



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

2 2008
Số 368

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 45

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272, (04)5121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre

50
NIỆM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lễ kỉ niệm
50 NĂM THÀNH LẬP
và đón nhận Huân chương
HỒ CHÍ MINH

Hà Nội, ngày 18 tháng 1 năm 2008



Chào Xuân Mậu Tý
2008

Ngày 18/01/2008 tại Cung Văn hóa Hữu Nghị Việt Xô, NXB Giáo dục long trọng tổ chức Lễ Kỷ niệm 50 năm thành lập và đón nhận Huân chương Hồ Chí Minh với thành tích xuất sắc đóng góp vào sự nghiệp cách mạng của Đảng và của dân tộc. Nhân dịp này, tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin giới thiệu cùng bạn đọc bài thơ của Phó Tổng Giám đốc NXB Giáo dục kiêm Giám đốc NXB Giáo dục tại TP. Đà Nẵng Huỳnh Bá Văn phản ánh phần nào công việc vất vả, thầm lặng nhưng đầy vinh quang của chặng đường 50 năm NXB Giáo dục.

Năm mươi năm trên đường ta đi tới

Mười tầng cao giữa đất trời
Năm mươi năm vẫn một lời thủy chung
Mỗi trang sách nhỏ lên đường
Mang bao sức sống, cho đời mai sau...

Năm mươi năm ta về
Đường xưa giờ đã khác
Con đường Trần Hưng Đạo thành thang
Nhà ta đã khang trang
Mười tầng trong gió mênh mang
Hà Nội
Mùa Xuân ngút ngàn...

Năm mươi năm ta về
Thấy em tóc đã bạc phơ
Vẫn còn bao sách vở
Biên tập tặng cho đời...

Năm mươi năm
Bao người chung sức mình
Xây dựng đẹp Quê hương

Nhà xuất bản Giáo dục
đã thành Tổng công ti
Mẹ con vất vả
về tương lai...

Vững bước đi lên khi quê nhà đổi mới
Bao nhiêu công ti đã cổ phần đang phấn khởi
Nhà ta hân hoan
trên con đường thẳng tới
Vượt qua gian lao
Vượt qua thách ghênh...

Nhớ những năm xưa Quê hương nghèo đạn bom
Ta luôn xung phong tới bản làng, hải đảo
Vì tương lai em thơ
Trong sách hồng dựng nước
Ta góp công làm nên chiến thắng
cho quê hương nhà...

Năm năm mươi
Ta về sum họp giữa Thủ đô...





TÌM CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC NHIỀU BIẾN BẰNG CÁCH QUY VỀ MỘT BIẾN

BÙI TUẤN ANH

(GV THPT Yên Thủy, Hoà Bình)

Để tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN), giá trị lớn nhất (GTLN) của một biểu thức chứa nhiều hơn một biến số ta có thể biểu diễn các biến số của biểu thức đó theo một biến số mới, khi đó việc tìm GTNN, GTLN của biểu thức theo biến số mới này (chú ý đến điều kiện của nó) cũng chính là việc tìm GTNN, GTLN của biểu thức ban đầu. Dưới đây là một thí dụ minh họa cho phương pháp tìm GTNN, GTLN bằng cách quy về một biến nói trên.

Thí dụ 1. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Tìm GTNN của biểu thức

$$A = \frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}} + \frac{\sqrt[4]{abcd}}{a+b+c+d}.$$

Lời giải. Đặt $t = \frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}$, áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

$$a + b + c + d \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd} \geq 4\sqrt[4]{abcd}.$$

Suy ra $t \geq 4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Khi đó bài toán quy về tìm GTNN của

$$A(t) = t + \frac{1}{t} \text{ với } t \geq 4.$$

Xét $t_2 > t_1 \geq 4$ ta có

$$A(t_2) - A(t_1) = \frac{(t_2 - t_1)(t_1 t_2 - 1)}{t_1 t_2} > 0.$$

Vậy khi $t \geq 4$ thì hàm $A(t)$ đồng biến. Do đó GTNN của A bằng $\frac{17}{4}$ đạt được tại $t = 4$ khi và chỉ khi $a = b = c = d$. $\square$

Thí dụ 2. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $P = x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2$, biết rằng x, y thoả mãn

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 - 5y^2 + 3x^2y^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

Lời giải. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 2 = -x^2 - 3x^2y^2 \quad (2)$$

Để thấy $-x^2 - 3x^2y^2 \leq 0$ với mọi x, y . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Đặt $t = x^2 + y^2$, từ (2) ta có

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2 \text{ và } P \text{ có dạng}$$

$$P(t) = t^2 - t + 2.$$

Bài toán quy về tìm GTNN và GTLN của

$$P(t) = t^2 - t + 2 \text{ với } 1 \leq t \leq 2.$$

Xét $1 \leq t_1 < t_2 \leq 2$ ta có

$$P(t_2) - P(t_1) = (t_2 - t_1)(t_1 + t_2 - 1) > 0.$$

Suy ra với $1 \leq t \leq 2$ thì hàm $P(t)$ đồng biến, do đó:

P đạt GTNN bằng 2 tại $t = 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ và } y = \pm 1;$$

P đạt GTLN bằng 4 tại $t = 2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ và } y = \pm\sqrt{2}. \quad \square$$

Thí dụ 3. Cho hai số thực a, b thuộc đoạn $[2007; 2008]$. Tìm GTNN của biểu thức

$$B = \frac{a+b}{ab^2} (a^2 + b^2).$$

TOÁN HỌC
‘Tuổi trẻ’

Số 368 (2-2008)

1

Lời giải. • Nếu $2007 \leq a \leq b \leq 2008$, suy ra $\frac{2007}{2008} \leq t \leq 1$, trong đó $t = \frac{a}{b}$. Lúc đó B có dạng

$$B(t) = (t+1) \left(t + \frac{1}{t} \right).$$

Bài toán quy về tìm GTNN của

$$B(t) = t^2 + t + 1 + \frac{1}{t}, \text{ với } \frac{2007}{2008} \leq t \leq 1.$$

Xét $\frac{2007}{2008} \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ ta có

$$B(t_2) - B(t_1) = (t_2 - t_1) \left(t_2 + t_1 + 1 - \frac{1}{t_1 t_2} \right) > 0.$$

Vậy với $\frac{2007}{2008} \leq t \leq 1$ thì hàm $B(t)$ đồng biến,

do đó GTNN của B bằng $\frac{2007+2008}{2007 \cdot 2008^2} (2007^2 + 2008^2)$, đạt được khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = \frac{2007}{2008}$.

• Nếu $2007 \leq b \leq a \leq 2008$, lập luận tương tự thì B đạt GTNN bằng 4 khi và chỉ khi $a = b$.

Kết hợp hai trường hợp, B đạt GTNN bằng $\frac{2007+2008}{2007 \cdot 2008^2} (2007^2 + 2008^2)$ khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = \frac{2007}{2008}$ và $2007 \leq a, b \leq 2008$. $\square$

★Thí dụ 4. Cho hai số x, y khác 0 thay đổi thoả mãn $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm GTLN của biểu thức $C = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Lời giải. Cách 1. Đặt $u = x + y, v = xy$ (điều kiện $u^2 \geq 4v$). Khi đó theo giả thiết của bài toán ta có $uv = u^2 - 3v$, dễ thấy $u \neq 0, u \neq -3$ do đó $v = \frac{u^2}{u+3}$ và điều kiện trở thành

$$u^2 \geq \frac{4u^2}{u+3} \Leftrightarrow \frac{u-1}{u+3} \geq 0 \Leftrightarrow u \geq 1 \text{ hoặc } u < -3 \quad (*)$$

Sử dụng giả thiết ta biểu diễn được C theo u :

$$C = \frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{x^3y^3} = \frac{u^2+6u+9}{u^2} = C(u).$$

Từ đây và (*), để tìm GTLN của C ta chỉ cần xét trên khoảng $u \geq 1$. Với $u_2 > u_1 \geq 1$ ta có

$$C(u_2) - C(u_1) = -(u_2 - u_1) \frac{u_1 + u_2 + 6u_1u_2}{u_1^2 u_2^2} < 0.$$

Suy ra khi $u \geq 1$ thì hàm $C(u)$ nghịch biến, do đó GTLN của C bằng 16 đạt được khi và chỉ khi $u = 1$ hay $x = y = \frac{1}{2}$.

Cách 2. Đặt $t = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Từ giả thiết có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy} \quad (\text{chia cả hai vế cho } x^2y^2). \text{ Suy ra } C = t^2 \text{ và}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2$$

(đẳng thức xảy ra khi $x = y$)

$$\Rightarrow 4t \geq t^2 \Rightarrow 0 \leq t \leq 4 \text{ nên } t^2 \leq 16.$$

Từ đó suy ra C đạt GTLN bằng 16 khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$. $\square$

Các bạn hãy sử dụng phương pháp trên để giải các bài toán sau đây.

Bài toán 1. Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi thoả mãn điều kiện $x + y + z \leq \frac{20}{11}$.

Tìm GTNN của biểu thức

$$T_1 = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Bài toán 2. Cho x, y là hai số thực thay đổi thoả mãn điều kiện $2(x^2 + y^2) = xy + 1$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$T_2 = 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2.$$

Bài toán 3. Cho ba số thực x, y, z thuộc đoạn $[a; b]$ với $0 < a < b$. Tìm GTLN của biểu thức

$$T_3 = (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH

NĂM HỌC 2007-2008

VÒNG 1

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1. Cho phương trình

$$(m+1)x^2 - (2m+3)x + 2 = 0,$$

với m là tham số.

a) Giải phương trình với $m = 1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt sao cho nghiệm này gấp bốn lần nghiệm kia.

Bài 2. a) Giải phương trình

$$2x^2 + 2x + 1 = \sqrt{4x+1}.$$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 + y \\ y^2 + x = 6. \end{cases}$$

Bài 3. Cho hai số x, y thỏa mãn đẳng thức

$$(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{y^2+4}-y)=4. \text{ Tính } x+y.$$

Bài 4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm M bất kì thuộc đường tròn (M khác A và B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên AB . Đường tròn đường kính HM cắt các dây cung MA, MB lần lượt tại P, Q .

a) Chứng minh rằng $\widehat{PHQ} = 90^\circ$ và

$$MP \cdot MA = MQ \cdot MB.$$

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH, BH . Tứ giác $EPQF$ là hình gì?

c) Xác định vị trí của M để tứ giác $EPQF$ có diện tích lớn nhất.

Bài 5. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn

$$a+b+c=1. \text{ Chứng minh rằng } \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \geq 16.$$

VÒNG 2

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 6. a) Giải phương trình

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x - 4 = 0.$$

b) Tìm những điểm $M(x; y)$ trên đường thẳng $y = x + 1$ có tọa độ thỏa mãn đẳng thức

$$y^2 - 3y\sqrt{x} + 2x = 0.$$

Bài 7. Các số x, y, z khác 0, thỏa mãn

$$xy + yz + xz = 0. \text{ Tính giá trị của biểu thức}$$

$$P = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}.$$

Bài 8. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - xy + y^2 = 2x - 3y - 2.$$

Bài 9. Tìm tất cả các bộ ba số dương $(x; y; z)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 2x^{2008} = y^{2007} + z^{2006} \\ 2y^{2008} = z^{2007} + x^{2006} \\ 2z^{2008} = x^{2007} + y^{2006} \end{cases}$$

Bài 10. Từ một điểm P ở ngoài đường tròn tâm O , vẽ hai tiếp tuyến PE, PF tới đường tròn (E, F là các tiếp điểm). Tia PO cắt đường tròn tại A, B sao cho A nằm giữa P và O . Kẻ EH vuông góc với FB ($H \in FB$). Gọi I là trung điểm của EH . Tia BI cắt đường tròn tại M ($M \neq B$), EF cắt AB tại N . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{EMN} = 90^\circ$.

b) Đường thẳng AB là tiếp tuyến của đường tròn đi qua ba điểm P, E, M .

Bài 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z \geq 4$.

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)
(sưu tầm và giới thiệu)

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2007-2008

(Đề thi đã đăng trên THPT số 366, tháng 12 năm 2007)

Câu 1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương và $xy = 1$, ta có

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{(x - y)^2 + 2xy}{x - y} = x - y + \frac{2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x - y = \frac{2}{x - y} \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \sqrt{2} \\ xy = 1 \end{cases} \quad (\text{do } x > y)$$

Ta thấy x và $-y$ là hai nghiệm của phương trình $t^2 - \sqrt{2}t - 1 = 0$. Vậy đẳng thức xảy ra khi

$$x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \quad (\text{do } x > y).$$

Câu 2. a) $x^2 + x - 2 = |x|$ (1)

+ Xét $x > 0$, $|x| = x$, PT (1) trở thành $x^2 - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ (loại) hoặc $x = \sqrt{2}$ (thỏa mãn).

+ Xét $x < 0$, $|x| = -x$, PT (1) trở thành
 $x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3}$ (loại)
 hoặc $x = -1 - \sqrt{3}$ (thỏa mãn).

Kết luận: Tập nghiệm của PT (1) là $\{\sqrt{2}; -1 - \sqrt{3}\}$.

b) $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$ (2)

Đặt $a = \sqrt{4x^2 + 5x + 1}$, $b = \sqrt{x^2 - x + 1}$ ta thu được HPT

$$\begin{cases} a^2 - 4b^2 = 9x - 3 \\ a - 2b = 9x - 3. \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được
 $a^2 - 4b^2 = a - 2b \Leftrightarrow (a - 2b)(a + 2b - 1) = 0$.

+ Nếu $a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$ thì

$\sqrt{x^4 + 5x + 1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1}$. Bình phương hai vế ta được $9x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (thỏa mãn).

+ Nếu $a + 2b - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 - 2b$ thì
 $\sqrt{x^4 + 5x + 1} = 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}$.

Lại có

$$1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq 1 - \sqrt{3} < 0,$$

trong khi đó vế trái không âm, do đó trường hợp này không xảy ra. Vậy PT (2) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$.

Câu 3. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $x \geq a \geq b \geq y$. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x - a = b - y \\ x^4 - a^4 = b^4 - y^4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x - a = b - y \\ x^4 - a^4 = b^4 - y^4 \end{cases} \quad (2)$$

Biến đổi (2) ta được $(x - a)(x + a)(x^2 + a^2) = (b - y)(b + y)(b^2 + y^2)$ (3)

Theo (1) ta thấy

+ Nếu $x - a = b - y = 0 \Leftrightarrow x = a$ và $y = b$ thì
 $x^n + y^n = a^n + b^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

+ Nếu $x - a = b - y \neq 0$ thì từ (3) suy ra
 $(x + a)(x^2 + a^2) = (b + y)(b^2 + y^2)$, ta có hai trường hợp sau đây.

• Nếu $x + a \geq b + y \geq 0$ (4)
 thì $x \geq a \geq b \geq 0$, do đó $xa \geq by$.

Từ (1) ta có $x^2 + a^2 - 2ax = b^2 + y^2 - 2by$, suy ra $x^2 + a^2 \geq b^2 + y^2$ (5)

Từ (4) và (5) ta có

$$(x + a)(x^2 + a^2) \geq (b + y)(b^2 + y^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi $x + a = b + y$ (6)

Từ (1) và (6) suy ra $x = a = y = b$.

Vậy $x^n + y^n = a^n + b^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

• Nếu $0 \geq x + a \geq b + y$ (7)

Từ (7) suy ra $0 \geq x \geq a \geq b \geq y$, do đó $xa \leq by$.

(Xem tiếp trang 28)



Ứng dụng tích phân ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH

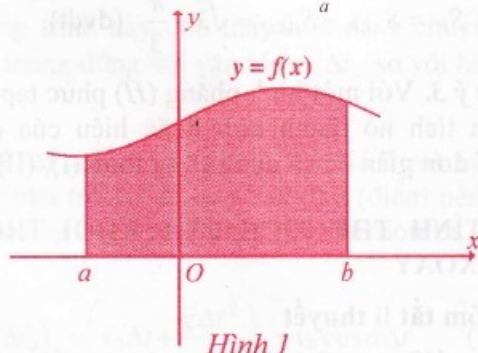
NGỌC THẢO
(Hà Nội)

LTS. Từ số báo này, chúng tôi lần lượt trình bày các chủ đề cơ bản nhất, bao gồm các kiến thức cơ bản và các dạng toán, trong chương trình thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh Đại học – Cao đẳng.

A. TÍNH DIỆN TÍCH CỦA HÌNH PHẪNG

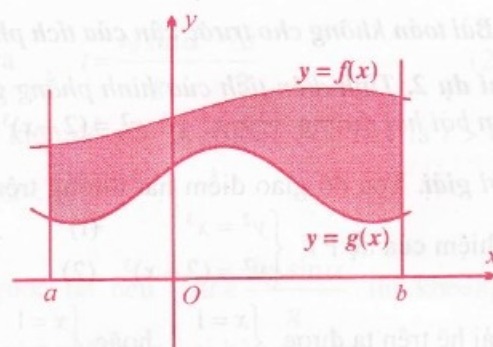
I. Tóm tắt lý thuyết

- Nếu hàm số (HS) $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị HS $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ (h. 1) là $S = \int_a^b |f(x)| dx$ (I).



Hình 1

- Nếu các HS $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các HS $y = f(x), y = g(x)$, và hai đường thẳng $x = a, x = b$ (h. 2) là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ (II).



Hình 2

Thay đổi vai trò của x và y cho nhau, ta được các công thức tương tự với x là HS của y .

II. Các dạng toán

1. Bài toán cho trước cận của tích phân

Thí dụ 1. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình (PT):

$$y = x^2 - x - 2, y = 0, x = -2; x = 0.$$

Lời giải. Áp dụng công thức (I) ta có

$$S = \int_{-2}^0 |x^2 - x - 2| dx.$$

Ta có $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$

Lại có $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \text{ khi } x \in [-2; -1] \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \text{ khi } x \in [-1; 0] \end{cases}$

nên $S = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx - \int_{-1}^0 (x^2 - x - 2) dx$
 $= 3$ (đvdt).

Lưu ý 1. Khi tính tích phân $S = \int_a^b |f(x)| dx$, ta làm như sau:

- Giải PT $f(x) = 0$ với $a \leq x \leq b$.
- Xét dấu của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $\begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ khi } x \in [a; c] \\ f(x) \leq 0 \text{ khi } x \in [c; b] \end{cases}$ thì $S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

2. Bài toán không cho trước cận của tích phân

Thí dụ 2. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y^2 = x^3$ và $y^2 = (2-x)^3$.

Lời giải. Tọa độ giao điểm hai đường trên là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} y^2 = x^3 & (1) \\ y^2 = (2-x)^3 & (2) \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Ta viết các PT (1), (2) dưới dạng HS của x theo y : $x = y^{\frac{2}{3}}$ và $x = 2 - y^{\frac{2}{3}}$ với $y \in [-1; 1]$.

Từ đó

$$S = \int_{-1}^1 \left(y^{\frac{2}{3}} - \left(2 - y^{\frac{2}{3}} \right) \right) dy = \int_{-1}^1 \left(2 - 2y^{\frac{2}{3}} \right) dy = \frac{8}{5} \text{ (dvdt)}.$$

Lưu ý 2. Để tính diện tích của hình phẳng, giới hạn bởi hai đường có PT $f(x, y) = 0$ và $g(x, y) = 0$ ta làm như sau:

- Giải hệ $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ tìm tọa độ giao điểm của hai đường.
- Chuyển hai PT về dạng HS (với đối số thích hợp); xác định cận của tích phân.
- Tính diện tích của hình phẳng theo công thức (II).

3. Sử dụng hình vẽ để định cách giải

Thí dụ 3. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes, cho elip có PT $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (E) và

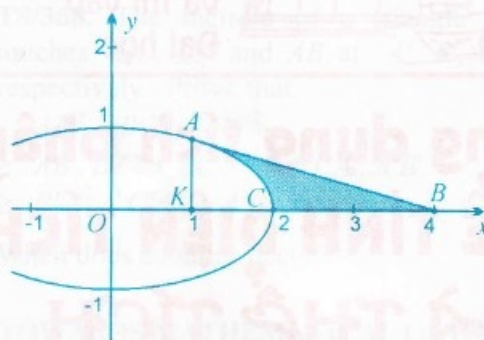
điểm $A\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ thuộc (E).

Tính diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi ba đường: elip, tiếp tuyến với elip tại A và trục Ox.

Lời giải. PT tiếp tuyến với (E) tại A là $\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$ (d). Đường thẳng (d) cắt trục

hoành tại B(4; 0). Hình phẳng (H) có ba đỉnh A, B và C(2; 0).

Kẻ AK vuông góc với trục hoành, thế thì diện tích của hình (H) là $S_H = S_{AKB} - S_{AKC}$ (h.3).



Hình 3

Ta có $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $KB = 3$ nên $S_{AKB} = \frac{1}{2} AK \cdot KB = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Những điểm thuộc hình (H) có tung độ $y \geq 0$

nên từ PT (E) suy ra $y = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$. Do đó

$$S_{AKC} = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

Đặt $x = 2\sin t$; ta tính được

$$S_{AKC} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t dt = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy $S_H = S_{AKB} - S_{AKC} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (dvdt).

Lưu ý 3. Với một hình phẳng (H) phức tạp, ta phân tích nó thành hợp hoặc hiệu của các hình đơn giản để sử dụng công thức (I), (II).

B. TÍNH THỂ TÍCH CỦA KHỐI TRÒN XOAY

I. Tóm tắt lí thuyết

- Cho HS $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị HS $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (h. 1) quay xung quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay có thể tích là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (\text{III})$$

• Cho hai HS $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục, cùng dấu trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các HS trên và hai đường thẳng $x = a, x = b$ (h. 2) quay xung quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay có thể tích là $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$ (IV).

Bạn đọc tự viết công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay một hình phẳng xung quanh trục tung.

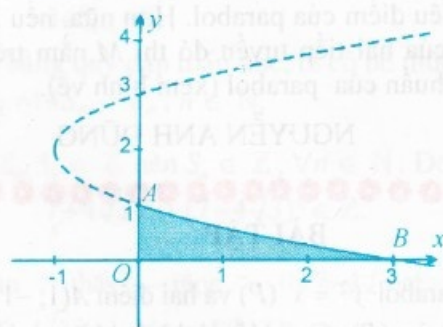
II. Các dạng toán

1. Hình phẳng quay xung quanh trục hoành

Thí dụ 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes cho hình (H) giới hạn bởi ba đường: $x - y^2 + 4y - 3 = 0$; $x = 0$; $y = 0$.

Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) một vòng xung quanh trục hoành.

Lời giải. Tính được tọa độ ba đỉnh của hình (H) là $O(0;0)$, $A(0;1)$ và $B(3;0)$ (h. 4).



Hình 4

Ta viết PT $x - y^2 + 4y - 3 = 0$ (I) dưới dạng HS của y theo x .

Với $x \geq -1$, có

$$(I) \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \sqrt{x+1} \leq 2 \\ y = 2 + \sqrt{x+1} \geq 2 \end{cases}$$

Phần parabol giới hạn của hình (H) tương ứng với $y < 2$ nên $y = 2 - \sqrt{x+1}$

$$2 - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Do đó

$$V = \pi \int_0^3 (2 - \sqrt{x+1})^2 dx = \pi \int_0^3 (x+5) dx - 4\pi \int_0^3 \sqrt{x+1} dx$$

$$\text{Tính được } V = \frac{5\pi}{6} \text{ (dvtt).}$$

Lưu ý 4. Để tính thể tích của khối tròn xoay khi quay một hình phẳng xung quanh trục hoành, ta làm như sau:

• Tìm tọa độ giao điểm của các đường cho trong đầu bài để suy ra cận của tích phân.

• Viết PT $f(x, y) = 0$ (nếu có) thành HS của y theo x .

• Sử dụng công thức (III) hoặc (IV) để tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành.

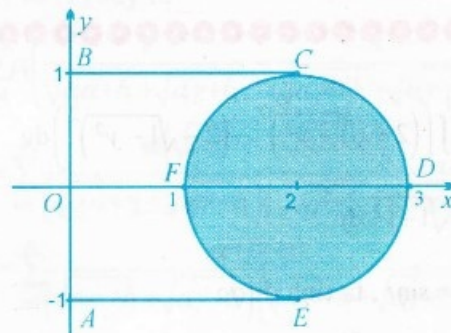
2. Hình phẳng quay xung quanh trục tung

Thí dụ 5. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình tròn $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ một vòng xung quanh trục tung.

Lời giải. PT đường tròn ở đề bài có dạng

$$x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0 \quad (1)$$

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tròn xoay do các hình phẳng $ABCDE$ và $ABCFE$ quay xung quanh trục tung tạo thành (h. 5).



Hình 5

$$\text{Thế thì } V = V_1 - V_2 \quad (2)$$

Để tính V_1, V_2 ta viết (1) dưới dạng HS của x theo y . Với $-1 \leq y \leq 1$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{1-y^2} \text{ (PT cung EFC)} \\ x = 2 + \sqrt{1-y^2} \text{ (PT cung EDC)} \end{cases}$$



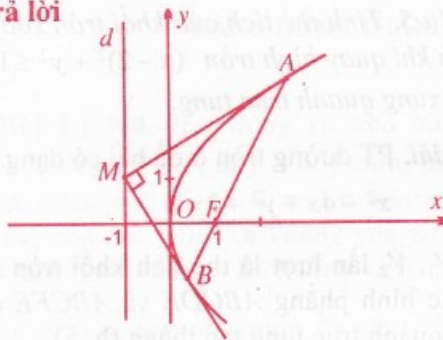
LTS. Để giúp cho các bạn lớp 12 ôn thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học, Cao đẳng, từ số này Tập

chỉ mở thêm chuyên mục này. Rất mong sự hưởng ứng của các bạn. Sau đây, xin giới thiệu câu hỏi của bạn Nguyễn Thị Thùy Linh lớp 12A trường Phổ thông chuyên Ngoại ngữ Hà Nội.

Câu hỏi. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes vuông góc cho parabol có phương trình $y^2=4x$ (P). Giả sử A, B là hai điểm thay đổi trên (P) sao cho các tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau.

Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Trả lời



Do đó

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left((2 + \sqrt{1-y^2})^2 - (2 - \sqrt{1-y^2})^2 \right) dy$$

$$= 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy$$

Đặt $y = \sin t$, ta tính được

$$V = 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4\pi^2 \text{ (đvtt)}.$$

Lưu ý 5. Việc tính thể tích của khối tròn xoay khi quay một hình phẳng xung quanh trục tung được làm như trong **lưu ý 4**, chuyển PT $f(x,y)=0$ thành HS của x theo y , $x = g(y)$, cận của tích phân là tập xác định của hàm số này.

Giả sử tung độ của các điểm A, B lần lượt là a, b thì $A\left(\frac{a^2}{4}; a\right), B\left(\frac{b^2}{4}; b\right)$ với $a \neq b$.

PT tiếp tuyến với (P) tại A và B lần lượt là:

$$2x - ay + \frac{a^2}{2} = 0 \quad (d_1); \quad 2x - by + \frac{b^2}{2} = 0 \quad (d_2)$$

Các vectơ pháp tuyến của d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{n}_1 = (2; -a), \vec{n}_2 = (2; -b)$.

Vì $d_1 \perp d_2$ nên $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow ab = -4$.

Ta có PT đường thẳng AB: $\frac{x - \frac{a^2}{4}}{\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{y - a}{b - a}$

$$\Leftrightarrow 4x - (a+b)y + ab = 0.$$

Thay $ab = -4$, ta được $4x - (a+b)y - 4 = 0$.

Để dàng thấy đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định (1;0) (là tiêu điểm của parabol).

Lưu ý. Ta có thể chứng minh tổng quát rằng:

Nếu A, B là hai điểm thay đổi trên một parabol bất kì sao cho các tiếp tuyến tại A; B vuông góc với nhau, thì đường thẳng AB luôn đi qua tiêu điểm của parabol. Hơn nữa, nếu M là giao của hai tiếp tuyến đó thì M nằm trên đường chuẩn của parabol (xem hình vẽ).

NGUYỄN ANH DŨNG

BÀI TẬP

1. Cho parabol $y^2 = x$ (P) và hai điểm A(1; -1), B(4; 2) trên (P). Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi (P) và dây cung AB.

- Tính diện tích của (H).
- Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục tung.

2. Cho hình phẳng (H), giới hạn bởi các đường $y = (x-1)^2; y = x+1$.

- Tính diện tích của (H).
- Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục hoành.
- Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục tung.



Về những dãy số XÁC ĐỊNH BỞI DÃY CÁC PHƯƠNG TRÌNH

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN TP. Hồ Chí Minh)

Trong toán học, có nhiều trường hợp không xác định được giá trị cụ thể đối tượng mà chúng ta đang xét (thí dụ số, hàm số) nhưng vẫn có thể thực hiện các phép toán trên các đối tượng đó. Thí dụ ta có thể không biết giá trị các nghiệm của một phương trình (PT), nhưng vẫn biết được tổng của chúng:

"Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos^5 x - 5\cos^3 x + 3\cos x - 1 = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$," hay là tính tích phân của một hàm mà ta không có biểu thức tường minh:

"Chứng minh rằng với mọi $t \geq 0$, PT $x^3 + tx - 8 = 0$ luôn có một nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là $x(t)$. Tính $\int_0^7 [x(t)]^2 dt$."

Trong bài viết này, chúng ta sẽ đề cập đến một tình huống căn bản khác, đó là khảo sát những dãy số xác định bởi dãy các PT:

Cho dãy các hàm số $f_n(x)$ xác định bởi công thức tường minh hoặc truy hồi thoả mãn điều kiện: các PT $f_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_n \in D$. Cần khảo sát các tính chất của dãy (x_n) như khảo sát sự hội tụ, tìm giới hạn ...

Chúng ta bắt đầu từ một bài thi tuyển sinh vào khoa Toán trường Đại học Độc lập Matxcova năm 2000.

★ **Bài toán 1.** Giả sử x_n thuộc khoảng $(0; 1)$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n} = 0.$$

Chứng minh dãy (x_n) hội tụ. Tìm giới hạn đó.

Bình luận. x_n được xác định duy nhất, vì hàm số $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n}$ liên tục và đơn

điệu trên $(0; 1)$. Tuy nhiên, ta không thể xác định được giá trị cụ thể của x_n . Rất may mắn, để chứng minh tính hội tụ của (x_n) , ta không cần đến điều đó. Chỉ cần chứng minh tính đơn điệu và bị chặn là đủ. Về tính bị chặn, mọi thứ đều ổn vì $0 < x_n < 1$. Về tính đơn điệu, ta chú ý một chút đến mối liên hệ giữa $f_n(x)$ và $f_{n+1}(x)$:

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{x-n-1}.$$

Đây chính là chìa khoá để chứng minh tính đơn điệu của x_n .

Lời giải. Ta thấy $0 < x_n < 1$ nên

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \frac{1}{x_n - n - 1} = \frac{1}{x_n - n - 1} < 0,$$

trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0; x_n)$ có ít nhất một nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1} . Suy ra $x_{n+1} < x_n$. Tức là dãy số (x_n) giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn.

Ta chứng minh giới hạn nói trên bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả sau:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln n.$$

(Có thể chứng minh bằng cách đánh giá

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Thật vậy, giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a > 0$. Khi đó, do dãy (x_n) giảm nên ta có $x_n \geq a$ với mọi n .

Do $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nên tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{1}{a}.$$

Khi đó với $n \geq N$ thì

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \dots + \frac{1}{x_n - n} \\ < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \dots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$$

Mâu thuẫn. Vậy phải có $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. $\square$

★ Bài toán 2. Cho n là một số nguyên dương ($n > 1$). Chứng minh rằng phương trình $x^n = x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là x_n . Chứng tỏ rằng $x_n \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow +\infty$ và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(x_n - 1)$.

Lời giải. Việc chứng minh PT $x^n = x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất xin dành cho bạn đọc. Rõ ràng $x_n > 1$. Đặt $f_n(x) = x^n - x - 1$. Khi đó $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ và $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1 > x_n^n - x_n - 1 = f_n(x_n) = 0$.

Từ đó $1 < x_{n+1} < x_n$. Suy ra dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn a . Ta chứng minh $a = 1$. Thật vậy, giả sử $a > 1$. Khi đó $x_n \geq a$ với mọi n và ta tìm được n đủ lớn sao cho $x_n^n \geq a^n > 3$ với $x_n + 1 < 3$, mâu thuẫn với $f_n(x_n) = 0$.

Để giải phần cuối, ta đặt $x_n = 1 + y_n$ với $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$. Thay vào phương trình $f_n(x_n) = 0$, ta được $(1 + y_n)^n = 2 + y_n$. Suy ra $n \ln(1 + y_n) = \ln(2 + y_n)$

Từ đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 + y_n) = \ln 2$.

Nhưng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + y_n)}{y_n} = 1$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} n y_n = \ln 2$, tức là $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(x_n - 1) = \ln 2$. $\square$

★ Bài toán 3. (VMO 2007). Cho số thực $a > 2$ và $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \dots + x + 1$.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình $f_n(x) = a$ luôn có một nghiệm dương duy nhất.

b) Gọi nghiệm đó là x_n , chứng minh dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải. Kết quả của câu a) là hiển nhiên vì hàm $f_n(x)$ tăng trên $(0; +\infty)$. Dễ nhận thấy

$0 < x_n < 1$. Ta chứng minh dãy (x_n) tăng, tức là $x_{n+1} > x_n$. Tương tự như những lời giải trên, xét

$$f_{n+1}(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + x_n^n + \dots + x_n + 1 \\ = x_n f_n(x_n) + 1 = a x_n + 1.$$

Vì $f_{n+1}(1) = a^{10} + n + 1 > a$ nên chỉ cần chứng minh $a x_n + 1 < a$ sẽ suy ra $x_n < x_{n+1} < 1$.

Hay cần chứng minh $x_n < \frac{a-1}{a}$.

Thật vậy, nếu $x_n \geq \frac{a-1}{a}$ thì

$$f_n(x_n) \geq a^{10} \left(\frac{a-1}{a} \right)^{n+10} + \frac{1 - \left(\frac{a-1}{a} \right)^{n+1}}{1 - \frac{a-1}{a}} \\ = (a-1)^{10} \left(\frac{a-1}{a} \right)^n + a - (a-1) \left(\frac{a-1}{a} \right)^n > a$$

(do $a - 1 > 1$). Vậy dãy (x_n) tăng và bị chặn trên bởi 1 nên hội tụ.

Nhận xét. Một lần nữa mối liên hệ $f_{n+1}(x) = x f_n(x) + 1$ lại giúp chúng ta tìm được mối quan hệ giữa x_n và x_{n+1} . Từ lời giải trên, ta có thể

chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{a-1}{a}$. Thật vậy, đặt

$$c = \frac{a-1}{a} < 1, \text{ theo tính toán ở trên}$$

$$f_n(c) - f_n(x_n) = k c^n \text{ (với } k = (a-1)((a-1)^9 - 1) > 0 \text{)}.$$

Theo định lý Lagrange thì

$$f_n(c) - f_n(x_n) = f'(\xi)(c - x_n) \text{ với } \xi \text{ thuộc } (x_n; c)$$

Nhưng $f'(\xi) = (n+10)a^{10}\xi^{n+9} + n\xi^{n-1} + \dots + 1 > 1$ nên $k c^n > c - x_n$.

Từ đó $c - k c^n < x_n < c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$. $\square$

★ Bài toán 4. (VMO 2002). Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh phương trình

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}$$

có một nghiệm duy nhất x_n lớn hơn 1 và khi $n \rightarrow +\infty$ thì x_n dần đến 4.

Bình luận. Việc chứng minh PT có nghiệm duy nhất x_n ($x_n > 1$) là hiển nhiên. Mối liên hệ

$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{(n+1)^2 x - 1}$ cho thấy (x_n) là dãy số tăng $\left(f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2 x - 1} - \frac{1}{2}\right)$.

Đề bài gợi ý giới hạn của (x_n) là 4 đã làm cho bài toán trở nên dễ hơn. Ta sẽ dùng định lý Lagrange để đánh giá khoảng cách giữa x_n và 4. Để làm điều này, cần tính $f_n(4)$. Rất may mắn, bài tính $f_n(4)$ này liên quan đến một dạng tổng quen thuộc.

Lời giải. Gọi $x_n > 1$ là nghiệm duy nhất của PT $f_n(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f_n(4) &= \frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4n} \end{aligned}$$

Từ định lý Lagrange, ta có

$$\frac{1}{4n} = |f_n(x_n) - f(4)| = |f'_n(c)| |x_n - 4|$$

với c thuộc $(x_n; 4)$. Nhưng

$$|f'_n(c)| = \frac{1}{(c-1)^2} + \frac{4}{(4c-1)^2} + \dots + \frac{n^2}{(n^2 c - 1)^2} > \frac{1}{9}$$

Nên $|x_n - 4| < \frac{9}{4n}$, suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 4$. $\square$

★ Bài toán 5. Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng PT $x^n = x^2 + x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là x_n . Hãy tìm số thực a sao cho giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a(x_n - x_{n+1})$ tồn tại, hữu hạn và khác 0.

Bình luận. Để thấy giá trị a , nếu tồn tại, là duy nhất. Tương tự như ở bài toán 2, có thể

chứng minh được $x_n \sim 1 + \frac{\ln 3}{n}$. Từ đó có dự

đoán là $a = 2$. Định lý Lagrange sẽ giúp chúng ta đánh giá hiệu $x_n - x_{n+1}$ và chứng minh dự đoán này.

Lời giải. Đặt $P_n(x) = x^n - x^2 - x - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P_{n+1}(x) &= x^{n+1} - x^2 - x - 1 \\ &= x^{n+1} - x^n + P_n(x) = x^n(x-1) + P_n(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } P_{n+1}(x_n) &= x_n^n(x_n-1) + P_n(x_n) \\ &= (x_n^2 + x_n + 1)(x_n-1) = x_n^3 - 1. \end{aligned}$$

Theo định lý Lagrange thì

$$(x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1)$$

$$= P_{n+1}(x_n) - P_{n+1}(x_{n+1}) = (x_n - x_{n+1})P'_{n+1}(c)$$

$$\text{với } c \text{ thuộc } (x_{n+1}; x_n), P'_{n+1}(x) = (n+1)x^n - 2x - 1.$$

$$\text{Từ đó } (n+1) \left(x_{n+1} + 1 + \frac{1}{x_{n+1}} \right) - 2x_{n+1} - 1$$

$$= P'_{n+1}(x_{n+1}) < P'_{n+1}(c)$$

$$< P'_{n+1}(x_n) = (n+1)(x_n^2 + x_n + 1) - 2x_n - 1.$$

Từ đây, lưu ý $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$, suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P'_{n+1}(c)}{n} = 3.$$

Sử dụng $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(x_n - 1) = 3$, ta thấy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n P'_{n+1}(c)(x_n - x_{n+1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n(x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1) = 3 \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(x_n - x_{n+1}) \cdot \frac{P'_{n+1}(c)}{n} = 3 \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(x_n - x_{n+1}) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P'_{n+1}(c)}{n} = 3 \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(x_n - x_{n+1}) = \ln 3.$$

Vậy với $c = 2$ thì giới hạn đã cho tồn tại, hữu hạn và khác 0. Để thấy với $c > 2$ thì giới hạn đã cho bằng vô cùng và với $c < 2$ thì giới hạn đã cho bằng 0. Vậy $c = 2$ là đáp số của bài toán. $\square$

Qua các bài toán trên, chúng ta thấy công cụ cơ bản để khảo sát các dãy số cho bởi dãy các PT là các định lý cơ bản của giải tích (về hàm liên tục, hàm đơn điệu, định lý về sự hội tụ của dãy số đơn điệu và bị chặn, định lý Lagrange) và mối liên hệ mang tính truy hồi giữa các PT. Hi vọng rằng việc phân tích các tình huống ở năm bài toán trên đây sẽ giúp chúng ta có một cách nhìn tổng quát cho các bài toán ở dạng này.



Bài toán về điểm FERMAT và ứng dụng chứng minh nguyên lý THỂ NĂNG CỰC TIỂU

(Tiếp theo và hết)

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
(Hà Nội)

Thí dụ 2. (Kiểm nghiệm tính chất đã biết về điểm Torricelli của tam giác).

1) Nếu các góc của một tam giác ABC đều nhỏ hơn 120° thì tồn tại duy nhất một điểm P trong tam giác nhìn ba cạnh của tam giác đó dưới các góc bằng nhau và bằng 120° . Điểm này là "điểm cực tiểu" của hệ các đỉnh $\{A, B, C\}$. Hãy trình bày cách dựng điểm cực tiểu P này và tính $f(P)$ theo độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$.

2) Nếu tam giác ABC có một góc không bé hơn 120° , chẳng hạn $\hat{A} \geq 120^\circ$ thì A là điểm Torricelli P .

Thí dụ 3. Tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Xét hệ điểm $\{A(a), B(b), C(c)\}$. Chứng minh rằng:

1) Nếu tam giác ABC nhọn thì trực tâm H của nó là điểm Fermat của hệ điểm được xét.

2) Nếu tam giác ABC có góc $\hat{BAC} \geq 90^\circ$ thì A chính là điểm Fermat của hệ điểm này.

Đáp số (về giá trị cực tiểu $f(P) = m$).

1) $f(H) = m = 4S_{ABC}$.

2) $f(A) = m = 2bc (> 4S_{ABC})$; trong trường hợp này, hãy sử dụng tính chất 3), ngoài ra cần đến công thức Euler trong hình bình hành: "Tổng bình phương hai đường chéo bằng tổng bình phương các cạnh".

Thí dụ 4. Chứng minh rằng tâm O của mặt cầu ngoại tiếp một tứ diện gần đều $ABCD$ là điểm Fermat của hệ các đỉnh $\{A, B, C, D\}$ của tứ diện đó.

Thật vậy, $ABCD$ là một tứ diện gần đều khi và chỉ khi trọng tâm G của nó trùng với tâm O mặt cầu ngoại tiếp: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$; $OA = OB = OC = OD = R$. Cho $R = 1$, đẳng thức vectơ trên chứng tỏ rằng O là điểm Fermat P của hệ các đỉnh $\{A, B, C, D\}$ của tứ diện. Và cũng từ đó ta được: $\widehat{BOC} = \widehat{DOA}$; $\widehat{COA} = \widehat{DOB}$; $\widehat{AOB} = \widehat{DOC}$. Suy ra bốn góc tam diện $P(BCD)$, $P(ADC)$, $P(DAB)$, $P(CBA)$ bằng nhau (thuận) và có cùng góc khối $\delta = \pi$ radian – khối.

3.2. Một số bài toán khác về điểm Fermat

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Xét hệ điểm $\{A(p), B(q), C(r)\}$ trong đó p, q, r là độ dài các cạnh của một tam giác $\mathcal{T}$ nào đó. Gọi α, β, γ là số đo các góc của $\mathcal{T}$, theo thứ tự đối diện với các cạnh có độ dài p, q, r tương ứng.

Chứng minh rằng:

1) Nếu $\alpha < \pi - A$, $\beta < \pi - B$, $\gamma < \pi - C$ thì điểm Fermat P của hệ được xét nằm trong tam giác ABC . Từ đó suy ra cách dựng điểm P (bằng thước kẻ và compa) và tính giá trị cực tiểu $m = f(P)$ của hàm $f(M) = pMA + qMB + rMC$ theo a, b, c và p, q, r .

2) Nếu $\alpha \geq \pi - A$ thì P trùng với đỉnh A của ΔABC .

Bài toán 2. Xét một lục giác lõm $ABCDEF$ có $\hat{A} = \hat{C} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{D} = \hat{F}$; $AB = CD = EF$, $BC = DE = FA$ (người ta gọi lục giác như vậy là một lục giác nửa đều loại 3).

1) Hãy tìm điểm Fermat P của hệ các đỉnh $\{A, B, C, D, E, F\}$ của lục giác đó.

2) Câu hỏi tương tự đối với một $2n -$ giác nửa đều loại 3.

Bài toán 3. Giả sử E là một điểm thuộc hình tứ diện $ABCD$, kể cả trường hợp E thuộc một cạnh hoặc một mặt của tứ diện nhưng $E \notin \{A, B, C, D\}$. Chứng tỏ rằng E là điểm Fermat P của hệ 5 điểm $\{A, B, C, D, E\}$.

Bài toán 4. Xét hệ điểm $\{A, B, C, D\}$ gồm các đỉnh của một tứ diện $ABCD$ và kí hiệu δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) lần lượt là độ lớn các góc khối của các góc tam diện có đỉnh ở các đỉnh A, B, C, D của tứ diện được xét. Chứng minh rằng

1) Điểm Fermat P của hệ điểm được xét nằm trong tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi các góc khối có độ lớn δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) đều nhỏ hơn π radian – góc khối.

2) Điểm Fermat P trùng với đỉnh D của tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi $\delta_4 \geq \pi$ radian – góc khối.

Bài toán 5. Giả sử $ABCD$ là một tứ diện vuông ở D (tức là góc tam diện $D(ABC)$ có ba mặt vuông ở D). Chứng minh rằng:

1) Trong các góc khối của các tam diện của tứ diện vuông thì góc khối δ_4 của tam diện vuông đỉnh D có số đo lớn nhất và bằng $\frac{\pi}{2}$ radian – góc khối.

2) D là điểm Fermat của hệ điểm $\{A(s_1), B(s_2), C(s_3), D(s_4)\}$, trong đó các trọng số s_1, s_2, s_3, s_4 lần lượt là diện tích các mặt vuông DBC, DCA, DAB và mặt huyền ABC của tứ diện $ABCD$.

Bài toán 6. Trong không gian cho năm điểm A, B, C, D, E , trong đó $ABCD$ là một tứ diện gần đều sao cho trọng tâm G của nó nằm trong tứ diện $ABCE$. Tìm trong không gian một điểm P sao cho biểu thức $f(P) = PA + PB + PC + PE$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 7. Chứng minh rằng

1) Tâm của mọi đa giác đều, là điểm Fermat của hệ các đỉnh của nó.

2) Tâm của mọi đa diện đều, là điểm Fermat của hệ các đỉnh của đa diện đó. (Có tất cả 5 loại hình đa diện đều: Tứ diện đều, lập phương, bát diện đều, thập nhị diện đều và nhị thập diện đều).

Bài toán 8. Xét hai hình vuông $A_1A_2A_3A_4$ và $B_1B_2B_3B_4$ có độ dài cạnh là a và b ($a \neq b$), nội tiếp hai đường tròn đồng tâm. Phần tương giao $\mathcal{P}$ của hai miền hình vuông này là một miền bát giác lồi $C_1C_2...C_7C_8$.

1) Hãy chỉ rõ tính chất đặc trưng hình học của bát giác lồi $\mathcal{P}$.

2) Tìm điểm Fermat P của hệ các đỉnh của bát giác $\mathcal{P}$ đó và tính giá trị nhỏ nhất $m = f(P)$ của

$$f(M) = \sum_{i=1}^8 MC_i \text{ theo } a \text{ và } b.$$

3) Câu hỏi tương tự đối với trường hợp thay hai hình vuông bởi hai $n -$ giác đều.

Bài toán 9. Cho hai tứ diện gần đều $ABCD, A'B'C'D'$ giao nhau và nội tiếp hai mặt cầu đồng tâm. Tìm điểm Fermat của

1) Hệ các đỉnh $\{A, B, C, D; A', B', C', D'\}$ của hai tứ diện được xét;

2) Hệ các đỉnh của khối đa diện là phần chung của hai tứ diện đó.

Có nhiều tài liệu nước ngoài và trong nước đề cập đến bài toán Fermat – Torricelli. Các bạn cũng có thể tham khảo thêm trong một số tài liệu tiếng Việt sau đây.

[1] Tuyển tập 5 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. NXB Giáo dục.

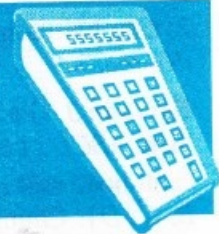
[2] Nguyễn Minh Hà, "Điểm Torricelli của tứ diện". Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. T12/1996.

[3] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Đăng Phát, Hình học và các vấn đề liên quan. (Vi Mối liên hệ giữa Toán học và Vật lý trong giảng dạy hình học – Tập sách Chuyên đề Toán chọn lọc bồi dưỡng giáo viên). NXB Giáo dục (sắp xuất bản, 2008).



KÌ THI KHU VỰC LẦN THỨ 8 GIẢI TOÁN trên máy tính cầm tay

NĂM HỌC 2007 - 2008



Thực hiện chương trình giáo dục kỹ năng sử dụng máy tính cầm tay trong nhà trường, Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức kì thi khu vực giải toán trên máy tính cầm tay lần thứ 8. Khác với các lần thi trước, năm nay ngoài môn Toán còn tổ chức thi thêm các môn: Vật lý, Hoá học, Sinh học. Mỗi tỉnh, TP là một đơn vị dự thi. Mỗi đơn vị dự thi có nhiều nhất là 1 đội tuyển lớp 9 môn Toán (học sinh lớp 8 và lớp 9), 4 đội tuyển lớp 12 của 4 môn Toán, Vật lý, Hoá học, Sinh học và 1 đội tuyển lớp 12 BTTH môn Toán (học sinh lớp 11 và lớp 12). Mỗi đội tuyển có nhiều nhất 5 thí sinh, mỗi đơn vị dự thi đầy đủ có 6 đội tuyển và tổng cộng không quá 30 thí sinh. Cuộc thi sẽ diễn ra trong 2 ngày đồng thời ở 4 Hội đồng thi khu vực đặt tại các tỉnh: Tuyên Quang, Hải Dương, Phú Yên và Tiền Giang. Sáng ngày 14/3/2008 thí sinh thi 150 phút, giải 10 bài toán (tổng cộng 50 điểm); chiều ngày 14 và ngày 15/3/2008 chấm thi, tổ chức tham quan, giao lưu,

tổng kết và trao giải. Máy tính sử dụng là các loại máy: Casio fx-500MS, fx-500ES, fx-570MS, fx-570ES, Vinacal Vn-500MS, Vn-570MS. Nội dung đề thi gồm các bài toán phổ thông thuộc chương trình cấp học có yêu cầu về thuật toán hoặc kỹ thuật tính toán và giải được bằng kiến thức kỹ năng tính toán có trong chương trình học.

Tỉ lệ đoạt giải cá nhân của mỗi môn học của một cấp học như sau: không quá 3% giải Nhất (mỗi giải 800.000 đồng), không quá 9% giải Nhì (mỗi giải 500.000 đồng), không quá 18% giải Ba (mỗi giải 300.000 đồng), không quá 20% giải Khuyến khích (mỗi giải 150.000 đồng). Mỗi khu vực có 3 giải toàn đoàn: Nhất, Nhì, Ba. Những học sinh đoạt giải được Bộ cấp Giấy chứng nhận. Học sinh đoạt giải Nhất và trúng tuyển đại học trong năm đó sẽ được nhà tài trợ tặng học bổng một lần trị giá 2 triệu đồng.

Hướng dẫn nội dung và cấu trúc đề thi học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay các môn Vật lý, Hóa học và Sinh học

1. NỘI DUNG THI

Nội dung thi tối thiểu phải bám sát chuẩn kiến thức, kỹ năng của chương trình Vật lý, Hoá học, Sinh học chuẩn và nâng cao. Trong đó cần chú ý đến kỹ năng tính toán bằng máy tính.

MÔN VẬT LÝ

1. Cơ học

- Động học và động lực học chất điểm.
- Tĩnh học. - Cơ học vật rắn.
- Áp suất chất lỏng, chất khí.
- Cơ năng. Các máy cơ. Các định luật bảo toàn.
- Dao động cơ, sóng cơ. Âm học.

2. Nhiệt học

- Nhiệt độ. Nội năng. Nhiệt lượng.
- Động học phân tử các chất.
- Tính chất nhiệt của chất rắn, chất lỏng, chất khí. Sự chuyển thể.
- Nhiệt động lực học. Các máy nhiệt.

3. Điện học

- Điện tích, điện trường, năng lượng điện trường.
- Dòng điện không đổi. Điện năng.
- Dòng điện trong các môi trường.

- Từ trường. Năng lượng từ trường.
- Cảm ứng điện từ. Các máy điện.
- Dao động điện từ, dòng điện xoay chiều. Điện từ trường. Sóng điện từ.

4. Quang học

- Sự truyền ánh sáng. - Các dụng cụ quang.
- Sóng ánh sáng. - Lượng tử ánh sáng.

5. Phản ứng hạt nhân

- Lực hạt nhân. Năng lượng liên kết hạt nhân.
- Phản ứng hạt nhân. Phóng xạ.
- Năng lượng của phản ứng hạt nhân.
- Từ vi mô đến vĩ mô.

MÔN HOÁ HỌC:

- Tất cả các kiến thức trong chương trình THPT.
- Các phép tính được sử dụng: cộng, trừ, nhân, chia, bình phương, lũy thừa, khai căn, logarit (log, ln), sin, cos, tan, cot, giải phương trình và hệ phương trình, vi phân, tích phân, đạo hàm.

MÔN SINH HỌC

Phần I. Sinh học tế bào

- Chương I. Thành phần hóa học của tế bào
- Các nguyên tố hóa học của tế bào và nước

- Cacbohidrat (sacacrit) và lipit
- Prôtêin - Axit nucleic

Chương II. Cấu trúc của tế bào

- Tế bào nhân sơ - Tế bào nhân thực
- Vận chuyển các chất qua màng sinh chất

Chương III. Chuyển hóa vật chất và năng lượng trong tế bào

- Chuyển hóa năng lượng
- Enzim và vai trò của enzim trong quá trình chuyển hóa vật chất
- Hô hấp tế bào
- Hóa tổng hợp và quang tổng hợp

Chương IV. Phân bào

- Chu kì tế bào và các hình thức phân bào
- Nguyên phân
- Giảm phân

Phần II. Sinh học vi sinh vật

Chương I. Chuyển hóa vật chất và năng lượng ở vi sinh vật

- Dinh dưỡng, chuyển hóa vật chất và năng lượng ở vi sinh vật
- Các quá trình tổng hợp ở vi sinh vật và ứng dụng
- Các quá trình phân giải ở vi sinh vật và ứng dụng

Chương II. Sinh trưởng và sinh sản của vi sinh vật

- Sinh trưởng của vi sinh vật
- Sinh sản của vi sinh vật
- Ảnh hưởng của các yếu tố hóa học đến sinh trưởng của vi sinh vật
- Ảnh hưởng của các yếu tố vật lí đến sinh trưởng của vi sinh vật

Chương III. Vi rút và bệnh truyền nhiễm

- Cấu trúc các loại vi rút
- Sự nhân lên của vi rút trong tế bào chủ

Phần III. Di truyền học

Chương I. Cơ chế của hiện tượng di truyền và biến dị

- Tự sao chép của ADN, gen và mã di truyền
- Sinh tổng hợp prôtêin
- Điều hoà hoạt động của gen
- Đột biến gen - Nhiễm sắc thể
- Đột biến cấu trúc nhiễm sắc thể
- Đột biến số lượng nhiễm sắc thể
- Quy luật phân li - Quy luật phân li độc lập
- Sự tác động của nhiều gen. Tính đa hiệu của gen
- Di truyền liên kết

Chương II. Tính quy luật của hiện tượng di truyền

- Di truyền liên kết với giới tính
- Di truyền ngoài NST
- Ảnh hưởng của môi trường đến sự biểu hiện của gen

Phần IV. Sinh thái học

Chương I. Cơ thể và môi trường

- Môi trường sống và các nhân tố sinh thái
- Mối quan hệ giữa sinh vật với các nhân tố môi trường

Chương II. Quần thể sinh vật

- Khái niệm và các đặc trưng của quần thể
- Kích thước và sự tăng kích thước quần thể
- Sự tăng trưởng kích thước quần thể
- Biến động kích thước hay số lượng cá thể của quần thể

Chương III. Quần xã sinh vật

- Khái niệm và các đặc trưng cơ bản của quần xã
- Mối quan hệ giữa các loài trong quần xã
- Mối quan hệ dinh dưỡng
- Diễn thế sinh thái

Chương IV. Hệ sinh thái, sinh quyển

- Hệ sinh thái
- Sự chuyển hóa vật chất trong hệ sinh thái
- Dòng năng lượng trong hệ sinh thái
- Sinh quyển

2. CẤU TRÚC BÀN ĐỀ THI

Bản đề thi gồm có 10 bài toán nằm trong giới hạn nội dung thi trong chương trình môn học, cấp học. Các bài toán có yêu cầu về cách giải và kĩ thuật tính toán với sự hỗ trợ của máy tính cầm tay.

Đối với môn Vật lí và Sinh học, mỗi bài trong đề thi gồm 3 phần: Phần đầu bài toán, phần ghi cách giải và phần ghi kết quả. (Phần đầu bài là một bài toán tự luận của bộ môn được in sẵn trong đề thi. Phần ghi cách giải: yêu cầu thí sinh lược ghi tóm tắt cách giải bằng chữ và biểu thức cần tính toán kết quả. Phần kết quả: ghi đáp số của bài toán).

Riêng môn Hoá học, phần trình bày của học sinh gồm: *Phần thứ nhất*: HS trình bày lời giải về nội dung hóa học

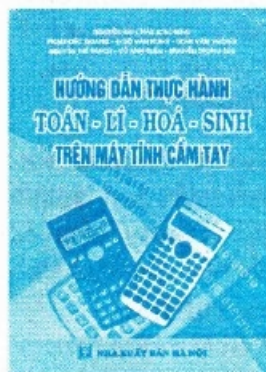
Phần thứ hai: HS trình bày cách sử dụng máy tính bỏ túi để giải phương trình và tính toán.

Phần thứ ba: HS trình bày kết quả.

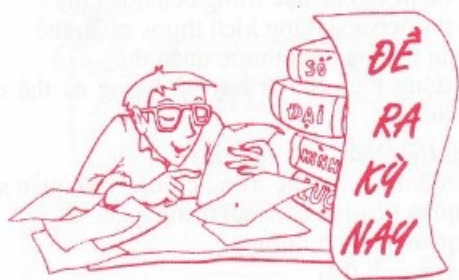
3. HƯỚNG DẪN CÁCH LÀM BÀI VÀ TÍNH ĐIỂM

Để giải một bài toán Vật lí hoặc Sinh học, thí sinh phải ghi tương ứng tóm tắt cách giải và đáp số vào phần "*Cách giải*" và phần "*Kết quả*" có sẵn trong đề thi.

(Xem tiếp trang 27)



Bạn đọc có thể tham khảo cuốn sách này để nắm vững cách làm các bài toán thuộc các môn học Toán - Lí - Hoá - Sinh trong giờ học chính khoá cũng như trong các kì thi khu vực giải toán trên máy tính cầm tay.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/368. (Lớp 6) Xét n điểm liên tiếp $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ cùng thuộc một đường thẳng sao cho $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_{n-1}A_n$. Tìm n , biết rằng trên đường thẳng đó có tất cả 2025 đoạn thẳng nhận một trong các điểm đã cho làm trung điểm.

PHẠM ĐỨC THẮNG
(GV THCS Vũ Hữu, Bình Giang,
Hải Dương)

Bài T2/368. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông ở A . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A vẽ các điểm D, E sao cho BD vuông góc và bằng BA , BE vuông góc và bằng BC . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE . Chứng minh rằng ba điểm A, D, M thẳng hàng.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T3/368. Tìm các số x, y, z nguyên dương sao cho

$$2xy - 1 = z(x-1)(y-1).$$

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T4/368. Giải phương trình

$$4x - x^2 = 3\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}}.$$

TRẦN QUANG VINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn,
Bà Rịa-Vũng Tàu)

Bài T5/368. Cho tam giác ABC vuông ở A . Kẻ phân giác AD . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC . BN cắt CM tại K , AK cắt DM tại I . Tính số đo của góc BID .

PHAN THẾ HẢI
(GV CDSP Bà Rịa- Vũng Tàu)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/368. Cho đa thức $f(x) = 2009x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2006x + 1$. Chứng minh rằng, với n là số nguyên tùy ý thì các số $f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \dots$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

LUU XUÂN BÌNH
(GV khối THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài T7/368. Tìm các số a, b để $\max_{0 \leq x \leq 16} \sqrt{x+ax+b}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tính giá trị nhỏ nhất đó.

NGUYỄN VĂN KHAI
(GV Khoa Toán- Tin ĐHSPT Hà Nội)

Bài T8/368. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A', B', C' . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & AB'^2 + BC'^2 + CA'^2 \\ & \geq AB' \cdot B'C' + BC' \cdot C'A' + CA' \cdot A'B' \\ & \geq B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

TRẦN QUANG HÙNG
(K49 AIT, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/368. Với số nguyên dương k bất kỳ, ta phân tích k thành tích các thừa số nguyên tố (không nhất thiết phân biệt, chẳng hạn $k = 18 = 3.3.2$). Gọi $T(k)$ là tổng của tất cả các thừa số đó. Tìm hằng số C lớn nhất sao cho $T(k) \geq C \ln k$, với mọi số nguyên dương k .

TRẦN QUỐC HOÀN
(SV K50CA, ĐH Công Nghệ, ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/368. Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bình phương bằng 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc.$$

DƯƠNG ĐỨC LÂM
(SV K51XD9, ĐH Xây Dựng Hà Nội)

Bài T11/368. Cho dãy số (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4 + \dots + x_n^{2007} - x_n^{2008} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$.

HOÀNG NGỌC TUẤN
(SV K27E ĐHSPT Hà Nội 2, Vĩnh Phúc)

Bài T12/368. Giả sử $ABCD$ là một tứ diện có các đường cao đồng quy. Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện; h_1, h_2, h_3, h_4 theo thứ tự là độ dài các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C, D của tứ diện; R_1, R_2, R_3, R_4 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các mặt đối diện các đỉnh A, B, C, D của tứ diện. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{h_1+2\sqrt{2}R_1} + \frac{1}{h_2+2\sqrt{2}R_2} + \frac{1}{h_3+2\sqrt{2}R_3} + \frac{1}{h_4+2\sqrt{2}R_4} \geq \frac{1}{R}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

NGUYỄN TIẾN LÂM

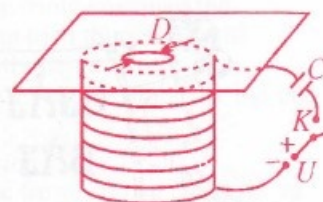
(SV K50A1S, Khoa Toán - Cơ - Tin,
ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/368. Phía trên của một hình solenoid đặt thẳng đứng có một tấm bìa cứng nằm ngang, trên đó đặt một vòng tròn nhỏ siêu dẫn có đường kính là D làm từ dây kim loại có đường kính tiết diện dây là d_1 ($d_1 \ll D$). Nối solenoid với nguồn và tụ điện (hình vẽ), đóng khóa K thì vòng tròn sẽ nảy lên khi hiệu điện thế $U \geq U_0$ (U_0 là hiệu điện thế xác định). Thay vòng tròn trên bằng vòng siêu dẫn khác

cùng kim loại trên và cùng đường kính D còn đường kính tiết diện dây là d_2 . Hỏi hiệu điện thế nguồn điện là

bao nhiêu để khi đóng khóa K thì vòng vừa được thay này lên? Biết độ tự cảm của vòng là $L = kD \ln\left(\frac{1,4D}{d}\right)$ (k là hằng số), điện trở thuần của solenoid và dây nối được bỏ qua.



TRẦN VĂN NGA

(GV THPT chuyên Phan Bội Châu,
Vinh, Nghệ An)

Bài L2/368. Một ô tô chuyển động với vận tốc không đổi $v = 90 \text{ km/h}$ theo một đường kín nằm ngang có dạng elíp với bán trục lớn $a = 500 \text{ m}$ và bán trục nhỏ $b = 250 \text{ m}$. Tìm gia tốc cực đại và gia tốc cực tiểu của ô tô. Hệ số ma sát k giữa mặt đường và lốp ô tô bằng bao nhiêu để ô tô không bị trượt tuyết khi chuyển động theo elíp đó?

TRẦN KHÁNH HẢI

(GV trường THPT Quốc học Huế)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/368. (For 6th grade) Consider n consecutive points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ on the same line such that $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_{n-1}A_n$. Find n , given that there are exactly 2025 segments on that line whose midpoints are one of these n points.

T2/368. (For 7th grade) Let ABC be a right triangle with right angle at A . On the half-plane divided by BC which does not contain A , choose the points D, E such that BD is orthogonal with BA and $BD = BA$, BE is orthogonal with BC and $BE = BC$. Denote by M the midpoint of CE . Prove that A, D and M are colinear.

T3/368. Find all positive integers x, y and z such that $2xy - 1 = z(x-1)(y-1)$.

T4/368. Solve for x

$$4x - x^2 = 3\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}}.$$

T5/368. Let ABC be a right triangle with right angle at A and let AD be the angle bisector at A . Denote by M and N the bases of the altitudes from D onto AB and AC respectively. BN meets CM at K and AK meets DM at I . Find the measure of angle BID .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/368. Let $f(x) = 2009x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2006x + 1$. Prove that $f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \dots$ are pairwise coprime for any positive integer n .

(Xem tiếp trang 28)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/368. (Lớp 6) Xét n điểm liên tiếp $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ cùng thuộc một đường thẳng sao cho $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_{n-1}A_n$. Tìm n , biết rằng trên đường thẳng đó có tất cả 2025 đoạn thẳng nhận một trong các điểm đã cho làm trung điểm.

PHẠM ĐỨC THẮNG
(GV THCS Vũ Hữu, Bình Giang,
Hải Dương)

Bài T2/368. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông ở A . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A vẽ các điểm D, E sao cho BD vuông góc và bằng BA , BE vuông góc và bằng BC . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE . Chứng minh rằng ba điểm A, D, M thẳng hàng.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T3/368. Tìm các số x, y, z nguyên dương sao cho

$$2xy - 1 = z(x-1)(y-1).$$

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T4/368. Giải phương trình

$$4x - x^2 = 3\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}}.$$

TRẦN QUANG VINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn,
Bà Rịa-Vũng Tàu)

Bài T5/368. Cho tam giác ABC vuông ở A . Kẻ phân giác AD . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC . BN cắt CM tại K , AK cắt DM tại I . Tính số đo của góc BID .

PHAN THẾ HẢI
(GV CDSP Bà Rịa-Vũng Tàu)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/368. Cho đa thức $f(x) = 2009x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2006x + 1$. Chứng minh rằng, với n là số nguyên tùy ý thì các số $f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \dots$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

LUU XUÂN TÌNH
(GV khối THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài T7/368. Tìm các số a, b để $\max_{0 \leq x \leq 16} |\sqrt{x} + ax + b|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tính giá trị nhỏ nhất đó.

NGUYỄN VĂN KHẢI
(GV Khoa Toán-Tin ĐHSPT Hà Nội)

Bài T8/368. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A', B', C' . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & AB'^2 + BC'^2 + CA'^2 \\ & \geq AB' \cdot B'C' + BC' \cdot C'A' + CA' \cdot A'B' \\ & \geq B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

TRẦN QUANG HÙNG
(K49 AIT, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/368. Với số nguyên dương k bất kì, ta phân tích k thành tích các thừa số nguyên tố (không nhất thiết phân biệt, chẳng hạn $k = 18 = 3.3.2$). Gọi $T(k)$ là tổng của tất cả các thừa số đó. Tìm hằng số C lớn nhất sao cho $T(k) \geq C \ln k$, với mọi số nguyên dương k .

TRẦN QUỐC HOÀN
(SV K50CA, ĐH Công Nghệ, ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/368. Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bình phương bằng 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc.$$

DƯƠNG ĐỨC LÂM
(SV K51XD9, ĐH Xây Dựng Hà Nội)

Bài T11/368. Cho dãy số (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4 + \dots + x_n^{2007} - x_n^{2008} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$.

HOÀNG NGỌC TUẤN
(SV K27E ĐHSPT Hà Nội 2, Vĩnh Phúc)

$$\frac{2^3}{101^{2^2}+1} = \frac{2^3}{101^{2^2}-1} - \frac{2^4}{101^{2^3}-1},$$

...

$$\frac{2^{n+1}}{101^{2^n}+1} = \frac{2^{n+1}}{101^{2^n}-1} - \frac{2^{n+2}}{101^{2^{n+1}}-1}.$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên và rút gọn, ta được

$$S = \frac{2}{100} - \frac{2^{n+2}}{101^{2^{n+1}}-1} < \frac{2}{100} = 0,02.$$

Vậy $S < 0,02$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Điểm mấu chốt của lời giải là tìm ra hệ thức (1), hầu hết các bạn tham gia có bài giải đúng và làm theo cách này. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Minh Hiếu, 6A1, THCS Yên Lạc;
Bắc Ninh: Nguyễn Hữu Dũng, 6A, THCS Hàn Thuyên,
 Lương Tài; **Hà Nội:** Phạm Huy Hoàng, Lê Minh Phúc,
 7A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hoàng Anh Tú, 7I,
 THPT Marie Curie; **Thái Bình:** Nguyễn Trọng Bách,
 7D, THCS TTr. Đông Hưng; **Nghệ An:** Nguyễn Văn
 Bảo, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Đắk Lắk:**
 Lê Quang Hiếu, 6A5, THCS Huỳnh Thúc Kháng;
Quảng Trị: Võ Trần Tâm, 7^h, THCS TTr. Gio Linh.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T3/364.** Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3 + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + 1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{ab+bc+ca}{ab} - 1 + \frac{ab+bc+ca}{bc} - 1 \\ & + \frac{ab+bc+ca}{ca} - 1 \\ & \geq \sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{c^2}} \\ & \Leftrightarrow \frac{c(a+b)}{ab} + \frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(c+a)}{ca} \\ & \geq \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{a^2}} + \sqrt{\frac{(b+c)(b+a)}{b^2}} + \sqrt{\frac{(c+a)(c+b)}{c^2}}. \end{aligned}$$

(Do $ab + bc + ca = 1$) (1)

Đặt $\frac{c(a+b)}{ab} = x$, $\frac{a(b+c)}{bc} = y$ và $\frac{b(c+a)}{ca} = z$, khi đó (1) trở thành bất đẳng thức quen thuộc $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ (luôn đúng với mọi bộ ba số dương x, y, z). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán trên có thể tổng quát cho n số như sau: Với n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_k \leq 1, \text{ ta có bất đẳng thức:}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_k} \geq n + \frac{2}{n-1} \sum_{i,j=1}^n \sqrt{\frac{1 - \prod_{k \neq i} a_k - \prod_{k \neq j} a_k}{\prod_{k \neq i} a_k \prod_{k \neq j} a_k}} + 1.$$

Khi ĐĐT điều kiện trở thành đẳng thức và $n = 3$ thì ta thu được bài toán ban đầu. Bài toán tổng quát được chứng minh hoàn toàn tương tự như trên.

2) Đây là bài toán chứng minh bất đẳng thức quen thuộc nên có rất nhiều bạn tham gia giải và hầu hết đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Lào Cai: Khúc Văn Hoàng, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Phú Thọ:** Nguyễn Linh Thuỷ, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Đinh Tiến Dũng, 9C, THCS Tam Dương, Nguyễn Long Huy, 9A1, THCS Yên Lạc, Nguyễn Thị Chính, lớp 6, THCS Triệu Đề, Lập Thạch; **Đào Xuân Hương**, 9A, THCS Lập Thạch, **Lê Thị Tuyết Mai**, 9A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Quang Rực, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** Bạch Mỹ Hạnh, 7G, THCS Hoàng Liệt, Hoàng Mai, Thanh Trì; **Hà Tây:** Nguyễn Quân Dương, 8B, THCS Thanh Mai; **Thanh Hoá:** Đinh Uýt Này, 7B, THCS Lê Hữu Lập; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Thắng, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Dặng Trung Anh**, Nguyễn Mai Phương, Nguyễn Phú Nam, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Lê Văn Ước, 8L, THCS Quỳnh Vinh, Quỳnh Lưu; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 9A4, THCS Trà Nóc; **Quảng Trị:** Võ Trần Tâm, 7E, THCS Thị Trấn Gia Linh; **Phú Yên:** Nguyễn Phước Thịnh, 9I, THCS Hùng Vương, Tuy Hoà.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T4/364.** Giải phương trình

$$\sqrt{7x^2 - 22x + 28} + \sqrt{7x^2 + 8x + 13} + \sqrt{31x^2 + 14x + 4} = 3\sqrt{3}(x+2).$$

Lời giải. Gọi vế trái của PT là P . Ta có

$$\sqrt{7x^2 - 22x + 28} = \sqrt{(2x-1)^2 + 3(3-x)^2} \geq \sqrt{3}(3-x)$$

$$\sqrt{7x^2+8x+13}=\sqrt{(2x-1)^2+3(x+2)^2}\geq\sqrt{3}(x+2)$$

$$\sqrt{31x^2+14x+4}=\sqrt{(2x-1)^2+3(3x+1)^2}\geq\sqrt{3}(3x+1).$$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên ta được

$$P\geq 3\sqrt{3}(x+2).$$

Do đó $P = 3\sqrt{3}(x+2)$ khi và chỉ khi các BĐT trên đều trở thành đẳng thức, tức là

$$\begin{cases} 2x-1=0 \\ 3-x\geq 0 \\ x+2\geq 0 \\ 3x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài và đều cho đáp số đúng. Tuy nhiên, không ít bạn đã đưa ra các nhận xét chưa đúng, chẳng hạn như:

$|a|+|b|+|c|=|a+b+c|$ khi và chỉ khi $abc\geq 0$!

$A\leq m, B\leq m$ nên $A=B$ khi $A=m$ và $B=m$!

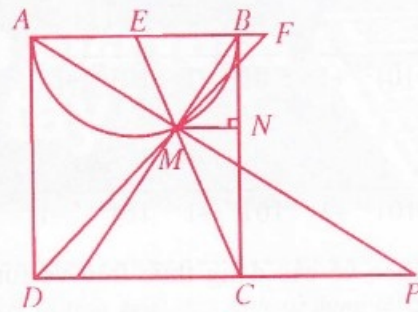
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Tây: Nguyễn Quân Dương, 8B, THCS Thanh Mai, Thanh Oai; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Văn Châu, Đào Xuân Hương, Nguyễn Tiến Giang, 9A, THCS Lập Thạch; **Bắc Ninh:** Nguyễn Quang Rực, 9A, THCS Yên Phong; **Thái Bình:** Hoàng Minh Lập, 9E, THCS Quang Trung, Kiến Xương; **Phú Thọ:** Nguyễn Minh Thủy, 9A1, Triệu Thị Quỳnh Mai, 9A3, THCS Lâm Thao; **Nam Định:** Nguyễn Thị Ngọc An, 9A1, THCS Trần Đăng Ninh, Đinh Thị Ngọc, 9B, THCS Yên Tiến; **Thanh Hoá:** Mai Thu Phương, 6A, THCS Lý Thường Kiệt; **Nghệ An:** Vũ Đình Long, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Định:** Trần Quốc Trạch, 9A6, THCS Phước Hưng.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/364.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB < BC$. Vẽ nửa đường tròn đường kính AB nằm trên nửa mặt phẳng chứa CD bờ là đường thẳng AB . M là điểm trên nửa đường tròn (M khác A và B). Các đường thẳng MA, MB cắt đường thẳng CD theo thứ tự tại P, Q . Các đường thẳng MC, MD cắt đường thẳng AB theo thứ tự tại E, F . Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn để tổng $PQ + EF$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải. (Theo bạn Vũ Đình Long, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An).



Đặt $AB = a; BC = b$ ($a < b$). Kẻ $MN \perp BC$ ($N \in BC$), khi đó theo định lí Thales ta có

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{QM}{MB} = \frac{CN}{NB}; \frac{EF}{CD} = \frac{EM}{MC} = \frac{NB}{CN}.$$

$$\text{Suy ra } PQ + EF = a \left(\frac{CN}{NB} + \frac{NB}{CN} \right) \quad (1)$$

Bây giờ ta đặt $S = \frac{CN}{NB} + \frac{NB}{CN}$, lúc này

$$S = \frac{CN^2 + NB^2}{NB \cdot CN} = \frac{(NB + CN)^2}{NB \cdot CN} - 2.$$

Từ đó $\frac{1}{S+2} = \frac{NB \cdot CN}{b^2}$, suy ra

$$1 - \frac{4}{S+2} = \frac{(NB+CN)^2 - 4NB \cdot CN}{b^2} = \frac{(CN-NB)^2}{b^2}.$$

Vì M thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $NB \leq \frac{a}{2}$, dẫn đến $CN \geq \frac{2b-a}{2}$. Do đó

$$1 - \frac{4}{S+2} \geq \frac{(b-a)^2}{b^2}, \text{ suy ra } \frac{4}{S+2} \leq \frac{2ab-a^2}{b^2}.$$

$$\text{Vậy } S \geq \frac{4b^2-4ab+2a^2}{2ab-a^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thu được bất đẳng thức

$$PQ + EF \geq \frac{4b^2-4ab+2a^2}{2b-a}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $NB = \frac{a}{2}$.

Tóm lại: Giá trị nhỏ nhất của tổng $PQ + EF$ là $\frac{4b^2-4ab+2a^2}{2b-a}$, đạt được khi và chỉ khi M là

điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB . $\square$

◀ **Nhận xét.** Ngoài bạn Long, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Bác Ninh: Nguyễn Ngọc Long, 9A, THCS TTr. Thuận Thành; **Phú Thọ:** Tạ Hải Nam, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Tây:** Nguyễn Quân Dương, 8B, THCS Thanh Mai, Thanh Oai; **Nam Định:** Bùi Văn Vương, 9B, THCS Hải Hậu; **Phú Yên:** Phạm Quang Thịnh, 9I, THCS Hùng Vương, Tp. Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyên, 9⁷, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T6/364.** Tìm tất cả các bộ hai số nguyên dương a, b sao cho khi chia $a^2 + b^2$ cho $a + b$ được thương là q và số dư r thỏa mãn $q^2 - r = 2007$.

Lời giải. Ta có

$$2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2},$$

$$q = \left\lfloor \frac{a^2 + b^2}{a+b} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor \geq \frac{a+b-1}{2} \geq \frac{r}{2} \Rightarrow r \leq 2q.$$

$$\text{Khi đó } 2007 = q^2 - r \geq q^2 - 2q = (q-1)^2 - 1 \Rightarrow (q-1)^2 \leq 2008.$$

$$\text{Vì } q \text{ là số nguyên dương nên } q-1 \leq 44 \text{ hay } q \leq 45 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } 2007 = q^2 - r \leq q^2, q \text{ nguyên dương nên } q \geq 45 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } q = 45, r = 45^2 - 2007 = 18.$$

Theo giả thiết, ta có

$$a^2 + b^2 = 45(a+b) + 18$$

$$\Leftrightarrow (2a-45)^2 + (2b-45)^2 = 4122.$$

Để ý rằng 4122 là số chẵn, chia cho 4 dư 2, được phân tích thành tổng của hai số chính phương lẻ, suy ra hai số chính phương đó phải có tận cùng là 1 hoặc 9.

Thử với $x = 1, 9, 11, 19, 21, 29, 31, 39, 41$ sao cho số $4122 - x^2$ là số chính phương, ta tìm được $x = 39$ và $4122 = 39^2 + 51^2$.

Nếu coi $a \leq b$ thì ta có

$$\begin{cases} 2a-45=39 \\ 2b-45=51 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2a-45=-39 \\ 2b-45=51. \end{cases}$$

$$\text{Từ đó tìm được } \begin{cases} a=42 \\ b=48 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=3 \\ b=48. \end{cases}$$

Vậy có bốn bộ số cần tìm là $(42; 48), (3; 48), (48; 42)$ và $(48; 3)$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán này tương đối khó, yêu cầu phải biến đổi linh hoạt và nắm chắc các tính chất của số chính phương. Một số bạn bỏ sót trường hợp bình phương của số đối nên tìm thiếu nghiệm. Nhiều bạn có kết luận sai là bài toán vô nghiệm, do ghép các tận cùng của số chính phương không hợp lí.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Khổng Hoàng Thao, Nguyễn Hoàng Hải, Trần Quang Sự, 11A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Hà Nội:** Nguyễn Đình Tương, 10A1 Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tây:** Nguyễn Mạnh Quân, 11 Lí, THPT Nguyễn Huệ; **Quảng Ninh:** Ngô Đức Long, 10 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Thanh Hóa:** Hoàng Hồng Phong, 11C1, THPT Hoàng Lệ Kha, Hà Trung; **Nghe An:** Tăng Văn Bình, Nguyễn Hoàng Anh, Trần Tuấn An, Phan Huy Lê, 10A1, THPT Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Luật, 11A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn; **Bình Thuận:** Phí Thái Thuận, 10T1, THPT Trần Hưng Đạo, TP. Phan Thiết; **Bình Định:** Nguyễn Phú, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Dương Xuân Vinh, 11A1, THPT Phan Đình Phùng, Sông Cầu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T7/364.** Xét phương trình

$$ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$$

với a, b là các số thực, $a \neq 0$ và $a \neq b$ sao cho các nghiệm đều là số thực dương. Tìm giá trị

$$\text{nhỏ nhất của } P = \frac{5a^2 - 3ab + 2}{a^2(b-a)}.$$

Lời giải. Gọi u, v, s là ba nghiệm thực dương của đa thức $ax^3 - x^2 + bx - 1$. Theo định lí Viète ta có

$$u + v + s = \frac{1}{a}, uv + vs + su = \frac{b}{a}, uvs = \frac{1}{a} \quad (1)$$

Từ đó suy ra $a > 0, b > 0$.

Đặt $c = \frac{1}{a}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số thực dương:

$$c = uvs = u + v + s \geq 3\sqrt[3]{uvs} = 3\sqrt[3]{c}$$

$$\Rightarrow c^3 \geq 27.c \Rightarrow c \geq 3\sqrt[3]{3} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \text{Mặt khác } (u+v+s)^2 - 3(uv+vs+su) \\ &= \frac{1}{2}((u-v)^2 + (v-s)^2 + (s-u)^2) \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } c^2 &= (u+v+s)^2 \geq 3(uv+vs+su) \\ &= 3bc \end{aligned}$$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{5-3\frac{b}{a}+2\frac{1}{a^2}}{\frac{b}{a}-1} \\ &= \frac{c(5-3bc+2c^2)}{bc-1} \geq \frac{c(5-c^2+2c^2)}{\frac{c^2}{3}-1} \\ &= \frac{3c(c^2+5)}{c^2-3} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \text{Chú ý } c(c^2+5)-4\sqrt{3}(c^3-3) \\ &= c^2(c-3\sqrt{3})-\sqrt{3}.c(c-3\sqrt{3})-4(c-3\sqrt{3}) \\ &= (c-3\sqrt{3})(c^2-\sqrt{3}.c-4) \geq 0 \quad (5) \\ & \text{(vì } c \geq 3\sqrt{3} \text{ và } c^2-\sqrt{3}.c-4 \\ &= c(c-\sqrt{3})-4 \geq 3.\sqrt{3}.2.\sqrt{3}-4 = 14 > 0) \end{aligned}$$

Từ (4) và (5) ta suy ra $P \geq 3.4.\sqrt{3} = 12.\sqrt{3}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u=v=s=\sqrt{3}$,
tức là $a = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, hay

$$\begin{aligned} & ax^3 - x^2 + bx - 1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})^3 \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}}x^3 - x^2 + \sqrt{3}.x - 1 \quad (b = \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $12.\sqrt{3}$. $\square$

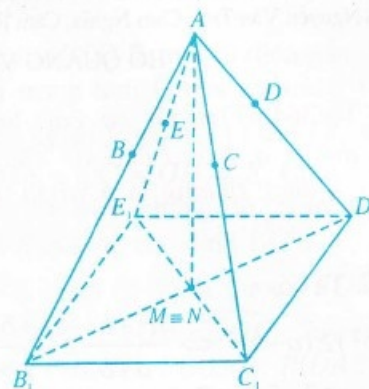
◀ **Nhận xét.** Đúng như một số bạn đã nhận xét: đây là Bài số 3 trong Đề thi chọn học sinh giỏi toán Quốc gia THPT, Bảng B, năm 1999 (xem cuốn sách "Các bài thi Olympic toán THPT Việt Nam (1990-2006)", Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ, 2007, trang 29). Đại đa số các bạn đưa về hàm số như (4) và dùng đạo hàm khảo sát. Lời giải trên là dựa theo cách giải của bạn **Phạm Quang Thịnh**, 9I, THCS Hùng Vương TP. Tuy Hòa, **Phú Yên**.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T8/364.** Trên mặt cầu bán kính R lấy năm điểm A, B, C, D, E sao cho $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$

$$\begin{aligned} &= \widehat{DAE} = \widehat{EAB} = \frac{2}{3}\widehat{BAD} = \frac{2}{3}\widehat{CAE}. \text{ Chứng minh} \\ & \text{rằng } AB + AC + AD + AE \leq 4\sqrt{2}R. \end{aligned}$$

Lời giải. Trên các tia AB, AC, AD, AE theo thứ tự lấy các điểm B_1, C_1, D_1, E_1 sao cho $AB_1 = AC_1 = AD_1 = AE_1 = a$ và gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của B_1D_1 và C_1E_1 .



Dễ thấy

$$\begin{cases} \triangle AB_1C_1 = \triangle AB_1E_1 \text{ (c.g.c)} \\ \triangle AD_1C_1 = \triangle AD_1E_1 \text{ (c.g.c)} \end{cases}$$

Từ đó $B_1C_1 = B_1E_1, D_1C_1 = D_1E_1$.

Suy ra mp(AB_1D_1) là mặt phẳng trung trực của C_1E_1 nên $N \in \text{mp}(AB_1D_1)$. Vậy $A, M, N \in \text{mp}(AB_1D_1)$. Tương tự $A, M, N \in \text{mp}(AC_1E_1)$ nên A, M, N thẳng hàng (1)

Mặt khác, dễ thấy $\triangle AB_1D_1 = \triangle AC_1E_1$ (c.g.c) suy ra $AM = AN$ (2)

Từ (1), (2) ta thấy M trùng N . Từ đó với chú ý rằng $B_1C_1 = B_1E_1; B_1D_1 = C_1E_1$ ta có $B_1C_1D_1E_1$ là hình vuông, suy ra $B_1D_1 = B_1C_1\sqrt{2}$ hay $B_1D_1^2 = 2B_1C_1^2$ (3)

Đặt $\widehat{B_1AC_1} = \alpha$, ta có $\widehat{B_1AD_1} = \frac{3}{2}\alpha$.

Theo định lí côsin cho $\triangle B_1AD_1$ và $\triangle B_1AC_1$, ta có

$$\begin{aligned} B_1D_1^2 &= 2a^2 \left(1 - \cos \frac{3\alpha}{2} \right); \\ B_1C_1^2 &= 2a^2 (1 - \cos \alpha) \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra $1 - \cos \frac{3\alpha}{2} = 2(1 - \cos \alpha)$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 \frac{\alpha}{2} - 4\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 3\cos \frac{\alpha}{2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (loại)} \\ \cos \frac{\alpha}{2} = 1 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Do đó $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Suy ra $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$ hay $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow AB + AD \leq \sqrt{2(AB^2 + AD^2)} = \sqrt{2BD^2} = 2\sqrt{2}R.$$

Tương tự $AC + AE \leq 2\sqrt{2}R$.

Vậy $AB + AC + AD + AE \leq 4\sqrt{2}R$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB=AD$; $AC=AE$ hay hình $A.BCDE$ là chóp tứ giác đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn gửi bài đều giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

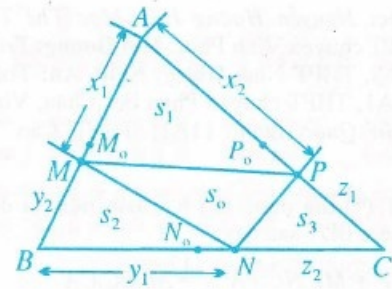
Trịnh Ngọc Dương, 12A1, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; Nguyễn Duy Bình, 12A1, THPT Ninh Giang, Hải Dương.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T9/364.** Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P theo thứ tự sao cho $AM + BN + CP = MB + NC + PA$.

Chứng minh rằng $S_{MNP} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$ (*)

Lời giải. (Dựa theo Nguyễn An Tịnh, 10A1, K36, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An). Gọi M_0, N_0, P_0 ; s_0, s_1, s_2, s_3 và S theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA ; diện tích các tam giác MNP, AMP, BNM, CPN và ABC . Kí hiệu $2a_0, 2b_0, 2c_0$; x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 và m, n, p theo thứ tự là độ dài các đoạn thẳng BC, CA, AB ; AM, BN, CP ; AP, BM, CN và M_0M, N_0N, P_0P (xem hình vẽ).



Theo giả thiết ta có

$$x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = a_0 + b_0 + c_0 \quad (1)$$

Vì $s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = S$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \frac{s_0}{S} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{s_1 + s_2 + s_3}{S} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 x_2}{4b_0 c_0} + \frac{y_1 y_2}{4c_0 a_0} + \frac{z_1 z_2}{4a_0 b_0} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow a_0 x_1 x_2 + b_0 y_1 y_2 + c_0 z_1 z_2 \geq 3a_0 b_0 c_0 \quad (**)$$

Từ (1) ta có

$$(x_1 - y_2) + (y_1 - z_2) + (z_1 - x_2) = 0 \quad (2)$$

Bởi vậy, từ (2) suy ra trong ba số hạng có dạng hiệu của tổng ở vế trái của (2) bao giờ cũng có hai số hạng đều không âm hoặc đều không dương. Không mất tính tổng quát, ta giả định rằng $x_1 \geq y_2$ và $y_1 \geq z_2$; thế thì từ (2) suy ra $z_1 \leq x_2$, và do đó $m + n = p$. Khi đó vế trái T của (**) được viết lại như sau:

$$T = a_0(c_0 + m)(b_0 + p) + b_0(a_0 + n)(c_0 - m) + c_0(b_0 - p)(a_0 - n).$$

Sau khi khai triển và thu gọn (chú ý đến đẳng thức $m + n = p$ và BĐT tam giác $c_0 + a_0 > b_0$) ta được

$$T = 3a_0 b_0 c_0 + a_0 m^2 + c_0 n^2 + (c_0 + a_0 - b_0)mn \geq 3a_0 b_0 c_0 \quad (3)$$

Dấu đẳng thức ở (3), cũng tức là ở (*) xảy ra khi và chỉ khi $m = n = p = 0$, hay khi và chỉ khi M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh của tam giác ABC . $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Số các bạn tham gia giải bài toán này không nhiều và đều giải đúng. Ngoài bạn Tịnh, các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Hoàng Hải, Mạc Thế Trường, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Trần Văn Hạnh, 11A5, THPT Ninh Giang; **Nghe An:** Trần Viết Thành, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Luật, 11A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn.

2) Từ BĐT (*) thu được của bài toán trên, ta dễ dàng thiết lập thêm BDT sau đây:

$$AM.BN.CP + MB.NC.PA \leq \frac{1}{4} AB.BC.CA$$

cũng tức là: $x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2 \leq 2a_0 b_0 c_0 = \frac{1}{4} abc$
(trong đó $BC = a, CA = b, AB = c$).

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

★ Bài T10/364. Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdots \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}} \right)_{n \text{ dấu căn}}$$

Lời giải. Gọi biểu thức cần tìm giới hạn là $P(n)$.

Cách 1. (Theo bạn Châu Tuấn Kiệt, 11T1, THPT Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long).

$$\begin{aligned} \text{Vì } \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}} &> \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+2}}}} \\ &= \sqrt{2-2} = 0 \text{ nên } P(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } 0 < \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}} &\leq \sqrt{2-\sqrt{2}} \quad (n = 2, \\ 3, \dots) \text{ nên } P(n) &\leq \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^{n-1}, \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$0 < P(n) \leq \left(2-\sqrt{2} \right)^{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Mặt khác $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2-\sqrt{2} \right)^{n-1} = 0$ (do $0 < 2-\sqrt{2} < 1$),
nên $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = 0$.

Cách 2. Bằng quy nạp dễ chứng minh rằng

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^n} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}} &= \sqrt{2-2 \cos \frac{\pi}{2^n}} \\ &= \sqrt{2.2 \sin^2 \frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (3) và áp dụng bất đẳng thức $\sin x < x$ với mọi $x > 0$, ta có

$$\begin{aligned} P(n) &= 2^{n-1} \cdot \sin \frac{\pi}{2^3} \cdot \sin \frac{\pi}{2^4} \cdots \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \\ &< 2^{n-1} \cdot \frac{\pi}{2^3} \cdot \frac{\pi}{2^4} \cdots \frac{\pi}{2^{n+1}} = 2^{n-1} \cdot \frac{\pi^{n-1}}{2^{3+4+\dots+n+1}} \\ &= \frac{\pi^{n-1}}{2^{2+3+\dots+n}} = \frac{\pi^{n-1}}{2^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}} = \left(\frac{\pi}{2^{\frac{n+2}{2}}} \right)^{n-1} \leq \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n-1} \\ &\quad (n = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Như vậy $0 < P(n) < \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$.

Do $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n-1} = 0$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = 0$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Bằng cách đặt $u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}$,
 $v_n = \sqrt{2-u_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \dots)$, một số bạn đã chứng minh dãy (u_n) tăng và bị chặn trên bởi 2, và tìm được $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$; dãy (v_n) giảm và bị chặn dưới bởi 0, và có giới hạn là 0. Từ đó đánh giá được:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_2 \cdot v_3 \cdots v_n) = 0.$$

2) Một số bạn đã mắc sai lầm trong lập luận

*) Chẳng hạn khi giới hạn có dạng vô định: $0 \cdot \infty$ thì đã kết luận giới hạn là 0. Điều này không đúng vì chẳng

$$\text{hạn: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

*) Trong biến đổi:

$$\begin{aligned} P(n) &= 2^{n-1} \cdot \sin \frac{\pi}{2^3} \cdot \sin \frac{\pi}{2^4} \cdots \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2^{n-1} \cdot \sin \frac{\pi}{2^3} \cdot \sin \frac{\pi}{2^4} \cdots \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^2}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} \quad (!) \end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Sai lầm ở đây là tử số khác $\sin \frac{\pi}{2^2}$).

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Mạc Thế Trường, Nguyễn Hải Hà, 11A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Bắc Giang:** Nguyễn Hoàng Hiệp, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Quảng Ninh:** Phạm Đức Mạnh, 12T, THPT chuyên Hạ Long; **Thanh Hóa:** Nguyễn Khắc Tuyền, A1, THPT Hoàng Hóa 4; **Nghe An:** Nguyễn Tấn Hoàng, 11A1, THPT Đô Lương 1.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T11/364.** Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x và ký hiệu $\{x\} = x - [x]$. Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{(7+4\sqrt{3})^n\}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Giả sử $x_1 = 7+4\sqrt{3}$, $x_2 = 7-4\sqrt{3}$ và $S_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ta thấy ngay $S_1 = x_1 + x_2 = 14$, $x_1 x_2 = 1$, $S_{0,j} = 2$, $S_2 = 14S_1 - S_0$ và

$$S_{k+2} = x_1^{k+2} + x_2^{k+2} = (x_1 + x_2)(x_1^{k+1} + x_2^{k+1}) - x_1 x_2 (x_1^k + x_2^k) = 14S_{k+1} - S_k,$$

nên bằng quy nạp toán học, ta có hệ thức $S_{n+2} = 14S_{n+1} - S_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Do $S_0, S_1 \in \mathbb{Z}$ nên $S_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Do đó $(7+4\sqrt{3})^n + (7-4\sqrt{3})^n \in \mathbb{Z}$.

Nhận thấy rằng $0 < 7-4\sqrt{3} < 1$ nên $0 < (7-4\sqrt{3})^n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Do vậy $\{(7+4\sqrt{3})^n\} = 1 - (7-4\sqrt{3})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Từ đây, ta suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{(7+4\sqrt{3})^n\} = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} (7-4\sqrt{3})^n = 1. \square$$

◀ **Nhận xét.** Đây là một bài toán về giới hạn của dãy số sinh bởi phần phân của một cặp biểu thức liên hợp quen biết. Một số bạn còn ứng dụng nguyên lý kẹp để tìm giới hạn. Vì là một dạng hệ thức quen thuộc ở bậc phổ thông nên có nhiều bạn tham gia giải. Đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên. Một số bạn còn mở rộng bài toán theo các cặp số liên hợp khác và có cùng cách giải như trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/364.** Cho n là một số nguyên dương và $2n+2$ số thực $a, b, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ với $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sao cho hàm số $F(x) = \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i x + b_i} - (ax+b)$ có tính

chất:

Tồn tại hai số thực phân biệt α, β sao cho $F(\alpha) = F(\beta) = 0$.

Chứng minh rằng α và β là tất cả các nghiệm thực của phương trình $F(x) = 0$.

Lời giải. (Theo bạn Khổng Hoàng Thao, 11A1, THPT chuyên Vinh Phúc).

Giả sử $\exists \gamma$ với $\gamma \neq \alpha, \gamma \neq \beta$ sao cho $F(\gamma) = 0$. Ta có $F(\alpha) = F(\gamma)$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i \alpha + b_i} - \sqrt{a_i \gamma + b_i}) = a(\alpha - \gamma) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{a_i(\alpha - \gamma)}{\sqrt{a_i \alpha + b_i} + \sqrt{a_i \gamma + b_i}} = a(\alpha - \gamma) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{a_i \alpha + b_i} + \sqrt{a_i \gamma + b_i}} = a \quad (\text{do } \alpha \neq \gamma) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{a_i \beta + b_i} + \sqrt{a_i \gamma + b_i}} = a \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{1}{\sqrt{a_i \alpha + b_i} + \sqrt{a_i \gamma + b_i}} - \frac{1}{\sqrt{a_i \beta + b_i} + \sqrt{a_i \gamma + b_i}} \right) \\ \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^n \frac{a_i (\sqrt{a_i \beta + b_i} - \sqrt{a_i \alpha + b_i})}{(\sqrt{a_i \alpha + b_i} + \sqrt{a_i \gamma + b_i})(\sqrt{a_i \beta + b_i} + \sqrt{a_i \gamma + b_i})} \\ \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 (\beta - \alpha)}{(\sqrt{a_i \alpha + b_i} + \sqrt{a_i \gamma + b_i})(\sqrt{a_i \beta + b_i} + \sqrt{a_i \gamma + b_i})} \times \\ \times \frac{1}{(\sqrt{a_i \beta + b_i} + \sqrt{a_i \alpha + b_i})}.$$

Vì $\beta \neq \alpha$ nên ta suy ra

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{(\sqrt{a_i \alpha + b_i} + \sqrt{a_i \gamma + b_i})(\sqrt{a_i \beta + b_i} + \sqrt{a_i \gamma + b_i})} \times \\ \times \frac{1}{(\sqrt{a_i \beta + b_i} + \sqrt{a_i \alpha + b_i})}.$$

Do $a_i \neq 0$ nên ta có mâu thuẫn. Vậy α, β là tất cả các nghiệm của PT $F(x) = 0$. $\square$

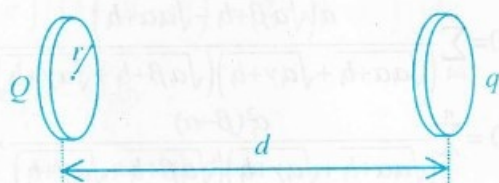
◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn dùng định lí Rolle (giải tích 12) để chứng minh như sau: Nếu phương trình $F(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thì từ định lí Rolle suy ra phương trình $F'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Áp dụng định lí Rolle một lần nữa suy ra phương trình $F''(x) = 0$ có một nghiệm. Nhưng từ biểu thức của $F(x)$ dễ thấy $F''(x) < 0$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Giang: Nguyễn Quang Chúc, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Vĩnh Phúc:** Trần Văn Chiến, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Nguyễn Khánh Việt, 10A2 Toán, ĐHKHTN, ĐHQG; **Hà Tây:** Nguyễn Bao Sách, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hải Dương:** Nguyễn Duy Bình, 12A1, THPT Ninh Giang; **Thái Bình:** Dương Thu Hương, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** Nguyễn An Tịnh, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Cẩm Hằng, 12 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài L1/364.** Hai đồng xu nhỏ bằng kim loại có bán kính r , dày $a = 1 \text{ mm}$, được đặt cách nhau một đoạn $d = 1 \text{ m}$ sao cho mặt phẳng của hai đồng xu vuông góc với đường nối tâm của chúng. Biết điện tích của mỗi đồng xu là Q và q thỏa mãn $\frac{Q}{q} = 2 \cdot 10^7$ thì lực tương tác điện giữa các đồng xu bằng 0. Tính bán kính r của mỗi đồng xu. Cho biết $a \ll r \ll d$.



Lời giải. Giả sử đồng xu thứ nhất tích điện Q , đồng xu thứ hai tích điện q . Gọi q_1 và q_2 là điện tích phân bố ở mặt trái và mặt phải của đồng xu thứ hai.

Ta có $q = q_1 + q_2$ (1)

Do khoảng cách giữa hai đồng xu $d \gg a$ (bề dày của mỗi đồng xu) nên

$$E_1 = \frac{kQ}{\left(d - \frac{a}{2}\right)^2} \text{ và } E_2 = \frac{kQ}{\left(d + \frac{a}{2}\right)^2}$$

ở đây E_1 và E_2 là điện trường do Q gây ra ở mặt trái và mặt phải của đồng xu thứ hai.

Lực điện do đồng xu thứ nhất tác dụng lên đồng xu thứ hai là $F_1 + F_2 = 0$, suy ra $q_1 E_1 + q_2 E_2 = 0$.

$$\text{Ta tìm được } q_1 = -q_2 \frac{\left(d - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(d + \frac{a}{2}\right)^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } q = \frac{2daq_2}{\left(d + \frac{a}{2}\right)^2} \quad (3)$$

Đồng xu là vật dẫn cân bằng điện nên

$$\frac{kQ}{d^2} - \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0 r^2} = 0 \quad (4)$$

Từ (2), (3), (4) ta tìm được

$$r = \sqrt{\frac{2qd^3}{Qa}} = 0,01 \text{ (m)} = 1 \text{ (cm)}. \square$$

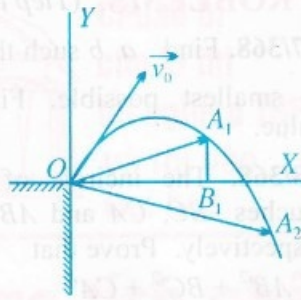
◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghệ An: Nguyễn Tất Nghĩa, 12A3, Trần Văn Giai, A3K34, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bắc Ninh:** Trần Việt Long, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Thanh Hóa:** Nguyễn Duy Hùng, 12F, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Trung Quân, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN THUẬN

★ **Bài L2/364.** Hai hòn đá được ném theo một mặt phẳng thẳng đứng từ cùng một điểm trên một ngọn tháp cao với cùng góc ném α so với phương ngang (ném chếch lên trên) và cùng vận tốc ban đầu v_0 nhưng ném cách nhau một khoảng thời gian là Δt . Xác định khoảng cách nhỏ nhất giữa hai hòn đá và thời điểm đạt khoảng cách đó. Bỏ qua sức cản của không khí.

Lời giải. Chọn gốc tọa độ tại điểm ném, gốc thời gian lúc ném hòn đá 2, ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp vectơ. Khi hòn đá 2 bắt đầu được ném đi thì hòn đá 1 có độ dời là



$$\Delta \vec{r}_0 = \vec{v}_0 \Delta t + \frac{\vec{g} \Delta t^2}{2}$$

và nó đang có vận tốc

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \Delta t.$$

Các phương trình xác định vectơ độ dời (vectơ vị trí) của hai hòn đá là

$$\Delta \vec{r}_1(t) = \vec{v}_0(t + \Delta t) + \frac{\vec{g}(t + \Delta t)^2}{2},$$

$$\Delta \vec{r}_2(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}.$$

Vectơ độ dời của hòn đá 1 so với hòn đá 2 (tức là hệ quy chiếu gắn với hòn đá 2) là

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \Delta \vec{r}_1(t) - \Delta \vec{r}_2(t) = \vec{v}_0 \Delta t + \frac{\vec{g} \Delta t^2}{2} + \vec{g} \Delta t \cdot t \\ &= \Delta \vec{r}_0 + \vec{g} \Delta t \cdot t. \end{aligned}$$

Phương trình này cho thấy hòn đá 1 chuyển động thẳng đứng với vận tốc $\vec{g} \Delta t$ so với hòn đá 2.

* Với Δt sao cho khi ném hòn đá 2 mà hòn đá 1 chưa trở lại độ cao ban đầu (điểm ném) thì khoảng cách nhỏ nhất của hai hòn đá sẽ bằng

$$S_1 = (\Delta \vec{r}_0)_x = \left(\vec{v}_0 \Delta t + \frac{\vec{g} \Delta t^2}{2} \right)_x = v_0 \cos \alpha \Delta t \quad (1)$$

Khoảng cách này đạt được khi hai hòn đá có cùng độ cao, tức là

$$\begin{aligned} S_y &= 0 = (\Delta \vec{r}_0)_y - g \Delta t \cdot t \\ &= v_0 \sin \alpha \cdot \Delta t - \frac{g \Delta t^2}{2} - g \Delta t \cdot t. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra} \quad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \frac{\Delta t}{2} \quad (2)$$

Điều kiện để xảy ra trường hợp này là $t > 0$

$$\text{hay } \Delta t < \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

* Ngược lại nếu $\Delta t \geq \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ thì khoảng cách nhỏ nhất giữa hai hòn đá bằng:

$$S_2 = |\Delta \vec{r}_0| = \sqrt{(v_0 \cos \alpha \Delta t)^2 + \left(v_0 \sin \alpha \Delta t - \frac{g \Delta t^2}{2} \right)^2} \quad (3)$$

và đạt được lúc $t = 0$. □

◀ **Nhận xét.** Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Đa số các bạn chỉ xét được một trường hợp. Các bạn sau có lời giải đúng và ngắn gọn:

Bác Ninh: Trần Việt Long, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Đức Linh, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tây:** Nguyễn Mạnh Quân, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Nam Định:** Nguyễn Văn Đình, 12I, THPT Giao Thủy A; **Hưng Yên:** Phạm Đức Linh, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hoá:** Trần Anh Ngọc, 12A1, THPT Hậu Lộc I; **Nghe An:** Nguyễn Đức Sơn, Nguyễn Tất Nghĩa, 12A3, Trần Tuấn An, Dương Hoàng Hưng, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu.

NGUYỄN XUÂN QUANG



KÌ THI... (Tiếp trang 15)

Mỗi bài toán được chấm điểm theo thang điểm 5. Phân bố điểm như sau: Phần cách giải 2,5 điểm và phần tính toán ra kết quả chính xác tới 4 chữ số thập phân 2,5 điểm. Điểm của một bài toán bằng tổng điểm của 2 phần trên.

Để giải một bài toán Hoá học, thí sinh phải ghi tương ứng tóm tắt lời giải, cách sử dụng máy tính cầm tay để giải phương trình và tính toán và kết quả vào các phần có sẵn trong bản đề thi.

Điểm của bài thi là tổng điểm thí sinh làm được (không vi phạm quy chế thi) của 10 bài toán trong bài thi.

THẾ THẠCH - VĨNH LINH

(Kì sau đăng tiếp)

LỜI GIẢI...(Tiếp trang 4)

Từ (1) ta có $x^2 + a^2 - 2ax = b^2 + y^2 - 2by$,
suy ra $x^2 + a^2 \leq b^2 + y^2$ (8)

Từ (1) và (8) ta có

$$(x+a)(x^2+a^2) \geq (b+y)(b^2+y^2).$$

Đẳng thức xảy ra, suy ra $x+a=b+y$. Từ đây và từ (1) suy ra $x=a=b=y$.

Vậy $x^n+y^n=a^n+b^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 4. a) Bạn đọc tự giải.

b) Kẻ $AH \perp BC$. Đặt $MQ=x$, $PQ=y$, $AH=h$,
 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ (hình vẽ).

Ta có $S_{MNPQ}=xy$. Theo định lí Thales ta có

$$AH \parallel QM \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{BQ}{BA} \quad (1)$$

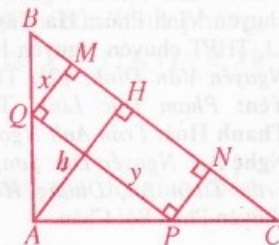
$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{AQ}{AB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$xy = \frac{ah}{c^2} \cdot AQ \cdot BQ$$

$$\leq \frac{ah}{c^2} \cdot \frac{(AQ+BQ)^2}{4}$$

$$= \frac{ah}{4} = \frac{S_{ABC}}{2}.$$



Do đó $\max S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABC}$, đạt được khi và chỉ khi Q là trung điểm của AB . Khi đó, theo câu a) ta có $\triangle BMQ \sim \triangle QPA$ suy ra

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{BQ}{QP} = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} \quad (3)$$

$\triangle CNP \sim \triangle PAQ$ suy ra

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{PC}{PQ} = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$.

Ngược lại, nếu $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$ thì từ (3) và (4) ta

lại có $1 = \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_3^2} = \frac{BQ^2 + PC^2}{PQ^2}$. Điều này chỉ

xảy ra khi Q là trung điểm của đoạn AB . $\square$

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, Quy Nhơn, Bình Định)

sưu tầm và giới thiệu

PROBLEMS...(Tiếp trang 17)

T7/368. Find a, b such that $\max_{0 \leq x \leq 16} |\sqrt{x+ax+b}|$ is smallest possible. Find this minimum value.

T8/368. The incircle of a triangle ABC touches BC, CA and AB at $A', B',$ and C' respectively. Prove that

$$\begin{aligned} & AB'^2 + BC'^2 + CA'^2 \\ & \geq AB' \cdot B'C' + BC' \cdot C'A' + CA' \cdot A'B' \\ & \geq B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2. \end{aligned}$$

When does equality occur?

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/368. Let k be a positive integer. Write k as a product of prime numbers (not necessarily distinct, for instance, $k=18=3.3.2$) and let $T(k)$ be the sum of all factors in the factorization above. Find the largest constant C such that $T(k) \geq C \ln k$ for all positive integer k .

T10/368. Let a, b, c be non-negative real numbers whose sum of squares equal 3. Find the maximum value of the following expression:

$$P = ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc.$$

T11/368. Let (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) be a sequence, determined by the following recursive formula:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4 + \dots + x_n^{2007} - x_n^{2008} \quad (n \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

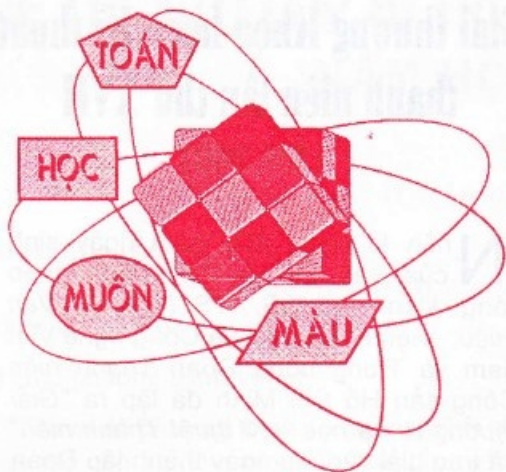
Find the limit $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$.

T12/368. Let $ABCD$ be a tetrahedron whose altitudes are concurrent. Denote by R the radius of its circumcircle; by h_1, h_2, h_3, h_4 the lengths of the altitudes corresponding to the vertices A, B, C, D respectively; and by R_1, R_2, R_3, R_4 the circumcircles's radius of the opposite faces of the vertices A, B, C, D respectively. Prove the following inequality:

$$\frac{1}{h_1 + 2\sqrt{2}R_1} + \frac{1}{h_2 + 2\sqrt{2}R_2} + \frac{1}{h_3 + 2\sqrt{2}R_3} + \frac{1}{h_4 + 2\sqrt{2}R_4} \geq \frac{1}{R}.$$

When does equality occur?

Translated by LE MINH HA

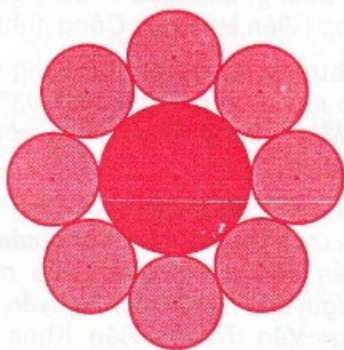


Hình hoa 8 cánh

Nhân dịp đón xuân mới một nhà hàng dự định trang trí bằng cách cắt những mảnh giấy màu hình vuông kích thước như nhau thành hình hoa tám cánh, trong đó có một hình tròn ở trung tâm (bán kính R) và tám hình tròn nhỏ (bán kính r) sao cho các hình tròn nhỏ tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một và chúng đều tiếp xúc ngoài với hình tròn trung tâm (xem hình 1).

Dành cho bạn đọc

- 1) Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.
- 2) Hỏi phải sắp xếp chín hình tròn nói trên trong mỗi mảnh giấy hình vuông cạnh dài 290mm như thế nào để R và r là lớn nhất? Tính các giá trị lớn nhất đó (làm tròn đến 0,1mm)..

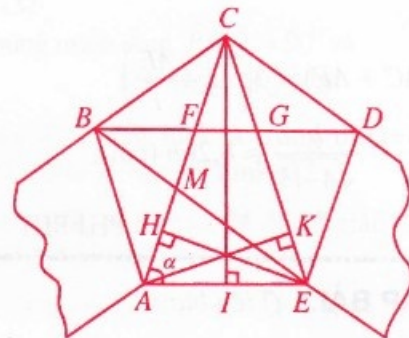


Hình 1

Giải đáp bài: TẠO NGŨ GIÁC ĐỀU TỪ BĂNG GIẤY

(Đề đăng trên THPT số 363 tháng 9.2007)

1) Từ giả thiết ta có $AB \parallel CE$, $AE \parallel BD$, $AC \parallel DE$ (h. 2) nên các tứ giác $ABGE$, $AFDE$ đều là hình bình hành, suy ra $AB = GE$ và $AF = ED$ (1)



Hình 2

Kẻ $AK \perp CE$ và $EH \perp AC$ thì $AK = EH = h$. Dễ thấy $\triangle AEK = \triangle EAH$ nên

$$\widehat{AEK} = \widehat{EAH} = \alpha \Rightarrow AC = CE \quad (2)$$

Hơn nữa từ $BD \parallel AE$ có

$$\widehat{CFG} = \widehat{CAE} = \widehat{CEA} = \widehat{CGF} \text{ nên } CF = CG \quad (3)$$

Từ (2), (3) có $AF = GE$ (4). Từ (1) và (4) có $AB = DE$. Lập luận tương tự suy ra $AB = DE = BC = AE = CD$. Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{ACE} = \widehat{CED}$. Từ đó và (2) có $\widehat{BAE} = \widehat{DEA}$. Tương tự cũng có $\widehat{BAE} = \widehat{DEA} = \widehat{CDE} = \widehat{BCD} = \widehat{CBA}$. Suy ra $ABCDE$ là ngũ giác đều.

2) Để mỗi mặt của ngũ giác có màu thì băng giấy phải chứa mặt phải của ít nhất sáu hình thang đều bằng hình thang $ACDE$, nói cách khác, chiều dài mỗi cạnh của băng giấy ít nhất phải là $s = 3(AC + AE)$.

$$\text{Cách 1. Ta có } AE = \frac{EH}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha},$$

$$AC = \frac{AI}{\cos \alpha} = \frac{AE}{2 \cos \alpha} = \frac{h}{2 \sin \alpha \cos \alpha}.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } s &= 3(AC + AE) = \frac{3h(1+2\cos\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha} \\ &= \frac{3(1+2\cos 72^\circ)}{\sin 144^\circ} h \approx 8,26h \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Cách 2. Theo tính chất của ngũ giác đều

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AM}{AE} = t = \frac{\sqrt{s}-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} AM = t \cdot AE \\ AE = t \cdot AC. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Trong } \triangle AEH \text{ có } h^2 + \left(\frac{AM}{2}\right)^2 &= AE^2 \\ \Rightarrow h^2 &= AE^2 \left(\frac{4-t^2}{4}\right) \Rightarrow AE = \frac{2h}{\sqrt{4-t^2}}. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} s &= 3(AC + AE) = 3\left(AE + \frac{AE}{t}\right) \\ &= \frac{6(1+t)}{t} \cdot \frac{h}{\sqrt{4-t^2}} \approx 8,26h \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

PHI PHI

GIẢI ĐÁP BÀI... (Tiếp bài 4)

- Hai dùng với nghĩa nhiều, hoặc lặp đi lặp lại
(Một nắng hai sương; Một vừa hai phải; Một điều thưa hai điều bẩm; Tiện đây xin một hai điều,...)
- Chỉ sự xấp xỉ khi đi kèm với một hoặc ba
(Chỉ một hai hôm nữa; Nhà hai ba nóc;...)
- Đếm một, hai, ba, ... để thấy mức độ tăng dần

(Một chờ hai đợi ba trông;

Bốn thương năm nhớ bảy tám chín mong mười tìm;

Một thương hai nhớ ba sầu

Cơm ăn chẳng động nhai trầu cấm hơi;...)

- Trong sự liệt kê theo một dấu hiệu hoặc quy trình nào đó (Thứ nhất thiên tai, thứ hai hỏa hoạn;

Thứ nhất vợ đại trong nhà

Thứ hai nhà dột, thứ ba rựa cùn; ...)

Những dẫn chứng như trên còn rất nhiều, mong bạn đọc tự bổ sung. Các bạn sau đã nêu nhiều dẫn chứng được nhận tặng phẩm:

- 1) Phan Phú, TTr. An Lão, TP. Hải Phòng
- 2) Lang Văn Thành, 12A, Trường BTVH Hữu Nghị Việt - Lào, Hà Tây.
- 3) Nguyễn Hữu Trọng, 11A1, THPT Thuận Thành 1, Thuận Thành, Bắc Ninh.
- 4) Vũ Thị Thu Hà, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diên Châu, Nghệ An.

VĂN KHANH

Giải thưởng Khoa học - Kỹ thuật thanh niên lần thứ XVII NĂM 2007

Nhân kỉ niệm 100 năm ngày sinh của Bác Hồ vĩ đại (1990), theo sáng kiến của GS. VS Nguyễn Văn Hiệu, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Trung ương Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh đã lập ra "Giải thưởng Khoa học - Kỹ thuật Thanh niên" và trao giải vào dịp ngày thành lập Đoàn 26 tháng 3. Theo điều lệ đã công bố, hàng năm Giải thưởng này được trao cho các tác giả có độ tuổi không quá 40 với những công trình có ý nghĩa về mặt Khoa học và kỹ thuật nhằm khích lệ tuổi trẻ cả nước hăng hái học tập, sáng tạo, thực hiện thắng lợi sự nghiệp hiện đại hóa, công nghiệp hóa đất nước.

Trong năm 2007, Hội đồng Giải thưởng đã nhận được 34 đề tài dự thi. Với tinh thần khẩn trương, công khai, khách quan, các đề tài đã được Hội đồng tổ chức ba vòng tuyển chọn. Các công trình đã được gửi đến các chuyên gia có uy tín về chuyên môn đánh giá. Trên cơ sở các phiếu điểm đánh giá và nhận xét đó, Hội đồng chấm giải thưởng quyết định trao Giải thưởng Khoa học - Kỹ thuật cho các công trình sau đây:

1) **Giải thưởng Khoa học** cho công trình "Nghiên cứu công nghệ mới khai thác concrete rỗng hương lau bằng CO_2 ở trạng thái siêu tới hạn" của nhóm tác giả Lê Đăng Quang, Lê Ngọc Thức, Nguyễn Mai Cương (Viện Hóa học Công nghiệp).

2) **Giải thưởng Kỹ thuật** cho công trình "Máy bắn tập súng bộ binh MBT-03" của tác giả Mai Quang Huy (Học viện Kỹ thuật Quân sự).

3) **Giải thưởng Kỹ thuật** cho công trình "Nghiên cứu sử dụng chất nặng cảm đá làm huyền phù tuyển than" của nhóm tác giả Nguyễn Hữu Nhân, Nguyễn Văn Minh, Mai Văn Thịnh (Viện Khoa học Công nghệ Mỏ).

LÊ BÍCH



Tìm chữ số Xuân Mậu Tý

Trong phép cộng dưới đây bạn hãy thay các chữ giống nhau bởi các chữ số giống nhau, các chữ khác nhau bởi các chữ số khác nhau và các chữ số đó đều khác với 0, 2, 8.

$$\begin{array}{r} \text{X U A N} \\ + \text{M A U} \\ \hline \text{T Y} \\ \hline 2008 \end{array}$$

PHI YẾN

SÁCH ĐANG PHÁT HÀNH

► TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

QUYỂN 1 (tái bản) - 300 trang, khổ 19x26,5cm. Giá bán lẻ: 34.000 đồng.

QUYỂN 2 (tái bản) - 252 trang, khổ 19x26,5cm. Giá bán lẻ: 30.000 đồng.

► CÁC BÀI THI OLYMPIC TOÁN THPT VIỆT NAM (1990-2006)

Sách dày 284 trang, khổ 17x24cm. Giá bán lẻ: 39.500 đồng.

► AN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ

Sách dày 164 trang, khổ 17x24cm. Giá bán lẻ: 21.500 đồng.

► TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Sách chọn lọc các bài viết và đề toán đã đăng trên tạp chí THPT gồm ba chương:

Chương I: Khai thác các bài toán THCS, giới thiệu các phương pháp giải toán cực trị đại số và nêu ra những sai lầm tế nhị, cách rèn luyện tư duy qua giải toán hình học phẳng.

Chương II: Nhìn bài toán từ nhiều hướng, nêu các ý kiến trao đổi về vấn đề nghiệm bội, nghiệm kép của phương trình, mối liên hệ giữa đường thẳng và ba đường conic, mở rộng bài toán con bướm và mở rộng một số tính chất hình phẳng sang hình không gian.

Chương III: Giới thiệu **100 đề toán hay** cùng với lời giải được tuyển chọn từ các đề toán đã đăng trên THPT các năm 1996, 1997.

Sách dày 252 trang, khổ 19x26,5cm. Giá bán lẻ: 34.000 đồng.

**QUYỂN 3
(Mới)**



► ĐÓNG TẬP THPT NĂM 2007

Tất cả 12 số tạp chí của năm 2007 được đóng thành một tập với bìa cứng rất thuận tiện cho việc lưu giữ và tra cứu. Giá bán lẻ: 75.000 đồng.

Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

Mua từ 10 quyển trở lên được trừ phí phát hành. Để biết thông tin chi tiết xin liên hệ:

ĐT/FAX: 04.5144272-04.5121606; Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

CÁC BẠN NHỚ ĐẶT MUA BÁO CHO QUÝ I NĂM 2008 TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN

Số 368 (2-2008)

**TOÁN HỌC
& Tuổi trẻ 31**

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 368(2.2008)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.5121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.5144272, 04.5121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,

TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,

PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,

TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,

PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY,

GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools

Bùi Tuấn Anh – Tìm cực trị của biểu thức nhiều biến bằng cách quy về một biến.

3 Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Hà Tĩnh, năm học 2007 – 2008.

4 Lời giải đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Lê Quý Đôn - Bình Định, năm học 2007-2008.

5 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation

Ngọc Thảo – Ứng dụng tích phân để tính diện tích và thể tích.

9 Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics

Trần Nam Dũng – Về những dãy số xác định bởi dãy các phương trình.

12 Từ Kho tàng Toán học – From Math Treasure

Nguyễn Đăng Phát – Bài toán về điểm Fermat và ứng dụng chứng minh nguyên lí thế năng cực tiểu. (Tiếp theo và hết)

14 Kỳ thi khu vực lần thứ 8 giải toán trên máy tính cầm tay, năm học 2007 – 2008.

16 Đề ra kì này – Problems in This Issue

T1/368, ..., T12/368, L1/368, L2/368.

18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems

Giải các bài của số 364.

29 Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics

31 Giải trí toán học – Math Recreation

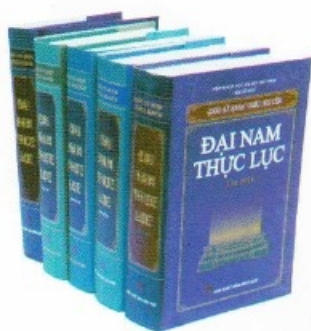
Bìa 1. Phó Chủ tịch nước Nguyễn Thị Doan trao tặng Huân chương Hồ Chí Minh cho Nhà xuất bản Giáo dục.

Bìa 2. Huỳnh Bá Vân – Năm mươi năm trên đường ta đi tới.

Bìa 3. Bộ sách kỉ niệm 50 năm NXBGD.

Bìa 4. Câu lạc bộ – Math Club

Biên tập : HỒ QUANG VINH. Mi thuật : MINH THO. Trĩ sự, Chế bản : VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330



BỘ SÁCH Kỉ niệm 50 năm Nhà xuất bản Giáo dục

Ngày 15/01/2008, tại Hội trường 22-12, Nhà xuất bản Giáo dục (NXBGD) đã tổ chức cuộc giao lưu giới thiệu bộ sách kỉ niệm 50 năm NXBGD trong không khí trang trọng và đầm ấm. Bộ sách gồm 50 tên sách được Hội đồng tuyển chọn kĩ càng tương xứng cho 50 năm xây dựng, đổi mới và phát triển của NXBGD. Những cuốn sách này có giá trị khoa học và thực tiễn cao, mang ý nghĩa chính trị, văn hóa, giáo dục sâu sắc, được trình bày và in ấn đẹp, nhằm đáp ứng nhu cầu học tập, nghiên cứu, giảng dạy của học sinh, sinh viên, giáo viên phổ thông, giảng viên đại học và cao đẳng, cán bộ nghiên cứu, cán bộ quản lí giáo dục và đông đảo bạn đọc; góp phần nâng cao chất lượng giáo dục, nâng cao dân trí trong thời kì mới. Tập chí TH&TT xin trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc danh mục 50 cuốn sách trên.

1. **Bác Hồ với giáo dục**
Nguyễn Thị Tinh, Nguyễn Như Ý (Chủ biên) (CB)
2. **Tư tưởng Hồ Chí Minh về đạo đức**
Đình Xuân Dũng (CB)
3. **Đào Duy Anh - Nghiên cứu Văn hóa và Ngữ văn**
Trịnh Bá Đĩnh
4. **Nguyễn Văn Huyền toàn tập - tập 1, 2, 3**
Phạm Minh Hạc, Nguyễn Văn Huy
5. **Tạ Quang Bửu**
Nguyễn Văn Đạo
6. **Hữu Ngọc - Những nẻo đường văn hóa**
Hữu Ngọc
7. **Lược sử Việt ngữ học, tập 1, 2**
Nguyễn Thiện Giáp (CB)
8. **Văn học Việt Nam thế kỉ X-XIX - Những vấn đề lí luận và lịch sử**
Trần Ngọc Vương (CB)
9. **Văn học Việt Nam thế kỉ XX - Những vấn đề lịch sử và lí luận**
Phan Cự Đệ (CB)
10. **Lịch triều hiến chương loại chí, tập 1, 2**
Viện Sử học Việt Nam
11. **Đại Nam thực lục - 10 tập**
Quốc sử quán Triều Nguyễn
12. **Các Nhà xuất bản ở Việt Nam thế kỉ XX**
Đình Xuân Dũng, Ngô Trần Ái (đồng CB)
13. **Giáo dục đại học Hoa Kỳ**
Lâm Quang Thiệp
14. **Văn bia để danh Tiến sĩ Việt Nam**
Trịnh Khắc Mạnh (Biên dịch, chú thích)
15. **Từ điển tác phẩm văn xuôi Việt Nam, tập 1, 2**
Vũ Tuấn Anh, Bích Thu (CB)
16. **Từ điển chữ Nôm**
Nguyễn Quang Hồng (CB)
17. **Trí thức bách khoa cho trẻ em**
Tập thể tác giả
18. **Từ điển thuật ngữ Mỹ thuật phổ thông**
Đặng Bích Ngân (CB)
19. **Thành phố Hồ Chí Minh 30 năm xây dựng và phát triển**
Phan Xuân Biên (CB)
20. **Bộ sách hình nổi về truyện cổ tích (6 cuốn)**
Vũ Hoàng Thanh Trúc (dịch)
21. **Thơ Việt Nam thế kỉ XX - Thơ trữ tình**
Nguyễn Bùi Vợi (CB)
22. **Từ điển tranh về các con vật (tập 1); về các loài hoa (tập 2); về các loài cây (tập 3); về các loại củ, quả (tập 4).**
Lê Quang Long (CB)
23. **Sách ảnh Việt Nam từ một phương pháp tiếp cận (Đại gia đình các dân tộc Việt Nam) (song ngữ Anh - Việt)**
Nguyễn Văn Huy, Nguyễn Quý Thao, ...
24. **Truyện Kiều (đĩa CD)**
Tập thể tác giả
25. **Nguyễn Văn Hiệu - Các công trình chọn lọc**
Vũ Thanh Khiết
26. **Phương pháp dạy học Hóa học ở trường phổ thông và đại học - Một số vấn đề cơ bản**
Nguyễn Cương (CB)
27. **Từ điển Toán học**
Đoàn Quỳnh (CB)
28. **Bộ SGK mới từ lớp 1-11 (in đẹp, bìa dày); Bộ SGK tự chọn Tiếng Anh (Let's Learn English)**
Tập thể tác giả
29. **Atlas địa lí tự nhiên đại cương**
Ngô Đạt Tam (CB)
30. **Từ điển hiện vật văn hóa các dân tộc Việt Nam**
Nguyễn Văn Huy (CB)
31. **Evo-Heritage: Một thiên đường Spa; The healing gardens Vietnamese Spa Experience**
Thái Quang Trung (Tổng chủ biên)
32. **Tiến trình văn hóa Việt Nam (từ khởi thủy đến thế kỉ XIX)**
Nguyễn Khắc Thuần
33. **Văn chương, thẩm mĩ và văn hóa**
Lê Ngọc Trà
34. **Bi kịch Hi Lạp; Hải kịch Hi Lạp**
Hoàng Hữu Đán
35. **Truyện chọn lọc viết về nhà giáo Việt Nam (18 cuốn)**
Tập thể tác giả
36. **10 thế kỉ bàn luận về văn chương- tập 1, 2, 3**
Viện Văn học
37. **Các nhà toán học được giải thưởng Fields**
Hà Huy Khoái
38. **Từ điển giáo khoa Việt - Nga**
Bùi Hiến (CB)
39. **Hồ Chí Minh - Thơ tứ tuyệt**
Hà Minh Đức (tuyển chọn)
40. **Văn học trung đại Việt Nam dưới góc nhìn văn hóa**
Trần Nho Thìn
41. **Truyện Kiều**
Trần Nho Thìn (CB), Nguyễn Tuấn Cường
42. **Tinh hoa văn hóa phương Đông**
Đặng Đức Siêu
43. **Sáng tạo và giao lưu**
Phạm Vĩnh Cư
44. **Nhạc cụ các dân tộc Việt Nam**
Bùi Ngọc Phương, Ngọc Phan
45. **Văn hóa Việt Nam đa tộc người**
Đặng Nghiêm Vạn
46. **Tuyển tập văn học dân tộc và miền núi, tập 1, 2**
Nguyễn Quốc Chấn (CB), Ma Văn Kháng (CB)
47. **Tâm lí học nghiên cứu con người trong thời đổi mới**
Phạm Minh Hạc
48. **Việt Nam đất nước con người**
Lê Thông (CB)
49. **Lí luận - phê bình văn học thế giới thế kỉ XX, tập 1, 2**
Lộc Phương Thủy (CB)
50. **Từ điển địa danh lịch sử Việt Nam**
Đình Xuân Lâm, Trương Hữu Quỳnh (đồng CB).



Thi tài mừng Tết Mậu Tý



Mừng Tết Mậu Tý ta mê mãi thi tuyển tuyệt tác thơ, truyền mà trong mỗi từ toàn thấy M, thấy T trước tiên từ trái. Từ trưa tới tối, mỗi tuần, mỗi tháng tìm tài mãi từng tiếng, từng từ mờ mắt mỏi tay mới tạo thành truyện mộng mơ, thành thơ từ tuyệt, thành tiên thuyết thần tình... Mấy trăm lá thư tới tập mang tới tờ Toán Tuổi trẻ. Tiếp theo mang mãi thấy tên mình trên trang Toán Tuổi trẻ tháng Tư.

Giải đáp bài: **HAI** có nghĩa là gì?

(Đề đăng trên THTT số 366 tháng 12 năm 2007)

a) Ý nghĩa toán học

- Số phần tử của một tập hợp gồm 2 phần tử
- Số thứ tự của phần tử a_2 trong dãy $a_1, a_2, \dots$ (hoặc hạng nhất, hạng hai)
- Cơ sở của hệ nhị phân
- Số nguyên tố nhỏ nhất
- Số ngói (chiều) trong phép toán (không gian): phép toán hai ngói, không gian hai chiều.

b) Chỉ một khái niệm riêng (dùng như danh từ riêng)

- Lớp Hai trong bậc Tiểu học
- Điểm Hai trong thang điểm đánh giá bài làm
- Anh Hai, chị Hai (người đứng đầu trong những người cùng thế hệ của gia đình)
- Tháng Hai trong 12 tháng của năm
- Hai chấm (dặt cuối câu để liệt kê các sự việc)
- Hai lá mầm (chỉ một lớp thực vật)
- Hai cánh (chỉ một bộ thuộc lớp côn trùng)
- Ba sôi hai lạnh (tỉ lệ nước nóng để ngâm thóc giống).
- Một, hai; một, hai; ... (tiếng hò đi đều bước)

c) Ý nghĩa triết học

- Hai mặt đối lập của một hiện tượng (Âm dương hai ngả; một sống hai chết,...)

d) Các nghĩa về đời sống, xã hội

- Chỉ sự chính xác (Hai năm rở mười; Như hai giọt nước; Có một không hai; Một với một là hai;...)

- Dùng từ Hai tay để chỉ người

(Hai bàn tay trắng; Hai tay buông xuôi;
Hai tay bung chén rượu đào,
Bỏ ra thì tiếc uống vào thì say;...)

- So sánh hai lớn hơn một để chỉ việc nhiều hơn hoặc cùng một việc đạt được nhiều mục đích

(Mỗi người làm việc bằng hai; Một mũi tên hai con nhạn;...)

- So sánh sự kiện (khả năng) này xảy ra nhiều hơn sự kiện (khả năng) khác để nêu bật một ý nghĩa nào đó

(Quan hai lại một; Một đồng khoai hai đồng vỏ; Một ngày vãi chài hai ngày phơi lưới;)

- "Một thành hai" gây ra khó khăn, hoặc chỉ sự chia rẽ, sự thay đổi, hoặc sự chia xẻ.

(Một cảnh hai quê; Một gáo hai chĩnh; Đòn xóc hai đầu; Một bàn tay thì đẩy, hai bàn tay thì vơi;...)

- "Hai trong một" khiến công việc nặng nhọc thêm có thể đến mức không chịu nổi, nhưng cũng có thể thống nhất với nhau (Một cổ hai tròng; Hai mắt đốn một; Ngựa nào vác được hai yên; Hai mặt một lời;

Mình với ta tuy hai mà một;
Ta với mình tuy một mà hai;...)

- Tăng từ một đến hai làm thay đổi hẳn tính chất sự việc (Một người thì kín, hai người thì hở; Một đồng kiếm nát đồng cỏ, hai đồng kiếm đỏ con mắt;...)



(Xem tiếp trang 30)

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT02M8

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2008

Giá : 5000 đồng

Năm nghìn đồng