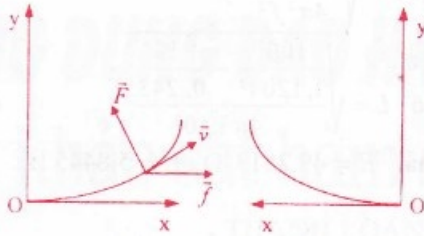


1) Tìm giá trị cực tiểu B_0 của cảm ứng từ (từ trường tới hạn) để hai hạt không va chạm với nhau.

2) Tính khoảng cách r khi hai hạt tiến gần nhau nhất trong trường hợp $B > B_0$.

3) Tìm vận tốc các hạt và khoảng cách giữa chúng tại thời điểm hai hạt tiến đến gần nhau nhất trong từ trường tới hạn.

Lời giải. Quỹ đạo chuyển động của hai hạt điện tích có dạng như hình vẽ.



1) Do tính đối xứng của quỹ đạo chuyển động của hai hạt điện tích nên chỉ cần xét chuyển động của một điện tích (chẳng hạn điện tích q).

Theo hình vẽ, khi khoảng cách giữa hai điện tích có giá trị nhỏ nhất thì thành phần vận tốc theo phương Ox bằng 0.

Phương trình định luật II Newton cho hạt điện tích q có dạng $\vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$ (1)

trong đó $\vec{f}$ là lực điện, $\vec{F}$ là lực Lorentz tác dụng lên hạt mang điện q có khối lượng m , còn $\vec{a}$ là gia tốc của hạt điện tích.

Chiếu phương trình (1) lên các phương Ox , Oy ta được

$$f - qv_y B = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} \quad (2)$$

$$F_y = qv_x B = ma_y = m \frac{dv_y}{dt} \quad (3)$$

Phương trình (3) viết lại dưới dạng

$$qv_x B dt = m dv_y \text{ hay } qB dx = m dv_y \quad (4)$$

Tích phân hai vế phương trình (4) thu được

$$qBx = mv_y + C.$$

Từ điều kiện ban đầu $x = 0$, $v_y = 0$ nên $C = 0$, vậy $qBx = mv_y$ (5)

Khi khoảng cách giữa hai điện tích nhỏ nhất thì $v_x = 0$, kí hiệu vận tốc và hoành độ của hạt

tương ứng là v_1 và x_1 , phương trình (5) viết lại là: $qBx_1 = mv_1$ (6)

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$-\frac{kq^2}{R} = 2 \cdot \frac{mv_1^2}{2} + \left(-\frac{kq^2}{R-2x_1} \right) \quad (7)$$

Từ các phương trình (6) và (7) qua vài phép biến đổi ta được

$$2RB^2x_1^2 - R^2B^2x_1 + 2mk = 0 \quad (8)$$

Phương trình (8) có nghiệm khi $\Delta \geq 0$,

$$\text{hay } B \geq \frac{4}{R} \sqrt{\frac{mk}{R}}.$$

Từ đây dễ dàng thấy rằng giá trị cực tiểu của B để hai hạt không va chạm với nhau là

$$B_0 = \frac{4}{R} \sqrt{\frac{mk}{R}} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{m}{\pi \epsilon_0 R}} \quad (9)$$

ở đây ta đã thay $k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$.

2) Khi $B > B_0$, phương trình (8) có hai nghiệm, ta lấy nghiệm x_1 lớn (khi đó khoảng cách r giữa hai hạt là nhỏ nhất)

$$x_1 = \frac{R^2B^2 + \sqrt{R^4B^4 - 16mkRB^2}}{4RB^2}.$$

Khi đó khoảng cách nhỏ nhất giữa hai hạt là:

$$r = R - x_1 = \frac{3R^2B^2 - \sqrt{R^4B^4 - 16mkRB^2}}{4RB^2}.$$

3) Khi $B = B_0$ thì $\Delta = 0$, suy ra $x_1 = \frac{R}{4}$ (10)

Trong trường hợp này, khoảng cách nhỏ nhất giữa hai hạt là: $r = R - x_1 = \frac{3R}{4}$.

Từ (6), (9), (10) và chú ý rằng trong trường hợp này $B = B_0$, ta tìm được:

$$v_1 = q \sqrt{\frac{k}{mR}} = \frac{q}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi \epsilon_0 mR}}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Khắc Quyển, 12B - khối chuyên Lí, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; **Hải Phòng:** Trần Hoàng Bá, 12 Toán, THPT NK Trần Phú; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Ngọc Duy, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Hướng dẫn nội dung và cấu trúc đề thi học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay các môn Vật lý, Hóa học và Sinh học

(Tiếp theo kì trước)



4. VÍ DỤ ĐỀ BÀI TOÁN VÀ CÁCH GIẢI

MÔN VẬT LÝ

★ Bài 1. Chu kì dao động của con lắc đơn

Tại một nơi trên Trái Đất, một con lắc đơn khi có chiều dài l_1 thì dao động với chu kì T_1 ; có chiều dài l_2 thì dao động với chu kì T_2 . Biết rằng, con lắc đơn khi có chiều dài $(l_1 + l_2)$ thì dao động với chu kì $T = 2,7$ s; có chiều dài $(l_1 - l_2)$ thì dao động với chu kì là $T' = 0,8$ s. Hãy tính chu kì dao động T_1 và T_2 của con lắc đơn khi có chiều dài tương ứng là l_1 và l_2 .

Cách giải. Biểu thức của các chu kì

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}; T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}}; T' = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 - l_2}{g}}.$$

Suy ra $\frac{l_1}{T_1^2} = \frac{l_2}{T_2^2} = \frac{l_1 + l_2}{T^2} = \frac{l_1 - l_2}{T'^2}.$

Vậy $T_1^2 + T_2^2 = T^2$ và $T_1^2 - T_2^2 = T'^2.$

Do đó $T_1 = \sqrt{\frac{T^2 + T'^2}{2}}; T_2 = \sqrt{\frac{T^2 - T'^2}{2}}.$

Thay số $T_1 = \sqrt{\frac{2,7^2 + 0,8^2}{2}}; T_2 = \sqrt{\frac{2,7^2 - 0,8^2}{2}}.$

Kết quả. $T_1 = 1,9912$ s ; $T_2 = 1,8235$ s.

★ Bài 2. Thông số của ống dây

Một ống dây dẫn có điện trở R và hệ số tự cảm L . Đặt vào hai đầu ống một hiệu điện thế một chiều 12V thì cường độ dòng điện trong ống là 0,2435A. Đặt vào hai đầu ống một hiệu điện thế xoay chiều tần số 50 Hz có giá trị hiệu dụng 100V thì cường độ hiệu dụng của dòng điện trong ống dây là 1,1204 A. Tính R, L .

Cách giải

• Mắc ống dây vào hiệu điện thế một chiều, ta có

$$U_1 = RI_1 \Rightarrow R = \frac{U_1}{I_1}. \text{ Thay số } R = \frac{12}{0,2435}.$$

• Mắc ống dây vào hiệu điện thế xoay chiều, ta có

$$U_2 = ZI_2 \Rightarrow Z = \frac{U_2}{I_2}; Z^2 = Z^2 - R^2 \Rightarrow \omega^2 L^2 = \frac{U_2^2}{I_2^2} - \frac{U_1^2}{I_1^2}.$$

Suy ra $L = \sqrt{\frac{\frac{U_2^2}{I_2^2} - \frac{U_1^2}{I_1^2}}{4\pi^2 f^2}}.$

Thay số $L = \sqrt{\frac{\frac{100^2}{1,1204^2} - \frac{12^2}{0,2435^2}}{4\pi^2 \cdot 50^2}}.$

Kết quả. $R = 49,2813 \Omega$; $L = 5,8445$ H.

MÔN HÓA HỌC

★ Bài 1. Hai nguyên tố hóa học X và Y ở điều kiện thường đều là chất rắn. Số mol của X có trong 8,4 gam X nhiều hơn so với số mol của Y có trong 6,4 gam Y là 0,15 mol. Biết khối lượng mol nguyên tử của X nhỏ hơn khối lượng mol nguyên tử của Y là 8 gam. Xác định kí hiệu hóa học của X và Y.

Phần thứ nhất. HS trình bày lời giải về hóa học

Kí hiệu khối lượng mol nguyên tử của X và Y thứ tự là x và y.

So sánh số mol: $n_X = \frac{8,4}{x}; n_Y = \frac{6,4}{y}$ ta có

phương trình $\frac{8,4}{x} - \frac{6,4}{y} = 0,15.$

Theo giả thiết $x + 8 = y$. Từ đó suy ra

$$0,15x^2 - 0,8x - 67,2 = 0.$$

Phần thứ hai. HS trình bày cách sử dụng máy tính bỏ túi để giải phương trình

Bấm MODE hai lần $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện lên EQN

1

Bấm nút số 1 $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện lên Unknowns

2 3

Bấm nút chuyển sang phải $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện lên Degree?

2 3

Bấm 2 (để chọn PT bậc 2) $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện a? thì bấm 0.15

Bấm = $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện b? thì bấm (-) 0.8

Bấm = $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện c? thì bấm (-) 67.2

Bấm = $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $x_1 = 24$

Bấm = $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $x_2 = -18.6666...$

Phần thứ ba. HS trình bày kết quả

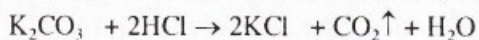
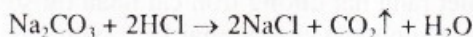
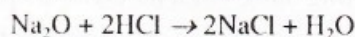
Theo điều kiện hóa học: $x > 0$ nên chỉ chọn

$$x = x_1 = 24 \Rightarrow X \text{ là Mg}; y = 24 + 8 = 32 \Rightarrow Y \text{ là S.}$$

★ **Bài 2.** Hòa tan 15,8 gam hỗn hợp A gồm Na_2CO_3 , K_2CO_3 và Na_2O bằng dung dịch HCl thoát ra 1,68 lít CO_2 (đktc) và thu được dung dịch B. Cô cạn dung dịch B được 22,025 gam hỗn hợp chứa hai muối khan. Tính thành phần % hỗn hợp A.

Phần thứ nhất. HS trình bày lời giải về hóa học

Theo đầu bài ta có các phương trình hóa học:



Hỗn hợp hai muối khan là NaCl và KCl.

$$\text{Khí thoát ra là } \text{CO}_2 = \frac{1,68}{22,4} = 0,075 \text{ (mol).}$$

Đặt số mol Na_2O , Na_2CO_3 và K_2CO_3 lần lượt là x , y , z . Ta có các phương trình:

$$\text{* Khối lượng A: } 62x + 106y + 138z = 15,8.$$

* Khối lượng hai muối khan:

$$58,5(2x + 2y) + 74,5 \times 2z = 22,025$$

$$\text{hay } 117x + 117y + 149z = 22,025.$$

$$\text{* Số mol khí } \text{CO}_2: y + z = 0,075.$$

Phần thứ hai. HS trình bày cách sử dụng máy tính bỏ túi để giải phương trình

Bấm MODE hai lần $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện lên EQN

Bấm nút số 1 $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện lên Unknowns 2 3

Bấm 3 (để chọn hệ PT 3 ẩn) $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $a_1?$ thì bấm 62

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $b_1?$ thì bấm 106

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $c_1?$ thì bấm 138

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $d_1?$ thì bấm 15.8

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $a_2?$ thì bấm 117

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $b_2?$ thì bấm 117

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $c_2?$ thì bấm 149

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $d_2?$ thì bấm 22.025

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $a_3?$ thì bấm 0

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $b_3?$ thì bấm 1

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $c_3?$ thì bấm 1

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $d_3?$ thì bấm 0.075

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $x = 0.0982$

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $y = 0.0199$

Bấm $=$ $\Rightarrow$ màn hình máy tính hiện $z = 0.0551$

$$\text{Bấm } 62 \times 0.0982 : 15.8 = \text{màn hình hiện } 0.3853...$$

$$\text{Bấm } 106 \times 0.0199 : 15.8 = \text{màn hình hiện } 0.1235...$$

$$\text{Bấm } 138 \times 0.0551 : 15.8 = \text{màn hình hiện } 0.4812...$$

Phần thứ ba. HS trình bày kết quả

$$\% \text{Khối lượng } \text{Na}_2\text{O} = 38,53\%$$

$$\% \text{Khối lượng } \text{Na}_2\text{CO}_3 = 13,35\%$$

$$\% \text{Khối lượng } \text{K}_2\text{CO}_3 = 48,12\%$$

MÔN SINH HỌC

★ **Bài 1.** Ở một loài thực vật, nếu các gen trên một NST đều liên kết hoàn toàn thì khi tự thụ phấn nó có khả năng tạo nên 1024 kiểu tổ hợp giao tử. Trong một thí nghiệm người ta thu được một số hợp tử. Cho $\frac{1}{4}$ số hợp tử phân chia 3 lần liên tiếp,

$\frac{2}{3}$ số hợp tử phân chia 2 lần liên tiếp, còn bao nhiêu chỉ qua phân chia 1 lần. Sau khi phân chia số NST tổng cộng của tất cả các hợp tử là 580. Hỏi số noãn được thụ tinh?

Cách giải. Vì là thực vật tự thụ phấn nên có số kiểu giao tử là $\sqrt{1024} = 32$. Suy ra số NST trong bộ NST $2n$ là 10.

Gọi x là số hợp tử thu được trong thí nghiệm (x cũng là số noãn được thụ tinh) ta có phương trình

$$\frac{1}{4}x \cdot 2^3 + \frac{2}{3}x \cdot 2^2 + \left[x - \left(\frac{x}{4} + \frac{2x}{3} \right) \right] \cdot 2 = \frac{580}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{29}{6}x = 58. \text{ Suy ra } x = 12.$$

Kết quả. Vậy ta có $x = 12$.

★ **Bài 2.** Lai 2 cá thể đều dị hợp tử 2 cặp gen, mỗi gen trên 1 NST thường. Tại vùng sinh sản trong cơ quan sinh dục của cá thể đực có 4 tế bào A, B, C, D phân chia liên tiếp nhiều đợt để hình thành các tế bào sinh dục sơ khai, sau đó tất cả đều qua vùng sinh trưởng và tới vùng chín để hình thành giao tử. Số giao tử có nguồn gốc từ tế bào A sinh ra bằng tích số của các tế bào sinh dục sơ khai do tế bào A và tế bào B sinh ra. Số giao tử do các tế bào có nguồn gốc từ tế bào C sinh ra gấp đôi số giao tử có nguồn gốc từ tế bào A. Số giao tử do các tế bào có nguồn gốc từ tế bào D sinh ra đúng bằng số tế bào sinh dục sơ khai có nguồn gốc từ tế bào A. Tất cả các giao tử đều tham gia thụ tinh nhưng chỉ có 80% đạt kết quả. Tính ra mỗi kiểu tổ hợp giao tử đã thu được 6 hợp tử. Nếu thời gian phân chia tại vùng sinh sản của các tế bào A, B, C, D bằng nhau thì tốc độ phân chia của tế bào nào nhanh hơn và nhanh hơn bao nhiêu lần?



SAO KHÔNG CÓ ĐIỂM?

Trong giờ trả bài kiểm tra môn toán, Nam băn khoăn: sao bài giải bất phương trình của mình cô giáo không cho điểm mà lại phê bên lề: *Xem lại kiến thức cơ bản, tự tìm chỗ sai, làm lại bài và nộp cho cô.* Sau một hồi suy nghĩ mà Nam nghĩ vẫn chưa ra chỗ sai mà nghiệm tìm được thử vào bất phương trình vẫn thấy đúng. Bạn hãy giúp Nam tìm ra chỗ sai nhé. Sau đây là đề bài và lời giải của Nam:

- Giải bất phương trình

$$2^{\sqrt[3]{\sin x}} + 3^{\log_3 \sqrt{2^{\sqrt[3]{\sin x}}}} \leq 2^{\sqrt[3]{\sin x} + 1} \quad (1)$$

- Điều kiện: $0 \leq \sin x \leq 1$ (2)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (1) &\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{\sin x}} + 3^{\log_3 2^{\sqrt[3]{\sin x}}}} \leq 2 \cdot 2^{\sqrt[3]{\sin x}} \\ &\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{\sin x}} + 2^{\sqrt[3]{\sin x}} \leq 2 \cdot 2^{\sqrt[3]{\sin x}} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = 2^{\sqrt[3]{\sin x}} \quad (t \in [1; 2]).$$

$$\text{Khi đó } t + t^3 \leq 2t^2 \Leftrightarrow t(t-1)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \quad (\text{vì } t \geq 1).$$

$$\text{Do đó } 2^{\sqrt[3]{\sin x}} = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(thỏa mãn (2)).

$$\text{Vậy BPT có nghiệm } x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

NGUYỄN THỊ THU HƯƠNG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Cách giải. 2 cá thể đều dị hợp tử 2 cặp gen, mỗi gen trên 1 NST thường do đó các cặp gen phân li độc lập, vậy số kiểu giao tử là $2^2 \cdot 2^2 = 16$ (kiểu).

Số hợp tử thu được là $16 \cdot 6 = 96$ (hợp tử).

Vì hiệu quả thụ tinh là 80% nên số giao tử được hình thành là $96 : 80\% = 120$ (giao tử).

Suy ra số tế bào sinh dục sơ khai được tham gia giảm phân là $120 : 4 = 30$.

Gọi x, y, z, t lần lượt là số tế bào sinh dục sơ khai có nguồn gốc từ các tế bào A, B, C, D. Ta có hệ phương trình

Giải đáp bài: MỘT TIẾP TUYẾN đi đâu?

(Đề đăng trên THPT số 366, tháng 12 năm 2007)

Nguyên nhân một tiếp tuyến chung bị "mất tích" trong lời giải đã nêu chính là việc bạn Ti đã xét thiếu trường hợp tiếp tuyến chung có phương song song với trục Oy.

Ta biết rằng hai đường tròn cắt nhau thì số tiếp tuyến chung của chúng phải là 2. Như vậy nếu từ điều kiện tiếp xúc của (C_1) và (C_2) với đường thẳng (Δ) có phương trình $ax - y + b = 0$ chỉ tìm được một tiếp tuyến chung thì ta phải tìm tiếp tuyến chung thứ hai dưới dạng (Δ_2) : $x + c = 0$. Với bài toán này tiếp tuyến chung thứ hai cần tìm có phương trình $x + 1 = 0$. (Kết quả này có được nhờ điều kiện tiếp xúc của các đường tròn (C_1) và (C_2) với đường thẳng (Δ_2)).

Kết luận: PT hai tiếp tuyến chung thỏa mãn đề bài là $\Delta_1: y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$; $\Delta_2: x + 1 = 0$.

Nhận xét. Có rất nhiều lời bình cho bài giải của bạn Ti được gửi về Tòa soạn. Tất cả đều chỉ ra điểm còn *khuyết* trong lời giải của bạn đó. Đồng thời tìm đúng PT tiếp tuyến chung đã bị "mất tích". Các bạn sau có lời phân tích sai lầm tốt hơn cả: *Phạm Văn Cảnh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Hoàng Tuấn Anh*, 12A11, THPT Lương Đắc Bằng, Hoàng Hóa, **Lê Thanh Hà**, 11B12, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, **Thanh Hóa**; *Phan Minh Thắng*, 11A2, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**; *Lê Quang Vinh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**.

NGỌC HIỂN

$$\begin{cases} x+y+z+t=30 \\ xy=4x \\ z=2x \\ 4t=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=4 \\ z=16 \\ t=2 \end{cases}$$

Số lần phân bào tính theo công thức 2^k (k là số lần phân bào) ta có $kA = 3, kB = 2, kC = 4, kD = 1$.

Kết quả. Vậy tỉ lệ tốc độ phân bào của các tế bào A, B, C, D là: $V_A : V_B : V_C : V_D = 3 : 2 : 4 : 1$.

THẾ THẠCH – VĨNH LINH

English through math problems and solutions

UNIT 8 PROBLEM SOLVING CORNER

Problem. A primitive Pythagorean triangle (PPT) is a right triangle whose sides have lengths which are integers with a greatest common divisor of 1. Among all pairs of non-congruent PPTs which have congruent incircles with an integer radius, find a pair for which this radius is minimized.

Solution. It is known that a PPT has hypotenuse of length $m^2 + n^2$ and legs of length $2mn$ and $m^2 - n^2$, where m and n are integers of different parity with $\gcd(m, n) = 1$.

Let ABC be a PPT, and let r be its inradius.

Let $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, the semi-perimeter of triangle ABC . On the other hand, the area of triangle ABC is $\frac{1}{2}(2mn)(m^2 - n^2)$; beside, the area is also pr . Thus

$$r = \frac{mn(m^2 - n^2)}{p} = \frac{mn(m^2 - n^2)}{\frac{1}{2}(2mn + m^2 - n^2 + m^2 + n^2)} \\ = \frac{mn(m^2 - n^2)}{mn + m^2} = n(m - n).$$

Searching for pair of PPTs with minimal r , we find that

i) If $r = 1$, then $n(m - n) = 1$, which implies that $n = 1$, and $m = 2$. Therefore we have only one PPT when $r = 1$.

ii) If $r = 2$, then $n(m - n) = 2$, which implies that $(m, n) = (3, 1)$ or $(m, n) = (3, 2)$. Since 1 and 3 have the same parity, we again have only one PPT when $r = 2$.

iii) If $r = 3$, then $n(m - n) = 3$, which implies that $(m, n) = (4, 1)$ or $(m, n) = (4, 2)$. This leads to the required pair of PPTs.

Therefore, the pair of PPTs having congruent incircles with minimal integer radius are the triangle with side lengths 8, 15, 17 and the triangle with side lengths 7, 24, 25.

New words

PPT = tam giác Pythagore nguyên thủy

parity = tính chẵn lẻ

greatest common divisor (gcd) = ước chung lớn nhất

congruent = bằng nhau

hypotenuse = cạnh huyền

PHẠM VĂN THUẬN
(Hanoi University of Science)

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T8/369. Given a triangle ABC with circumcircle (O) and three sides $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Denote by A_1 , B_1 , and C_1 the midpoints of BC , CA , and AB respectively; and A_2 , B_2 , C_2 are the midpoint of the arcs $\widehat{BC}$ (which does not contain A), $\widehat{CA}$ (which does not contain B), and $\widehat{AB}$ (which does not contain C). Draw the circles (O_1) , (O_2) , and (O_3) whose diameters are A_1A_2 , B_1B_2 , and C_1C_2 respectively. Prove the inequality

$$\mathcal{P}_{A/(O_1)} + \mathcal{P}_{B/(O_2)} + \mathcal{P}_{C/(O_3)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

When does equality occur?

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/369. Find all positive integers x, y, z, n such that $x! + y! + z! = 5 \cdot n!$ where $k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$.

T10/369. Let a and b be two real numbers in the open interval $(0; 4)$. A sequence (a_n) , $(n = 0, 1, \dots)$ is constructed by the following recursive formula:

$$a_0 = a, a_1 = b, a_{n+2} = \frac{2(a_{n+1} + a_n)}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}}.$$

Prove that the sequence (a_n) , $(n = 0, 1, \dots)$ converges and find its limit.

T11/369. Find all functions $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that

$$f(f(x)) + f(x) = \left(26^{3^{2008}} + (26^{3^{2008}})^2\right)x.$$

T12/368. Let S denote the surface area of a given tetrahedron. Prove that the sum of areas of the six angle-bisectors of this tetrahedron

does not exceed $\frac{\sqrt{6}}{2}S$.

Translated by LE MINH HA

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 369(3.2008)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.5121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272, 04.5121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiTre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,

TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,

PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,

TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,

PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY,

GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Thái Nhật Phương – Ba đường tròn cắt nhau tại một điểm.
 - 3 **Lời giải đề thi vào lớp 10 trường phổ thông năng khiếu ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2007–2008.**
 - 4 **Đề thi vào lớp 10 chuyên trường THPT Amsterdam và THPT Chu Văn An Hà Nội, năm học 2007 – 2008.**
 - 5 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Thanh Loan – Ứng dụng đạo hàm và khảo sát hàm số.
 - 9 **Thử sức trước kì thi. Đề số 1.**
 - 10 **Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán THPT năm học 2007-2008.**
 - 12 **Giải đáp thắc mắc**
 - 13 **Giải trí toán học – Math Recreation**
 - 14 **Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Nguyễn Hữu Tâm – Về một bài toán xác định đa thức.
 - 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/369, ..., T12/369, L1/369, L2/369.
 - 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 365.
 - 28 **Kì thi khu vực lần thứ 8 giải toán trên máy tính cầm tay, năm học 2007 – 2008.**
 - 30 **Sai lầm ở đâu – Where's Mistake?**
 - 31 **Tiếng Anh qua các bài toán và lời giải – English through Math Problems and Solutions Unit 8**
-
- Bìa 2. **Lịch sử toán học – History of Maths**
Trần Đình Viên - Lớp toán đại cương đầu tiên của Nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa
- Bìa 3. **Câu lạc bộ – Math Club**

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.
Trị sự, phát hành : HOÀNG THÀNH DỨC, VŨ ANH THƯ

Mỹ thuật : MINH THO
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



THÁNG BA MỘT SỐ SỰ KIỆN LỊCH SỬ

Bạn hãy trình bày tóm tắt những sự kiện lịch sử xảy ra vào những ngày tháng Ba đáng ghi nhớ sau đây:

- 1) Ngày 6 tháng Ba
- 2) Ngày 8 tháng Ba
- 3) Ngày 9 tháng Ba
- 4) Ngày 19 tháng Ba
- 5) Ngày 26 tháng Ba

Bạn có biết khi nào, tổ chức nào quyết định lấy ngày 8 tháng Ba, ngày 26 tháng Ba làm ngày kỷ niệm chính thức?

Tặng phẩm sẽ dành cho các bạn viết ngắn gọn mà đủ ý chính và gửi về Tòa soạn sớm.

Giải đáp: **NHỮNG DẤU SON NĂM TÝ** trong Lịch sử đấu tranh giữ nước (Đề đăng trên THPT số 367 tháng 1.2008)



Nếu biết năm dương lịch thì có thể suy ra năm âm lịch bằng cách sau: Các năm Mậu Tý được lặp lại sau 60 năm, còn trong một chu kỳ 60 năm thì các năm Tý cách nhau 12 năm theo thứ tự (tuần hoàn) là Giáp Tý, Bình Tý, Mậu Tý, Canh Tý, Nhâm Tý. Chẳng hạn, ta tìm năm âm lịch ứng với năm 40 dương lịch. Ta biết năm 2008 là năm Mậu Tý mà $2008 = 60.33 + 28$ nên năm 28 là năm Mậu Tý. Năm $40 = 28 + 12$ nên năm 40 là năm Canh Tý. Tương tự như thế ta tìm được các năm âm lịch khác theo đề ra:

1. Khởi nghĩa Hai Bà Trưng vào năm 40 (**Canh Tý**).
2. Lý Nam Đế tuyên bố độc lập, đặt tên nước là Vạn Xuân vào năm 544 (**Giáp Tý**).
3. Trận Bạch Đằng, Trần Hưng Đạo đánh thắng giặc Nguyên Mông vào năm 1288 (**Mậu Tý**).
4. Thành lập Mặt trận dân chủ Đông dương vào năm 1936 (**Bính Tý**).
5. Chiến thắng quân Pháp tại La Ngà và Nghĩa Lộ vào năm 1948 (**Mậu Tý**).

6. Thành lập Mặt trận Dân tộc giải phóng miền Nam Việt Nam vào năm 1960 (**Canh Tý**).

7. Trận đánh thắng B52 của Mỹ ở miền Bắc Việt Nam vào năm 1972 (**Nhâm Tý**).

Một vài bạn thắc mắc về chiến thắng Nghĩa Lộ, xin trả lời: Chiến dịch Nghĩa Lộ từ 18 đến 26.3.1948, còn chiến dịch Tây Bắc (từ 10.1952) giải phóng một vùng rộng lớn ở Tây Bắc (có Nghĩa Lộ), buộc địch rút khỏi Sơn La (12.1952).

Các bạn sau có lời giải tốt và gửi bài sớm, được nhận tặng phẩm:

Trần Thiên Hương, 9H, THCS TTr. Hữu Lũng, Hữu Lũng, **Lạng Sơn**; Nguyễn Đình Quý, 9E, THCS Lê Mao, TP. Vinh, **Nghệ An**; Hoàng Khắc Hiếu, 6/1, THCS Đức Ninh, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**; Lê Thị Hương Giang, 8B, THCS Cửa Tùng, Vĩnh Linh, **Quảng Trị**; Lê Trung Văn, 12C1, THPT Vạn Tường, Bình Sơn, **Quảng Ngãi**; Phạm Thị Thúy Nga, 11A9, THPT Mỹ Tho, Ý Yên, **Nam Định**.

VÂN KHANH

Sách đang phát hành

★ TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

QUYỂN 1 (tái bản)

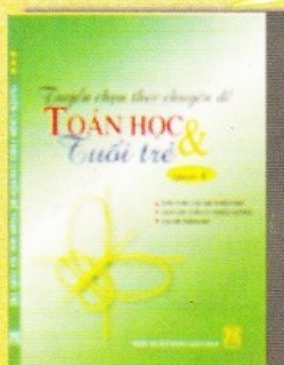
300 trang, khổ 19x26,5cm.
Giá bán lẻ: 34.000 đồng.

QUYỂN 2 (tái bản)

252 trang, khổ 19x26,5cm.
Giá bán lẻ: 30.000 đồng.

QUYỂN 3

MỚI



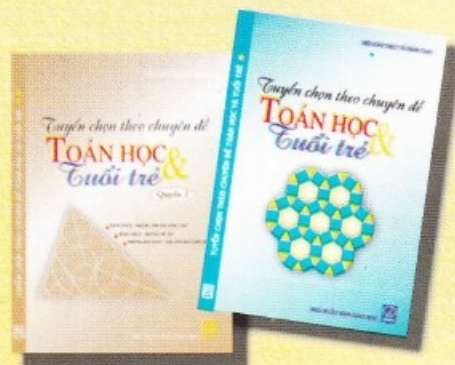
Sách chọn lọc các bài viết và đề toán đã đăng trên tạp chí THPT gồm ba chương:

Chương I: Khai thác các bài toán THCS

Chương II: Nhìn bài toán từ nhiều hướng

Chương III: Giới thiệu 100 đề toán hay

Sách dày 252 trang, khổ 19x26,5cm. Giá bán lẻ: 34.000 đồng.



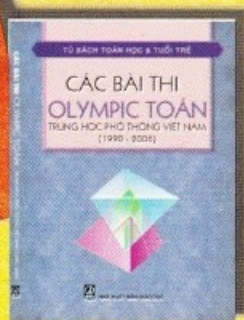
★ AN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ

164 trang, khổ 17x24cm. Giá bán lẻ: 21.500 đồng



★ CÁC BÀI THI OLYMPIC TOÁN THPT VIỆT NAM (1990-2006)

284 trang, khổ 17x24cm Giá bán lẻ: 39.500 đồng



★ ĐÓNG TẬP THPT năm 2007

Giá bán lẻ : 75.000 đồng

Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên, đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

Mua từ 10 quyển trở lên được trừ phi phát hành. Để biết thông tin chi tiết xin liên hệ:

ĐT/FAX: 04.5144272-04.5121606; Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

ISSN :0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT03M8

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2008

Giá: 5000 đồng

Năm nghìn đồng