



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

1 2008
Số 367

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 45

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272, (04)5121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre



Chào mừng
Lễ kỷ niệm

50 năm

NXB Giáo dục

Happy New Year
2008





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
TẠI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

**CẢNH MỪNG
MÙA MỚI**

*Sức khỏe
An khang
Thịnh vượng
Hạnh phúc*



**Xuân Mậu Tý
2008**

Happy new year

Địa chỉ: 231 Nguyễn Văn Cừ, P.4, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 08.8356111 - Fax: 08.8350983 - Website: <http://hcm.nxbgd.com.vn>



Nét đẹp CỦA ĐỊNH LÝ 4 ĐIỂM

NGÔ ĐỨC MINH
(GV THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng,
Hải Phòng)

Trong quá trình mở rộng định lý Pythagore, ta được định lý 4 điểm như sau:

Với 4 điểm A, B, C, D ta luôn có: AC vuông góc với BD khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Hai ứng dụng của định lý này về mối quan hệ giữa các cạnh với hai đường chéo của một tứ giác là:

1) Nếu tổng bình phương các cặp cạnh đối diện của tứ giác bằng nhau thì hai đường chéo của nó vuông góc với nhau và ngược lại.

2) Nếu tổng bình phương hai cạnh đối diện của tứ giác bằng tổng bình phương hai đường chéo thì hai cạnh đối diện còn lại của tứ giác vuông góc với nhau.

Nét đẹp của định lý 4 điểm là các tứ giác mà chúng ta xét trong hai ứng dụng không nhất thiết là tứ giác lồi mà có thể là tứ giác lõm, đơn hay không đơn.

Việc chứng minh định lý này, các bạn có thể tham khảo bài viết của tác giả Võ Kim Huệ đăng trên số báo tháng 3 (237)/1997. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu ứng dụng của định lý 4 điểm vào giải quyết tốt một lớp bài toán chứng minh hai đường thẳng vuông góc. Mong muốn sẽ tiếp sức cho bạn đọc một phương pháp giải toán.

Bài toán 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên tia đối của tia DA và tia đối của tia CB lần lượt lấy hai điểm F và E sao cho $DF = CE = CD$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho $CH = CB$. Chứng minh rằng AE vuông góc với FH .

Lời giải. (h. 1). Đặt $AB = x$; $BC = y$. Theo bài ra ta có $DF = CE = CD = EF = x$, $CH = BC = y$.

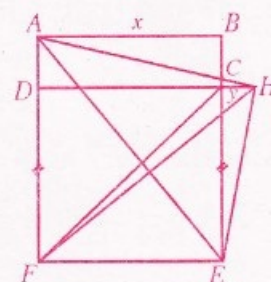
Sử dụng định lý Pythagore, ta tính được

$$\begin{aligned} AH^2 + EF^2 &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \quad (1) \\ AF^2 + HE^2 &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AH^2 + EF^2 = AF^2 + HE^2.$$

Theo ứng dụng 1) ta có $AE \perp FH$. $\square$



Hình 1

Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đồng thời ngoại tiếp một đường tròn khác (O') có các tiếp điểm M, N, P, Q lần lượt với các cạnh DA, AB, BC, CD . Chứng minh rằng MP vuông góc với NQ .

Lời giải. (h. 2).

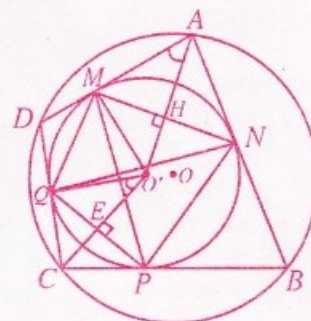
Gọi H là giao điểm của $O'A$ và MN ; E là giao điểm của $O'C$ và PQ .

Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) nên $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$; tứ giác $ABCD$ lại ngoại tiếp (O') nên

$$\widehat{O'AM} + \widehat{O'CQ} = \frac{1}{2}\widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{C} = 90^\circ, \text{ suy ra}$$

$$\widehat{O'AM} = \widehat{CO'Q} \text{ (cùng phụ với } \widehat{O'CQ}).$$

$$\text{Vậy } \triangle O'MA \sim \triangle CQO'. \text{ Do đó } \frac{O'M}{CQ} = \frac{MA}{QO'}.$$



Hình 2

Đặt $MA = AN = x$, $BN = BP = y$, $CP = CQ = z$,
 $DQ = DM = t$, $O'M = O'Q = r$, khi đó ta có
 $\frac{r}{z} = \frac{x}{r} \Leftrightarrow r^2 = xz$. Tương tự, ta có $r^2 = yt$ suy
 ra $r^2 = xz = yt$.

Do AM và AN là hai tiếp tuyến của (O') nên
 $O'A \perp MN$ và $HM = HN$. Trong tam giác
 $O'MA$ vuông tại M có

$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MA^2} + \frac{1}{O'M^2} \Rightarrow \frac{4}{MN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow MN^2 = \frac{4x^2r^2}{x^2 + r^2} = \frac{4x^2 \cdot (xz)}{x^2 + xz} = \frac{4x^2z}{x+z}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$PQ^2 = \frac{4xz^2}{x+z}; NP^2 = \frac{4y^2t}{y+t}; MQ^2 = \frac{4yt^2}{y+t}$$

$$\text{Suy ra } MN^2 + PQ^2 = \frac{4x^2z}{x+z} + \frac{4xz^2}{x+z} = 4xz = 4r^2.$$

$$NP^2 + MQ^2 = \frac{4y^2t}{y+t} + \frac{4yt^2}{y+t} = 4yt = 4r^2.$$

Như vậy $MN^2 + PQ^2 = NP^2 + MQ^2$. Theo định
 lí 4 điểm thì $MP \perp NQ$. $\square$

Bài toán 3. Giả sử O là tâm đường tròn
 ngoại tiếp tam giác ABC . D là trung điểm của
 cạnh AB , còn E là trọng tâm của tam giác
 ACD . Chứng minh rằng nếu $AB = AC$ thì OE
 vuông góc với CD .

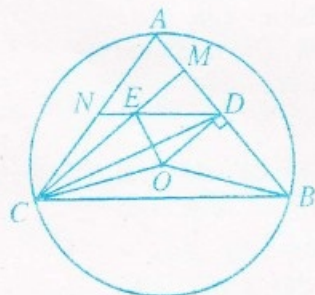
Lời giải. (h. 3).

Gọi M là giao
 điểm của CE và
 AB ; N là giao
 điểm của DE và
 AC . Đặt $BC = a$
 và $AB = AC = b$.

Áp dụng công
 thức tính độ dài
 đường trung tuyến,
 ta có

$$CM^2 = \frac{CA^2 + CD^2}{2} - \frac{AD^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}CE\right)^2 = \frac{b^2 + \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}}{2} - \left(\frac{1}{2}b\right)^2$$



Hình 3

$$= \frac{5b^2 + 2a^2}{8} - \frac{b^2}{16} = \frac{9b^2 + 4a^2}{36}$$

$$\text{suy ra } CE^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{9}a^2.$$

Do $DA = DB$ nên $OD \perp AB$. Trong tam giác
 vuông ODB ta có

$$OD^2 = OB^2 - BD^2 = OC^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = OC^2 - \frac{1}{4}b^2.$$

$$\text{Vậy } CE^2 + OD^2 = OC^2 + \frac{1}{9}a^2 \quad (3)$$

Dễ thấy ND là đường trung bình của tam giác
 ABC nên $DN = \frac{1}{2}BC$, suy ra $DE = \frac{1}{3}a$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $CE^2 + OD^2 = OC^2 + DE^2$.
 Theo định lí 4 điểm thì $OE \perp CD$. $\square$

Bài toán 4. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$
 $= \widehat{BCD} > 90^\circ$. Chứng minh rằng đường thẳng
 Euler của tam giác ABC đi qua D .

Lời giải. (h. 4).

Gọi $DA \cap CB = M$; $AB \cap DC = N$; các đường
 cao MM_1 , NN_1 của các tam giác AMB và BNC
 cắt nhau tại O . Do $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ nên
 AMB , BNC đều là các tam giác cân.

Từ đó suy ra
 O là tâm
 đường tròn
 ngoại tiếp
 tam giác
 ABC .

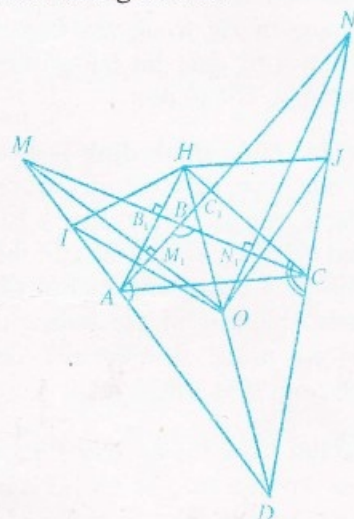
Gọi H là
 trực tâm của
 tam giác
 ABC . Vì

$\widehat{ABC} > 90^\circ$
 nên H nằm
 ngoài $\triangle ABC$
 và $HA \perp BC$
 tại B_1 ,

$HC \perp AB$

tại C_1 . Như vậy, ta sẽ có các tứ giác
 AM_1B_1M , AB_1C_1C , CN_1C_1N và $MACN$ là các
 tứ giác nội tiếp.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MA và CN .



Hình 4

Khi đó I, J sẽ lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tứ giác AM_1B_1M và CN_1C_1N .

Từ đó dễ thấy

$$HB_1.HA = HI^2 - IA^2 ; HC_1.HC = HJ^2 - JC^2;$$

$$HB_1.HA = HC_1.HC \text{ suy ra}$$

$$HI^2 - IA^2 = HJ^2 - JC^2 \Rightarrow HI^2 - HJ^2 = IA^2 - JC^2 \quad (5)$$

$$\text{Tương tự ta có } OI^2 - OJ^2 = IA^2 - JC^2 \quad (6)$$

$$\text{Từ (5) và (6) suy ra } HI^2 + OJ^2 = OI^2 + HJ^2.$$

$$\text{Theo định lí 4 điểm thì } OH \perp IJ \quad (7)$$

$$\text{Mặt khác, do tứ giác } MACN \text{ nội tiếp nên } DA.DM = DC.DN \Rightarrow (DI - IA)(DI + IA) = (DJ - JC)(DJ + JC) \Rightarrow DI^2 - DJ^2 = IA^2 - JC^2 \quad (8)$$

$$\text{Từ (5) và (8) suy ra } HI^2 + DJ^2 = DI^2 + HJ^2.$$

$$\text{Theo định lí 4 điểm thì } DH \perp IJ \quad (9)$$

Từ (7) và (9) suy ra H, O, D thẳng hàng. Ta biết đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua trục tâm H , trọng tâm G và tâm O của đường tròn ngoại tiếp. Từ đó suy ra đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua D . $\square$

Mời các bạn sử dụng định lí 4 điểm để giải quyết các bài toán sau đây.

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn có hai đường chéo cắt nhau tại I . Hạ IP, IQ lần lượt vuông góc với AD và BC . Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của AB, CD . Chứng minh rằng PQ vuông góc với MN .

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Các tam giác OAD, OBC lần lượt có trục tâm là H và K . Chứng minh rằng HK vuông góc với MN .

Bài 3. Trên cung nhỏ AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ người ta lấy điểm M khác A và B . Gọi P, Q, R và S thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng AD, AB, BC và CD . Chứng minh rằng hai đường thẳng PQ và RS vuông góc với nhau và giao điểm của chúng nằm trên một trong hai đường chéo hình chữ nhật.



Bài toán về điểm FERMAT và ứng dụng chứng minh nguyên lí THỂ NĂNG CỰC TIỂU

(Tiếp theo kì trước)

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
(Hà Nội)

Hệ quả 5. Điểm Fermat P của hệ điểm (1) không trùng với bất cứ điểm nào của hệ đó khi và chỉ khi n bất đẳng thức sau đồng thời thời thỏa mãn:

$$p_k < \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n p_i \vec{e}_{ki} \right| \text{ với mọi } k = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

(Hệ quả này được trực tiếp suy ra từ BĐT (7), thiết lập ở tính chất 3). Từ hệ quả 5 này cũng suy ra được hệ quả 1 của tính chất 2 thiết lập ở trên. Thật vậy, từ BĐT (11) ta được

$$p_k < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n p_i \text{ hay } 2p_k < \sum_{i=1}^n p_i, (k = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

Hệ quả 6. Nếu $p_k \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n p_i$ thì A_k là điểm Fermat P của hệ điểm (1).

Chú thích 1) Hệ n BĐT (12) chỉ là điều kiện cần (không đủ) để $P \notin \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

2) (4) $\Leftrightarrow$ (11) vì mỗi điều kiện này đều là điều kiện cần và đủ để $P \notin \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

1.5. Các tính chất định lượng của điểm Fermat P của một hệ điểm

- Trước hết, điểm Fermat P của hệ điểm (1) trùng với điểm A_k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) của hệ đó thì tính chất 3 không những đã chỉ ra tính chất định tính của $P \equiv A_k$ mà cũng còn đã động đến tính chất định lượng của điểm Fermat P khi $P \equiv A_k$ bằng cách đồng thời thiết lập được ngay giá trị cực tiểu $m = f(P)$ của hàm vô hướng $f(M)$ đạt được ở điểm Fermat P trùng với điểm A_k của hệ điểm (1).

- Sau cùng, cần tìm cách xác định giá trị cực tiểu $m = f(P)$ của hàm vô hướng $f(M)$ trong trường hợp $P \notin \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, cũng là trường hợp P là một điểm trong của bao lồi $\mathcal{B}$ của hệ điểm sinh bởi tập các điểm $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ (hệ quả 2).

Tính chất 4. Nếu $P \notin \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ thì các góc $\widehat{A_i P A_j}$ ($i \neq j$) có độ lớn θ_{ij} ($= \theta_{ji}$) liên hệ với nhau bởi một hệ n đẳng thức điều kiện (giữa C_n^2 góc đó) sau:

$$\sum_{j=1}^n p_j \cos \theta_{ki} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

(với quy ước rằng khi $i = k$ thì $\theta_{kk} = 0$ và do đó, $\cos \theta_{kk} = 1$).

Chứng minh. Thật vậy, nếu điểm Fermat $P \notin \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ thì ta có đẳng thức vector (4) (tính chất 2). Bây giờ ta nhân vô hướng hai vế của (4) với $\vec{e}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) thì thu được hệ gồm n đẳng thức (13). $\square$

Tính chất 5. Nếu điểm Fermat P của hệ điểm (1) là một điểm trong của bao lồi $\mathcal{B}$ của hệ (1) thì các khoảng cách $PA_i = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) là n nghiệm dương của hệ n phương trình đại số bậc n sau:

$$\sum_{i \neq k}^n (p_i (x_i^2 + x_k^2 - a_{ik}^2)) \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, k\}} x_j + 2p_k x_1 x_2 \dots x_n = 0 \quad (14)$$

($k=1, 2, \dots, n$) trong đó $a_{ik} = A_i A_k$, ($i \neq k$).

Chứng minh. Thật vậy, chỉ việc áp dụng định lý cosin vào các tam giác $A_i P A_k$ có $\widehat{A_i P A_k} = \theta_{ik}$ thì biểu thị được $\cos \theta_{ik}$ theo x_i , x_k và a_{ik} . Sau đó vì $x_i > 0$ ($\forall i = 1, 2, \dots, n$) nên ta đưa được hệ (13) về hệ (14). $\square$

Nhận xét. Nếu $P \notin \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ với $n \geq 4$ thì trong thực tế ta chỉ có thể tìm được gần đúng giá trị cực tiểu $m = f(P)$ của hàm $f(M)$ mà thôi. Vì thế, người ta phải tìm cách xác định vị trí gần đúng của điểm Fermat P và do đó xác định được gần đúng giá trị cực tiểu $f(P)$ của $f(M)$ sao cho được thuận tiện nhất.

Trong thực tiễn, điểm P và $f(P)$ cũng đã tìm được nhờ sử dụng mô hình cơ học được trình bày ở phần II dưới đây.

II. Nguyên lý Thế năng cực tiểu và lời giải vật lý của bài toán về điểm Fermat

2.1. Mô hình cơ học của bài toán tìm điểm Fermat của một hệ điểm

• Nguyên lý Thế năng cực tiểu được phát biểu như sau:

"Những vị trí của hệ n chất điểm A_i với khối lượng tương ứng p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mà ở đó thế năng đạt giá trị cực tiểu là những vị trí cân bằng".

Nếu vị trí cân bằng là duy nhất thì từ nguyên lý trên ta rút ra hệ quả sau:

Hệ quả. Ở vị trí cân bằng, thế năng của hệ đạt giá trị cực tiểu.

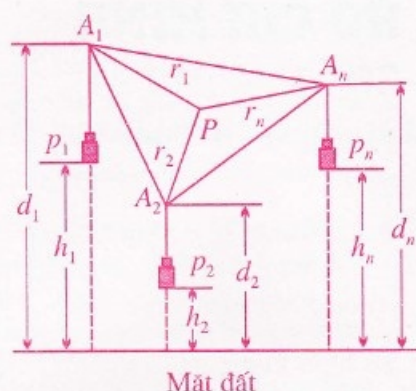
• Lời giải vật lý các bài toán về điểm Fermat

Trong cuốn sách nhỏ "Vạn hoa toán học" (Kaleidoscof) về phổ biến khoa học, nhà toán học Ba Lan nổi tiếng Steinhauß có nêu bài toán sau đây: Có ba xóm nhỏ, một xóm có 50 học sinh, một xóm có 70 học sinh và một xóm có 90 học sinh. Khu dân cư gồm ba xóm này dự định xây dựng một ngôi trường tiểu học chung cho cả khu. Hỏi phải đặt địa điểm ngôi trường ở đâu để tổng số thời gian các học sinh của cả khu đi đến trường là ít nhất?

Steinhauß không đưa ra lời giải toán học của bài toán thực tế nói trên (mặc dầu bài toán này có lời giải thuần túy hình học bằng những phép dựng hình Euclide⁽¹⁾) mà đề xuất một lời giải "phi toán" bằng cách thiết kế một mô hình cơ học để giải bài toán này dựa trên nguyên lý thế năng cực tiểu của Dirichlet trong vật lý sơ cấp (phát biểu lần đầu tiên bằng thực nghiệm và quan sát).

Chúng ta cũng sẽ sử dụng mô hình cơ học Steinhauß để đưa ra lời giải vật lý cho bài

toán tìm điểm Fermat của một hệ điểm trong $(\mathcal{K})$, (h. 3).



Hình 3

- Trước hết, ta tìm cách liên kết n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ lại với nhau⁽²⁾ bằng cách đặt ở mỗi điểm A_i đó một cái ròng rọc cố định $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$, (chẳng hạn gắn vào đầu n thanh kim loại cứng, đóng chặt và vuông góc vào tường (hoặc trần nhà)). Rồi kiếm n sợi dây cước, mảnh và dai (chắc) có chiều dài l_i tương ứng (có trọng lượng không đáng kể) để treo n vật nặng có khối lượng p_i tương ứng ở n đầu thanh sau khi đã đặt tựa các dây l_i đó vào các ròng rọc α_i cùng tên tương ứng. Khi các dây l_i đã được tựa vào các ròng rọc α_i tương ứng xong xuôi, ta nút các đầu mút thứ hai của n sợi dây l_i đó lại với nhau ở điểm chung M thì ta hãy thả n vật nặng p_i được treo ở n đầu mút thứ nhất của các dây l_i này để chúng được tự do chuyển động (tức là đổi vị trí do sự đu đưa của các sợi dây xô dịch qua các ròng rọc α_i đã được đặt cố định ở vị trí của điểm hình học A_i) cho đến khi hệ đạt vị trí cân bằng. Vì vị trí cân bằng P là duy nhất nên theo nguyên lý trên thì, ở vị trí cân bằng P thế năng của hệ chất điểm $\{A_i(p_i)\}$ đạt cực tiểu.

Gọi r_i, d_i và h_i ($i = 1, 2, \dots, n$) lần lượt là khoảng cách từ P đến A_i ; khoảng cách từ điểm A_i đến mặt đất và khoảng cách từ vật nặng mang khối lượng p_i đến mặt đất. Thế thì, hệ các vật nặng p_i được liên kết với nhau bởi n sợi dây l_i , buộc nút lại ở điểm chung M và đạt vị trí cân bằng ở điểm P có thế năng E , được xác định như sau:

$$E = \sum_{i=1}^n p_i h_i = \sum_{i=1}^n p_i (r_i + (d_i - l_i))$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i r_i + \sum_{i=1}^n p_i (d_i - l_i) \quad (15)$$

trong đó $\sum_{i=1}^n p_i r_i = \sum_{i=1}^n p_i PA_i$ đúng là giá trị cực tiểu $m = f(P)$ của hàm $f(M)$ của bài toán tìm điểm Fermat P của hệ điểm (1). Rõ ràng thành phần thứ hai ở vế phải của đẳng thức (15) là một hằng số. Từ đó suy ra $E = \sum_{i=1}^n p_i h_i$ đạt cực tiểu $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n p_i MA_i = f(M)$ đạt cực tiểu $m = f(P)$ ở điểm cân bằng P . $\square$

2.2. Một phương pháp sơ cấp chứng minh nguyên lý thế năng cực tiểu

• Đối chiếu hai lời giải: lời giải toán học và lời giải vật lý của bài toán Fermat

Theo nguyên lý thế năng cực tiểu thì "Hệ n vật A_i nặng p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) cũng tức là hệ các chất điểm $\{A_i(p_i)\}$ nói trên đạt vị trí cân bằng ở điểm P khi và chỉ khi thế năng E của hệ đó đạt giá trị cực tiểu".

Hệ cân bằng (ở điểm P) $\Leftrightarrow$ Thế năng $E = \sum_{i=1}^n p_i h_i$ của hệ đạt cực tiểu (L)

Bây giờ diễn đạt hai vế của (L) trên cơ sở đẳng thức (15) ở trên sang ngôn ngữ toán học:

$\sum_{i=1}^n p_i \frac{PA_i}{PA_i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n p_i MA_i = f(M)$ đạt cực tiểu $m = f(P)$ ở điểm $M \equiv P$. Tóm lại, nhờ mô hình cơ học Steinhauß, bài toán về điểm Fermat đã có một "lời giải phi toán", dựa trên nguyên lý thế năng cực tiểu đã được thừa nhận. Tuy nhiên, bài toán về điểm Fermat cũng đã có lời giải thuần túy toán học như đã được chỉ ra ở các mục 1.4 và 1.5 trong phần I. Điều đó nói lên rằng: Nguyên lý thế năng cực tiểu của Vật lý sơ cấp đã được chứng minh bằng lý luận toán học.

III. Một số trường hợp đặc biệt của bài toán về điểm Fermat. Thí dụ và một số bài toán đề xuất

- Trước hết ta quy ước: Nếu các trọng số $p_i = 1$ (hoặc bằng nhau tất cả và bằng $p \neq 1$) thì hệ điểm $\{A_i(p_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ được viết gọn lại là $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$; hàm điểm (vô hướng)

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2007-2008

Môn thi : TOÁN (dành cho học sinh chuyên Toán)

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 6y = 6x \\ y^2 + 9 = 2xy. \end{cases}$$

b) Cho $a = \sqrt{11+6\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{11-6\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng a, b là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số nguyên.

c) Cho $c = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$, $d = \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$. Chứng minh rằng c^2, d^2 là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số nguyên.

Câu 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn. P là một điểm di động trên cung BC không chứa A . Hạ AM, AN lần lượt vuông góc với PB và PC .

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định;

b) Xác định vị trí của điểm P sao cho biểu thức $AM.PB + AN.PC$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3. a) Cho a, b, c, d là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab = cd = 1$. Chứng minh bất đẳng thức $(a+b)(c+d) + 4 \geq 2(a+b+c+d)$.

b) Cho a, b, c, d là các số dương thỏa mãn điều kiện $abcd = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$(ac+bd)(ad+bc) \geq (a+b)(c+d).$$

Câu 4. Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB và CD . Biết rằng đường tròn đường kính CD đi qua trung điểm các cạnh bên AD, BC và tiếp xúc với AB . Hãy tìm số đo các góc của hình thang.

Câu 5. a) Cho a, b, c là các số thực dương phân biệt có tổng bằng 3. Chứng minh rằng trong ba phương trình $x^2 - 2ax + b = 0$, $x^2 - 2bx + c = 0$ và $x^2 - 2cx + a = 0$ có ít nhất một phương trình có hai nghiệm phân biệt và ít nhất một phương trình vô nghiệm.

b) Cho S là một tập hợp gồm ba số tự nhiên có tính chất: tổng hai phân tử tùy ý của S là một số chính phương (Ví dụ $S = \{5, 20, 44\}$ hoặc $S = \{10, 54, 90\}$ là các tập hợp thỏa mãn điều kiện trên). Chứng minh rằng trong tập S có không quá một số lẻ.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (Tp. Hồ Chí Minh)
Sưu tầm và giới thiệu

 $\sum_{i=1}^n p_i MA_i$ được viết gọn lại là $f(M)$ hoặc f và giá trị cực tiểu của hàm $f(M)$ đạt được ở điểm Fermat được viết là: $\min f(M) = f(P) = m$.

- Những thí dụ và bài toán đề xuất sau đây, nói chung đều không chỉ có một cách giải duy nhất. Ngoài cách giải sử dụng những tính chất của điểm cực tiểu Fermat (kể cả những hệ quả của những tính chất đó), được trình bày ở phần I, bạn đọc có thể tìm thêm những lời giải trực tiếp bằng lập luận phân tích và thực hiện việc dựng điểm Fermat bằng những phép dựng hình Euclide trong trường hợp có thể được ($n=3$).

3.1. Vài thí dụ.

Thí dụ 1. Giả sử D là một điểm thuộc miền tam giác ABC nhưng $D \notin \{A, B, C\}$. Chứng tỏ rằng D

là điểm Fermat của hệ điểm $\{A, B, C, D\}$ và tính giá trị cực tiểu $f(D)$.

Thật vậy, chứng tỏ rằng $P \in$ miền $[ABC]$ là bao lồi $\mathcal{B}\{A, B, C, D\}$. Sử dụng BĐT tam giác, chứng tỏ rằng $BD + DC < AB + AC$ hoặc hai BĐT tương tự, sau đó suy ra

$$\begin{aligned} f(M) &= MA + MB + MC + MD \\ &\geq f(D) = DA + DB + DC = m = \min f(M). \quad \square \end{aligned}$$

(Kì sau đăng tiếp)

(1) Phép dựng được thực hiện bằng thước kẻ và compa (quy định độc đoán từ thời Platon).

(2) Trong thực tế, khi các khoảng cách $A_i A_j = a_{ij}$ lớn thì ta phải lập bản đồ thu nhỏ hệ điểm $\{A_i\}$ với một tỉ lệ thích hợp để hình đồng dạng thu nhỏ này nằm gọn trong một căn phòng.

Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên Toán

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC HUẾ

NĂM HỌC 2007-2008

(Đề thi đăng trên THPT số 365, tháng 11 năm 2007)

Câu 1. a) Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2007}$ suy ra
 $abc - 2007(ab + bc + ca) + 2007^3 - 2007^3 = 0$.
 Kết hợp với $a + b + c = 2007$ ta được
 $abc - 2007(ab + bc + ca) + 2007^2 a + 2007^2 b$
 $+ 2007^2 c - 2007^3 = 0$
 $\Leftrightarrow (a - 2007)(b - 2007)(c - 2007) = 0$.

Câu 2. a) Ta có

$$A = \left(\sqrt[3]{2} + 1\right)^3 \sqrt[3]{\frac{1}{3(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt[3]{2} + 1)^3}{3(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}} = 1.$$

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (x + y)^2 - 2xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (1; 0), (x; y) = (0; 1)$.

Câu 3. Giả sử x_0 là một nghiệm chung của hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$. Khi đó
 $x_0^4 + ax_0^2 + 1 = 0; x_0^3 + ax_0 + 1 = 0$.

Trừ theo vế ta được $x_0(x_0 - 1)(x_0^2 + a) = 0$.

Từ đó có $x_0 = 1$, suy ra $a = -2$. Với $a = -2$ thì $P(x)$ và $Q(x)$ có nghiệm chung $x_0 = 1$.

Câu 4. a) (Bạn đọc tự vẽ hình).

Vì $\widehat{MAF} = \widehat{MBF} = 45^\circ$, dẫn đến $MF \perp NB$.
 Tương tự có $NE \perp MB$.

b) Hai tam giác vuông BIN và BCN bằng nhau, suy ra $BI = BC = a$.

c) Ta có $S_{MDN} = a^2 - S_{AMNCB} = a^2 - 2S_{BMN}$. Ta thấy S_{MDN} lớn nhất khi và chỉ khi S_{BMN} bé nhất. Đến đây bạn đọc có thể xem lời giải bài 5 (Đề thi vào lớp 10, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng), THPT số 365, tháng 11 năm 2007 (trang 3).

Câu 5. a) Đặt $b + c = X, c + a = Y, a + b = Z$ và vế trái của BĐT là B . Khi đó

$$B = \frac{-X + Y + Z}{2X} + \frac{X - Y + Z}{2Y} + \frac{X + Y - Z}{2Z}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{X}{Y} + \frac{Y}{Z} + \frac{X}{Z} + \frac{Z}{X} + \frac{Y}{Y} + \frac{Z}{Y} - 3 \right) \geq \frac{3}{2} \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

b) Ta thấy $A \geq 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$. Vậy $\min A = \frac{15}{2}$
 $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 6. $5(x + y + z) = 4xyz - 24$ (1)

Chia hai vế PT (1) cho $5xyz$, ta được

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} + \frac{24}{5xyz} = \frac{4}{5}. \text{ Giả sử } x \geq y \geq z \geq 1.$$

$$\text{Vì } \frac{4}{5} < \frac{3}{z^2} + \frac{24}{5z^2} = \frac{39}{5z^2} \text{ nên } z \in \{1; 2; 3\}.$$

• Với $z = 1$ thay vào (1) ta được

$$(4x - 5)(4y - 5) = 141.$$

Do $x \geq y \geq z$ nên $4x - 5 \geq 4y - 5 \geq -1$.

$(4x - 5)(4y - 5) = 47.3 = 141.1$. Suy ra

$$\begin{cases} 4x - 5 = 47 \\ 4y - 5 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (13; 2); \text{ hoặc}$$

$$\begin{cases} 4x - 5 = 141 \\ 4y - 5 = 1 \end{cases} \text{ (không có nghiệm nguyên dương).}$$

Ta được nghiệm $(x; y; z) = (13; 2; 1)$.

• Xét tương tự với $z = 2$ ta có bộ nghiệm $(x; y; z) = (4; 2; 2)$. Còn với $z = 3$ thì PT đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Do vai trò x, y, z bình đẳng, ta được 2 bộ nghiệm trên và các hoán vị của nó. Có tất cả 9 bộ nghiệm.

MINH TRẦN

(Phòng GD Hương Thủy, Thừa Thiên - Huế)
 sưu tầm và giới thiệu



SỰ PHÂN LOẠI TỨ DIỆN và ứng dụng

LÊ QUỐC HÁN
(GV Đại học Vinh)

Tứ diện là một mô hình cơ bản và thường gặp nhất trong hình học không gian, đặc biệt là trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học hay kì thi Olympic Toán. Sự phân loại các tứ diện theo những tiêu chuẩn nào đó sẽ giúp chúng ta xác định nhanh kết quả hay phương pháp giải các bài toán liên quan đến tứ diện thể hiện một cách tường minh hay chìm khuất. Bài viết này không có ý định phân lớp các tứ diện một cách triệt để mà chỉ nêu lên những kinh nghiệm giải các bài toán liên quan đến tứ diện được phân loại theo những đặc trưng khác nhau (nhưng không loại trừ lẫn nhau).

I. TỨ DIỆN ĐỀU

Định nghĩa. Tứ diện đều là tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau.

Tính chất. Trong một tứ diện đều:

- Sáu mặt là những tam giác đều bằng nhau.
- Chân đường cao hạ từ một đỉnh bất kì xuống mặt đối diện là trục tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đó.

Mệnh đề 1. Giả sử $ABCD$ là tứ diện đều cạnh bằng a . Khi đó

- Tâm mặt cầu ngoại tiếp, tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm của tứ diện trùng nhau.
- Đường cao của tứ diện bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ và thể tích của tứ diện bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

$$3) \text{ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{và bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện } r = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

4) Các cặp cạnh đối diện của tứ diện đôi một vuông góc với nhau.

5) Đoạn thẳng nối hai trung điểm của hai cạnh đối diện bất kì là đoạn vuông góc chung của các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

6) Khoảng cách giữa hai cạnh đối diện bất kì bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

7) Hình hộp ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$ cạnh a là hình lập phương có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Việc chứng minh mệnh đề trên khá đơn giản, đề nghị các bạn tự giải xem như những bài tập.

Bây giờ chúng tôi sẽ nêu một số thí dụ từ đơn giản đến phức tạp để bạn đọc bước đầu thấy lợi ích của việc nắm vững các kiến thức nêu trên.

★ **Thí dụ 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ cho $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; a)$ với $a > 0$.

a) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống mặt phẳng (ABC) . Tìm tọa độ điểm H .

b) Gọi D là điểm đối xứng của H qua O . Chứng minh $ABCD$ là tứ diện đều.

Lời giải. a) Vì $AB = BC = CA = a\sqrt{2}$ nên ABC là tam giác đều. Ta lại có $OA = OB = OC = a$ nên $OABC$ là hình chóp đều. Do đó H là trọng tâm tam giác ABC . Suy ra $H\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$.

b) Vì $O(0; 0; 0)$ là trung điểm của DH nên $D\left(-\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}\right)$. Do đó $\overrightarrow{DA} = \left(\frac{4a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$.

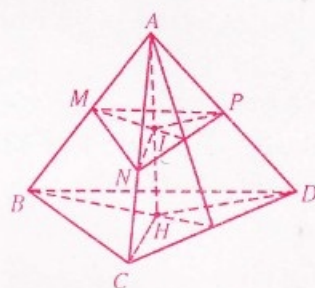
Suy ra $|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{\frac{16a^2}{9} + \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = a\sqrt{2}$. Tương tự $|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}| = a\sqrt{2}$ nên $ABCD$ là tứ diện đều. $\square$

★**Thí dụ 2.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a .

a) Gọi (α) là mặt phẳng chứa BD và song song với AC . Chứng minh rằng AB, AD, CB, CD tạo với $mp(\alpha)$ những góc bằng nhau.

b) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) và I là trung điểm của AH . Mặt phẳng (π) quay quanh I , cắt các cạnh AB, AC và AD tại M, N, P . Chứng minh rằng $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP}$ nhận một giá trị không đổi.

Lời giải. a) Vẽ hình hộp $AB_1CD_1.A_1BC_1D$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Khi đó, dễ thấy AB, AD, CB và CD đều tạo với $mp(\alpha)$ một góc bằng 45° (mặt phẳng (α) chính là mặt đáy A_1BC_1D của hình lập phương).



Hình 1

$$\text{hay } \frac{V_{AMNP}}{V} = \frac{AM \cdot AN \cdot AP}{a^3} \quad (1)$$

$$\frac{V_{AMNI}}{V_{ABCH}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AI}{AH} \text{ hay } \frac{V_{AMNI}}{V} = \frac{1}{6} \cdot \frac{AM \cdot AN}{a^2}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{V_{ANPI}}{V} = \frac{1}{6} \cdot \frac{AN \cdot AP}{a^2}; \quad \frac{V_{AMPI}}{V} = \frac{1}{6} \cdot \frac{AM \cdot AP}{a^2}.$$

Cộng từng vế ba đẳng thức cuối cùng, ta có

$$\frac{V_{AMNP}}{V} = \frac{AM \cdot AN + AN \cdot AP + AM \cdot AP}{6a^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{AM \cdot AN \cdot AP}{a^3} = \frac{AM \cdot AN + AN \cdot AP + AM \cdot AP}{6a^2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{AM \cdot AN + AN \cdot AP + AM \cdot AP}{AM \cdot AN \cdot AP} = \frac{6a^2}{a^3} \text{ hay}$$

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP} = \frac{6}{a} \text{ (đpcm). } \square$$

II. TỨ DIỆN GẮN ĐỀU

Định nghĩa. Tứ diện gần đều là tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một (Tứ diện gần đều còn gọi là tứ diện cân).

Tính chất. Trong một tứ diện gần đều, có

- 1) Các mặt của tứ diện là những tam giác bằng nhau.
- 2) Các mặt của tứ diện là những tam giác có ba góc đều nhọn.
- 3) Đoạn thẳng nối hai trung điểm của hai cạnh đối diện bất kì là đoạn vuông góc chung của các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.
- 4) Tâm mặt cầu ngoại tiếp, tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm của tứ diện trùng nhau.
- 5) Hình hộp ngoại tiếp tứ diện là hình hộp chữ nhật.

Việc xét mệnh đề đảo của các tính chất trên rất hữu ích và nhiều khi việc chứng minh (hay bác bỏ) tính đúng đắn của chúng không phải lúc nào cũng dễ dàng. Chẳng hạn xét mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2. Cho tứ diện $ABCD$ có tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp trùng nhau. Chứng minh $ABCD$ là tứ diện gần đều.

Chứng minh.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Kẻ $OH \perp mp(ABC)$, $OK \perp mp(BCD)$. Khi đó H và K thứ tự là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và BCD (h.2),

nên $\widehat{BHC} = 2\widehat{BAC}$

và $\widehat{BKC} = 2\widehat{BDC}$. Vì hai tam giác vuông OHB và OKB bằng nhau, nên $BH = BK$. Kết hợp với $HB = HC$ và $KB = KC$ suy ra $\triangle BHC = \triangle BKC$ (c.c.c).

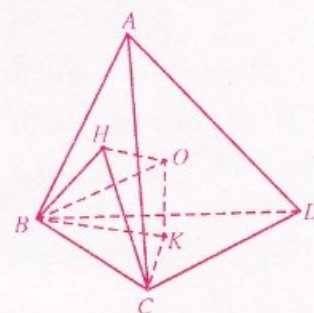
Do đó $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$, dẫn đến $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

Vậy ta có thể đặt $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \alpha$.

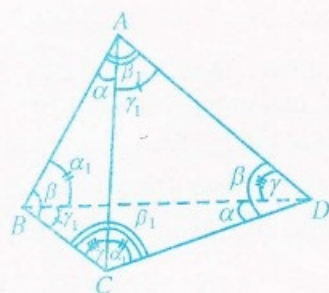
Tương tự $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \beta$; $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \gamma$;

$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \alpha_1$; $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \gamma_1$

và $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \beta_1$.



Hình 2



Hình 3

Ta có
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (1)
 $\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180^\circ$ (2)
 $\alpha + \gamma_1 + \beta_1 = 180^\circ$ (3)
 $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 180^\circ$ (4)
 Từ (1) và (2) suy ra
 $\alpha + \gamma = \gamma_1 + \alpha_1$ (5)
 Từ (2) và (3) suy ra
 $\alpha + \gamma_1 = \gamma + \alpha_1$ (6)

Cộng từng vế (5) và (6) được $\alpha = \alpha_1$. Tương tự, có $\beta = \beta_1$ và $\gamma = \gamma_1$. Do đó $\triangle ABC = \triangle DCB$ (g.c.g) suy ra $AB = CB$ và $AC = DB$. Tương tự có $AD = BC$ nên $ABCD$ là tứ diện gần đều (h. 3).

★ **Thí dụ 3.** Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc Oxyz cho $A(1; 2; 2)$, $B(-1; 2; -1)$, $C(1; 6; -1)$, $D(-1; 6; 2)$.

- Chứng minh $ABCD$ là tứ diện gần đều.
- Xác định tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$.
- Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải. a) Vì $\overline{AB} = (-2; 0; -3)$, $\overline{CD} = (-2; 0; 3)$ nên $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = \sqrt{13}$. Tương tự, có $\overline{AC} = (0; 4; -3)$, $\overline{BD} = (0; 4; 3)$ nên $|\overline{AC}| = |\overline{BD}| = 5$; $\overline{AD} = (-2; 4; 0)$, $\overline{BC} = (2; 4; 0)$ nên $|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = 2\sqrt{5}$. Do đó $ABCD$ là tứ diện gần đều.

b) Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên $G\left(0; 4; \frac{1}{2}\right)$.

c) Vì $\overline{GA} = \left(1; -2; \frac{3}{2}\right)$, $\overline{GB} = \left(-1; -2; -\frac{3}{2}\right)$, $\overline{GC} = \left(1; 2; -\frac{3}{2}\right)$, $\overline{GD} = \left(1; 2; \frac{3}{2}\right)$ nên $|\overline{GA}| = |\overline{GB}| = |\overline{GC}| = |\overline{GD}| = \frac{\sqrt{29}}{2}$. Do đó tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là G và bán kính $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$, nên PT mặt cầu đó là

$$x^2 + (y-4)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}.$$

Ta lại có $d(G, (ABC)) = d(G, (ABD)) = d(G, (ACD)) = d(G, (BCD)) = \frac{6}{\sqrt{61}}$.

Do đó G cũng là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính mặt cầu đó là $r = \frac{6}{\sqrt{61}}$.

Vậy PT mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ là

$$x^2 + (y-4)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{36}{61}. \quad \square$$

III. TỨ DIỆN VUÔNG

Định nghĩa. Tứ diện vuông là tứ diện có một góc tam diện ba mặt vuông.

Tính chất. Giả sử $OABC$ là tứ diện vuông, $OA \perp OB$, $OA \perp OC$, $OB \perp OC$; $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Khi đó

- Tam giác ABC có ba góc nhọn;
- Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Thế thì OH là đường cao của tứ diện $OABC$ và

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

- Gọi α, β, γ là các góc tạo bởi OH với OA, OB, OC . Khi đó $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$;

$$4) S_{OAB}^2 = S_{HAB} \cdot S_{ABC}; \quad S_{OAC}^2 = S_{HAC} \cdot S_{ABC}; \\ S_{OBC}^2 = S_{HBC} \cdot S_{ABC}.$$

$$5) S_{OAB}^2 + S_{OAC}^2 + S_{OBC}^2 = S_{ABC}^2$$

(Định lý Pythagore trong không gian).

$$6) V_{OABC} = \frac{1}{6} abc \text{ và}$$

$$S_{\text{qp}} = \frac{1}{2} (ab + ac + bc + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}).$$

- Gọi M, N, P là trung điểm của BC, CA và AB , khi đó $OMNP$ là tứ diện gần đều và $V_{OMNP} = \frac{1}{4} V_{OABC} = \frac{1}{24} abc$.

★ **Thí dụ 4.** Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc Oxyz cho $M(1; 0; 2)$, $N(1; 1; 0)$, $P(0; 1; 2)$.

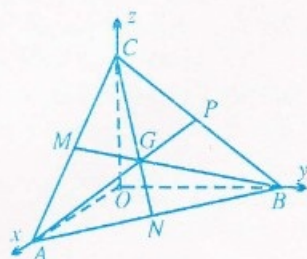
- Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M, N, P .

b) Gọi A, B, C là giao điểm của mặt phẳng (α) với các trục Ox, Oy, Oz . Tính V_{OABC} và S_{ABC} .

c) Chứng minh AP, BM, CN đồng quy tại một điểm G . Tìm tọa độ điểm G .

d) Gọi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ là các góc tạo bởi $\overrightarrow{OG}$ với $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. Chứng minh

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1.$$



Hình 4

Lời giải. (h. 4) Phương trình mặt phẳng (α) là

$$2x + 2y + z - 4 = 0$$

nên $A(2; 0; 0)$,

$B(0; 2; 0)$ và

$C(0; 0; 4)$.

Khi đó $x_P = \frac{x_B + x_C}{2} = 0, y_P = \frac{y_B + y_C}{2} = 1,$

$z_P = \frac{z_B + z_C}{2} = 2$ nên P là trung điểm của BC .

Do đó AP là trung tuyến của tam giác ABC . Tương tự, BM và CN là trung tuyến của tam giác ABC nên AP, BM và CN đồng quy tại G ,

trọng tâm tam giác ABC . Từ đó $G\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$,

suy ra $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\vec{u}$, trong đó

$\vec{u} = (1; 1; 2)$. Vì $\overrightarrow{OA} = (2; 0; 0) = 2\vec{e}_1$, với

$\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$. Từ đó $\cos \varphi_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{u}| \cdot |\vec{e}_1|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Tương tự $\cos \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}; \cos \varphi_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}$ nên

$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$. $\square$

★ **Thí dụ 5.** Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$ cho $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với a, b, c là các số dương.

a) Gọi R và r thứ tự là bán kính các mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện $OABC$. Chứng

minh rằng $\frac{2R}{r} \geq 3(1 + \sqrt{3})$.

b) Giả sử a, b, c thay đổi nhưng luôn thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$. Chứng minh mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. a) $\frac{2R}{r} =$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot (ab + ac + bc + \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2})}{abc}$$

$$\geq \frac{\sqrt{3\sqrt{a^2 b^2 c^2}} (3\sqrt{ab \cdot ac \cdot bc} + \sqrt{3\sqrt{a^2 b^2} \cdot a^2 c^2 \cdot b^2 c^2})}{abc}$$

$$= 3(1 + \sqrt{3}) \text{ (theo BĐT Cauchy).}$$

b) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Theo giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1$.

Vậy mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm $M(2; 2; 2)$ cố định. $\square$

Để kết thúc bài báo. Xin mời các bạn ôn tập lại bằng cách giải các bài toán sau đây.

1. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi I, M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC và CD .

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và AN .

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và CI .

2. Cho tứ diện gần đều $ABCD$.

a) Chứng minh các mặt của tứ diện là những tam giác bằng nhau.

b) Gọi α, β, γ tương ứng là các góc tạo bởi các mặt phẳng $(ABC), (ACD), (ABD)$ với mặt phẳng (BCD) . Tìm hệ thức liên hệ giữa $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

3. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ cho $A(a; 0; 0), B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$, trong đó a, b, c là các số thực

dương và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$.

a) Chứng minh mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định. Tìm tọa độ điểm đó.

b) Xác định tâm, tìm bán kính r của mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$. Đồng thời chứng minh

rằng $\frac{1}{4} < r \leq \frac{\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})}$.

DIỄN ĐÀN

ĐẠI
HỌC
TOÁN



Sử dụng MỘT SỐ KẾT QUẢ "ĐẸP" để tính tích phân

TRỊNH TUÂN

(GV trường ĐH Thủy Lợi Hà Nội)

Trong khi tính tích phân, nhiều bài đề tìm được nguyên hàm của nó hoàn toàn không đơn giản. Khi đó chúng ta nên khai thác hết các tính chất đặc biệt của hàm dưới dấu tích phân và cận của nó để từ đó vận dụng một số các kết quả "đẹp" trong tích phân vào giải. Trong bài viết này chúng tôi muốn minh họa điều đó nhằm giúp các bạn vượt qua những bài tính tích phân loại này và góp phần gây được hứng thú hơn trong học tập môn Toán.

•**Kết quả 1.** Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên $[-a; a]$ với $a > 0$, thì

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx.$$

Thí dụ 1. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$.

$$\text{Tính } I_1 = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx \quad (\text{ĐHSP HN 2, 1998})$$

Lời giải. Việc xác định hàm số $f(x)$ ở đây là rất khó nhưng nếu vận dụng KQ 1 thì việc tính I_1 rất thuận lợi. Thật vậy

$$I_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos 2x} dx = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx$$

$$= 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx \right) = 6. \quad \square$$

Từ KQ 1 và sử dụng tính chẵn - lẻ của hàm số $f(x)$ ta có KQ 2 sau đây.

•**Kết quả 2.** Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên $[-a; a]$ với $a > 0$, thì

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx & \text{khi } f(x) \text{ chẵn trên } [-a; a] \\ 0 & \text{khi } f(x) \text{ lẻ trên } [-a; a]. \end{cases}$$

$$\text{Thí dụ 2. Tính } I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx.$$

(HVKT Mặt mã, 1999)

Lời giải. Ta thấy $\cos x$ là hàm chẵn, $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là hàm lẻ nên $\cos x \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là hàm lẻ. Nhờ KQ 2 chúng ta nhận được $I_2 = 0$. $\square$

•**Kết quả 3.** Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a; a]$ với $a > 0$, thì

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx \quad \text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

Để chứng minh KQ 3 ta tách tích phân

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{a^x + 1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx \quad \text{và đổi biến}$$

$$x = -t \text{ đối với tích phân } \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{a^x + 1} dx.$$

$$\text{Thí dụ 3. Tính } I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x}{e^x + 1} dx. \quad (\text{ĐH Bách khoa, 1999})$$

Lời giải. Ta thấy $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Từ KQ 3 được

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x dx = 0. \quad \square$$

Thí dụ 4. Tính $I_4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{1+2^x} |\sin x| dx$

(ĐH Dược, 1996)

Lời giải. Ta có $f(x) = x^2 |\sin x|$ là hàm chẵn, nhờ

KQ 2 ta được $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$, tiếp tục tích

phân từng phần hai lần được $I_4 = \frac{\pi+4}{2}$. $\square$

•**Kết quả 4.** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; a]$

với $a > 0$, thì $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$.

Đổi biến số $t = a - x$, ta nhận được KQ 4.

Thí dụ 5. Tính $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$

(ĐH Thủy lợi, 2001)

Lời giải. Nhờ KQ 4 ta có

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{2}{1 + \tan x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I_5.$$

Từ đó $I_5 = \frac{\pi}{8} \ln 2$. $\square$

•**Kết quả 5.** Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ thỏa mãn $f(x) = f(a+b-x)$ thì

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

Để chứng minh KQ 5, ta chỉ cần thực hiện phép đổi biến $t = a + b - x$. Chọn $a = 0$, $b = \pi$ và $f(x)$ là $f(\sin x)$ thỏa mãn $f(\sin x) = f(\sin(0 + \pi - x))$ thì từ KQ 5 lại nhận được

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \quad (1)$$

Mặt khác $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) dx$

Đổi biến $x = \pi - t$ cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) dx$ có

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \quad (2)$$

Với phép đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$, ta lại có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx \quad (3)$$

Thí dụ 6. Tính $I_6 = \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$.

(HV Ngân Hàng, 1998)

Lời giải. Ta có $f(\sin x) = \sin x (1 - \sin^2 x)$ và nhờ (1) thu được

$$I_6 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x dx = -\frac{\pi}{6} \cos^3 x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}.$$

Thí dụ 7. Tính $I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2(\cos x)} - \tan^2(\sin x) \right) dx$.

Lời giải. Ta có $I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \tan^2(\cos x) - \tan^2(\sin x)) dx$.

Xem hàm $f(\cos x)$ là $\tan^2(\cos x)$ và $f(\sin x)$ là $\tan^2(\sin x)$. Sử dụng (3) ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2(\sin x) dx.$$

Do đó $I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. $\square$

•**Kết quả 6.** Nếu $f(x)$ là hàm liên tục, tuần hoàn có chu kỳ T thì

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, đặt

$$J_1 = \int_a^{a+T} f(x) dx, \quad J_2 = \int_0^T f(x) dx, \quad J_3 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

(Xem tiếp trang 30)

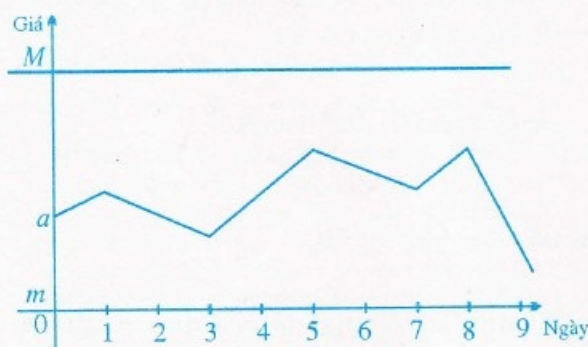


(Tiếp theo kì trước)

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Nhà đầu tư chứng khoán thành công là người có quyết định đúng thời điểm bán ra cũng như thời điểm mua vào. Nhà xác suất gọi đó là thời điểm dừng (stopping time). Dân chơi chứng khoán gọi đó là thời điểm ra "hàng". Nhà đầu tư giỏi là người biết mua vào, bán ra đúng lúc tức là biết chọn thời điểm dừng tối ưu (optimal stopping time).

Giả sử nhà đầu tư sở hữu một cổ phiếu nào đó có giá là a . Nhà đầu tư định ra một mức giá trần M và giá sàn m , ở đó $m \leq a \leq M$. Chiến lược (quy tắc) dừng của nhà đầu tư là: "Sẽ bán cổ phiếu khi cổ phiếu chạm giá trần M hoặc khi cổ phiếu chạm giá sàn m " (xem hình vẽ).



★ Bài toán 3. Với chiến lược dừng nói trên, nhà đầu tư sẽ chắc chắn gặp một trong các tình huống sau

- a) A: Cổ phiếu đạt giá trần M tại một thời điểm nào đó.
- b) B: Cổ phiếu đạt giá sàn m tại một thời điểm nào đó.
- c) C: Giá của cổ phiếu cứ dao động lên xuống giữa m và M mà không chạm trần M hay sàn m .

Hãy tính xác suất xảy ra các tình huống A, B, C nêu trên.

Lời giải. Kí hiệu $q = 1 - p$.

a) Gọi u_k là xác suất để cổ phiếu đạt giá trần M ở một thời điểm nào đó, nếu hiện tại cổ phiếu có giá trị bằng k ($m \leq k \leq M$). Ta có hai khả năng sau:

+ Hôm sau cổ phiếu lên (với xác suất p) rồi sau đó đạt giá trần M (với xác suất u_{k+1}). Theo công thức nhân xác suất, xác suất của tình huống này là pu_{k+1} .

+ Hôm sau cổ phiếu xuống (với xác suất $q = 1 - p$) rồi sau đó đạt giá trần M (với xác suất u_{k-1}). Theo công thức nhân xác suất, xác suất của tình huống này là qu_{k-1} .

Theo công thức cộng xác suất ta có

$$u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1}.$$

Dãy (u_k) , ($m \leq k \leq M$) là dãy truy hồi cấp hai tuyến tính. Phương trình đặc trưng của nó là

$$px^2 - x + q = 0 \quad (1)$$

i) Trường hợp $p = 0,5$ thì $q = 0,5$.

Phương trình (1) có nghiệm kép $\alpha = 1$. Do đó công thức tổng quát của u_k là

$$u_k = \alpha^k (C_1 k + C_2) = C_1 k + C_2.$$

Ta có $u_m = 0$, $u_M = 1$. Từ điều kiện này dễ dàng xác định được

$$C_1 = \frac{1}{M-m}, \quad C_2 = -\frac{m}{M-m}.$$

Do đó $u_k = \frac{k-m}{M-m}$.

Vậy $P(A) = u_a = \frac{a-m}{M-m}$ nếu $p = 0,5$ (2a)

ii) Trường hợp $p \neq 0,5$; $q \neq 0,5$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\alpha = \frac{q}{p}, \beta = 1$.

Công thức tổng quát của u_k là

$u_k = C_1 \alpha^k + C_2 \beta^k = C_1 \alpha^k + C_2$.

Ta có $u_m = 0, u_M = 1$. Từ điều kiện này dễ dàng xác định được

$C_1 = -\frac{\alpha^m}{1-\alpha^{M-m}}, C_2 = \frac{1}{1-\alpha^{M-m}}$.

Thành thử $u_k = \frac{1-\alpha^{k-m}}{1-\alpha^{M-m}}$.

Vậy $P(A) = u_a = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a-m}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{M-m}}$ nếu $p \neq 0,5$ (3a)

b) Gọi v_k là xác suất để cổ phiếu đạt giá sàn m ở một thời điểm nào đó, nếu hiện tại cổ phiếu có giá trị bằng k ($m \leq k \leq M$). Lí luận tương tự như a) ta cũng có $v_k = pv_{k+1} + qv_{k-1}$.

Dãy (v_k) , ($m \leq k \leq M$) là dãy truy hồi cấp hai tuyến tính có phương trình đặc trưng là (1). Xảy ra hai trường hợp:

i) Trường hợp $p = 0,5$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $\alpha = 1$.

$v_k = \alpha^k (C_1 k + C_2) = C_1 k + C_2$.

Ta có $v_m = 1, v_M = 0$. Từ điều kiện này dễ

dàng xác định được hằng số $C_1 = \frac{1}{m-M}$,

$C_2 = \frac{-M}{m-M}$ và do đó tìm được $v_k = \frac{M-k}{M-m}$.

Vậy $P(B) = v_a = \frac{M-a}{M-m}$ nếu $p = 0,5$ (2b)

ii) Trường hợp $p \neq 0,5$ thì phương trình (1)

có hai nghiệm phân biệt $\alpha = \frac{q}{p}, \beta = 1$, do đó

$v_k = C_1 \alpha^k + C_2 \beta^k = C_1 \alpha^k + C_2$.

Ta có $v_m = 1, v_M = 0$. Từ điều kiện này dễ dàng xác định được

$C_1 = \frac{\alpha^{-m}}{1-\alpha^{M-m}}, C_2 = -\frac{\alpha^{M-m}}{1-\alpha^{M-m}}$

và do đó tìm được $v_k = \frac{\alpha^{k-m} - \alpha^{M-m}}{1-\alpha^{M-m}}$.

Vậy $P(B) = v_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a-m} - \left(\frac{q}{p}\right)^{M-m}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{M-m}}$

nếu $p \neq 0,5$ (3b)

c) Từ (2a), (2b) và (3a), (3b) ta có

$P(A) + P(B) = 1$. Suy ra $P(C) = 0$ với mọi p .

Vậy xác suất xảy ra tình huống C bằng 0. Do đó có thể coi rằng C không xảy ra. Nói cách khác, có thể tin chắc rằng sớm hay muộn cổ phiếu cũng sẽ chạm giá trần M hoặc giá sàn m . $\square$

Bảng sau đây cho một số giá trị bằng số của $P(A), P(B)$ theo p, m, M, a .

P	$q=1-p$	m	a	M	$P(A)$	$P(B)$
0,5	0,5	10	100	110	0,9	0,1
0,5	0,5	2000	10000	12000	0,8	0,2
0,45	0,55	10	100	110	0,134	0,866
0,4	0,6	10	100	110	0,017	0,983
0,4	0,6	1	100	101	0,667	0,333

★ **Bài toán 4.** Tính lợi nhuận trung bình mà nhà đầu tư thu được nếu theo quy tắc dừng trên.

Lời giải. Gọi X là lợi nhuận nhà đầu tư thu được. Rõ ràng X là một biến ngẫu nhiên rời rạc. Nếu tình huống A xảy ra thì $X = M - a$. Nếu tình huống B xảy ra thì $X = m - a$. Do đó bảng phân bố xác suất của X là

X	$M - a$	$m - a$
P	$P(A)$	$P(B)$

(Xem tiếp trang 30)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/367. (Lớp 6) So sánh tổng S gồm 100 số hạng

$$S = \frac{1}{1.1.3} + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{4.7.9} + \dots + \frac{1}{100.199.201}$$

với $\frac{2}{3}$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T2/367. (Lớp 7) Cho tam giác ABC cân ở A với $\widehat{BAC} < 90^\circ$ và các đường cao BD, AH . Trên tia BD lấy điểm K sao cho $BK = BA$. Tính số đo của góc HAK .

TRẦN BÁ DUY LINH
(Vĩnh Long)

Bài T3/367. Cho $0 < b < a \leq 4$ and $2ab \leq 3a + 4b$. Tìm giá trị lớn nhất của $a^2 + b^2$.

PHẠM XUÂN TRINH
(GV THCS Trục Phú, Trục Ninh, Nam Định)

Bài T4/367. Tìm hai nghiệm có tích bằng 1 của phương trình

$$5x^6 - 16x^4 - 33x^3 - 40x^2 + 8 = 0.$$

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Nam Yên Thành, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T5/367. Xét tam giác ABC vuông ở A và $AC > AB$. Gọi O là trung điểm của BC và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Tính tỉ số các cạnh của tam giác ABC , biết rằng $\widehat{OIB} = 90^\circ$.

TẠ VIỆT TÔN
(SV K46A1, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/367. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $y^x - 1 = (y-1)!$ trong đó y là một số nguyên tố.

TRINH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Tây)

Bài T7/367. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 4(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

PHAN THÀNH NAM
(SV Khoa Toán- Tin ĐHKHTN, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh)

Bài T8/367. Cho tam giác ABC cân tại A và $BC \leq AC$. Lấy điểm M trên AB và điểm N trên AC (M khác A, B) sao cho MN tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác đó. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{AM}{BM \cdot CN}$ khi điểm M di động trên cạnh AB .

LÊ HOÀI BẮC
(GV THPT Nguyễn Văn Cừ, Xuân Sơn, Châu Đức, Bà Rịa - Vũng Tàu)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/367. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Lấy điểm P nào đó trên đường thẳng BC (P khác B, C). Đường tròn tâm O cắt đường thẳng AP ở N và cắt đường tròn đường kính AP ở E (N, E đều khác A). Gọi M là giao điểm của BC và AE . Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV Khối THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài T10/367. Cho dãy số (u_n) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định như sau :

$$u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{16u_n^3 + 27u_n}{48u_n^2 + 9}.$$

Tìm phần nguyên của tổng S gồm 2008 số hạng

$$S = \frac{1}{4u_1 + 3} + \frac{1}{4u_2 + 3} + \dots + \frac{1}{4u_{2008} + 3}.$$

BÙI TUẤN NGỌC
(GV THPT Chu Văn An, Lạng Sơn)

Bài T11/367. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\cos^6 a} + \frac{1}{\cos^6 b} + \frac{1}{\cos^6 c}$, trong đó ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng với công sai bằng $\frac{\pi}{3}$.

NGUYỄN LÁI

(GV THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hoà, Phú Yên)

Bài T12/367. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn ba tính chất sau:

i) $f(1) = 1$;

ii) $f(x) = \frac{1}{3} \left(f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right) \right)$

với mọi $x \in [0; 1]$;

iii) Với mọi số thực dương ε nhỏ tùy ý, luôn có một số dương δ_ε (δ_ε phụ thuộc vào ε) sao cho: Với mọi $x, y \in [0; 1]$ mà $|x - y| < \delta_\varepsilon$ thì $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Chúng minh rằng $f(x) = 1$ với mọi $x \in [0; 1]$.

VŨ THÁI LUÂN

(Học viên Cao học khoa Toán ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

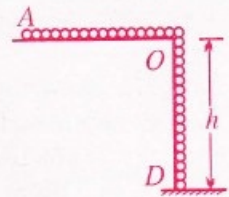
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/367. Hai điện tích điểm A và B có khối lượng và điện tích tương ứng là $(-q, m)$ và $(2q, 2m)$ được nối với nhau bởi một lò xo nhẹ, cách điện có độ cứng bằng K . Đặt hệ trên một mặt phẳng nằm ngang nhẵn cách điện. Người ta tạo ra một điện trường đều có cường độ E và hướng từ A đến B . Hãy tìm độ giãn lớn nhất của lò xo, biết rằng ở thời điểm ban đầu lò xo không biến dạng. Bỏ qua tương tác điện giữa hai quả cầu.

NGUYỄN XUÂN QUANG

(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài L2/367. Một sợi dây xích AOD có độ dài l , đầu D chạm đất, đầu A được giữ chặt trên mặt bàn nằm ngang OA . Cho biết $OD = h$. Khi thả đầu A ra sợi dây xích sẽ tuột xuống đất. Tìm vận tốc của đầu a khi nó tới mép bàn O . Áp dụng số: $l = 50 \text{ cm}$, $h = 30 \text{ cm}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/367. (For 6th grade) Let S be the sum of 100 terms:

$$S = \frac{1}{1.1.3} + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{4.7.9} + \dots + \frac{1}{100.199.201}$$

Compare S with $\frac{2}{3}$.

T2/367. (For 7th grade) Let ABC be an isosceles triangle ($AB = AC$) such that $\widehat{BAC} < 90^\circ$. Let BD and AH be the altitudes. Choose a point K on BD such that $BK = BA$. Find the measure of angle HAK .

T3/367. Given $0 < b < a \leq 4$ and $2ab \leq 3a + 4b$. Find the maximum value of the expression $a^2 + b^2$.

T4/367. The equation

$$5x^6 - 16x^4 - 33x^3 - 40x^2 + 8 = 0$$

has two roots which are reciprocal. Find these roots.

T5/367. Let ABC be a right triangle with right angle at A and $AC > AB$. Let O be the midpoint of BC , and I be the incenter of the triangle ABC . Suppose that $\widehat{OIB} = 90^\circ$, find the ratio between three edges of the triangle ABC .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/367. Find all pairs of positive integers $(x; y)$ such that

$$y^x - 1 = (y - 1)!$$

where y is a prime number.

T7/367. Let a, b, c be non-negative real numbers. Prove the inequality

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 4(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c).$$

When does equality occur?

(Xem tiếp trang 26)



★ **Bài T1/363.** Cho 100 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100. Xếp một cách tùy ý 100 số trên nối tiếp nhau thành một dãy các chữ số ta được số A . Hỏi rằng A có chia hết cho 2007 không?

Lời giải. Do A là số được tạo thành khi viết 100 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100 một cách tùy ý nối tiếp nhau thành một dãy nên trong A có 21 chữ số 1, 20 chữ số mỗi loại từ 2 đến 9 và 11 chữ số 0. Vì vậy tổng các chữ số của A là

$$S(A) = 21 + 20(2 + 3 + \dots + 9) = 901$$

Giả sử $A : 2007$. Vì $2007 : 3$ nên $A : 3$. Theo dấu hiệu chia hết cho 3 thì $S(A) : 3$. Mâu thuẫn vì $S(A) = 901 \not\equiv 0 \pmod{3}$. Vậy A không chia hết cho 2007. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng và gọn:

Lạng Sơn: Vũ Ngọc Nhật Minh, 6A, THCS Chu Văn An, TP. Lạng Sơn; **Phú Thọ:** Khổng Mỹ Linh, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Chinh, 6A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Như Ngọc, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Hà Nội:** Hoàng Phương Linh, 6B, trường Hà Nội – Amsterdam; **Nam Định:** Bùi Vũ Việt Hà, 6A, THCS TTr. Ngô Đồng, Giao Thủy; **Nghệ An:** Thái Khắc Hưng, 6H, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Phạm Thị Thảo Nguyên, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** Đậu Thị Mai Hiền, 6D, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

HOÀNG TRỌNG HẢO

★ **Bài T2/363.** Cho tam giác ABC không cân với AB là cạnh ngắn nhất. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Chứng minh rằng góc ACD là nhọn.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Văn Bảo, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An).

Trên tia BA lấy điểm M sao cho $BM = BC$. Ta có $BA < BC$, nên $BA < BM$, mà M thuộc tia BA nên A nằm giữa B và M . Từ đó A nằm giữa D và M (vì D thuộc tia đối của tia BA). Vậy có

$$\widehat{ACD} < \widehat{MCD} \quad (1)$$

Mặt khác $BD = BC$ nên tam giác BDC cân tại B , suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{BCD}$ (2). Đồng thời, do $BM = BC$ nên tam giác BMC cân tại B , dẫn tới $\widehat{BMC} = \widehat{BCM}$ (3)

Từ (2) và (3) thu được

$$\begin{aligned} \widehat{BCD} + \widehat{BCM} &= \widehat{BDC} + \widehat{BMC} \\ &= \frac{1}{2}(\widehat{MBC} + \widehat{DBC}) = 90^\circ. \end{aligned}$$

Nghĩa là $\widehat{MCD} = 90^\circ$ (4). Từ (1) và (4) suy ra góc $\widehat{ACD}$ là góc nhọn (đpcm). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn nhận xét đúng là giả thiết "Tam giác ABC không cân và AB là cạnh ngắn nhất" là quá mạnh, không cần thiết. Ta chỉ cần dùng giả thiết yếu hơn: "Tam giác ABC thỏa mãn $AB < BC$ ".

2) Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Nguyễn Danh Bách, 7A2, THCS Trưng Vương, Phạm Huy Hoàng, 7A5, THCS Giảng Võ, Hoàng Anh Tú, 7I, THCS Marie-Curie; **Bắc Ninh:** Ngô Quang Quân, 8A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Hiếu, Tô Thị Thu Hà, 6A1, Phạm Văn Tú, Phan Văn Tín, 7A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** Trần Thị Thùy Linh, 7A3, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** Đinh Uýt Nảy, 7B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** Trần Ngọc Đông, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nguyễn Thị Thùy Linh, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Đậu Thị Mai Hiền, 6D, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Nam:** Phạm Hoàng Thiện, 7/1, THCS Lương Thế Vinh, Tam Thành, Phú Ninh; **Bình Định:** Đoàn Quốc Trung, 6A1, THCS Nhơn Khánh, An Nhơn; **Bạc Liêu:** Trần Quang Minh, 7/1, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T3/363.** Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Vì $a + b + c = 1$ nên

$$P = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \\ = abc + \frac{1}{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1.$$

Từ BĐT Cauchy cho ba số dương, ta có

$$\frac{1}{3} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{27} \quad (1)$$

Đặt $p = abc$, thì $0 < p \leq \frac{1}{27}$.

$$\text{Do đó } p + \frac{1}{p} - 27 - \frac{1}{27} = \frac{(27-p)(1-27p)}{27p} \geq 0,$$

$$\text{suy ra } p + \frac{1}{p} = abc + \frac{1}{abc} \geq 27 + \frac{1}{27} = \frac{730}{27} \quad (2)$$

Mặt khác, ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$$

$$\text{nên } P \geq \frac{730}{27} + 10 = \frac{1000}{27}.$$

$$\text{Vậy } \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3 \text{ (đpcm).}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể chứng minh BĐT (2) bằng cách khác như sau:

Do (1), áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có

$$abc + \frac{1}{abc} = \left(abc + \frac{1}{27^2 abc}\right) + \frac{27^2 - 1}{27^2 abc} \\ \geq 2\sqrt{abc \cdot \frac{1}{27^2 abc}} + \frac{27^2 - 1}{27} = \frac{730}{27}.$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Lạng Sơn: Lại Hoàng Nam, 7A, THCS Chu Văn An, TP Lạng Sơn; **Phú Thọ:** Triệu Thị Quỳnh Mai, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Duy Kiên, 9B, Lê Thị Tuyết Mai, Phùng Ngọc Quý, 9A1, Lê Văn Tú, Nguyễn Hoàng Hà, Nguyễn Thế Bảo, 8A1, THCS Yên Lạc; Nguyễn Mạnh Quân, Vũ Quốc Hữu, Lý Duy Cương, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Hà Tây:** Nguyễn Quân Dương, 8B, THCS Thanh Mai, Thanh Oai; Đặng Xuân Sơn, 9C, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hà Nội:** Nguyễn Tuấn Phong, 8A1, THCS Chu Văn An; Lê Quang Huy, 9H1, THCS Trung Vương, Q. Hoàn Kiếm; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Hà Tĩnh:** Trần Viết Cường, 9C, THCS TTr. Kỳ Anh; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tú Khải, 9B, THCS Trần Hưng Đạo, TP Quảng Ngãi; **Phú Yên:** Phạm Quang Thịnh, 9I, THCS Hùng Vương, TP Tuy Hòa; **Cần Thơ:** Lê Đại

Thành, 9A4, THCS Trà Nóc, TP Cần Thơ; **Bình Định:** Huỳnh Kim Linh, 8A3, THCS Phước An, Tuy Phước.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T4/363. Giải phương trình

$$(x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x + 5)^4 + (x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x + 3)^4 = 16.$$

Lời giải. Đặt $t = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x + 4$

thì PT đã cho trở thành

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 16 \text{ hay } t^4 + 6t^2 - 7 = 0.$$

Giải PT bậc hai đối với t^2 được $t^2 = 1$ và $t^2 = -7$.

PT $t^2 = -7$ vô nghiệm. Ta xét hai trường hợp sau:

$$1) \text{ Với } t = 1 \text{ thì } x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x + 3 = 0 \quad (1)$$

Biến đổi về trái của (1) như sau:

$$x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x + 3 \\ = (x^4 + x^3) + (4x^3 + 4x^2) + (4x^2 + 4x) + (3x + 3) \\ = (x+1)(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) \\ = (x+1)(x^3 + 3x^2 + x^2 + 3x + x + 3)$$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow (x+1)(x+3)(x^2 + x + 1) = 0.$$

$$\text{Ta thấy } x^2 + x + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với}$$

mọi x nên PT (1) có hai nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = -3$.

$$2) \text{ Với } t = -1 \text{ thì } x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x + 5 = 0 \quad (2)$$

Đặt về trái của PT (2) là $f(x)$ thì từ biến đổi trên ta có

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x + 5 \\ = (x+1)(x+3)(x^2 + x + 1) + 2 \\ = (x^2 + 4x + 3)(x^2 + x + 1) + 2 \quad (3)$$

Từ (3) có $f(-1) = f(-3) = 2$, $f(-2) = -1$, còn với $x < -3$ hoặc $x > -1$ thì $(x+1)(x+3) > 0$ và $x^2 + x + 1 > 0$ nên $f(x) > 0$.

Như vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm thực nằm trong các khoảng $(-3; -2)$ và $(-2; -1)$. Các nghiệm này là số vô tỉ. Ta có thể tính giá trị gần đúng các nghiệm của $f(x)$ bằng cách sử dụng phương pháp hệ số bất định để phân tích $f(x)$ thành $f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) + s$ (4) sao cho sai số s xấp xỉ bằng 0.

Khai triển (4) và so sánh các hệ số của (4) với hệ số của $f(x)$ ta được hệ PT sau:

$$\begin{cases} a+c=5 \\ b+d+ac=8 \\ ad+bc=7 \\ bd+s=5. \end{cases}$$

Từ (3), nếu $a=1$ hoặc $a=4$ thì sai số $s=2$, do đó có thể chọn a gần bằng các số đó (chú ý vai trò của a và c như nhau).

Thử với một vài giá trị của a ta chọn được $a=\frac{1}{2}$, $c=\frac{9}{2}$ thì $b=\frac{33}{32}$, $d=\frac{151}{32}$ với sai số

$$s=5-bd=\frac{137}{1024}\approx 0,134. \text{ Lúc đó}$$

$$f(x)=\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{33}{32}\right)\left(x^2+\frac{9}{2}x+\frac{151}{32}\right)+\frac{137}{1024}.$$

Ta thấy $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{33}{32}=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{32}>0$ với mọi x .

Tam thức $x^2+\frac{9}{2}x+\frac{151}{32}$ có hai nghiệm

$$x_3=\frac{-18+\sqrt{22}}{8}\approx -1,7 \text{ và } x_4=\frac{-18-\sqrt{22}}{8}\approx -2,8$$

(vì sai số $|s|<0,15$ nên giá trị nghiệm chỉ lấy đến phần mười đơn vị).

Như vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $x_1=-1$, $x_2=-3$, $x_3\approx -1,7$ và $x_4\approx -2,8$. $\square$

Nhận xét. 1) Nếu dùng chương trình cho máy vi tính, chẳng hạn như MATHEMATICA (phiên bản 6.2) ta có hai nghiệm thực gần đúng của $f(x)$ là $x_3\approx -1,70203$ và $x_4\approx -2,82105$. Bằng cách giải trên nếu chọn giá trị của a sao cho sai số $|s|<0,01$ thì tìm được nghiệm gần đúng chính xác đến 0,01 đơn vị.

2) Đa số các bạn gửi bài về đã giải được PT (1) và tìm ra hai nghiệm $x_1=-1$, $x_2=-3$. Một số bạn sai lầm khi khẳng định rằng PT (2) vô nghiệm vì bạn đó không phân tích được về trái của (2) thành tích của hai tam thức bậc hai (!). Một vài bạn khác biến đổi $x=(\sqrt{x})^2$ hoặc xét $x>0$ nên dẫn đến $f(x)>0$ với mọi x (!). Riêng bạn Lê Viết Quân, 9A6, THCS Quang Trung, TP. Thanh Hóa cho kết quả đúng

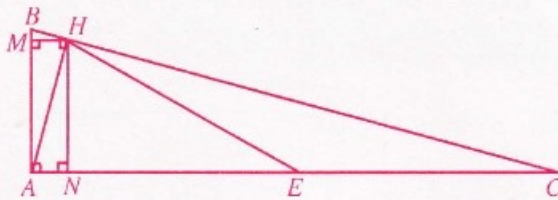
$$f(x)\approx\left(x^2+\frac{1}{2}x+0,99\right)(x+1,7)(x+2,8).$$

VIỆT HẢI

★ Bài T5/363. Giả sử AH là đường cao của tam giác ABC vuông tại A và $AH^2=4AM\cdot AN$,

trong đó M, N theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ H đến AB, AC . Tính số đo các góc nhọn của tam giác ABC .

Lời giải. Tứ giác $AMHN$ là hình chữ nhật nên $AM=HN$.



Theo giả thiết ta có $AH^2=4AM\cdot AN$ (1)

Tam giác AHC vuông ở H ; $HN\perp AC$ nên $AH^2=AN\cdot AC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AC=4AM=4HN$ (3)

Gọi E là trung điểm của AC , ta có

$$EH=EA=EC=\frac{AC}{2} \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra $HE=2HN$. Mà $\widehat{HNE}=90^\circ$ nên $\widehat{HEN}=30^\circ$. Ta thấy $\triangle EHC$ cân ở E nên

$$\widehat{ECH}=\frac{1}{2}\widehat{HEN}=\frac{1}{2}\cdot 30^\circ=15^\circ \text{ hay } \widehat{ACB}=15^\circ.$$

Từ đó $\widehat{ABC}=90^\circ-\widehat{ACB}=90^\circ-15^\circ=75^\circ$.

Vậy số đo các góc nhọn của $\triangle ABC$ là 15° và 75° . $\square$

Nhận xét. 1) Ngoài cách giải trên đây, một số bạn áp dụng tính chất của tam giác đồng dạng hoặc dùng công thức tính diện tích của tam giác vuông.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Thị Ngọc, Phùng Thanh Lam, 9A1, Nguyễn Thị Huân, Nguyễn Hữu Duy, Nguyễn Thị Hà Anh, Tạ Thị Việt Chinh, 8A1, THCS Yên Lạc;
Phú Thọ: Lê Mạnh Hồng, 8C, THCS Văn, Việt Trì;
Nam Định: Nguyễn Văn Quý, 9A, THCS Hải Hậu;
Thanh Hóa: Hoàng Tiến Dũng, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Nguyễn Thanh Tùng, 9G, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** Dương Cẩm Tú, Hoàng Nguyễn Như Quỳnh, Hồ Khánh Duy, Hoàng Thị Lan Hương, Đặng Trung Anh, Lê Hồng Định, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Phú Yên:** Hồ Như Vũ, 9H, THCS Lương Thế Vinh, TP. Tuy Hòa; **Quảng Ngãi:** Ôn Nữ Quỳnh Như, 9E, THCS Hành Thịnh, Nghĩa Hành, Bùi Văn Hồng Linh, 7C, THCS Nghĩa Dũng, TP. Quảng Ngãi; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 9A4, THCS Trà Nóc, TP. Cần Thơ.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T6/363.** *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn*

$$x^{2007} = y^{2007} - y^{1338} - y^{669} + 2 \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $u = x^{669}$, $v = y^{669}$ ($u, v \in \mathbb{Z}$) thì PT (1) có dạng $u^3 = v^3 - v^2 - v + 2$.

Cách 1. Nhận thấy

$$u^3 = v^3 - v^2 - v + 2 = (v-1)^3 + 2(v-1)^2 + 1 > (v-1)^3 \text{ và } u^3 = v^3 - (v-1)(v+2).$$

+ Nếu $v > 1$ hoặc $v < -2$ thì $(v-1)(v+2) > 0$, suy ra $(v-1)^3 < u^3 < v^3 \Leftrightarrow v-1 < u < v$, điều này không thể xảy ra khi $u, v \in \mathbb{Z}$.

+ Với $-2 \leq v \leq 1$ và $v \in \mathbb{Z}$ thì $v \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Nếu $v = -2$ thì $y^{669} = -2$, nên $y \notin \mathbb{Z}$.

Nếu $v = -1$ thì $u = 1$, suy ra $x = -1, y = 1$.

Nếu $v = 0$ thì $u = 2$, suy ra $x^{669} = 2$, nên $x \notin \mathbb{Z}$.

Nếu $v = 1$ thì $u = 1$, suy ra $x = y = 1$.

Cách 2. Nhận thấy

$$u^3 = v^3 - v^2 - v + 2 = (v-1)^3 + 2(v-1)^2 + 1 > (v-1)^3 \text{ và } u^3 = (v+2)^3 - (7v+6)(v+1) \leq (v+2)^3 \text{ (vì với } v \in \mathbb{Z} \text{ thì } -(7v+6)(v+1) \leq 0). \text{ Suy ra } (v-1)^3 < u^3 \leq (v+2)^3. \text{ Xây ra các khả năng sau:}$$

• $u^3 = v^3 \Leftrightarrow v^3 = v^3 - v^2 - v + 2 \Leftrightarrow v = 1$ hoặc $v = 2$. Với $v = 1$, tìm được $x = y = 1$. Với $v = 2$ thì $y^{669} = -2$, nên $y \notin \mathbb{Z}$.

• $u^3 = (v+1)^3 \Leftrightarrow (v+1)^3 = v^3 - v^2 - v + 2 \Leftrightarrow 4v^2 + 4v - 1 = 0$ nên $v \notin \mathbb{Z}$.

• $u^3 = (v+2)^3 \Leftrightarrow (7v+6)(v+1) = 0$. Do $v \in \mathbb{Z}$ nên $v = -1 \Rightarrow u = 1$. Từ đó tìm được $x = 1, y = -1$.

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn (1) là $(1; 1), (1; -1)$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài và đều cho đáp số đúng. Một số bạn đưa ra bài toán tổng quát như sau: *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn $x^{3n} = y^{3n} - y^{2n} - y^n + 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$).*

Bằng cách đặt ẩn phụ và đánh giá như trên, ta cũng tìm được các cặp số nguyên $(x; y)$ là $(1; 1)$ và $(1; -1)$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Phạm Duy Long, 10T1, THPT Hà Nội-Amsterdam, Nguyễn Khánh Việt, 10A2 Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, Vũ Minh Thắng, 10 Toán, K41, ĐHSP Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Phùng Ngọc Quý,

9A1, THCS Yên Lạc, Vũ Thị Thu Hà, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tây:** Nguyễn Quân Dương, 8B, THCS Thanh Mai, Nguyễn Mạnh Quân, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Bắc Ninh:** Nguyễn Quang Rục, 9A, THCS Yên Phong, Nguyễn Mạnh Hưng, 12A1, THPT Lý Thái Tò; **Phú Thọ:** Nguyễn Trường Giang, 9A2, THCS Giầy Phong Châu; **Lào Cai:** Lê Đức Thọ, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Hải Phòng:** Trần Hoàng Bá, 12 Toán, THPT Năng khiếu Trần Phú; **Hưng Yên:** Lương Xuân Huy, 11A1, THPT Tiên Lữ; **Hải Dương:** Trần Văn Hạnh, 11A5, THPT Ninh Giang; **Đỗ Thị Thu Thảo,** 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hoá:** Đinh Minh Thành, 11A11, THPT Đào Duy Từ; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Việt Trung, Thiệu Đăng Ba, 10 Toán, THPT Năng khiếu Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Tuấn Hưng, 10T, THPT chuyên Lê Khiết; **Ninh Bình:** Trần Thị Tươi, 12 Toán, THPT Lương Văn Tụy; **Nghệ An:** Vũ Đình Long, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Cao Thị Thanh Hoa, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Võ Văn Dũng,** 11A1, Khối THPT chuyên ĐH Vinh; **Bình Thuận:** Phạm Minh Quân, 10T, THPT chuyên Trần Hưng Đạo; **Bình Định:** Đồng Tấn Phát, 11A1, THPT số 3 Phù Cát; **Quảng Trị:** Nguyễn Văn Lương, 11Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Dương Xuân Vinh, 11A1, THPT Phan Đình Phùng; **Nguyễn Đình Thi,** 10A1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Trung Dương, 10A6, THPT Số 1 Đức Phổ; **Tp Hồ Chí Minh:** Mai Quốc Thắng, 12AT, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đắk Lắk:** Nguyễn Tấn Nam, 11T1, THPT Ngô Gia Tự, Eakar.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T7/363.** *Cho dãy số (x_n) được xác định như sau:*

$$x_1 = 5; x_{n+1} = x_n^2 - 2 \quad (n=1, 2, \dots).$$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Lời giải. • Từ cách xác định dãy (x_n) , ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. (1)

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta có } x_{n+1}^2 - 4 &= (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^2(x_n^2 - 4) \\ &= x_n^2 \cdot x_{n-1}^2(x_{n-1}^2 - 4) = \dots = x_n^2 \cdot x_{n-1}^2 \dots x_1^2(x_1^2 - 4) \\ &= 21x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^2 = 21 + \frac{4}{(x_1 x_2 \dots x_n)^2}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^2 = 21 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{(x_1 x_2 \dots x_n)^2}$$

$$= 21 \text{ (do (1)).}$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt{21}. \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn đưa ra nhận xét: $x_n > 2$ $\forall n = 1, 2, \dots$ (2). Khi đó (1) được chứng minh bằng cách chứng tỏ dãy (x_n) tăng và không bị chặn trên.

- Sử dụng kết quả 2, có thể chứng minh

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{(n_1 n_2 \dots n_n)^2} = 0 \text{ bằng cách áp dụng nguyên lý}$$

$$\text{ kẹp từ bất đẳng thức } 0 < \frac{4}{(x_1 x_2 \dots x_n)^2} < \frac{4}{4^n}.$$

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Hoàng Hải, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tây:** Nguyễn Thị Tuyền, Khu tập thể 73, TSQLQ1; **Đắk Lắk:** Trương Thành Công, 9A, THCS Nguyễn Khuyến, Eakar; **Phú Yên:** Lê Văn Thảo, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bình Định:** Bùi Hữu Nhân, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** Nguyễn Tăng Thành, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Dương Văn An, 12A2, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa; **Khánh Hòa:** Bùi Bình Minh, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T8/363.** Kí hiệu $a, b, c; h_a, h_b, h_c$ và r_a, r_b, r_c theo thứ tự là độ dài các cạnh; các đường cao và bán kính các đường tròn bàng tiếp của một tam giác ABC bất kì. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{h_a + r_a} + \frac{b}{h_b + r_b} + \frac{c}{h_c + r_c} \geq \sqrt{3}. \quad (*)$$

Lời giải. (Dựa theo Tăng Văn Bình, 10A1, THPT Phan Bội Châu, **Nghệ An**).

Gọi S là diện tích và p là nửa chu vi của tam giác ABC , ta có

$$2S = ah_a = 2(p - a)r_a = (b + c - a)r_a.$$

Đặt $x = 2(p - a)$, $y = 2(p - b)$, $z = 2(p - c)$ thì được $2a = y + z$, $2b = z + x$, $2c = x + y$ (x, y, z đều dương) và $S = \frac{1}{4} \sqrt{xyz(x + y + z)}$.

(Đề ý $x + y + z = a + b + c = 2p$).

Để trình bày được gọn, ta sử dụng kí hiệu $\sum$ để chỉ tổng các hoán vị vòng quanh.

Với kí hiệu như trên, BĐT (*) cần chứng minh tương đương với

$$\sum \frac{x(y + z)^2}{2x + y + z} \geq \sqrt{3xyz(x + y + z)} \quad (1)$$

Đến đây, để chứng minh (1) ta chứng minh BĐT (2) sau đây, mạnh hơn (1):

$$\sum XY = XY + YZ + ZX \geq xyz(x + y + z), \quad (2)$$

$$\text{trong đó } X = \frac{x(y + z)^2}{2x + y + z} = f(x, y, z),$$

$Y = f(y, z, x)$ và $Z = f(z, x, y)$; và do đó về trái của (1) được viết gọn lại là $\sum X$ thay cho tổng $X + Y + Z$ (Điều đó suy ra từ BĐT

$$(X + Y + Z)^2 \geq 3(XY + YZ + ZX)).$$

Muốn vậy, ta đặt

$$u = \frac{x}{x + y + z}, v = \frac{y}{x + y + z}, w = \frac{z}{x + y + z} \quad (3)$$

u, v, w đều là những số dương và có tổng $u + v + w = 1$. Thực hiện phép đổi biến (3), ta đưa được hai vế của (2) về dạng sau đây, rồi

$$\text{chứng minh } (2) \Leftrightarrow F(u, v, w) = \sum f(u, v, w) = \sum \frac{(1-u)^2(1-v)^2}{(1+u)(1+v)w} \geq 1 \quad (4)$$

Thật vậy, áp dụng BĐT Cauchy - Bunyakovski - Schwarz vào vế trái của BĐT (4) cần chứng

minh $\left(\text{có dạng } \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha'}} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta'}} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma'}} \right)^2 \right)$ ta thu

được (sau khi đã tính toán và rút gọn):

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &\geq \frac{((1-u)(1-v) + (1-v)(1-w) + (1-w)(1-u))^2}{(1+u)(1+v)w + (1+v)(1+w)u + (1+w)(1+u)v} \\ &= 1 + \frac{(uv + vw + wu)^2 - 3uvw}{2(uv + vw + wu) + 3uvw + 1} \end{aligned} \quad (5)$$

Mặt khác, ta lại có đẳng thức sau (với đề ý rằng $u + v + w = 1$)

$$\begin{aligned} &(uv + vw + wu)^2 - 3uvw \\ &= u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 - uvw(u + v + w) \\ &= \frac{1}{2}((uv - vw)^2 + (vw - wu)^2 + (wu - uv)^2) \end{aligned} \quad (6)$$

Cuối cùng, đối chiếu (5) và (6) với chú ý rằng vế phải của (6) không âm, ta thu được BĐT (4) rồi (2), (1), nghĩa là thu được BĐT (*) cần tìm.

Dấu đẳng thức ở (4) đạt được và do đó ở (*) đạt được khi và chỉ khi $u = v = w$ hay khi và chỉ khi $a = b = c$, tức là ABC là một tam giác đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn lượng giác hóa bài toán hoặc sử dụng quá nhiều BĐT đại số không cần thiết (chẳng hạn BĐT Chebysev, Nesbit, ...) thành thử lời

giải quá dài, không gọn. Một số bạn sử dụng quá nhiều hệ thức hình học về những yếu tố trong tam giác, đưa ĐĐT (*) cần chứng minh về dạng một ĐĐT bậc ba có chứa cả tham số, thậm chí sử dụng cả đạo hàm bậc nhất và bậc hai!

2) Lời giải trên đây của bạn *Bình* không những gọn gàng mà còn đẹp nữa. Đa số bạn thực hiện một lần đổi biến từ a, b, c sang x, y, z để thực hiện cách đánh giá biểu thức ở vế trái của (*). Riêng bạn *Bình* đã có sáng kiến thực hiện việc đổi biến lần thứ hai, đó là phép đổi biến (3) từ x, y, z sang u, v, w . Việc trình bày lời giải vì thế được gọn gàng, tuy nhiên những biến đổi trung gian cũng không quá ít. Tóm lại, đối với bài toán này, chúng ta cần đến sự lựa chọn kĩ thuật sử dụng ĐĐT đại số.

3) Ngoài bạn *Bình*, các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt: *Trịnh Ngọc Dương*, 12A1, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; *Nguyễn Hải Thành*, 12A4, THPT Đào Duy Từ, Đồng Hới, Quảng Bình.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

★ **Bài T9/363.** *Giả sử tứ giác ABCD có AD = BC, AC và BD cắt nhau ở O, phân giác các góc DAB và CBA cắt nhau ở I. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD và OI cùng thuộc một đường thẳng.*

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Huy Hoàng*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**).

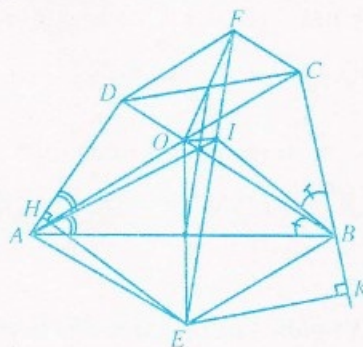
Trước hết xin phát biểu không chứng minh một nhận xét hiển nhiên.

Nhận xét. Cho tứ giác ABCD. Tập hợp các điểm đồng thời thuộc nửa mặt phẳng bờ AD chứa BC, nửa mặt phẳng bờ BC chứa AD và cách đều các đường thẳng AD, BC cùng thuộc một đường thẳng.

Trở lại việc giải bài toán. Dựng các hình bình hành AEI, CFD.

Dễ thấy: E, F, I cùng thuộc các nửa mặt phẳng bờ AD chứa BC, bờ BC chứa AD (1).

Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của E trên AD, BC, ta có



$$S_{DAE} = S_{BAE} \text{ (vì } DB \parallel AE) = S_{BCE} \text{ (vì } AC \parallel BE)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AD \cdot EH = \frac{1}{2} BC \cdot EK \Rightarrow EH = EK \text{ (vì } AD = BC).$$

Vậy khoảng cách từ E tới các đường thẳng AD, BC bằng nhau (2)

Tương tự khoảng cách từ F tới các đường thẳng AD, BC bằng nhau (3)

Chú ý rằng $\widehat{IAB} = \widehat{IAD}$, $\widehat{IBA} = \widehat{IBC}$ ta có khoảng cách từ I tới các đường thẳng AD, BC bằng nhau (4)

Từ (1), (2), (3), (4) theo nhận xét ta thấy E, F, I thẳng hàng. Từ đó, dễ dàng suy ra, trung điểm của AB, CD và OI thẳng hàng. □

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải, nhiều bạn giải quá dài, đa số các bạn đều dùng bổ đề về đường thẳng Gauss, một vài bạn phải dùng phương pháp tọa độ.

2) Ngoài bạn *Hoàng*, xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Khổng Hoàng Thao, Trần Bá Trung, Phan Văn Thành*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Quý*, 9A, THCS Hải Hậu; **Thái Bình:** *Hoàng Minh Lập*, 9E, THCS Quang Trung, Kiến Xương; **Đồng Nai:** *Nguyễn Ngọc Hoa Quỳnh*, 11T, THPT Lương Thế Vinh; **Đắk Lắk:** *Lê Duy Tùng*, 11T, THPT Nguyễn Du, TP. Buôn Mê Thuột; **Phú Yên:** *Nguyễn Đình Thi*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T10/363.** *Chứng minh rằng*

$$\left(a - \frac{1}{b}\right) \left(b - \frac{1}{c}\right) \left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(b - \frac{1}{b}\right) \left(c - \frac{1}{c}\right) \quad (1)$$

trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.

Lời giải. Ta biến đổi

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc}$$

$$\geq \frac{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow (ab-1)(bc-1)(ca-1) \geq (a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2c^2 - abc(a+b+c) + (ab+bc+ca)$$

$$\geq a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 2abc(a+b+c)$$

$$\geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2$$

$$\geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

$$\text{hay } (a-c)^2(b^2-1)+(a-b)^2(c^2-1) \\ + (b-c)^2(a^2-1) \geq 0 \quad (2)$$

Do a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1 nên (2) đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (a-c)^2(b^2-1)=0 \\ (a-b)^2(c^2-1)=0 \text{ hay } a=b=c. \square \\ (b-c)^2(a^2-1)=0 \end{cases}$$

◀ **Nhận xét.** Đây là một bài toán về biến đổi đồng nhất thức dạng đơn giản nên có rất nhiều bạn giải đúng. Tòa soạn xin nêu tên các bạn nhỏ tuổi ở lớp 7, 8 và 9 đã có lời giải tốt:

Lạng Sơn: Vũ Ngọc Nhật Minh, Lại Hoàng Nam, 7A, THCS Chu Văn An, TP. Lạng Sơn; **Phủ Thọ:** Triệu Thị Quỳnh Mai, Tạ Hải Nam, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** Đỗ Vũ Thanh, 9A, THCS Yên Phong; **Bắc Giang:** Tống Thị Thu Hoài, 7A, THCS Phúc Sơn, Tân Yên; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thế Bảo, 8A1, Phùng Ngọc Quý, 9A1, THCS Yên Lạc, Lê Trung Kiên, 8C, Lý Duy Cương, Nguyễn Thúy Hằng, Nguyễn Mạnh Quân, 9C, THCS Vĩnh Tường, Nguyễn Duy Kiên, Phùng Thanh Lam, Nguyễn Thị Ngọc, Đinh Tiến Dũng, 9C, THCS Tam Dương; **Hà Tây:** Trương Văn Khôi, 9B, THCS Hòa Chính, Chương Mỹ; **Nam Định:** Nguyễn Văn Quý, Bùi Văn Vương, 9B, THCS Hải Hậu; **Thái Bình:** Hoàng Minh Lập, 9E, THCS Quang Trung, Kiến Xương; **Thanh Hóa:** Lê Thế Vinh, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** Đậu Thế Vũ, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** Trần Phương Thảo, 9C, THCS Kỳ Anh; **Quảng Nam:** Nguyễn Tấn Tài, 9C, THCS Nguyễn Đình Chiểu, Điện Bàn; **Bình Phước:** Nguyễn Văn Hùng, 7C, THCS Minh Thắng, Chơn Thành; **Phú Yên:** Lê Cao Thắng, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T11/363.** Một dãy $a_1 a_2 \dots a_n$ với $a_i \in \{0; 1\}$ gọi là một *xâu nhị phân* có độ dài n . Hỏi có bao nhiêu *xâu nhị phân* độ dài n ($n \geq 4$) chứa đúng hai lần xuất hiện của 01?

Lời giải. (Theo bạn Trịnh Ngọc Dương, 12A1, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội).

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Cho $k, n \in \mathbb{N}$ ($k \leq n$). Khi đó số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad (1) \text{ là } C_{n-1}^{k-1}.$$

Thật vậy ứng với mỗi nghiệm $(x_1, \dots, x_k)$ ta cho tương ứng với dãy nhị phân

$$\underbrace{1 \dots 1}_{x_1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{x_2} \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{x_k}$$

trong đó $k-1$ chữ số 0 được đặt vào $n-1$ vị trí giữa n chữ số 1. Để thấy phép tương ứng đó là song ánh. Vậy số nghiệm nguyên dương của (1) bằng số cách đặt $k-1$ chữ số 0 vào $n-1$ vị trí giữa n chữ số 1, do đó bằng C_{n-1}^{k-1} . Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Mỗi *xâu nhị phân* có chứa đúng hai lần xuất hiện 01 có dạng

$ABABA, ABABAB, BABA, BABAB$

trong đó A là *xâu nhị phân* gồm toàn chữ số 1; B là *xâu nhị phân* gồm toàn chữ số 0, mỗi *xâu* có độ dài ít nhất là 1.

Xét *xâu dạng* $ABABA$: Số *xâu* có dạng này chính là nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n$.

Theo bổ đề trên số *xâu dạng* này là C_{n-1}^4 .

Tương tự số *xâu dạng* $ABABAB, BABA, BABAB$ tương ứng là C_{n-1}^5, C_{n-1}^3 và C_{n-1}^4 .

Thành thử số *xâu* thỏa mãn điều kiện đề bài là $(C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4) + (C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5) = C_n^4 + C_n^5 = C_{n+1}^5$ (dùng hằng đẳng thức Pascal). $\square$

◀ **Nhận xét.** Nhiều bạn giải sai bài toán này. Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Khổng Hoàng Thao, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** Trần Thị Hồng Vân, 11A1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nguyễn Văn Đình, 12I, THPT Giao Thủy A; **Hải Dương:** Trần Hoàng Sơn, 11T, Đỗ Thị Thu Thảo, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** Dương Văn An, 12A1, THPT Châu Thành.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T12/363.** Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện $f(1) = \frac{2007}{6}$ và

$$\frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \dots + \frac{f(n)}{n} = \frac{n+1}{2} f(n)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2008+n)f(n)$.

Lời giải. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \dots + \frac{f(n)}{n} + \frac{f(n+1)}{n+1} = \frac{n+2}{2} f(n+1).$$

$$\text{Suy ra } \frac{n+2}{2} f(n+1) - \frac{f(n+1)}{n+1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \dots + \frac{f(n)}{n} = \frac{n+1}{2} f(n) \\ \Rightarrow &\left(\frac{n+2}{2} - \frac{1}{n+1} \right) f(n+1) = \frac{n+1}{2} f(n) \\ \Rightarrow &\frac{n(n+3)}{2(n+1)} f(n+1) = \frac{n+1}{2} f(n) \\ \Rightarrow &f(n+1) = \frac{(n+1)^2}{n(n+3)} f(n) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Bởi vậy } f(n) &= \frac{n^2}{(n-1)(n+2)} f(n-1) \\ &= \frac{n^2 \cdot (n-1)^2}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n+2) \cdot (n+1)} f(n-2) = \dots \\ &= \frac{(n \cdot (n-1) \dots 2)^2}{((n-1)(n-2) \dots 1) ((n+2)(n+1) \dots 4)} f(1) \\ &= \frac{n \cdot 3 \cdot 2}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{2007}{6} = \frac{2007 \cdot n}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

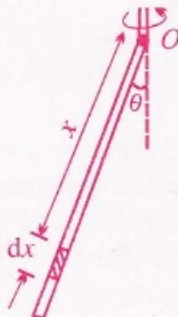
$$\begin{aligned} \text{Do đó } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2008+n)f(n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2007 \cdot n(n+2008)}{(n+1)(n+2)} = 2007. \quad \square \end{aligned}$$

◀ **Nhận xét.** Đây thực chất là một bài toán dãy số. Mấu chốt chủ yếu là tìm ra công thức lùi (1). Hoan nghênh các bạn học sinh lớp 9, lớp 10 sau tham gia và có lời giải đúng:

Hà Nội: Vũ Minh Thắng, 10T1, PTCT, ĐHSPT Hà Nội; **Hà Tĩnh:** Đinh Văn Học, 10T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** Nguyễn Tăng Thành, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đắk Lắk:** Trương Thành Công, 9A, THCS Nguyễn Khuyến EaKar; **Phú Yên:** Nguyễn Đình Thi, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Bình Định:** Bùi Trọng Trí, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài L1/363.** Một con lắc hình nón là một thanh đồng tính, tiết diện đều có chiều dài l và khối lượng m , được quay đều quanh một trục thẳng đứng với vận tốc góc ω (đầu trên của thanh gắn với trục quay bằng bản lề). Tìm độ lớn góc θ giữa thanh và đường thẳng đứng. Bỏ qua mọi ma sát.



Lời giải. Trong hệ quy chiếu quay cùng trục quay với vận tốc góc ω , một đoạn nhỏ của thanh có độ dài dx , cách O một khoảng x chịu tác dụng của lực quán tính li tâm là:

$$dF_{qt} = \omega^2 x \sin \theta \, dm$$

trong đó dm là khối lượng của đoạn nhỏ có độ dài dx , $dm = \frac{m}{l} dx$.

Momen của lực quán tính li tâm tác dụng lên đoạn nhỏ đó đối với trục quay Δ qua O vuông góc với mặt phẳng thẳng đứng chứa thanh là:

$$dM_{qt} = x \cos \theta \, dF_{qt} = \frac{m\omega^2 \sin \theta \cos \theta}{l} x^2 dx.$$

Momen của lực quán tính li tâm tác dụng lên cả thanh là

$$M_{qt} = \int dM_{qt} = \frac{m\omega^2 \sin \theta \cos \theta}{l} \int_0^l x^2 dx$$

$$M_{qt} = \frac{m\omega^2 \sin \theta \cos \theta}{3} l^2.$$

Momen của trọng lực của thanh đối với trục Δ là $M_p = \frac{mgl \sin \theta}{2}$.

Để góc θ không đổi thì $M_{qt} = M_p$, nghĩa là

$$\frac{m\omega^2 \sin \theta \cos \theta}{3} l^2 = \frac{mgl \sin \theta}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \cos \theta = \frac{3g}{2\omega^2 l} \text{ hay } \theta = \arccos \frac{3g}{2\omega^2 l}. \quad \square$$

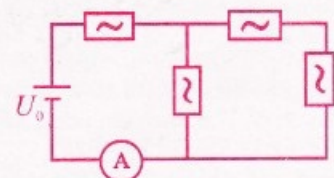
◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Tây: Nguyễn Mạnh Quân, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Nghệ An:** Nguyễn Lâm Hoàng, 11A3, Nguyễn Đức Sơn, A3K34, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Thanh Hóa:** Lê Bá Sơn, 12F, THPT Lam Sơn; **Hưng Yên:** Phạm Đức Linh, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** Bùi Tiến Mạnh, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** Nguyễn Văn Đình, 12L, THPT Giao Thủy A; **Bình Phước:** Phạm Văn Tâm, 11 Lí, Triệu Phúc Quân, 11B, THPT chuyên Quang Trung; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Ngọc Duy, Trần Ngọc Sang, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thành Linh, Trần Việt Long, Nguyễn Văn Bảo, 12 Lí, Nguyễn Thành Trung, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh.

NGUYỄN VĂN THUẬN

★ **Bài L2/363.**

Cho một mạch điện như hình 1. Nguồn điện có hiệu điện thế U_0 và điện trở

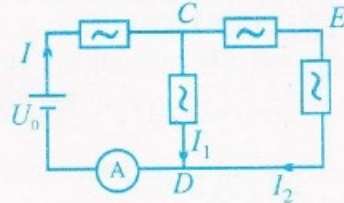


Hình 1

trong không đáng kể. Bốn phần tử phi tuyến giống nhau mà có cường độ dòng điện chạy qua mỗi phần tử phụ thuộc vào hiệu điện thế hai đầu của nó theo quy luật $I = \alpha U^2$, trong đó α là hệ số dương. Tìm số chỉ ampe kế. Có rằng điện trở của ampe kế không đáng kể.

Lời giải. Kí hiệu dòng điện trong mạch như hình 2. Ta có

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha U_{CD}^2; \\ I_2 &= \alpha U_{CE}^2 \\ &= \alpha \left(\frac{U_{CD}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$



Hình 2

Mặt khác

$$I = I_1 + I_2$$

$$\Leftrightarrow \alpha(U_0 - U_{CD})^2 = \alpha U_{CD}^2 + \alpha \left(\frac{U_{CD}}{2} \right)^2.$$

$$\text{Từ đó suy ra } U_{CD} = \frac{2U_0}{2 + \sqrt{5}}.$$

Do đó số chỉ ampe kế bằng

$$I = \alpha (U_0 - U_{CD})^2 = \frac{5\alpha U_0^2}{9 + 4\sqrt{5}}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Sơn La: Lê Vũ Hải, 12 Lí, THPT chuyên Sơn La, Bắc Ninh: Nguyễn Thành Linh, 12 Lí, Trần Viện Long, 12 Lí, THPT chuyên; Hà Tây: Nguyễn Mạnh Quân, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ; Hải Dương: Tạ Văn Đức, 11A, THPT Kim Thành; Thanh Hóa: Nguyễn Văn Long, 12A1, THPT Hà Văn Mao, Bá Thước, Lê Bá Sơn, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, Lê Trung Dũng, 12A1, THPT Đông Sơn I; Nghệ An: Đặng Hải Cường, Trần Văn Giai, A3K34, THPT chuyên Phan Bội Châu; Quảng Ngãi: Nguyễn Ngọc Duy, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; Bình Phước: Triệu Phúc Quân, 11B, THPT chuyên Quang Trung.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Nhắn tin:

Trong các bạn tham gia giải bài, có một số bạn ở bậc học THPT thường ghi khóa học của trường (ví dụ: A3K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An). Đề nghị các bạn hãy ghi rõ lớp học của mình (ví dụ: lớp 11A3) để Tòa soạn tiện thống kê Cuộc thi giải Toán và Vật lí trên THPT hàng năm.

Cảm ơn các bạn.

THTT

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T8/367. Let ABC be an isosceles triangle at vertex A and $BC \leq AC$. Choose a point M on AB (but not the vertices A or B) and a point N on AC such that MN touch the incircle of the triangle ABC . Find the maximum value of the ratio $\frac{AM}{BM \cdot CN}$ when M moves along the edge AB .

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/367. Let O be the circumcenter of a triangle ABC . Choose a point P , different from B and C on the line connecting BC . The circumcircle of ABC meets AP at a point N and the circle whose diameter is AP at a point E (N, E are both different from A). BC and AE intersect at M . Prove that MN always passes through a fixed point.

T10/367. A sequence (u_n) ($n = 1, 2, \dots$) is determined by the following recursive formula

$$u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{16u_n^3 + 27u_n}{48u_n^2 + 9}.$$

Find the largest integer which is smaller than the sum S of 2008 summands

$$S = \frac{1}{4u_1 + 3} + \frac{1}{4u_2 + 3} + \dots + \frac{1}{4u_{2008} + 3}.$$

T11/367. Find the smallest value of the following expression

$$P = \frac{1}{\cos^6 a} + \frac{1}{\cos^6 b} + \frac{1}{\cos^6 c},$$

where a, b and c form an arithmetic sequence whose common difference is $\frac{\pi}{3}$.

T12/367. Let $f(x)$ be a function defined on $[0; 1]$ such that the following properties hold

i) $f(1) = 1$;

$$\text{ii) } f(x) = \frac{1}{3} \left(f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right) \right)$$

for all $x \in [0; 1]$;

iii) for every ε positive but can be arbitrarily small, there exists a positive number δ_ε (δ_ε depends on ε) such that: For all $x, y \in [0; 1]$ such that $|x - y| < \delta_\varepsilon$, we have $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Prove that $f(x) = 1$ for all $x \in [0; 1]$.

Translated by LÊ MINH HÀ

Thơ viết tặng em

Bài thơ này anh viết tặng em
Người bạn đời anh hằng mong nhớ
Bài tích phân vừa làm ra kết quả
Đôi biên rồi, truy hồi tiếp mới xong

Và Nội bây giờ viết đã sang đông
Em nhớ quàng khăn khi đi dạo phố
Thành phố lên đèn không gian rực rỡ
Phương và chiều em chỉ vectơ thôi

Không gian yêu tọa độ xác định rồi
Phương trình bậc cao đường lối chung hạ bậc
Ta trở về kĩ năng thành thạo nhất
Bậc nhất, bậc hai em nổi tiếng một thời

Đôi mắt em xanh, ánh xạ cuộc đời
Mỗi lần trao vô hạn lần hạnh phúc
Nghiệm ngoại lai làm sao mà có được
Anh biết rồi em biến đổi tương đương

Lên đạo chơi nơi thành phố mờ sương
Đà Lạt thông reo bên đèo Ngao Mực
Anh với em chơi rút bài xác suất
Em hỏi anh không gian mẫu là gì?

Và rồi thời gian cứ mãi miết đi
Anh là đường xiên nhận em hình chiếu
Ngọt bùi cùng chia, đắng cay cùng chịu
Gắn kết hai đầu, đường vuông góc cùng chung

Anh tìm em bằng đa thức đặc trưng
Đạo hàm bậc hai biết rằng em ở đó
Có lần giận anh em bảo là không có
Giấc ngủ không thành giấc đoạn suốt đêm thao

Ở hai đầu trung tuyến xa nhau
Hướng về trọng tâm tin ngày gặp mặt
Giá trị tuyệt đối bao giờ âm được
Và bao giờ anh khỏi nhớ thương em

Anh gửi tình anh qua những con tem
Những lá thư vượt muôn trùng sóng gió
Mong đến trao em Người anh hằng mong nhớ
Bài thơ này anh viết tặng riêng em.

ĐÀO QUANG ĐIỀN
(Cựu sinh viên khoa Toán ĐHSPT Hà Nội,
khóa 1969 - 1973)

Bạn có biết ?

Những bông tuyết và Phép chứng minh

THOMAS C. HALES
Đại học tổng hợp Pittsburgh
(haless@pitt.edu)

Mở đầu. Nhà thiên văn học Kepler đã viết một cuốn sách nhỏ về những bông tuyết. Bốn trăm năm sau, một khẳng định trong cuốn sách đó dẫn đến một vấn đề cơ bản trong toán học và khoa học máy tính.

1. Vấn đề lâu đời nhất trong hình học rời rạc

Nhà thiên văn học vĩ đại Johannes Kepler đã viết một cuốn sách nhỏ năm 1611 tên là "Bông Tuyết sáu góc". Làm thế nào để giải thích tại sao bông tuyết lại có sáu góc? Ông đã viết lại rằng đó là vì bông tuyết được tạo bởi những khối tròn và sự sắp xếp của những khối này cho ta hình dạng của bông tuyết. Ý tưởng đơn giản này đã lóe sáng trong hai thế kỉ nghiên cứu về lĩnh vực tinh thể học.

Kepler đã mô tả vấn đề tương tự khi xếp kín các viên đạn và nói rằng đó là sự xếp kín tốt nhất theo nghĩa: Không có sự sắp xếp nào khác của các hình cầu đồng dạng mà có thể lấp đầy khoảng không gian lớn hơn cách sắp xếp này. Điều này được biết như là giả thuyết Kepler. Đó là một vấn đề lâu đời nhất trong hình học rời rạc và trải qua nhiều thế kỉ mà không có lời giải.

Tại sao một vấn đề dễ đặt ra như vậy mà lại khó giải đáp đến thế? Một nhà báo ở Plymouth, New Zealand đã đem câu hỏi này ra một khu chợ. Những người bán rau quả ở đó không hề ngạc nhiên với câu hỏi. "Bố tôi đã chỉ cho tôi làm thế nào để xếp các quả cam khi tôi mới bốn tuổi", một người bán rau quả tên là Allen nói. Sau khi nghe kể lại rằng các nhà toán học phải mất bốn thế kỉ để tấn công vấn đề này và được hỏi anh thấy khó khăn như thế nào khi tìm cách

Số 367 (1-2008)

TOÁN HỌC
Tuổi trẻ 27

xếp tốt nhất Allen đã thần nhiên trả lời: "Bạn chỉ việc đặt một quả lên trên đỉnh của những quả khác. Việc này chỉ mất khoảng hai giây thôi mà".

Sau mười năm nghiên cứu, một nghiên cứu sinh và tôi đã đưa ra chứng minh cho giả thuyết Kepler vào năm 1998. Chứng minh này dài ba trăm trang giấy. Nó dựa trên một khối lượng tính toán khổng lồ trên máy vi tính và phải mất nhiều tháng mới chạy xong.

2. Kiểm tra chứng minh

Trước khi bài báo được công bố, một nhóm gồm mười hai nhà phân biện đã phải kiểm tra xem tôi có sai sót nào không. Sau nhiều tháng, họ vẫn không kiểm tra xong chứng minh, nhưng họ chắc đến 99% rằng chứng minh là đúng. Tuy nhiên họ quá mệt mỏi để tiếp tục công việc. Chứng minh cuối cùng đã được công bố sau tám năm mặc dù nó vẫn chưa được kiểm tra hoàn toàn đầy đủ.

Trong khi chờ đợi từ năm này qua năm khác, tôi bắt đầu nhận thấy rằng các nhà toán học đã mất bao nhiêu năm quý giá để kiểm tra các phép chứng minh. Tôi bắt đầu nghĩ rằng chúng ta có nên thỏa mãn với các chứng minh được kiểm tra 99% hay không. Vậy phải chăng toán học luôn có nghĩa là phải chắc chắn hoàn toàn?

3. Chứng minh hình thức

Những năm tháng chờ đợi này đã làm tôi thay đổi hoàn toàn. Khi nghiên cứu việc kiểm tra chứng minh, tôi nhận thấy rằng các nhà logic học và các nhà khoa học máy tính đã phát triển các công cụ tự động để kiểm tra chứng minh. Những công cụ này là câu trả lời cho những mong mỏi của tôi. Một chứng minh được kiểm tra bằng máy tính theo cách này được gọi là chứng minh hình thức. Đối với những kết quả dài và phức tạp, một chứng minh hình thức là đáng tin cậy trong khi những chứng minh thông thường thì không.

Để thực hiện một chứng minh hình thức, tất cả các tiên đề cơ sở của toán học được đưa vào trong máy tính. Tất cả các quy tắc logic cơ bản được lập trình trên máy tính. Sau đó máy tính sẽ xem xét từng bước logic để kiểm tra xem có sai sót nào không.

Ngày nay, những chứng minh cực kỳ phức tạp đều có thể được kiểm tra hình thức. Các nhà

nghiên cứu đã chứng minh hình thức các định lý lớn như Định lý bốn màu, Định lý số nguyên tố, Định lý đường cong Jordan.

Tôi đã bắt đầu một dự án tên là Flyspeck để xây dựng một chứng minh hình thức cho giả thuyết Kepler. Từ Flyspeck có nghĩa là kiểm tra chi tiết. Tôi chọn cái tên này bởi vì nó chứa các ký tự F P K, là viết tắt của Chứng minh hình thức của giả thuyết Kepler.

Nhóm Flyspeck của tôi sẽ lập trình cho máy tính để kiểm tra chứng minh mà nhóm mười hai người phân biện đã phải đầu hàng. Tôi mong rằng dự án này sẽ hoàn thành trong vài năm. Hi vọng rằng dự án này sẽ làm thay đổi phương pháp kiểm tra các công trình trong tương lai.

4. Tại sao 99% lại không đủ tốt?

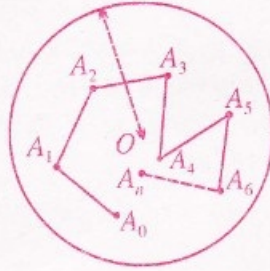
Nền kinh tế thế giới dựa trên sự chặt chẽ của toán học. Chúng ta tin vào vận tải hàng không và thương mại điện tử nhờ vào các chứng minh của các thuộc tính của chúng. Máy tính ngày càng xây dựng các chứng minh mà không cần sự trợ giúp của con người. Những sai sót về mặt toán học ngày càng có nguy cơ tiềm tàng cho nền kinh tế thế giới. Ví dụ như, cách đây một thập kỷ, một nhà toán học đã phát hiện ra rằng bộ vi xử lý Pentium của Intel chia số không chính xác. Lỗi chia này trong bộ vi xử lý đã làm Intel tiêu tốn mất 500 triệu đô la. Lỗi chia tiếp theo sẽ còn làm tiêu tốn nhiều hơn. Trong một bài báo gần đây, Shamir (chữ cái S trong thuật toán bảo mật RSA) cảnh báo về một sự cố mang tính giả thuyết về một lỗi toán học trong một bộ vi xử lý máy tính được sử dụng rộng rãi đặt việc bảo mật hệ thống thương mại điện tử toàn cầu vào tình thế mao hiểm... Nếu một tổ chức phát hiện ra một lỗi toán học trong một bộ vi xử lý được sử dụng rộng rãi, thì phần mềm bảo mật của máy tính với bộ vi xử lý này sẽ bị phá hủy dễ dàng... Hàng triệu máy tính có thể bị tấn công đồng loạt.

Không có gì ngạc nhiên khi các công ty lớn trên thế giới ngày càng quan tâm đến các chứng minh hình thức. Georges Gonthier, người xây dựng chứng minh hình thức của Định lý bốn màu đang làm việc tại Microsoft. John Harrison, người tạo ra phần mềm kiểm tra chứng minh mà tôi sử dụng đang làm việc tại Intel.

TOÁN HỌC

và bước đi của anh chàng SAY XIN

Anh chàng say xin "quắc cần câu" bước đi như thế nào? Lão đảo bước sang trái, sang phải, bước lui, bước tới, không theo một quy luật nào cả. Sau n bước, dưới con mắt hình học, các bước chân của anh ta tạo thành một đường gấp khúc (zig-zac) gồm n đoạn $A_0A_1A_2...A_n$. Đường gấp khúc này là một "hình ngẫu nhiên".



Trong trường hợp nào cũng có một đường tròn tâm O , bán kính r nhỏ nhất chứa hết toàn bộ các điểm $A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.

Năm 1990 Pál Révész đặt ra bài toán "bước đi của anh chàng say" như sau: "Giả sử có rất nhiều anh chàng say, mỗi người độc lập nhau tiến hành n bước đi, tạo ra nhiều đường gấp khúc khác nhau, do đó có nhiều đường tròn tâm O bán kính r khác nhau chứa các đường gấp khúc đó. Hãy tính giá trị trung bình của bán kính r lớn nhất của các đường tròn đó. Nói

cách khác giá trị r lớn nhất có xu hướng tập trung vào giá trị nào với mỗi giá trị của n cho trước?".

Amir Dembo ở Đại học Stanford và Youal Peres ở Đại học Berkeley đã đưa ra câu trả lời: Giá trị trung bình của r vào khoảng căn bậc bốn của n , tức là $\sqrt[4]{n}$ (m). Ví dụ nếu $n = 16$ thì giá trị trung bình của r là $\sqrt[4]{16} = 2$ (m). Bằng cách nào họ đã khẳng định như vậy? Không biết! Đó là chuyện nghiêm túc hay tầm phào? Tùy bạn! Chỉ biết rằng công thức này được đăng ở tờ báo uy tín vào bậc nhất của các hoạt động khoa học của nước Pháp là *La Recherche* số 386, tháng 5 năm 2005. Xin ghi lại đúng 100% để bạn đọc suy xét.

PHAN THANH QUANG
(TP. Hồ Chí Minh) sưu tầm



5. QED Manifesto

QED Manifesto khẳng định rằng tất cả các bài toán quan trọng nên được chuyển từ giấy sang máy tính. Để đảm bảo tính nguyên vẹn của tập hợp toán học này, tất cả các chứng minh phải được lưu trữ như là các chứng minh hình thức. Đây là một dự án tham vọng và đòi hỏi sự hợp tác của các nhà toán học, các nhà logic học, và các nhà khoa học máy tính trên toàn thế giới.

Dự án QED thực hiện cho toán học những gì mà dự án Flyspeck thực hiện cho chứng minh của giả thuyết Kepler. Dự án Flyspeck

đại diện cho một phần nhỏ của dự án tổng thể QED.

6. Kết luận

Tôi mong muốn tổ chức một nhóm chứng minh định lý hình thức ở Việt Nam, hoàn thành dự án Flyspeck và để tiến tới dự án tổng thể QED. Tôi mong muốn tạo lập một mối liên kết lâu dài với cộng đồng toán học Việt Nam. Tôi xin mời các sinh viên và các nhà nghiên cứu tham gia vào dự án này.

Người dịch:

VƯƠNG MINH THAO (Viện Toán học)

SỬ DỤNG... (Tiếp trang 13)

$$J_1 = \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx.$$

Đổi biến $x = t + T$ đối với tích phân $\int_T^{a+T} f(x) dx$

được $J_1 = J_2$. Chọn $a = -\frac{T}{2}$ ta được $J_1 = J_3$.

Thí dụ 8. Tính $I_8 = \int_0^{2\pi} \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}) dx$.
(Olympic SV Toàn quốc, 2007)

Lời giải. Nhận xét rằng $f(x) = \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$ là hàm liên tục, tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Nhờ KQ 6 ta được $I_8 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

Mặt khác hàm $f(x)$ ở đây là hàm số lẻ, do đó sử dụng KQ 2 ta được $I_8 = 0$. $\square$

Thí dụ 9. Tính $I_9 = \int_0^{2008\pi} \sin^{2007} x dx$.

Lời giải. Hàm số $f(x) = \sin^{2007} x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ và

$$I_9 = \int_0^{2\pi} \sin^{2007} x dx + \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^{2007} x dx + \dots + \int_{2006\pi}^{2008\pi} \sin^{2007} x dx.$$

Sử dụng nhiều lần KQ 6 ta thấy các số hạng của tổng này bằng nhau, do đó

$$I_9 = 1004 \int_0^{2\pi} \sin^{2007} x dx = 1004 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2007} x dx.$$

Do $f(x) = \sin^{2007} x$ là hàm số lẻ nên $I_9 = 0$. $\square$

Cuối cùng mời bạn đọc sử dụng các KQ trên để tích các tích phân sau đây.

$$I_{10} = \int_{-1}^1 \frac{x^4 + \sin x}{x^2 + 1} dx; \quad I_{11} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{4 - \sin^2 x} dx;$$

$$I_{12} = \int_{-1}^1 \frac{x^{2008}}{2007^x + 1} dx; \quad I_{13} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx;$$

$$I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_{2008}(1 + \tan x) dx; \quad I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{2 + \cos^2 x} dx.$$

XÁC SUẤT... (Tiếp trang 15)

Thành thử lợi nhuận trung bình là kì vọng $E(X)$. Như vậy, về trung bình nhà đầu tư lỗ, lãi hay hòa tùy theo $E(x)$ âm, dương hay bằng 0. Theo công thức tính kì vọng ta có

$$E(X) = (M - a)P(A) + (m - a)P(B) \\ = MP(A) + mP(B) - a.$$

i) Nếu $p = 0,5$: Từ (2a) và (2b) ta có

$$E(X) = \frac{M(a - m) + m(M - a) - a(M - m)}{M - m} = 0.$$

Điều này có nghĩa là: Nếu sự lên và xuống giá của cổ phiếu có xác suất như nhau thì về trung bình nhà đầu tư sẽ "hòa" với bất kể giá trị nào của M và m .

ii) Nếu $p \neq 0,5$: Từ (3a) và (3b) ta có

$$E(X) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^M (a - m) + \left(\frac{q}{p}\right)^m (M - a) - \left(\frac{q}{p}\right)^a (M - m)}{\left(\frac{q}{p}\right)^m - \left(\frac{q}{p}\right)^M}. \quad \square$$

Nhà đầu tư luôn luôn muốn tối đa hoá lợi nhuận. Thành thử một bài toán mới đặt ra là:

★ **Bài toán 5.** Giả sử tại thời điểm cổ phiếu có giá là a , xác suất để cổ phiếu tăng 1 đơn vị là p đã biết. Hỏi nhà đầu tư phải xác định giá trần M và giá sàn m là bao nhiêu để:

a) Về trung bình nhà đầu tư sẽ có lãi?

b) Về trung bình nhà đầu tư đạt lợi nhuận lớn nhất, nói cách khác chiến lược dùng tối ưu của nhà đầu tư là gì?

Bài toán này xin nhường cho các bạn giải quyết.





Những dấu son năm Tý TRONG LỊCH SỬ ĐẤU TRANH GIỮ NƯỚC

Chúng ta đã bước sang năm 2008 và sắp đón *Xuân Mậu Tý*, hãy nhớ lại một vài sự kiện nổi bật trong lịch sử dựng nước và giữ nước Việt Nam vào những năm Tý. Bạn cho biết mỗi sự kiện sau đây xảy ra vào năm dương lịch nào và năm âm lịch nào?

1. Khởi nghĩa Hai Bà Trưng chống nhà Đông Hán.
2. Nghĩa quân Lý Bí (Lý Bôn) đánh đuổi nhà Lương, giành độc lập, Lý Bí xưng là Lý Nam Đế, đặt tên nước là Vạn Xuân.
3. Trần Bạch Đằng: Trần Hưng Đạo cầm quân đánh thắng giặc Nguyên Mông.
4. Thành lập Mặt trận Dân chủ Đông Dương đấu tranh chống Pháp đòi tự do, dân chủ.
5. Chiến thắng quân Pháp tại La Ngà và Nghĩa Lộ.
6. Thành Lập Mặt trận Dân tộc giải phóng miền Nam Việt Nam chống Mỹ - Ngụy.
7. Trận đánh thắng máy bay B52 của Mỹ ở miền Bắc Việt Nam.

Giải đáp ô chữ: NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM

(Đề đăng trên THTT số 365 tháng 11.2007)

							L	Ê	Q	U	Ý	Đ	Ô	N	1	7	2	6	—	1	7	8	4
		C	H	U	V	Ã	N	A	N	1	2	9	2	—	1	3	7	0					
N	G	U	Y	Ê	N	B	Î	N	H	K	H	I	Ê	M	1	4	9	1	—	1	5	8	5
		Đ	O	À	N	T	H	I	Đ	I	Ế	M	1	7	0	5	—	1	7	4	8		
N	G	U	Y	Ê	N	Đ	Ì	N	H	C	H	I	Ế	U	1	8	2	2	—	1	8	8	8
N	G	U	Y	Ê	N	T	H	I	Ế	P	1	7	2	3	—	1	8	0	4				
P	H	A	N	H	U	Y	C	H	Ú	1	7	8	2	—	1	8	4	0					
		N	H	Û	B	Á	S	Î	1	7	8	8	—	1	8	6	7						

Hoan nghênh nhiều bạn đã tham gia CLB kì này và đều cho đáp án đúng. Các bạn sau đây đã đưa thêm nhiều thông tin về những nhà giáo nói trên, riêng bạn *Vũ Minh Thắng* đạt kỉ lục (15 trang in), được nhân tặng phẩm:

1. *Vũ Minh Thắng*, 10T1, khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội
2. *Nguyễn Tuấn Duy*, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc
3. *Nguyễn Quang Huy*, 10A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, Nghệ An
4. *Trần Thế Dũng*, 12/1, THPT Nghèn, Can Lộc, Hà Tĩnh
5. *Chu Hương Giang*, 8A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, Bắc Ninh.

VÂN KHANH

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 367(1.2008)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.5121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272, 04.5121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,
TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,
PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,
TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,
PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY,
GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Ngô Đức Minh – Nét đẹp của định lý 4 điểm.
- 3 **Từ Kho tàng Toán học – From Math Treasure**
Nguyễn Đăng Phát – Bài toán về điểm Fermat và ứng dụng chứng minh nguyên lý thế năng cực tiểu. (Tiếp theo kì trước)
- 6 **Đề thi vào lớp 10 trường Phổ thông Năng khiếu Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2007 – 2008.**
- 7 **Lời giải đề thi vào lớp 10 chuyên toán trường Đại học Khoa học Huế, năm học 2007–2008.**
- 8 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Lê Quốc Hán – Sự phân loại tứ diện và ứng dụng.
- 12 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Trịnh Tuân – Sử dụng một số kết quả "đẹp" để tính tích phân.
- 14 **Toán học & đời sống – Math and Life**
Đặng Hùng Thắng – Xác suất với thị trường chứng khoán. (Tiếp theo kì trước)
- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/367, ..., T12/367, L1/367, L2/367.
- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 363.
- 27 **Bạn có biết? – Do you know?**
Thomas C. Hales – Những bông tuyết và phép chứng minh.
- 29 **Phan Thanh Quang – Toán học và bước đi của anh chàng say xỉn.**
- 31 **Câu lạc bộ – Math Club**

Biên tập : HỒ QUANG VINH. Mĩ thuật : MINH THỐ. Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THỨ, NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330

TRƯỜNG THPT MỸ Hào, HƯNG YÊN

47 năm xây dựng và trưởng thành



Các thầy cô giáo tổ Toán của Nhà trường

Trường THPT Mỹ Hào nằm trên địa bàn thị trấn Bần Yên Nhân, huyện Mỹ Hào, tỉnh Hưng Yên. Trường được thành lập từ năm 1961, là ngôi trường có bề dày truyền thống, nhiều năm liền đạt danh hiệu trường Tiên tiến Xuất sắc của tỉnh. Trải qua 47 năm xây dựng và trưởng thành, trường luôn đạt được những thành tích đáng tự hào. Nhiều giáo viên đoạt giải cao trong các kì thi chọn giáo viên dạy giỏi cấp tỉnh. Nhiều năm trường có học sinh đoạt giải trong các kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia, đặc biệt là các môn Toán, Hoá, Sinh.v.v. Nhiều học sinh đoạt giải trong các kì thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh. Số học sinh đỗ vào các trường Đại học, Cao đẳng hàng năm ngày càng tăng, trong đó có những học sinh đỗ Thủ khoa, có học sinh đạt điểm tuyệt đối 30/30. Năm 2007 điểm bình quân ba môn thi Đại học là 15,22, đứng thứ 2 trong tỉnh Hưng Yên, đứng thứ 130 toàn quốc.

Chi bộ Đảng nhà trường từ năm 1997 đến nay liên tục đạt danh hiệu Chi bộ trong sạch vững mạnh có thành tích tiêu biểu được tặng Giấy khen và Cờ của Đảng bộ huyện Mỹ Hào.

Công đoàn nhà trường nhiều năm liền được công nhận là Công đoàn vững mạnh xuất sắc của tỉnh. Tập thể công đoàn nhà trường được Công đoàn ngành Giáo dục - Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng Bằng khen.

Hoạt động đoàn thanh niên của trường sôi nổi, rộng khắp, thiết thực, bổ ích và có nhiều sáng tạo. Phong trào văn nghệ, thể thao phát triển, có đoàn viên đoạt Huy chương Bạc trong hội thi "Giai điệu tuổi hồng" do Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức năm 2007. Đoàn trường vinh dự được tặng Cờ 5 năm xuất sắc liên tục, được tặng Bằng khen của Trung ương Đoàn, được tặng Bằng công nhận đơn vị dẫn đầu khối THPT của Toàn quốc.

Tập thể cán bộ giáo viên, học sinh nhà trường đã, đang và sẽ cố gắng phát huy những truyền thống tốt đẹp của trường và thực hiện tốt cuộc vận động "hai không" với bốn nội dung do Bộ Giáo dục và Đào tạo phát động.



Tổ Toán giới thiệu đồ dùng dạy học tự làm

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT01M8

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2008

Giá : 5000 đồng

Năm nghìn đồng

SÁCH ĐANG PHÁT HÀNH

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

QUYỂN 1 300 trang, khổ 19x26,5cm.
(tái bản) Giá bán lẻ: 34.000 đồng.

QUYỂN 2 252 trang, khổ 19x26,5cm.
(tái bản) Giá bán lẻ: 30.000 đồng.

ẤN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ

(tái bản) 164 trang, khổ 17x24cm.
Giá bán lẻ: 21.500 đồng.

CÁC BÀI THI OLYMPIC TOÁN THPT VIỆT NAM (1990-2006)

Sách gồm các đề thi và hướng dẫn giải các bài toán thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia THPT (Bảng A và bảng B) từ 1990 đến 2006. Sách cũng đăng các đề thi chọn đội tuyển Toán Quốc gia Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế từ 1990 đến 2006. Trong sách còn giới thiệu danh sách và thành tích của đoàn Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế từ lần đầu dự thi (năm 1974) đến nay.

Sách dày 284 trang, khổ 17x24cm.
Giá bán lẻ: 39.500 đồng.

ĐÓNG TẬP THTT năm 2007

Tất cả 12 số tạp chí của năm 2007 được đóng thành một tập ngoài có bìa cứng. Đây là cách để lưu giữ tạp chí tốt nhất, có hệ thống và tiện tra cứu đối với các thư viện, các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán. Do số lượng có hạn, bạn cần đăng kí ngay với Tòa soạn nếu muốn có cuốn sách này.
Giá bán lẻ : 75.000 đồng.

SÁCH SẮP PHÁT HÀNH

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Sách chọn lọc các bài viết và đề toán đã đăng trên tạp chí THTT gồm ba chương:

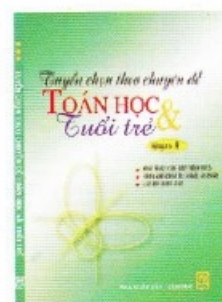
Chương I: Khai thác các bài toán THCS, giới thiệu các phương pháp giải toán cực trị đại số và nêu ra những sai lầm tế nhị, cách rèn luyện tư duy qua giải toán hình học phẳng.

Chương II: Nhìn bài toán từ nhiều hướng, nêu các ý kiến trao đổi về vấn đề nghiệm bội, nghiệm kép của phương trình, mối liên hệ giữa đường thẳng và ba đường conic, mở rộng bài toán con bướm và mở rộng một số tính chất hình phẳng sang hình không gian.

Chương III: Giới thiệu **100 đề toán hay** cùng với lời giải được tuyển chọn từ các đề toán đã đăng trên THTT các năm 1996, 1997.

Sách dày 252 trang, khổ 19x26,5cm. **Giá bán lẻ: 34.000 đồng.**

QUYỂN 3 (Mới)



Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

Mua từ 10 quyển trở lên được trừ phí phát hành. Để biết thông tin chi tiết xin liên hệ:

ĐT/FAX: 04.5144272-04.5121606; Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn