



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
10 2007
Số 364

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 44

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Tri sự: (04)5144272, (04)5121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre

KẾT QUẢ CUỘC THI *Toán học vui* 2007

**Giới thiệu
sách giáo khoa
Hình học 11**

**Lời giải các bài toán thi HSG Quốc gia THPT
NĂM HỌC 2006-2007**



SÁCH ĐANG PHÁT HÀNH

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

QUYỂN 1 (tái bản)

Sách gồm ba chương: **Phương pháp giải toán**, **Toán học và Đời sống**, **Lịch sử Toán học**, đó cũng là ba vấn đề được bạn yêu toán rất quan tâm. Sách được tái bản theo yêu cầu của nhiều độc giả.

Sách dày 300 trang, khổ 19x26,5cm, giá bán lẻ **34.000 đồng**.

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

QUYỂN 2 (tái bản)

Từ các bài đã in trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ những năm gần đây, sách tập hợp lại các bài viết theo ba chuyên đề nhằm phục vụ độc giả làm tài liệu tham khảo bổ ích.

Chuyên đề thứ nhất: **Toán THCS - Những tìm tòi sáng tạo**

Chuyên đề thứ hai: **Toán THCS - Những đề thi**

Chuyên đề thứ ba: **Những bài toán - Lời giải sao cho đúng?**

Sách dày 252 trang, khổ 19x26,5cm, giá bán lẻ **30.000 đồng**.

ẤN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ

(tái bản)

Sách tập hợp các bài viết đã đăng trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (1970 - 2005). Một nửa nội dung cuốn sách trình bày các vấn đề của toán sơ cấp, có ích cho các bạn trước các kì thi học sinh giỏi và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng. Có những kiến thức bổ sung một số vấn đề mà SGK chưa đề cập. Phần còn lại nhằm giúp học sinh tập dượt tư duy sáng tạo, mở ra những triển vọng để độc giả có thể đi xa hơn trong công việc sáng tạo toán học, tạo được nguồn hứng khởi trong việc làm toán.

Sách dày 164 trang, khổ 17x24cm, giá bán lẻ **21.500 đồng**.

CÁC BÀI THI OLYMPIC TOÁN THPT VIỆT NAM (1990-2006)

Sách gồm các đề thi và hướng dẫn giải các bài toán thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia THPT (Bảng A và bảng B) từ 1990 đến 2006. Sách cũng đăng các đề thi chọn đội tuyển Toán Quốc gia Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế từ 1990 đến 2006. Trong sách còn giới thiệu danh sách và thành tích của đoàn Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế từ lần đầu dự thi (năm 1974) đến nay.

Sách dày 284 trang, khổ 17x24 cm, giá bán lẻ **39.500 đồng**.

SÁCH SẴP PHÁT HÀNH

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

QUYỂN 3 (Mới)

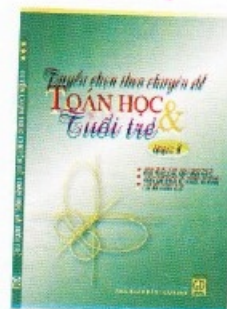
Sách chọn lọc các bài viết và đề toán đã đăng trên tạp chí THPT.

Chương I: Khai thác các bài toán THCS, trong đó giới thiệu các phương pháp giải toán cực trị đại số và nêu ra những sai lầm dễ gặp, cách rèn luyện tư duy qua giải toán hình học phẳng.

Chương II: Nhìn bài toán từ nhiều hướng nêu các ý kiến trao đổi về vấn đề nghiệm bội, nghiệm kép của phương trình, mối liên hệ giữa đường thẳng và ba đường conic, mở rộng bài toán con bướm và mở rộng một số tính chất hình phẳng sang hình không gian.

Chương III: Giới thiệu 100 đề toán hay cùng với lời giải được tuyển chọn từ các đề toán đã đăng trên THPT các năm 1996, 1997.

Sách dày khoảng 250 trang, khổ 19x26,5cm, sẽ ra mắt bạn đọc vào cuối năm nay.



Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

Mua từ 10 quyển trở lên được trừ phí phát hành. Để biết thông tin chi tiết xin liên hệ:

ĐT/FAX: 04.5144272-04.5121606; Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn



Dùng ẩn phụ để rút gọn biểu thức và giải phương trình có chứa căn thức

BÙI VĂN CỐ
(GV trường THCS Lý Vĩnh, Lý Sơn,
Quảng Ngãi)

Đối với bài toán rút gọn biểu thức và giải phương trình có chứa dấu căn, ta thường dùng các hằng đẳng thức đáng nhớ để phân tích thành nhân tử. Bài viết này xin giới thiệu phương pháp dùng "ẩn phụ" để rút gọn biểu thức hoặc giải phương trình có chứa dấu căn. Sau đây là một số bài toán minh họa.

★ Bài toán 1. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{2}{\sqrt[4]{7}} - \sqrt[4]{7} - \frac{\sqrt{7} - \frac{1}{\sqrt{7}}}{\sqrt[4]{7} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{7}}}} + \frac{6}{\sqrt{7} \left(\sqrt[4]{7} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{7}}} \right)} + \frac{7}{\sqrt[4]{343}}.$$

Lời giải. Đặt $a = \sqrt[4]{7} \Rightarrow a^4 = 7$ và $a^2 = \sqrt{7}$ ta có

$$A = \frac{2}{a} - a - \frac{a^2 - \frac{1}{a^2}}{a - \frac{1}{a}} + \frac{6}{a^2 \left(a + \frac{1}{a} \right)} + \frac{7}{a^3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1-2a^2}{a} + \frac{13a^2+7}{a^3(a^2+1)} \\ &= \frac{a^4+a^2-2a^6-2a^4+13a^2+a^4}{a^3(a^2+1)} \\ &= \frac{2a^2(7-a^4)}{a^3(a^2+1)} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

★ Bài toán 2. Rút gọn biểu thức

$$B = \frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt[4]{25}-\sqrt[4]{125}}}.$$

Lời giải. Đặt $b = \sqrt[4]{5} \Rightarrow b^2 = \sqrt[4]{25}, b^3 = \sqrt[4]{125}, b^4 = 5, b^6 = 5b^2, b^5 = 5b.$

$$\text{Ta có } B = \frac{2}{\sqrt{4-3b+2b^2-b^3}}$$

$$\begin{aligned} \text{mà } \frac{1}{b^3-2b^2+3b-4} &= \frac{1}{(b^3+3b)-(2b^2+4)} \\ &= \frac{(b^3+3b)+(2b^2+4)}{(b^3+3b)^2-(2b^2+4)^2} = \frac{b^3+3b+2b^2+4}{-2b^2-6} \\ &= -\frac{(b^3+2b^2+3b+4)(b^2-3)}{2(b^4-9)} \\ &= \frac{b^5+2b^4-2b^2-9b-12}{8} \\ &= \frac{-b^2-2b-1}{4} = -\left(\frac{b+1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = 2\sqrt{\left(\frac{2}{b+1}\right)^2} = \frac{4}{b+1} = \frac{4}{\sqrt[4]{5}+1}. \quad \square$$

★ Bài toán 3. Chứng minh rằng, nếu $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ thì $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$

Lời giải. Đặt $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = C$ thì

$$C = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} = \sqrt[3]{ax^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = x\sqrt[3]{a}.$$

Tương tự $C = y\sqrt[3]{b}; C = z\sqrt[3]{c}$, do đó

$$\frac{C}{x} = \sqrt[3]{a}; \frac{C}{y} = \sqrt[3]{b}; \frac{C}{z} = \sqrt[3]{c} \text{ suy ra}$$

$$C \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Do $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ nên $C = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

Hay $C = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt{ax^2 + by^2 + cz^2}$. $\square$

✪ Bài toán 4. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} = 1.$$

Lời giải. Đặt $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} = u$; $\sqrt{\frac{1}{2} - x} = v$ ($v \geq 0$),
thì $u^3 + v^2 = 1$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^2 = 1 \end{cases}$ ($v \geq 0$) hay $\begin{cases} u = 1 - v \\ u^3 = 1 - v^2 \end{cases}$

Từ đó, ta được

$$(1 - v)^3 = 1 - v^2 \Leftrightarrow v(v - 1)(v - 3) = 0.$$

Tìm được $v = 0$; $v = 1$; $v = 3$ (thỏa mãn $v \geq 0$).

*) Với $v = 0$ thì $x = \frac{1}{2} - v^2 = \frac{1}{2}$.

*) Với $v = 1$ thì $x = -\frac{1}{2}$.

*) Với $v = 3$ thì $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy tập nghiệm của PT đã cho là

$$\left\{ -\frac{17}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}. \square$$

✪ Bài toán 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} & (1) \\ x + y - 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$ thì $\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{t}$ ($t > 0$).

Khi đó PT (1) có dạng

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

• Với $t = 2$ thì $\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$, ta có $\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$.

(Xem tiếp trang 9)

ĐẠI SỐ HÓA... (Tiếp trang 13)

Vậy (6) tương đương với

$$(1 + xyz)^2 \geq (1 - 2xyz)(1 + 4xyz - x^4 - y^4 - z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2))$$

$$\Leftrightarrow 9x^2y^2z^2 \geq (1 - 2xyz)(2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - x^4 - y^4 - z^4)$$

$$\Leftrightarrow 9(xyz)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)(2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - x^4 - y^4 - z^4) \quad (7)$$

$$\text{Đặt } a = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}, b = \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2}, c = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Thế thì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Khi đó BĐT (7) tương đương với

$$9abc \geq 2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca - \frac{9}{4}abc \leq \frac{1}{4} \quad (8)$$

Từ BĐT $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq abc$, suy ra $(1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c) \leq abc$ (do $a + b + c = 1$).

$$\text{Hay } 1 - 2(a + b + c) + 4(ab + bc + ca) - 8ab \leq abc.$$

Suy ra BĐT (8) được chứng minh. $\square$

Cuối cùng xin nêu ra một số bài tập để bạn đọc rèn luyện.

Bài tập 6. (Bất đẳng thức Jack Garfunkel)

Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng

$$a) \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \geq \frac{4}{3} \left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right);$$

$$b) \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right).$$

Bài tập 7. (TST USA 2003).

Cho tam giác ABC . Chứng minh bất đẳng thức

$$\sin \frac{3A}{2} + \sin \frac{3B}{2} + \sin \frac{3C}{2} \leq \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2}.$$

Bài tập 8. Cho tam giác ABC không nhọn. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a+b+c}{8} \leq (\sqrt{2} + 1)R.$$

Lời giải đề thi vào lớp 10

khối THPT chuyên TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NĂM HỌC 2007 - 2008

(Đề thi đăng trên THPT số 362, tháng 8 năm 2007)

VÒNG 1

Câu 1. a) ĐK: $0 < x \neq 1$. Ta có

$$A = \frac{(x-1)^2}{16x} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2}{x-1} = \frac{1-x}{4\sqrt{x}}.$$

b) $2A + \sqrt{x} = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0.$

Đặt $\sqrt{x} = t$ ($0 < t \neq 1$).

PT trở thành $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc

$t = \frac{1}{2}$. Suy ra $x = 4$ hoặc $x = \frac{1}{4}$. $\square$

Câu 2. a) PT đã cho có nghiệp kép khi và chỉ khi $m = 1$ hoặc $m = 2$.

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy((x+y)^2-2xy)=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ (xy)^2-8xy+15=0 \end{cases} \quad (1)$$

Từ PT(2) của hệ trên, tìm được $xy = 3$ hoặc $xy = 5$.

Giải hệ $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ được $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.

Câu 5. a) PT đã cho tương đương với

$$x = 401y + \frac{2y+1}{5}.$$

Do x, y nguyên nên $\frac{2y+1}{5} = z$ với $z \in \mathbb{Z}$.

Vậy $y = 2z + \frac{z-1}{2}$, suy ra $z = 2t + 1$, với $t \in \mathbb{Z}$.

Do đó $y = 5t + 2, x = 2007t + 803, t \in \mathbb{Z}$.

Từ giả thiết $x \in (1; 3000)$ suy ra $t = 0$ hoặc $t = 1$.

Còn hệ $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=5 \end{cases}$ vô nghiệm. $\square$

Câu 3. Sử dụng BĐT Bunyakovski cho hai bộ số $(x; y)$ và $(1; -\sqrt{5})$ ta được $P^2 = (x - \sqrt{5}y)^2 \leq 36$, hay $-6 \leq P \leq 6$.

Kết luận: $\min P = -6$, khi $(x; y) = (-1; \sqrt{5})$;
 $\max P = 6$, khi $(x; y) = (1; -\sqrt{5})$. $\square$

Câu 4. (h. 1). a) Ta có $\widehat{C'A'H} = \widehat{C'BH} = \widehat{B'CH}$

$= \widehat{B'A'H}$ (đpcm).

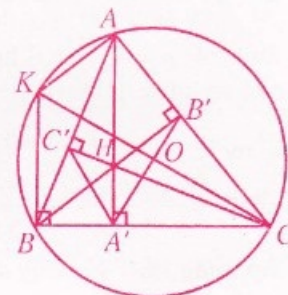
b) Kéo dài CO cắt đường tròn (O) tại K . Tứ giác $KAHB$ là hình bình hành, nên $AH = BK$ (1)

Tam giác vuông KBC

có $\widehat{BKC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$

nên $BK = \frac{1}{2}KC = OA$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH = OA$. $\square$



Hình 1

VÒNG 2

• Với $t = 0$, ta có $x = 803; y = 2$.

• Với $t = 1$, ta có $x = 2810; y = 7$.

b) Ta có $5^{3n+2} + 2^{2n+3} = 25 \cdot 125^n + 8 \cdot 4^n$
 $= 25(125^n - 4^n) + 33 \cdot 4^n.$

Mặt khác $125^n - 4^n : (125 - 4) = (125 - 4) \cdot (121; 121 : 11)$
và $33 \cdot 4^n : 11, \forall n \in \mathbb{N}.$

Do đó $5^{3n+2} + 2^{2n+3} : 11, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Câu 6. Đặt $A = p^2 - pq + 2q^2; B = 2p^2 + pq + q^2.$

TOÁN HỌC

Số 364 (10-2007)

3

Xét các trường hợp sau:

• $p = q = 2$, thì A, B không nguyên tố cùng nhau.

• $p = 2, q \geq 3$, khi đó

$$\begin{aligned} d = (A, B) &= (4 - 2q + 2q^2, 8 + 2q + q^2) \\ &= (2 - q + q^2, 8 + 2q + q^2) \text{ (do } 8 + 2q + q^2 \not\equiv 2) \\ &= (6 + 3q, 8 + 2q + q^2) \\ &= (2 + q, 8 + (2 + q)q) \text{ (do } 8 + 2q + q^2 \not\equiv 3) \end{aligned}$$

Suy ra d lẻ và $d \nmid 8$. Do đó $d = 1$.

• $q = 2, p \geq 3$, khi đó

$$\begin{aligned} d = (A, B) &= (p^2 - 2p + 8, 2p^2 + 2p + 4) \\ &= (p^2 - 2p + 8, p^2 + p + 2) \text{ (do } p^2 - 2p + 8 \not\equiv 2) \\ &= (3p - 6, p^2 + p + 2) \\ &= (p - 2, p^2 + p + 2), \text{ (do } p^2 + p + 2 \not\equiv 3) \\ &= (p - 2, (p - 2)^2 + 4p). \end{aligned}$$

Suy ra $d \nmid 4p$, d lẻ và $d < p$, do đó $d = 1$.

• $p \geq 3, q \geq 3$. Vì p, q đều là số lẻ, nên $p + q$ và $p - q$ là các số chẵn. Suy ra $A = p(p - q) + 2q^2$ và $B = 2p^2 + p(p + q)$ đều chẵn. Vậy $d = (A, B) > 1$.

Đáp số: $p = 2, q \geq 3$ hoặc $q = 2, p \geq 3, p, q$ là các số nguyên tố. $\square$

Câu 7.

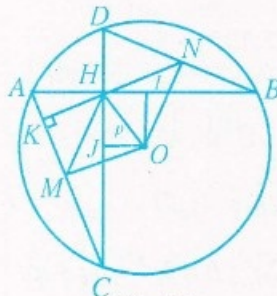
$$\text{Đặt } P = \frac{b+c+5}{1+a} + \frac{c+a+4}{2+b} + \frac{a+b+3}{3+c},$$

Áp dụng BDT Cauchy cho 3 số dương ta có

$$\begin{aligned} P + 3 &= 12 \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{3+c} \right) \\ &\geq \frac{36}{\sqrt[3]{(1+a)(2+b)(3+c)}} \geq \frac{36}{1+a+2+b+3+c} = 9. \end{aligned}$$

Suy ra $P \geq 6$. Dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a=2+b=3+c \\ a+b+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow (a; b; c) = (3; 2; 1). \square$$



Hình 2

Câu 8. a) Kẻ $OI \perp AB$, $OJ \perp CD$ thì I, J tương ứng là trung điểm của AB, CD . (h. 2)

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= 4(OA^2 - OI^2) \\ &\quad + 4(OD^2 - OJ^2) \\ &= 8R^2 - 4OH^2 = 7R^2. \end{aligned}$$

b) Kéo dài NH cắt AC tại K . Ta có

$$\widehat{AHK} = \widehat{NBH} (= \widehat{BHN}) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \widehat{CAB} = \widehat{HDB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $\widehat{AHK} + \widehat{CAB} = \widehat{NBH} + \widehat{HDB} = 90^\circ$, hay $NK \perp AC$. Suy ra $NH \parallel OM$. Tương tự $MH \parallel ON$. Do đó tứ giác $OMHN$ là hình bình hành; suy ra M, N, P thẳng hàng. $\square$

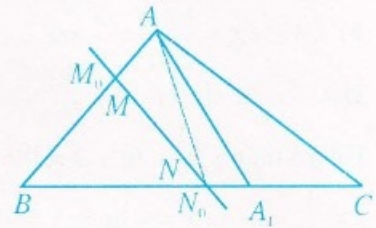
Câu 9. Bổ đề. Cho $\triangle ABC$ và M, N là hai điểm tùy ý trong tam giác. Khi đó

$$MN \leq \max\{AB, BC, CA\} \quad (1)$$

Chứng minh.

(h.3)

i) Nếu đường thẳng MN đi qua một đỉnh của $\triangle ABC$, chẳng hạn A . Khi đó nó cắt BC tại A_1 . Nếu A_1 trùng



Hình 3

với B hoặc C thì hiển nhiên có (1).

Nếu A_1 khác B, C thì trong hai góc $\widehat{AA_1B}$ và $\widehat{AA_1C}$ có một góc $\geq 90^\circ$, giả sử đó là $\widehat{AA_1C}$. Khi đó $MN \leq AA_1 \leq AC$ nên suy ra (1).

ii) Nếu đường thẳng MN không đi qua đỉnh nào của $\triangle ABC$ thì nó cắt AB, BC lần lượt tại M_0, N_0 .

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng i) ta có } MN &\leq \max\{AN_0, N_0B, AB\} \\ &\leq \max\{AN_0, BC, AB\} \quad (2) \end{aligned}$$

$$AN_0 \leq \max\{AB, BC, CA\} \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra (1).

Trở lại Bài toán: Bằng cách nối ba trung điểm của ba cạnh của tam giác đã cho, ta thu được bốn tam giác bằng nhau và mỗi tam giác đều có cạnh lớn nhất bằng 1.

Vì có năm điểm phân vào bốn tam giác nên tồn tại một tam giác chứa ít nhất hai điểm (nguyên lý Dirichlet). Theo bổ đề trên ta có khoảng cách giữa hai điểm này không vượt quá 1. $\square$

LÊ QUỐC HÁN - LÊ XUÂN SƠN (ĐH Vinh)

Sưu tầm và giới thiệu

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG

NĂM HỌC 2007 - 2008

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2 điểm)

1) Gọi a là nghiệm dương của phương trình $(\sqrt{2})x^2 + x - 1 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{2a - 3}{\sqrt{2(2a^4 - 2a + 3) + 2a^2}}.$$

2) Tìm các số hữu tỉ a và b thỏa mãn

$$\frac{3}{a + b\sqrt{3}} - \frac{2}{a - b\sqrt{3}} = 7 - 20\sqrt{3}.$$

Câu 2. (1,5 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 8xy = 0 \\ \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Câu 3. (2,5 điểm)

1) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn đẳng thức $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Chứng minh rằng phương trình $x^2 - 2x + (a - c)(b - c) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

2) Cho phương trình $x^2 - x + p = 0$ có hai nghiệm dương x_1 và x_2 . Xác định giá trị của p khi $x_1^4 + x_2^4 - x_1^5 - x_2^5$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D trên cạnh AC , E trên cạnh AB). Gọi I là trung điểm của BC , đường tròn đi qua B, E, I và đường tròn đi qua C, D, I cắt nhau tại K (K khác I).

1) Chứng minh rằng $\widehat{BDK} = \widehat{CEK}$;

2) Đường thẳng DE cắt BC tại M . Chứng minh ba điểm M, H, K thẳng hàng;

3) Chứng minh tứ giác $BKDM$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 5. (1 điểm)

Cho 19 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng nằm trong một lục giác đều có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác có ít nhất một góc không lớn hơn 45° và nằm trong đường tròn có bán kính

nhỏ hơn $\frac{3}{5}$ (đỉnh của tam giác tạo bởi 3 trong 19 điểm đã cho).

NGUYỄN BÁ ĐANG

(Sở GD-ĐT Hải Dương) giới thiệu

Tập huấn NGHIỆP VỤ BÁO CHÍ Ngành Giáo dục khu vực phía Bắc

Nhằm nâng cao nghiệp vụ chuyên môn cho cán bộ, phóng viên đang tham gia công tác tại các báo, tạp chí, nội san của ngành, từ ngày 01-03/10/2007 tại Hội trường E2, khách sạn La Thành, Hà Nội, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tổ chức lớp tập huấn nghiệp vụ báo chí ngành Giáo dục khu vực phía Bắc.

Tham dự lớp học có đồng chí Hoàng Hữu Lượng, Cục trưởng Cục Báo chí, Bộ Thông tin và Truyền thông; đồng chí Văn Đình Ứng, Phó Chánh Văn phòng, Bộ Giáo dục và Đào tạo; các đồng chí phòng Báo chí Bộ Giáo dục và Đào tạo; các nhà giáo, giảng viên của Phân viện Báo chí Tuyên truyền và hơn 150 cán bộ làm công tác quản lý, biên tập tại các báo, bản tin, tạp chí của các Học viện, các trường Đại học, Cao đẳng khu vực phía Bắc, NXB Giáo dục. Các học viên được nghe nhiều bài giảng bổ ích về lý thuyết và phương pháp tác nghiệp báo chí. Đây là Lớp tập huấn nghiệp vụ báo chí đầu tiên mà Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức, Trong thời gian tới, Bộ sẽ mở lớp tập huấn nghiệp vụ báo chí Ngành Giáo dục ở khu vực phía Nam.

VIỆT HÙNG



Một số bài toán XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

ĐẶNG THANH HẢI - TRẦN TUYẾT THANH
(GV Học viện Phòng không - Không quân)

Trong những năm gần đây, bài toán xác định các yếu tố trong tam giác khi biết trước một số yếu tố nào đó, xuất hiện trong Đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng khá nhiều. Nhằm giúp các bạn chuẩn bị thi vào Đại học nắm vững kiến thức phần này, bài viết giới thiệu một số dạng toán thường gặp và phương pháp tọa độ trong mặt phẳng để giải các bài toán đó.

LOẠI 1. Xác định các yếu tố trong tam giác khi biết trước tọa độ của một đỉnh và phương trình của hai đường có cùng tính chất (hai đường trung tuyến, hai đường cao, hai đường phân giác trong) đi qua hai đỉnh còn lại.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 2)$ và hai đường cao lần lượt có phương trình $9x - 3y - 4 = 0$; $x + y - 2 = 0$. Lập phương trình của các đường thẳng AB , BC và CA .

Lời giải. Thử trực tiếp tọa độ của A vào phương trình (PT) của hai đường cao, ta thấy không thỏa mãn nên các đường cao xuất phát từ đỉnh B và C (h. 1).

Giả sử đường cao BI có PT $9x - 3y - 4 = 0$;

đường cao CK có PT

$$x + y - 2 = 0.$$

Đường thẳng AB qua $A(2; 2)$ và nhận vector chỉ phương của CK là $\vec{u} = (-1; 1)$ làm vector pháp tuyến nên có PT

$$(-1).(x - 2) + 1.(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Đường thẳng AC qua $A(2; 2)$ và nhận vector chỉ phương của BI là $\vec{v} = (1; 3)$ làm vector pháp tuyến nên có PT

$$1.(x - 2) + 3.(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 8 = 0.$$

Tọa độ của C là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow C(-1; 3).$$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 9x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Từ đó đường thẳng BC có PT $7x + 5y - 8 = 0$. $\square$

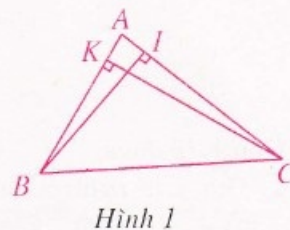
Bài toán 2. Cho tam giác ABC có $A(2; -1)$ và các đường phân giác trong của các góc B và C lần lượt có phương trình

$$x - 2y + 1 = 0; \quad x + y + 3 = 0.$$

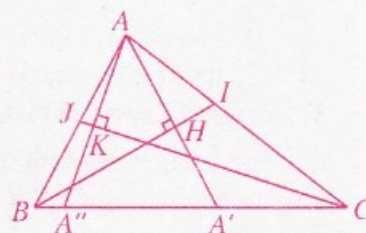
Lập phương trình đường thẳng BC .

Lời giải. Gọi A' , A'' lần lượt là các điểm đối của xứng A qua các đường phân giác BI , CJ (h. 2). Khi đó A' , A'' nằm trên đường thẳng BC .

Gọi $H = AA' \cap BI$. Do $H \in BI$ nên $H(2t-1; t)$ (chuyển PT BI về dạng tham số), lúc đó



Hình 1



Hình 2

$\overrightarrow{AH} = (2t - 3; t + 1)$. Mặt khác BI có vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1)$, và do $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ nên $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$, suy ra $2(2t - 3) + 1(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow H(1; 1)$.

Vì H là trung điểm của AA' , nên

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 0 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 3 \end{cases} \Rightarrow A'(0; 3).$$

Tương tự, gọi $K = AA'' \cap CJ$ ta tìm được $K(0; -3)$ và từ đó $A''(-2; -5)$.

Vậy đường thẳng BC qua A' và A'' có PT $4x - y + 3 = 0$. $\square$

LOẠI 2. Xác định các yếu tố trong tam giác khi biết trước tọa độ của một đỉnh và phương trình của hai đường khác tính chất (đường trung tuyến và đường cao, đường cao và đường phân giác trong, đường trung tuyến và đường phân giác trong).

Bài toán 3. Xác định tọa độ đỉnh B của tam giác ABC , biết $C(4; 3)$ và các đường phân giác trong, trung tuyến kẻ từ đỉnh A lần lượt có phương trình

$$x + 2y - 5 = 0; \quad 4x + 13y - 10 = 0.$$

Lời giải. (h. 3)

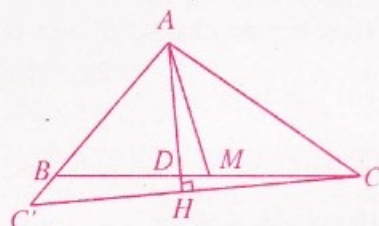
Gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường phân giác AD . Khi đó $C' \in AB$.

Gọi $H = AD \cap CC'$ thì $H(5 - 2t; t) \Rightarrow \overrightarrow{CH} = (1 - 2t; t - 3)$ (chuyển PT AD về dạng tham số). Mặt khác AD có vector chỉ phương là $\vec{u} = (-2; 1)$, và do $\overrightarrow{CH} \perp \vec{u}$ suy ra $\overrightarrow{CH} \cdot \vec{u} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } -2(1 - 2t) + 1(t - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5t - 5 &= 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3; 1). \end{aligned}$$

Do H là trung điểm của CC' , nên

$$\begin{cases} x_{C'} = 2x_H - x_C = 2 \\ y_{C'} = 2y_H - y_C = -1 \end{cases} \Rightarrow C'(2; -1).$$



Hình 3

Vì $A = AD \cap AM$ (M là trung điểm của BC) nên tọa độ của A là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 4x + 13y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A(9; -2).$$

Khi đó đường thẳng AB có PT $x + 7y + 5 = 0$ nên $B(-7t - 5; t)$ (chuyển PT AB về dạng tham số).

Vì $M \in AM$ suy ra $M\left(\frac{-13s + 10}{4}; s\right)$ (chuyển PT của AM về dạng tham số).

Lại vì M là trung điểm của BC nên

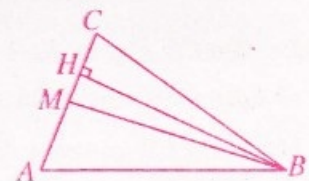
$$\begin{cases} -13s + 10 = -14t - 2 \\ 2s = 3 + t. \end{cases}$$

Suy ra $B(-12; 1)$. $\square$

Bài toán 4. Xác định tọa độ đỉnh A của tam giác ABC , biết $C(4; -1)$ và đường cao, trung tuyến kẻ từ đỉnh B lần lượt có phương trình

$$2x - 3y + 12 = 0; \quad 2x + 3y = 0.$$

Lời giải. (h. 4). Ta có đường thẳng AC qua $C(4; -1)$ và nhận vector chỉ phương của đường cao BH là $\vec{u} = (3; 2)$ làm vector pháp tuyến.



Hình 4

Do đó đường thẳng AC có PT $3(x - 4) + 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 10 = 0$.

Do $A \in AC$ nên $A\left(\frac{-2t + 10}{3}; t\right)$ (chuyển PT AC về dạng tham số).

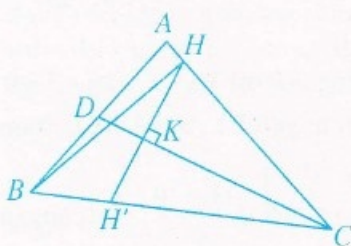
Vì $M \in BM$ suy ra $M(3s; -2s)$ (chuyển PT BM về dạng tham số).

Mặt khác, do M là trung điểm của AC nên

$$\begin{cases} 2x_M = x_A + x_C \\ 2y_M = y_A + y_C \end{cases} \Rightarrow A(8; -7). \quad \square$$

Bài toán 5. Cho tam giác ABC có $A(-1; 3)$, đường cao BH nằm trên đường thẳng $y = x$, phân giác trong góc C nằm trên đường thẳng

$x + 3y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC .



Hình 5

Lời giải. (h. 5)
Đường thẳng AC qua $A(-1; 3)$, và nhận vector chỉ phương của đường cao BH là $\vec{u} = (1; 1)$ làm vector pháp tuyến nên có PT

$$1.(x + 1) + 1.(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0.$$

Do $C = AC \cap CD$ nên tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow C(4; -2).$$

Gọi H' là điểm đối xứng của H qua CD và $K = CD \cap HH'$. Khi đó $H' \in BC$.

Do $K \in CD$ suy ra $K(-3t - 2; t)$ (chuyển PT CD về dạng tham số). Từ đó $\overrightarrow{HK} = (-3t - 3; t - 1)$.

Mặt khác, CD có vector chỉ phương là $\vec{v} = (-3; 1)$.

Do $\overrightarrow{HK} \perp \vec{v}$ suy ra $\overrightarrow{HK} \cdot \vec{v} = 0$

$$\Leftrightarrow 10t + 8 = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{5} \Rightarrow K\left(\frac{2}{5}; -\frac{4}{5}\right).$$

Do K là trung điểm của HH' , nên

$$\begin{cases} x_{H'} = 2x_K - x_H \\ y_{H'} = 2y_K - y_H \end{cases} \Rightarrow H'\left(-\frac{1}{5}; -\frac{13}{5}\right).$$

Vậy đường thẳng BC qua C và H' có PT

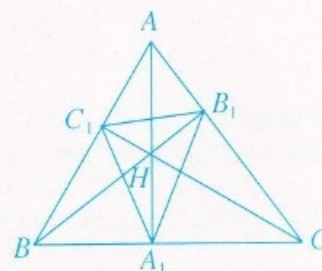
$$\frac{x + \frac{1}{5}}{4 + \frac{1}{5}} = \frac{y + \frac{13}{5}}{-2 + \frac{13}{5}} \Leftrightarrow x - 7y - 18 = 0. \quad \square$$

LOẠI 3. Xác định các yếu tố trong tam giác khi biết trước tọa độ của một số điểm đặc biệt nào đó của tam giác (chẳng hạn, chân ba đường trung tuyến, chân ba đường cao, chân ba đường phân giác trong,...).

Bài toán 6. Cho tam giác ABC có cả ba góc đều nhọn. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AC của tam giác, biết tọa độ chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C tương ứng là $A_1(-1; -2); B_1(2; 2); C_1(-1; 2)$.

Lời giải. (h. 6).
Gọi H là trực tâm của tam giác ABC .

Từ tính chất của tứ giác nội tiếp, ta chứng minh được H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.



Hình 6

Đường thẳng A_1B_1 có PT $4x - 3y - 2 = 0$.

Đường thẳng B_1C có PT $y - 2 = 0$.

Khi đó PT cặp đường phân giác của góc $\widehat{A_1B_1C_1}$ là $\frac{4x - 3y - 2}{5} = \pm(y - 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \quad (\Delta_1) \\ 2x + y - 6 = 0 \quad (\Delta_2) \end{cases}$$

Thay tọa độ của A_1, C_1 vào phương trình của

$$(\Delta_1) \text{ ta được } \begin{cases} -1 - 2 \cdot (-2) + 2 = 5 > 0 \\ -1 - 2 \cdot 2 + 2 = -3 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A_1, C_1$ nằm về hai phía khác nhau của (Δ_1) .

Hay (Δ_1) là phân giác trong của góc $\widehat{A_1B_1C_1}$ (tức là BB_1).

Suy ra đường thẳng AC là phân giác ngoài của góc $\widehat{A_1B_1C_1}$. Hay đường thẳng AC chính là (Δ_2) và có PT $2x + y - 6 = 0. \quad \square$

Lưu ý. 1) Hoàn toàn tương tự, các phân giác ngoài của các góc $\widehat{B_1A_1C_1}, \widehat{B_1C_1A_1}$ tương ứng là các đường thẳng BC, AB của tam giác ABC .

2) Cách giải trên vẫn còn hiệu lực khi tam giác ABC có dạng bất kì. Khi đó đường thẳng BC là phân giác ngoài của góc $\widehat{B_1A_1C_1}$, còn các đường thẳng AB, AC lần lượt là các đường

phân giác trong của các góc $\widehat{B_1C_1A_1}$; $\widehat{A_1B_1C_1}$.
(Bạn đọc tự vẽ hình)

Vì khuôn khổ của bài báo, bài toán xác định các yếu tố của tam giác, khi biết tọa độ chân của các phân giác trong của tam giác đó xin dành cho bạn đọc.

Để luyện tập, mời các bạn làm các bài tập trắc nghiệm sau đây.

Hãy khoanh tròn vào các chữ cái đứng trước câu trả lời đúng.

1. Cho tam giác ABC , có $B(2; -1)$; đường cao và phân giác trong của các góc A và C tương ứng có phương trình:

$$3x - 4y + 27 = 0; \quad x + 2y - 5 = 0.$$

Khi đó tọa độ của đỉnh A là:

A) $\left(\frac{79}{13}; \frac{147}{13}\right)$ B) $\left(\frac{79}{13}; -\frac{147}{13}\right)$

C) $\left(-\frac{79}{13}; \frac{147}{13}\right)$

D) Cả ba đáp án trên đều sai.

2. Cho tam giác ABC có $A(-2; 3)$; hai phân giác trong của các góc B và C tương ứng có phương trình $4x - 2y - 1 = 0$; $x + 3y - 2 = 0$. Khi đó phương trình đường thẳng BC là:

A) $x = 0$

B) $y = 0$.

C) $x + y = 0$

D) Một đáp án khác.

3. Cho tam giác ABC có góc B tù và tọa độ chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C tương ứng là $M(-1; -1)$; $N(1; 9)$; $P(9; 1)$. Khi đó phương trình đường thẳng AC là:

A) $(5 - \sqrt{13}x) - (1 + \sqrt{13})y - 4 + 10\sqrt{13} = 0$;

B) $(5 - \sqrt{13}x) + (1 + \sqrt{13})y - 4 + 10\sqrt{13} = 0$;

C) $(5 - \sqrt{13}x) + (1 + \sqrt{13})y - 4 - 10\sqrt{13} = 0$;

D) Một đáp số khác.

4. Cho tam giác ABC có $A(-2; 1)$ và các đường cao có phương trình:

$$2x - y + 1 = 0; \quad 3x + y + 2 = 0.$$

Khi đó đường trung tuyến qua đỉnh A của tam giác ABC có phương trình là:

DỪNG ẮN PHỤ... (Tiếp trang 2)

• Với $t = \frac{1}{2}$ thì $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2}$, ta có $\begin{cases} 4x = y \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(4; 1)$ và $(1; 4)$. $\square$

Sau đây chúng tôi xin giới thiệu một số bài toán tương tự để các bạn luyện tập.

Bài 1. Rút gọn biểu thức

a) $\frac{\sqrt[3]{8-3\sqrt{5}} \sqrt[3]{64-12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}} \cdot \sqrt{8+3\sqrt{5}} \times$
 $\times \left(\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt{2}-9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{81}} \right);$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{7+5\sqrt{5}+3\sqrt[4]{25}+\sqrt[4]{125}}.$

Bài 2. Giải phương trình

a) $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2;$

b) $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} = 6\sqrt[3]{x^2-1}.$

Bài 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4. \end{cases}$$

A) $x - 18y + 20 = 0$; B) $x + 18y + 20 = 0$;

C) $x - 18y - 20 = 0$; D) $x + 18y - 20 = 0$.

5. Cho tam giác ABC có phân giác trong AD , đường cao CH lần lượt có phương trình $x - y = 0$, $x + 2y + 3 = 0$.

$M(0; -1)$ là trung điểm của AC và $AB = 2AM$. Khi đó tọa độ của điểm B là:

A) $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ B) $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$

C) $\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ D) $\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right).$

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN

thi Học sinh giỏi Quốc gia THPT

NĂM HỌC 2006 - 2007

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV Trường ĐHSP Hà Nội)

LTS. Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn toán THPT năm học 2006-2007 được tiến hành vào ngày 8/2/2007. Hình thức thi năm nay có thay đổi so với các năm trước. Trong buổi thi, mỗi thí sinh phải giải 7 bài toán trong thời gian là 180 phút. Điểm tối đa cho bài thi là 20 điểm. Sau đây là đáp án các bài toán thi.

Câu 1. (2 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x > 0, y > 0; y + 3x \neq 0$.

Hệ PT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 1 - \frac{12}{y+3x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \\ 1 + \frac{12}{y+3x} = \frac{6}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 1 & (1) \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = \frac{12}{y+3x} & (2) \end{cases}$$

Nhân (1) và (2) theo vế ta được

$$\frac{9}{y} - \frac{1}{x} = \frac{12}{y+3x} \Leftrightarrow y^2 + 6xy - 27x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ y = -9x. \end{cases}$$

Do $x > 0, y > 0$, nên $y = 3x$.

Thế vào PT (1), ta được $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{3x}} = 1$ suy ra
 $x = 4 + 2\sqrt{3}; y = 12 + 6\sqrt{3}.$ □

Câu 2. (3 điểm)

Cho x, y là các số nguyên, $x \neq -1$ và $y \neq -1$ sao cho $\frac{x^4-1}{y+1} + \frac{y^4-1}{x+1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $x^4y^{44} - 1$ chia hết cho $x+1$.

Lời giải. Ta chứng minh $y^4 - 1$ chia hết cho $x+1$.

Đặt $\frac{x^4-1}{y+1} = \frac{a}{b}; \frac{y^4-1}{x+1} = \frac{c}{d}$,

trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$(a, b) = 1; (c, d) = 1; b > 0, d > 0$.

Từ giả thiết, ta có $\frac{ad+bc}{bd}$ nguyên, suy ra

$d \mid b$ và $b \mid d$ nên $b = d$. Mặt khác, do $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ nguyên; $(a, b) = 1$ và $(c, d) = 1$, nên $b = d = 1$.

Vậy $y^4 - 1$ chia hết cho $x+1$.

Từ đó $x^4y^{44} - 1 = x^4(y^{44} - 1) + x^4 - 1$ chia hết cho $x+1$ (do $y^{44} - 1$ chia hết cho $y^4 - 1$ nên nó chia hết cho $x+1$ và $x^4 - 1$ chia hết cho $x+1$). □

Câu 3. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A thay đổi. Gọi H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm A, biết rằng trung điểm K của HG thuộc đường thẳng BC.



ĐẠI SỐ HOÁ LƯỢNG GIÁC

HUỖNH LÂM LINH

(SV lớp Toán 1A, ĐHSPTP. Hồ Chí Minh)

Một trong những phương pháp hiệu quả trong chứng minh các bất đẳng thức trong tam giác là chuyển sang bài toán đại số mà ta tạm gọi là phương pháp đại số hóa. Thông thường những lời giải đó đều gọn đẹp và sáng sủa. Có nhiều phương pháp chuyển sang đại số, và mỗi phương pháp đó đều mang một vẻ đẹp và tính hiệu quả riêng. Riêng trong bài này xin giới thiệu với bạn đọc một cách đại số hóa mà theo tôi là mới.

Cho tam giác ABC , $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi p , r , R tương ứng là nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác đó. Kí hiệu $x = \sin \frac{A}{2}$, $y = \sin \frac{B}{2}$, $z = \sin \frac{C}{2}$ sẽ được sử dụng cho đến cuối bài viết.

Ta có các hệ thức cơ bản sau:

$$1) x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$$

$$2) \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = z + xy \text{ và các hệ thức tương tự.}$$

$$3) \sqrt{2(1-x)(1-y)(1-z)} = x + y + z - 1.$$

Sau đây là các bài toán minh họa.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC không nhọn. Chứng minh rằng

$$R \geq (\sqrt{2} + 1)r \text{ (bất đẳng thức Emmirich).}$$

Lời giải. Sử dụng hệ thức $\frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$,

ta quy bài toán 1 về chứng minh $xyz \leq \frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

Thật vậy, ta có

$$1 - x^2 = y^2 + z^2 + 2xyz \geq 2yz(1+x).$$

$$\text{Suy ra } 1 - x \geq 2yz \quad (*)$$

Không giảm tổng quát, giả sử $A \geq 90^\circ$. Suy ra

$$x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} > y. \text{ Vậy}$$

$$xyz \leq \frac{x(1-x)}{2} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} - x \right) + \frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}-1}{4} \text{ (lưu ý } \frac{2-\sqrt{2}}{2} - x < 0). \quad \square$$

Bài toán 2. (Bài toán Jack Garfulkel)

Cho tam giác ABC thỏa mãn $A \leq \frac{\pi}{3} \leq B \leq C$.

Chứng minh rằng $h_a + h_b + h_c \geq 7r + R$,

trong đó h_a, h_b, h_c tương ứng là độ dài các đường cao của tam giác kẻ từ các đỉnh A, B, C .

Lời giải. Trước hết ta chứng minh

$$\sqrt{3}(1+4xyz) \leq 4\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \quad (1)$$

Thật vậy từ hệ thức 2 ta thấy

$$(1) \Leftrightarrow 3(1+4xyz)^2 \leq 16(x+yz)(y+zx)(z+xy)$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + y^2 + z^2) + 64(xyz)^2$$

$$\leq 16(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 1$$

$$\Leftrightarrow 64 \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) \left(y^2 - \frac{1}{4} \right) \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) \leq 0.$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng do $A \leq \frac{\pi}{3} \leq B \leq C$.

$$\text{Ta có } \frac{h_a + h_b + h_c}{R}$$

$$= 8 \left(xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} + yz\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + zx\sqrt{(1-z^2)(1-x^2)} \right)$$

$$= 8 \left(xy(z+xy) + yz(x+yz) + zx(y+zx) \right)$$

$$= 8((1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) + (xyz)^2 + xyz)$$

$$\geq 8 \left(\frac{3}{16}(1+4xyz)^2 + (xyz)^2 + xyz \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} + 20xyz + 32(xyz)^2 \\
&= 28xyz + 1 + 2\left(4xyz - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&\geq 28xyz + 1 = \frac{7r+R}{R}. \quad (\text{đpcm}) \quad \square
\end{aligned}$$

Bài toán 3. (Bất đẳng thức Walker).

Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh bất đẳng thức $p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$.

Lời giải. Sử dụng

$$2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 + 4r(r + 4R)$$

(xem THPT số 337, tháng 7/2005, trang 6) và hệ thức $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$, ta quy bài toán về dạng

$$(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \leq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C.$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\sin \frac{A'}{2} + \sin \frac{B'}{2} + \sin \frac{C'}{2} \right)^2 \\
&\leq \cos^2 \frac{A'}{2} + \cos^2 \frac{B'}{2} + \cos^2 \frac{C'}{2}, \text{ trong đó}
\end{aligned}$$

$$\frac{A'}{2} = \frac{\pi}{2} - A, \quad \frac{B'}{2} = \frac{\pi}{2} - B, \quad \frac{C'}{2} = \frac{\pi}{2} - C.$$

Cũng đặt x', y', z' tương tự như x, y, z nhưng xét đối với tam giác $A'B'C'$. Khi đó bất đẳng thức trên tương đương với

$$(x' + y' + z')^2 \leq 1 - x'^2 + 1 - y'^2 + 1 - z'^2.$$

$$\text{Hay } 1 + 4x'y'z' \geq 2(x'y' + y'z' + z'x') \quad (2)$$

Trong ba số x', y', z' phải có hai số cùng không lớn hơn $\frac{1}{2}$ hoặc cùng không bé hơn $\frac{1}{2}$, giả sử là y', z' . Khi đó $x'(2y' - 1)(2z' - 1) \geq 0$.

Mà $1 - x' - 2y'z' \geq 0$ (Theo (*)).

$$\text{Suy ra } x'(2y' - 1)(2z' - 1) + 1 - x' - 2y'z' \geq 0.$$

Hay (2) được chứng minh. $\square$

Bài toán 4. (Bất đẳng thức Jack Garfunkel)

Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}
&\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2} \\
&\geq \frac{2}{\sqrt{3}} (\sin A + \sin B + \sin C).
\end{aligned}$$

Lời giải. Sử dụng hệ thức 2, đưa BĐT trên về

$$\sqrt{3}(2xy + 2yz + 2zx + x + y + z)$$

$$\geq 8\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

Theo (2) thì $1 + 4xyz \geq 2(xy + yz + zx)$.

$$\text{Suy ra } 2(xy + yz + zx) \geq 2(x + y + z)^2 - 3.$$

$$\text{Do đó } 2(xy + yz + zx) + x + y + z$$

$$\geq (x + y + z - 1)(2x + 2y + 2z + 3).$$

Dựa vào hệ thức 3 ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{3}(2x + 2y + 2z + 3) \geq 4\sqrt{2(1+x)(1+y)(1+z)} \quad (3)$$

Từ (*) ta có $x(1-x) \geq 2xyz$. Tương tự đối với y, z , rồi cộng lại ta được $x + y + z \geq 1 + 4xyz$ (4)

$$\text{Đề ý } xyz \leq \frac{1}{8}. \text{ Do đó } 4(x + y + z) \geq 1 + 40xyz.$$

$$\text{Ta có } 12(x + y + z)^2 - 32(xy + yz + zx)$$

$$\geq 4(x^2 + y^2 + z^2) = 4 - 8xyz. \text{ Suy ra}$$

$$3(2x + 2y + 2z + 3)^2$$

$$= 12(x + y + z)^2 + 36(x + y + z) + 27$$

$$\geq 32(xy + yz + zx) + 4 - 8xyz + 32(xy + yz + zx)$$

$$+ 1 + 40xyz + 27 = 32(1+x)(1+y)(1+z).$$

Vậy (3) được chứng minh. $\square$

Về bài toán này bạn đọc có thể tham khảo thêm ở THPT số 291, tháng 9 năm 2001.

Bài toán 5. (Bất đẳng thức Jack Garfunkel)

Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} + 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq 2.$$

Lời giải. Quy bài toán về dạng sau:

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{1-z^2} \geq 5 - 8xyz \quad (5)$$

$$\text{Ta có VT(5) bằng } 1 + \frac{(1+xyz)^2}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

$$\text{Vậy (5) } \Leftrightarrow \frac{(1+xyz)^2}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \geq 4(1-2xyz) \quad (6)$$

$$\text{Ta có } 4(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$$

$$= 1 + 4xyz - x^4 - y^4 - z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

(Xem tiếp trang 2)

DIỄN ĐÀN

**DAY
HOC
TOAN**



Sách giáo khoa Hình học 11 do nhóm tác giả Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên), Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên), Khu Quốc Anh, Nguyễn Hà Thanh, Phan Văn Viện biên soạn, dựa trên nội dung chương trình giáo dục phổ thông môn Toán mà Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành ngày 05 tháng 5 năm 2006.

1. Nội dung SGK Hình học 11 gồm có hai phần quan trọng là:

a) *Phần hình học phẳng* giới thiệu về các phép biến hình trong mặt phẳng như phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép quay và sau đó giới thiệu về phép dời hình cùng với định nghĩa về sự bằng nhau của hai hình phẳng. Tiếp đó SGK giới thiệu về phép vị tự, phép đồng dạng và định nghĩa hai hình đồng dạng.

b) *Phần hình học không gian* cung cấp cho học sinh những kiến thức cơ bản về hình học không gian, giới thiệu về quan hệ song song, quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian, đồng thời SGK có giới thiệu về vectơ và các phép toán vectơ trong không gian dùng để nghiên cứu về quan hệ vuông góc.

Nội dung chương trình Hình học 11 được phân ra bởi ba chương như sau:

Chương I. *Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng.*

Chương II. *Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song.*

Chương III. *Vectơ trong không gian - Quan hệ vuông góc.*

2. Một số đặc điểm cần lưu ý về nội dung chương trình và SGK Hình học 11:

a) Việc đưa nội dung các phép biến hình vào chương trình Hình học 11 nhằm tập cho học sinh làm quen với việc nghiên cứu hình học theo quan điểm biến hình, nắm được những tính chất thay đổi và không thay đổi của một hình trong quá trình biến đổi. Người ta đã sắp xếp hệ thống lại các thứ hình học bằng cách gọi tập hợp các bất biến (các tính chất không thay đổi) của mỗi nhóm biến hình là hình học của nhóm đó. Như vậy ứng với mỗi nhóm biến hình ta có một thứ hình học tương ứng. Ví dụ

như ở trường phổ thông chúng ta đang học về hình học Óclit, đó là hình học của nhóm dời hình.

Hình học Óclit nghiên cứu các bất biến qua các phép dời hình như khoảng cách giữa hai điểm, sự thẳng hàng của ba điểm, độ lớn của góc, v.v... Tiếp đó SGK đưa ra một định nghĩa tổng quát về khái niệm bằng nhau của hai hình như

sau: "Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia". Tất nhiên khái niệm "bằng nhau" ở đây bao gồm cả khái niệm "bằng nhau của hai tam giác" ở cấp THCS. Các khái niệm "hai hình đồng dạng với nhau" cũng được xây dựng tương tự, dựa vào phép đồng dạng. Với các phép biến hình, học sinh có thể giải được nhiều bài toán mới đầy thú vị và SGK có giới thiệu một số bài toán đơn giản trong phần "Bài đọc thêm".

b) Phần hình học không gian được trình bày theo tinh thần của phương pháp tiên đề. Tuy nhiên vì lí do sự phạm, SGK không thể nêu đầy đủ các tiên đề của hình học Óclit mà chỉ

Giới thiệu SÁCH GIÁO KHOA HÌNH HỌC 11

NGUYỄN MỘNG HY
(Chủ biên)

đưa ra một số tính chất thừa nhận. Qua việc học tập phần hình học không gian học sinh được làm quen với việc hiểu các khái niệm cơ bản, các tương quan cơ bản, tập chứng minh các định lý bằng cách vận dụng các tính chất thừa nhận và các định lý có trước đó để suy luận và tìm ra các kết quả mới. Để học tốt môn hình học không gian, học sinh phải được tập làm quen với việc biểu diễn hình không gian lên mặt phẳng và đọc đúng các hình biểu diễn đó. Đây là một việc làm phải được rèn luyện thường xuyên. Cần chú ý rằng trong SGK, chúng ta không đề cập đến vấn đề dựng hình trong không gian vì về mặt lý luận, việc dựng hình trong không gian có nhiều nội dung mới khác với việc dựng hình trong mặt phẳng. Do đó thay cho từ "dựng" ta dùng từ "xác định" hoặc "tìm". Tuy nhiên trong từng bộ phận phần của hình không gian ta vẫn có thể dùng từ "dựng" như trong hình học phẳng. Ở chương II SGK có giới thiệu về hình chóp, hình tứ diện, hình lăng trụ, hình hộp nhằm tạo tình huống cụ thể để giúp học sinh hiểu các cách xác định mặt phẳng, hiểu rõ mối quan hệ "thuộc" giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong không gian.

c) Nội dung phần vectơ trong không gian và các phép toán về vectơ được nhắc lại thông qua các ví dụ vì có những phần giống như vectơ trong mặt phẳng đã được học ở lớp 10. Trong phần này có một khái niệm mới là nói về sự đồng phẳng của ba vectơ. SGK có nêu lên định nghĩa về sự đồng phẳng này và sau đó trình bày định lý nêu lên điều kiện đồng phẳng của ba vectơ. Việc dùng tích vô hướng để chứng minh tính chất vuông góc của đường thẳng với đường thẳng và đường thẳng với mặt phẳng là một việc làm rất mới mẻ đối với học sinh lớp 11. Sau đó việc chứng minh các tính chất vuông góc trong các trường hợp đơn giản được vận dụng vào các hình hộp chữ nhật, hình lập phương, hình tứ diện đều. Cần lưu ý rằng trong không gian góc của hai đường thẳng luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng 90° , còn góc giữa hai vectơ có thể lấy các giá trị từ 0°

đến 180° . Vì góc giữa hai mặt phẳng được định nghĩa là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó, nên góc giữa hai mặt phẳng luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng 90° . Chú ý rằng sau khi trình bày định nghĩa về đường vuông góc chung của hai đường chéo nhau, SGK đã bỏ qua định lý nêu lên sự tồn tại và sự xác định duy nhất đường vuông góc chung đó, mà giới thiệu luôn cách tìm đường vuông góc chung. Việc tìm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc đến một mặt phẳng được định nghĩa dựa vào khoảng cách giữa hai điểm O và H trong đó H là hình chiếu của O trên đường thẳng hoặc trên mặt phẳng và khi điểm O trùng với H ta có khoảng cách đó bằng 0.

d) SGK Hình học 11 là tài liệu chủ yếu dùng cho học sinh, đồng thời cũng là tài liệu tham khảo cho giáo viên để chuẩn bị các bài giảng trên lớp. SGK ngoài việc cung cấp cho học sinh những kiến thức và kỹ năng cơ bản có hệ thống theo những nội dung quy định của chương trình, còn góp phần hình thành cho học sinh phương pháp học tập tích cực, sáng tạo, biết tự học, tự kiểm tra đánh giá những yêu cầu cần đạt được đối với môn học. Theo chủ trương chung, trong SGK có đưa ra các hoạt động mang tính chất gợi ý, mỗi thầy cô giáo đều có thể thay các hoạt động này bằng những hoạt động khác cho phù hợp với học sinh, nhằm phát huy được tính tích cực học tập của học sinh. SGK Hình học 11 đã thể hiện sự cố gắng cải tiến về nội dung lẫn hình thức, có nhiều hình vẽ minh họa phù hợp và có ý nghĩa, có hệ thống "bài đọc thêm" bổ ích, vui vẻ, nhẹ nhàng, có một cấu trúc hợp lý, kèm theo những bài tập áp dụng, kể cả bài tập trắc nghiệm.

Hi vọng rằng SGK Hình học 11 sẽ giúp cho học sinh và giáo viên tiếp cận môn Hình học ở lớp 11 tốt hơn. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của đông đảo độc giả để cuốn sách được cải tiến tốt hơn trong những lần tái bản sắp tới.

ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ QUÝ IV NĂM 2007
TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC



CÁC LỚP THCS

Bài T1/364. (Lớp 6) Tìm hai chữ số tận cùng của hiệu $3^{9999} - 2^{9999}$.

NGUYỄN HỒNG THANH
(Minh Hải, Văn Lâm, Hưng Yên)

Bài T2/364. (Lớp 7) Xét tổng gồm $n+1$ số hạng

$$S_n = \frac{2}{101+1} + \frac{2^2}{101^2+1} + \dots + \frac{2^{n+1}}{101^{n+1}+1}$$

So sánh S_n với 0,02.

CÙ HUY TOÀN
(Khoa Công nghệ Vật liệu 02, khóa 50, ĐHBK Hà Nội)

Bài T3/364. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3 + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + 1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

HUỖNH TẤN CHÂU
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T4/364. Giải phương trình

$$\sqrt{7x^2 - 22x + 28} + \sqrt{7x^2 + 8x + 13} + \sqrt{31x^2 + 14x + 4} = 3\sqrt{3}(x+2).$$

TRẦN VĂN HANH
(GV CĐSP Quảng Ngãi)

Bài T5/364. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB < BC$. Vẽ nửa đường tròn đường kính AB nằm trên nửa mặt phẳng chứa CD bờ là đường thẳng AB . M là điểm trên nửa đường tròn (M khác A và B). Các đường thẳng MA, MB cắt đường thẳng CD theo thứ tự tại P, Q . Các đường thẳng MC, MD cắt đường thẳng AB theo thứ tự tại E, F . Xác định vị trí của M

trên nửa đường tròn để tổng $PQ + EF$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

ĐÀO QUỐC DŨNG
(GV THPT DTNT Quỳnh Hợp, Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/364. Tìm tất cả các bộ hai số nguyên dương a, b sao cho khi chia $a^2 + b^2$ cho $a + b$ được thương là q và số dư thỏa mãn $q^2 - r = 2007$.

NGUYỄN VĂN HIỀN
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T7/364. Xét phương trình

$$ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$$

với a, b là các số thực, $a \neq 0$ và $a \neq b$ sao cho các nghiệm đều là số thực dương. Tìm giá trị

nhỏ nhất của $P = \frac{5a^2 - 3ab + 2}{a^2(b-a)}.$

PHẠM VĂN SÂM
(GV THCS Tòng Bạt, Ba Vì, Hà Tây)

Bài T8/364. Trên mặt cầu bán kính R lấy năm điểm A, B, C, D, E sao cho $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAB} = \frac{2}{3}\widehat{BAD} = \frac{2}{3}\widehat{CAE}$. Chứng minh rằng $AB + AC + AD + AE \leq 4\sqrt{2}R$.

NGUYỄN ĐỨC HUY
(GV THPT Lê Quý Đôn, Long An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/364. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P theo thứ tự sao cho $AM + BN + CP = MB + NC + PA$. Chứng minh rằng $S_{MNP} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$.

LỤC BÌNH
(GV THPT bán công TX. Quảng Trị, Quảng Trị)

Bài T10/364. Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \dots \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}} \right)_{n \text{ dấu căn}}$$

PHAN QUANG SƠN
(GV THPT Nam Khoái Châu, Hưng Yên)

Bài T11/364. Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x và ký hiệu $\{x\} = x - [x]$. Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{(7 + 4\sqrt{3})^n\}$.

NGUYỄN TÀI CHUNG
(GV THPT K'bang, Gia Lai)

Bài T12/364. Cho n là một số nguyên dương và $2n + 2$ số thực $a, b, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ với $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sao cho hàm số

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i x + b_i} - (ax + b) \text{ có tính chất:}$$

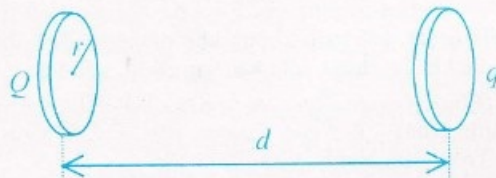
Tồn tại hai số thực phân biệt α, β sao cho $F(\alpha) = F(\beta) = 0$.

Chứng minh rằng α và β là tất cả các nghiệm thực của phương trình $F(x) = 0$.

HÀN NGỌC ĐỨC
(Trung tâm CNTT EVNIT, 16 Lê Đại Hành,
Hai Bà Trưng, Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/364. Hai đồng xu nhỏ bằng kim loại có bán kính r , dày $a = 1$ mm, được đặt cách nhau một đoạn $d = 1$ m sao cho mặt phẳng của hai đồng xu vuông góc với đường nối tâm của chúng. Biết diện tích của mỗi đồng xu là Q và q thoả mãn $\frac{Q}{q} = 2 \cdot 10^7$ thì lực tương tác điện giữa các đồng xu bằng 0. Tính bán kính r của mỗi đồng xu. Cho biết $a \ll r \ll d$.



NGUYỄN VĂN HẠNH
(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An)

Bài L2/364. Hai hòn đá được ném theo một mặt phẳng thẳng đứng từ cùng một điểm trên một ngọn tháp cao với cùng góc ném α so với phương ngang (ném chếch lên trên) và cùng vận tốc ban đầu v_0 nhưng ném cách nhau một khoảng thời gian là Δt . Xác định khoảng cách nhỏ nhất giữa hai hòn đá và thời điểm đạt khoảng cách đó. Bỏ qua sức cản của không khí.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/364. (For 6th grade) Find the last two digit numbers of $3^{9999} - 2^{9999}$.

T2/364. (For 7th grade) Compare the sum (consisting of $n + 1$ terms)

$$S_n = \frac{2}{101+1} + \frac{2^2}{101^2+1} + \dots + \frac{2^{n+1}}{101^{2n}+1},$$

with 0,02.

T3/364. Let a, b , and c be positive numbers such that $ab + bc + ca = 1$. Prove the inequality

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3 + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + 1}.$$

When does equality occur?

T4/364. Solve the equation

$$\sqrt{7x^2 - 22x + 28} + \sqrt{7x^2 + 8x + 13} + \sqrt{31x^2 + 14x + 4} = 3\sqrt{3}(x + 2).$$

T5/364. Let $ABCD$ be a rectangle with $AB < BC$. Let M be a point, different from A and B , on the half-circle with AB as its diameter and on the same side with CD . MA and MB meet CD at P and Q respectively. MC and MD meet AB at E and F respectively. Find the position of the point M on the half-circle such that the sum $PQ + EF$ is smallest possible. Calculate this smallest value.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/364. Find all pairs of positive integers a, b such that $q^2 - r = 2007$, where q and r are respectively the quotient and the remainder obtained when dividing $a^2 + b^2$ by $a + b$.

T7/364. Consider the equation

$$ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$$

where a, b are real numbers, $a \neq 0$ and $a \neq b$ such that all of its roots are positive real numbers. Find

the smallest value of $P = \frac{5a^2 - 3ab + 2}{a^2(b - a)}$.

T8/364. Choose five points A, B, C, D , and E on a sphere with radius R such that $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAB} = \frac{2}{3}\widehat{BAD} = \frac{2}{3}\widehat{CAE}$. Prove the inequality $AB + AC + AD + AE \leq 4\sqrt{2}R$.

(Xem tiếp trang 27)



★ **Bài T1/360.** Cho dãy số $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 6, \dots, a_{n+1} = a_n + n, \dots$

- Số 2006 có thuộc dãy số trên không?
- Số thứ 2007 của dãy số trên là số nào?
- Tính tổng của 100 số hạng đầu tiên của dãy số trên?

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Bảo Nhi, 6/5, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa).

Nhận xét $a_n = 3 + \frac{n(n-1)}{2}$ (*) với mọi $n \geq 1$.

Thật vậy $a_1 = 3 = 3 + \frac{1(1-1)}{2}, a_2 = 4 = 3 + \frac{2(2-1)}{2}$.

Giả sử $a_n = 3 + \frac{n(n-1)}{2}$ ($n \geq 1$) thì

$$a_{n+1} = a_n + n = 3 + \frac{n(n-1)}{2} + n = 3 + \frac{(n+1)n}{2}.$$

Vậy (*) đúng.

a) Vì $2006 = 3 + \frac{4006}{2}$ mà $63.62 < 4006 < 64.63$ nên số 2006 không thuộc dãy số trên.

b) Số thứ 2007 của dãy số trên là

$$a_{2007} = 3 + \frac{2007 \cdot 2006}{2} = 2013024.$$

c) Gọi S là tổng của 100 số hạng đầu tiên của dãy số trên thì

$$\begin{aligned} S &= 300 + \frac{1}{2}(100.99 + 99.98 + \dots + 3.2 + 2.1) \\ &= 300 + \frac{1}{6}(100.99(101 - 98) + 99.98(100 - 97) \\ &\quad + \dots + 3.2(4 - 1) + 3.2.1) \\ &= 300 + \frac{1}{6}(101.100.99 - 100.99.98 + 100.99.98 \end{aligned}$$

$$-99.98.97 + \dots + 4.3.2 - 3.2.1 + 3.2.1)$$

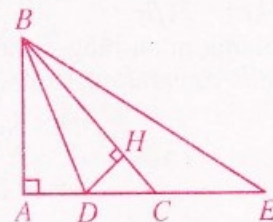
$$= 300 + \frac{1}{6} \cdot 101.100.99 = 166950. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Điểm mấu chốt của bài toán là tìm được công thức tính a_n theo n . Để tính tổng S còn một số cách giải khác nhưng cách giải trên là ngắn gọn hơn cả.

HOÀNG TRỌNG HẢO

★ **Bài T2/360.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ACB} = 54^\circ$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = 54^\circ$. Chứng minh rằng $BC < AE$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có
 $\widehat{ABC} = \widehat{AEB} = 36^\circ$,
 Kẻ tia phân giác BD của góc ABC ($D \in AC$), kẻ $DH \perp$



BC ($H \in BC$), ta có $\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = \widehat{CBE} = 18^\circ$.

Suy ra $\widehat{DBE} = \widehat{DEB} = 36^\circ \Rightarrow BD = DE$, mà $BD > BH$, nên $DE > BH$ (1)

Trong tam giác vuông DHC có $\widehat{CDH} = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ < 54^\circ = \widehat{DCH}$ nên $DH > HC$, mà $DH = DA$ nên $DA > HC$ (2)

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta được $DE + DA > BH + HC$ hay $AE > BC$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Bài toán không khó nhưng số bạn tham gia giải không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Ngọc Anh, 8A₁, THCS Lâm Thao;
Khánh Hòa: Vũ Ngọc Cương, 6/1, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/360.** Cho tổng gồm 2006 số hạng

$$S = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{4+1}{4}} + \dots + \sqrt[2007]{\frac{2007+1}{2007}}.$$

Hãy tính $[S]$.

(Kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a).

Lời giải. • Ta thấy mỗi số hạng trong tổng S đều lớn hơn 1, do đó $S > 2006$ (1)

- **Nhận xét.** Với $x > 0, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, thì

$$(1+x)^k > 1+kx \quad (2)$$

Thật vậy, với $k = 2$ ta có

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x.$$

Vậy (2) đúng với $k = 2$. Giả sử (2) đúng với $k \geq 2$, tức là $(1+x)^k > 1+kx$, ta sẽ chứng minh (2) đúng với $k+1$. Thật vậy

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)^k \cdot (1+x) > (1+kx)(1+x) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x. \end{aligned}$$

Vậy (2) đúng với $k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, BĐT (2) đúng với mọi số nguyên $k \geq 2$. Từ (2) suy ra $\sqrt[k]{1+kx} < 1+x$.

Với $x = \frac{1}{k^2}$, ta có

$$\sqrt[k]{1+kx} = \sqrt[k]{1+\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} < 1 + \frac{1}{k^2} \quad (3)$$

Áp dụng BĐT (3), với $k = 2, 3, \dots, 2007$, cho 2006 số hạng của S , ta được

$$\begin{aligned} S &< 2006 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2007^2} \\ &< 2006 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2006.2007} \\ &= 2006 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2006} - \frac{1}{2007}\right) \\ &= 2007 - \frac{1}{2007} < 2007 \quad (4) \end{aligned}$$

Từ (1) và (4), ta có $2006 < S < 2007$.

Vậy $[S] = 2006$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể chứng minh (3) bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho k số là:

$$\frac{k+1}{k}, 1, 1, \dots, 1 \quad (k-1 \text{ số } 1)$$

2) Ta có kết quả tổng quát:

$$\text{Với } S = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{4+1}{4}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$$

($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) thì $[S] = n-1$.

3) Tất cả các bạn tham gia giải bày này đều có lời giải đúng. Các bạn có lời giải tốt là: **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Phô, 9A1, THCS TTr. Chờ, Yên Phong; **Hà Tây:** Nguyễn Thế Anh, 9C, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hà Nội:** Phạm Đức Nam, 9B, THCS Cự Khối, Long Biên; **Nghe**

An: Nguyễn Sĩ Hoàng, 9A, THCS Văn Sơn, Đô Lương;
Hà Tĩnh: Dương Đức Lâm, A1, K34, trường cấp 2-3 Nguyễn Trung Thiên, Thạch Hà; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyên, 8/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa;
Bình Định: Nguyễn Đồng Tiến, 8A3, THCS Lương Thế Vinh, TP. Quy Nhơn.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T4/360. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - \frac{4}{x} = 2y - \frac{2}{y} \\ 2x = y^3 + 3 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Lời giải. Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (x-2y)\left(1+\frac{2}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ xy = -2. \end{cases}$$

- Với $x = 2y$, kết hợp với PT (2) ta được

$$y^3 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y - 3) = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-1 = 0 \\ y^2 + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Từ đó tương ứng tìm được $\begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \pm \sqrt{13}. \end{cases}$

- Với $xy = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{y}$, thay vào PT (2) ta

$$\text{được } -\frac{4}{y} = y^3 + 3 \Leftrightarrow y^4 + 3y + 4 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Do } y^4 + 3y + 4 = \left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} > 0$$

với mọi y nên PT (4) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm

$$(x, y) \text{ là } (2; 1), \left(-1 + \sqrt{13}; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right),$$

$$\left(-1 - \sqrt{13}; \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right). \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Ta còn có thể biến đổi PT (1) về dạng phương trình bậc hai ẩn x (coi y là tham số)

$$x^2 - 2\left(y - \frac{1}{y}\right)x - 4 = 0 \text{ để tìm ra } x = 2y \text{ và } x = -\frac{2}{y}.$$

2) Để kết luận PT(4) vô nghiệm có bạn đã biến đổi

$$y^4 + 3y + 4 = (y^2 - 1)^2 + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} > 0$$

(với mọi y).

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nam Định: Đinh Thị Ngọc, 9B, THCS Yên Tiến, Ý Yên; **Hải Dương:** Lương Thị Huyền Trang, 9B, THCS Lai Cách, Cẩm Giàng; **Thanh Hóa:** Lê Tiến Tùng, 8B, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn, Lê Thị Thương, 9E, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Nguyễn Sĩ Hoàng, 9A, THCS Văn Sơn, Đô Lương; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyễn, 8/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Nguyễn Thị Trà My, 9A8, THCS Xà Bang, Châu Đức.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/360.** Cho a, b, c là các số không nhỏ hơn $-\frac{3}{2}$ và thỏa mãn điều kiện

$$ab + bc + ca + a + b + c \geq 0.$$

Chứng minh rằng $a + b + c \geq 0$.

Lời giải. Bất đẳng thức (BĐT)

$$ab + bc + ca + a + b + c \geq 0$$

có thể viết thành $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 1$ (1)

Đặt $x = a+1, y = b+1, z = c+1$.

Từ $a, b, c \geq -\frac{3}{2}$ và (1) suy ra $x, y, z \geq -\frac{1}{2}$ và $xyz \geq 1$ (2)

BĐT cần chứng minh tương đương với

$$x + y + z \geq 3 \quad (3)$$

Từ (2) suy ra x, y, z là ba số cùng dương hoặc hai trong chúng âm, số còn lại dương.

Trường hợp 1. Cả ba số x, y, z dương.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$x + y + z \geq 3. \sqrt[3]{xyz} \geq 3.$$

Trường hợp 2. Nếu hai trong ba số x, y, z âm, số còn lại dương.

Không mất tính tổng quát, có thể giả thiết:

$$-\frac{1}{2} \leq x, y < 0 \text{ và } z > 0.$$

Ta có $0 < -x \leq \frac{1}{2}$ và $0 < -y \leq \frac{1}{2}$, suy ra

$$0 < xy \leq \frac{1}{4} \quad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra $z \geq \frac{1}{xy} \geq 4$.

Ta được $x + y + z \geq -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4 = 3$.

Như vậy BĐT (3) được chứng minh trong cả hai trường hợp.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hoặc

$$(x; y; z) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 4\right).$$

Nghĩa là $a=b=c=0$ hoặc hai trong ba số a, b, c bằng $-\frac{3}{2}$, số còn lại bằng 3. □

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn mắc sai lầm khi từ BĐT $xyz \geq 1$ suy ra x, y, z dương nên làm thiếu trường hợp 2.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nam: Trần Thế Khải, 9B, THCS Trần Phú, Phú Lý; **Hà Tây:** Nguyễn Thế Anh, 9C, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Phò, 9A1, THCS TTr. Chờ, Yên Phong; **Nghệ An:** Nguyễn Sĩ Hoàng, 9A, THCS Văn Sơn, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Dương Đức Lâm, A1K32 trường cấp 2 - 3 Nguyễn Trung Thiên, Thạch Hà; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** Nguyễn Thị Trà My, 9A8, THCS Xà Bang, Châu Đức.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T6/360.** Lấy các điểm M, N, P ở phía ngoài tam giác ABC sao cho thỏa mãn các điều kiện: $\widehat{CAN} = \widehat{CBM} = 30^\circ, \widehat{ACN} = \widehat{BCM} = 20^\circ, \widehat{PAB} = \widehat{PBA} = 40^\circ$. Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều.

Lời giải.

Dựng tam giác đều APQ sao cho PQ cắt đường thẳng AB (hình vẽ).

Ta có $\widehat{BAQ}$

$$= \widehat{PAQ} - \widehat{PAB}$$

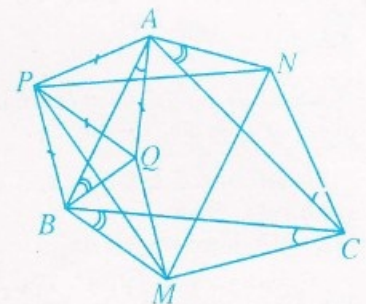
$$= 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ;$$

$$\widehat{QPB} = \widehat{APB} - \widehat{APQ} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ.$$

Tam giác QPB có $PQ = AP = PB$ nên

$$\widehat{BQP} = \widehat{QBP} = \frac{180^\circ - \widehat{QPB}}{2} = 70^\circ \quad (1)$$

do đó $\widehat{QBA} = \widehat{QBP} - \widehat{PBA} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.



Ba tam giác ANC , BMC và BQA đồng dạng với nhau (vì $\widehat{NAC} = \widehat{MBC} = \widehat{QBA} = 30^\circ$ và $\widehat{NCA} = \widehat{MCB} = \widehat{BAQ} = 20^\circ$) nên có

$$\frac{AN}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{BQ}{BA} \quad (2)$$

Xét hai tam giác ABC và QBM có $\widehat{ABC} = \widehat{QBC} + 30^\circ = \widehat{QBM}$ và $\frac{BA}{BC} = \frac{BQ}{BM}$ (theo (2)) nên $\triangle ABC \sim \triangle QBM$, suy ra $\frac{QM}{AC} = \frac{BM}{BC}$ (3)

Từ (2) và (3) rút ra $QM = AN$.

Ta có $\triangle APN = \triangle QPM$ vì $AN = QM$, $AP = QP$, $\widehat{PAN} = \widehat{BAC} + 70^\circ = \widehat{BQM} + 70^\circ = \widehat{PQM}$ suy ra $PN = PM$ và $\widehat{QPM} = \widehat{APN}$.

Mặt khác $\widehat{MPN} = \widehat{QPM} + \widehat{QPN} = \widehat{APN} + \widehat{QPN} = 60^\circ$.

Do vậy tam giác PMN là tam giác đều. $\square$

<Nhận xét. 1) Có thể dựng $\triangle BPQ$ đều sao cho PQ cắt đường thẳng AB . Cách khác, dựng $\triangle ABQ$ cân với $\widehat{QAB} = 40^\circ$ mà PQ không cắt đường thẳng AB , lúc đó $\triangle APQ \sim \triangle ANC$.

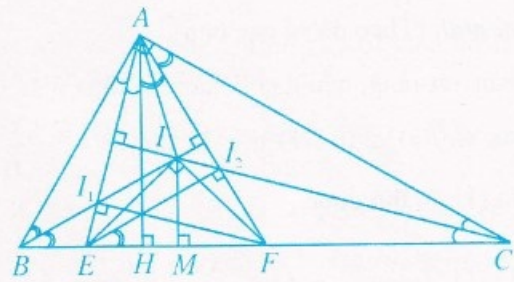
2) Giải đúng bài này có các bạn:

Bác Ninh: Nguyễn Hữu Dũng, 5B, TH Mỹ Phương, Lương Tài; **Hà Tây:** Nguyễn Thế Anh, 9C, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Nghệ An:** Lê Hồng Thái, 9C, THCS Diễn Hải, Diễn Châu; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyễn, 8/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 9A4, THCS Trà Nóc, TP. Cần Thơ.

VIỆT HẢI

★ Bài T7/360. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH . Gọi I, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, AHB, AHC . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác II_1I_2 bằng đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải. Giả sử E, F lần lượt là giao điểm của AI_1 và AI_2 với BC . Ta có $\widehat{BAF} = \widehat{BFA} = \widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{HAC}$, nên tam giác ABF cân tại B . Tương tự, tam giác ACE cân tại C . Vậy $BI \perp AF$ và $CI \perp AE$.



Mặt khác, do A và E đối xứng với nhau qua CI_2 , nên $\widehat{I_2EC} = \widehat{I_2AC}$. Lại vì $\widehat{I_2AC} = \widehat{IBC}$, suy ra $\widehat{I_2EC} = \widehat{IBC}$, dẫn đến $IB \parallel EI_2$. Do đó $EI_2 \perp AF$ (1)

Lập luận tương tự có $FI_1 \perp AE$ (2)

Lưu ý rằng, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF (do I là giao điểm của hai đường trung trực của các đoạn AE và AF). Từ đó, chân đường vuông góc M của I lên BC là trung điểm của đoạn EF , và $IM = r$ (3)

(r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$).

Cũng do các tam giác ABF và ACE cân, nên $EF = AB + AC - BC = 2r$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra tam giác IEF vuông cân tại I (5)

Từ (1), (2) và (5) ta nhận thấy EF là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle II_1I_2$. Do vậy, từ (4) ta có điều cần chứng minh. $\square$

<Nhận xét. 1) Kết quả của bài toán này là một trường hợp đặc biệt của bài **I.11** đã ra trên tạp chí TH&TT số 357, tháng 3 năm 2007 (trong mục *Chào IMO-2007*). Về mặt phương pháp, có thể sử dụng cách giải bài **I.11** nói trên cho bài **T7/360**. Tuy nhiên, do tam giác ABC vuông tại A , nên có cách giải gọn hơn như lời giải đã nêu trên.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Tây: Nguyễn Thế Anh, 9C, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyễn, 8/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bình Định:** Nguyễn Đồng Tiến, 8A3, THCS Lương Thế Vinh, TP. Quy Nhơn; **TP. Hồ Chí Minh:** Phan Trọng Khôi, 9/1, THCS Tùng Thiện Vương, Quận 8.

HỒ QUANG VINH

★ Bài T8/360. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + yf(x)), \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

TOÁN HỌC
& Tuổi trẻ

Số 364 (10-2007)

21

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Nhận xét rằng, nếu $f(x)$ là hàm số thỏa mãn bài toán và $f(x) \in (0; 1)$ thì khi thay $y = \frac{x}{1-f(x)}$ vào (1), ta thu được

$$f(x)f\left(\frac{x}{1-f(x)}\right) = f\left(\frac{x}{1-f(x)}\right), \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Suy ra $f(x) \equiv 1$, mâu thuẫn với giả thiết $f(x) \in (0; 1)$.

Vậy chỉ cần xét các hàm $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(x) \in [1; +\infty)$. Giả sử tồn tại $a \in \mathbb{R}^+$ sao cho $f(a) = 1$. Khi đó, từ (1) ta có

$$f(a)f(y) = f(a + yf(a)), \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Suy ra $f(y+a) = f(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}^+$ (2)

Mặt khác, ứng với mỗi $x \in \mathbb{R}^+$ cố định và $h \in \mathbb{R}^+$ cho trước, luôn tồn tại y để $yf(x) = h$. Từ (1) ta có

$$f(x+h) = f(x+yf(x)) = f(x)f(y) \geq f(x),$$

$\forall x \in \mathbb{R}^+.$

Kết hợp với (2), ta thu được $f(x) \equiv 1$. Thử lại, ta thấy $f(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài ra.

Tiếp theo, xét trường hợp $f(x) \in (1, +\infty)$. Ta có $f(x+h) = f(x+yf(x)) = f(x)f(y) > f(x)$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^+$, tức là $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ và do đó f là một đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$. Đổi vai trò của x và y trong (1), ta được

$$f(y)f(x) = f(y + xf(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (3)$$

So sánh (1) và (3) ta được

$$f(y + xf(y)) = f(x + yf(x)), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

hay $y + xf(y) = x + yf(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} = \frac{f(y)}{y} - \frac{1}{y}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Suy ra $\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} = \lambda, \forall x \in \mathbb{R}^+,$

hay $f(x) = \lambda x + 1, \lambda > 0$.

Thử lại, ta thấy $f(x) = \lambda x + 1, \lambda \geq 0$ thỏa mãn đề ra. $\square$

◀ **Nhận xét.** Đây là một bài toán về phương trình hàm liên quan đến tính cộng tính và đơn điệu của hàm số. Đa số các bạn đều giải tương tự như cách trình bày ở trên. Các bạn sau có lời giải tốt:

Thanh Hóa: Hoàng Đức Ý, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Bình Định:** Dương Tú, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đắk Lắk:** Nguyễn Đình Quốc Bảo, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T9/360.** Tìm số thực m lớn nhất sao cho tồn tại một số thực k thuộc đoạn $[1; 2]$ để bất đẳng thức

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^{2k} \geq (k+1)(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + m(1)$$

được thỏa mãn với mọi số thực dương bất kì a, b, c .

Lời giải. Giả sử m, k là các số thực, $1 \leq k \leq 2$ mà bất đẳng thức (BĐT) (1) đúng với mọi số thực dương a, b, c .

Xét với $a = b = c$, suy ra $3^{2k} \geq 9(k+1) + m$.

Do đó $9^k - 9(k+1) \geq m$. Mặt khác, theo BĐT Bernoulli ta có

$$9^k - 9(k+1) = 9((1+8)^{k-1} - k - 1) \leq 9(1+8(k-1) - k - 1) = 9(7k-8) \leq 9(7 \cdot 2 - 8) = 54.$$

Từ đó $m \leq 54$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh BĐT (1) đúng với $m = 54, k = 2$ và với bất kì các số thực dương a, b, c .

Thật vậy, dùng BĐT Cauchy cho các số thực dương ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^4 &\geq 9\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \left(\text{do } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\right) \\ &= 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)\right) \\ &\geq 9\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{c^2} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2} + 1\right) + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 3\right) \\ &\quad \left(\text{do } \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \geq 3; \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq 9 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 3 \right) \\ &= 9(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ &\geq 3(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 54 \\ &\left(\text{do } (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \right). \end{aligned}$$

Vậy số thực m lớn nhất cần tìm là $m = 54$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Bài toán trên thuộc dạng cơ bản, không quá khó. Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Vũ Văn Hiệp, 9A, THCS Đỗ Xuyên, Thanh Ba; **Thanh Hóa:** Trịnh Quang Thanh, 10T, Hoàng Đức Ý, 11T, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Công, 10A1, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Luật, 10A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn; **Bình Định:** Võ Xuân Thanh, 12A6, THPT số 2 Tuy Phước; **Vĩnh Long:** Châu Tuấn Kiệt, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/360.** Cho dãy số tăng (u_k) , $k = 1, 2, \dots, n$. Lập tập A_n gồm các số dương $u_i - u_j$ ($1 \leq j < i \leq n$). Chứng minh rằng nếu tập A_n có ít hơn n phần tử thì dãy (u_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, là một cấp số cộng.

Lời giải. (Theo bạn Trịnh Quang Thanh, 10T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa).

Giả sử $|A_n| = m < n$, suy ra $m + 1 \leq n$.

Đặt $t_1 = u_2 - u_1, t_2 = u_3 - u_1, \dots, t_m = u_{m+1} - u_1$.

Khi đó $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ và $t_i \in A_n$ do đó

$$A_n = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}.$$

Xét số $u_3 - u_2$. Ta có

$$u_3 - u_2 < u_3 - u_1 < \dots < u_{m+1} - u_1.$$

Do đó $u_3 - u_2 = t_1 = u_2 - u_1$.

Giả sử $u_k - u_2 = u_{k-1} - u_1$, $k \geq 3$. Ta chứng minh rằng điều này kéo theo $u_{k+1} - u_2 = u_k - u_1$.

Thật vậy, ta có $t_{k-1} = u_{k-1} - u_1 = u_k - u_2 < u_{k+1} - u_2 < u_{k+1} - u_1 = t_{k+1}$.

Do đó $u_{k+1} - u_2 = t_k = u_k - u_1$.

Thành thử $u_{k+1} - u_k = u_2 - u_1$, $\forall k = 1, 2, \dots, n-1$ hay (u_k) lập thành cấp số cộng. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn tham gia giải bài toán này đều làm đúng, tuy nhiên một số bạn lập luận còn chưa thật sáng sủa. Các bạn sau có lời giải tốt:

Bình Định: Dương Tú, 11T, THPT Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** Lê Phúc Lữ, 10T, THPT chuyên; **Vĩnh Long:** Châu Tuấn Kiệt, 10T THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Đắk Lắk:** Nguyễn Đình Quốc Bảo, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du.

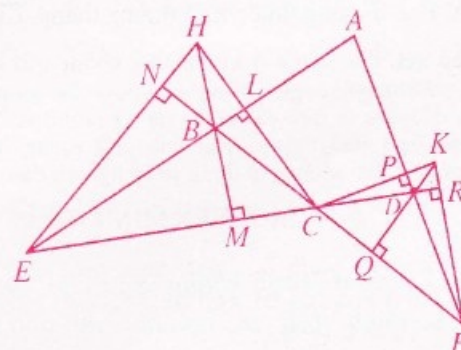
ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T11/360.** Cho tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối không song song và hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB và OCD cắt nhau tại X và O. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB và OCB cắt nhau tại Y và O. Các đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại Z và T. Chứng minh rằng bốn điểm X, Y, Z, T cùng thuộc một đường thẳng hoặc cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Bổ đề. Cho tứ giác ABCD. E là giao điểm của AB và CD; F là giao điểm của AD và BC. Khi đó các đường tròn đường kính AC, BD, EF có cùng trục đẳng phương.

Chứng minh. Gọi H, K tương ứng là trực tâm các tam giác ECB và FCD. (h. 1).



Hình 1

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{HL.HC} = \overline{HM.HB} = \overline{HN.HE} \\ \overline{KP.KC} = \overline{KQ.KD} = \overline{KR.KF} \end{cases}$$

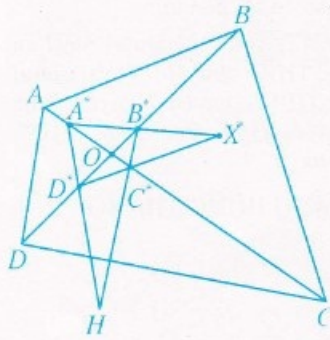
$$\text{suy ra } \begin{cases} \mathcal{P}_{H(AC)} = \mathcal{P}_{H(BD)} = \mathcal{P}_{H(EF)} \\ \mathcal{P}_{K(AC)} = \mathcal{P}_{K(BD)} = \mathcal{P}_{K(EF)}. \end{cases}$$

TOÁN HỌC

Số 364 (10-2007)

23

Nghĩa là HK là trục đẳng phương chung của các đường tròn đường kính AC, BD, EF .



Hình 2

Trở lại việc giải bài toán.

Xét phép nghịch đảo tâm O , phương tích R^2 $N_O^{R^2}$. Giả sử qua $N_O^{R^2}$ thì $A \rightarrow A^*, B \rightarrow B^*, C \rightarrow C^*, D \rightarrow D^*, X \rightarrow X^*, Y \rightarrow Y^*, Z \rightarrow Z^*, T \rightarrow T^*$ (h. 2)

Ta có $(OAB) \rightarrow A^*B^*, (OCD) \rightarrow C^*D^*, (OAD) \rightarrow A^*D^*, (OCB) \rightarrow C^*B^*$.

(Trong đó kí hiệu (XYZ) là đường tròn đi qua X, Y, Z).

Suy ra $X^* = A^*B^* \cap C^*D^*, Y^* = A^*D^* \cap C^*B^*$.

Z^*, T^* là giao của các đường tròn đường kính A^*C^*, B^*D^* .

Áp dụng bổ đề cho tứ giác $A^*B^*C^*D^*$ ta thấy Z^*T^* là trục đẳng phương chung của các đường tròn đường kính A^*C^*, B^*D^*, X^*Y^* .

Vậy X^*, Y^*, Z^*, T^* cùng thuộc một đường tròn, dẫn đến X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn hoặc X, Y, Z, T cùng thuộc một đường thẳng. $\square$

Nhận xét. Bài toán này khó nhưng không quá khó. Không có bạn nào giải đúng bài này. Có lẽ phép nghịch đảo còn là một cái gì đó rất xa lạ đối với các bạn học sinh phổ thông. Tòa soạn rất mong nhận được một lời giải không sử dụng phép nghịch đảo.

NGUYỄN MINH HÀ

★ Bài T12/360. Trong không gian cho đường gấp khúc đóng $A_1A_2...A_n$ có các cạnh tiếp xúc với mặt cầu $\mathcal{C}$ tâm O bán kính R . Gọi G là trọng tâm hệ điểm $A_i, i = 1, 2, ..., n$ (tức là $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$) và kí hiệu $\hat{A}_i = \widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$ (với quy ước: $A_0 = A_n$ và $A_{n+1} = A_1$).

Chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n \frac{GA_i}{\sin \frac{\hat{A}_i}{2}} \geq \frac{1}{nR} \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j \quad (*)$$

Lời giải. Gọi $T_1, T_2, ..., T_n$ lần lượt là tiếp điểm của mặt cầu $\mathcal{C}(O, R)$ với các đốt $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ của đường gấp khúc đóng $A_1A_2...A_n$.

Thế thì

$OT_1 = OT_2 = ... = OT_n = R$ và $A_iT_{i-1} = A_iT_i$ ($\forall i = 1, 2, ..., n$) (theo tính chất của tiếp tuyến với $\mathcal{C}$ xuất phát từ A_i). Suy ra $\widehat{OA_iA_{i-1}} = \widehat{OA_iA_{i+1}}$ và ta đặt độ lớn của cặp góc bằng nhau này là α_i .

Ngoài ra, giữa độ lớn các mặt $\hat{A}_i = \widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}, \alpha_i, \alpha_i$ của góc tam diện cân với đỉnh A_i và ba cạnh là $A_iO, A_iA_{i-1}, A_iA_{i+1}$. Ta có

$$\hat{A}_i = \widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}} \leq \widehat{OA_iA_{i-1}} + \widehat{OA_iA_{i+1}} = 2\alpha_i < \pi.$$

$$\text{Vậy } 0 < \frac{\hat{A}_i}{2} \leq \alpha_i < \frac{\pi}{2}, (\forall i = 1, 2, ..., n) \quad (1)$$

$$\text{do đó } 0 < \sin \frac{\hat{A}_i}{2} \leq \sin \alpha_i < 1 (\forall i = 1, 2, ..., n).$$

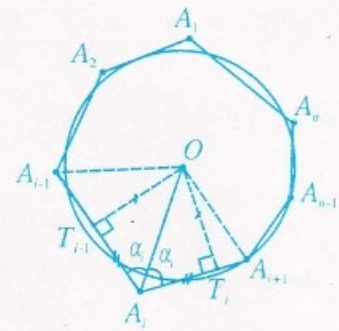
Từ đó và từ $R = OA_i \sin \alpha_i$ suy ra

$$\sum_{i=1}^n \frac{GA_i}{\sin \frac{\hat{A}_i}{2}} \geq \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n OA_i \cdot GA_i \quad (2)$$

Dấu đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức ở BĐT kép (1) xảy ra với $\forall i = 1, 2, ..., n$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi tất cả các góc tam diện có đỉnh ở các điểm A_i đều suy biến, cũng tức là trở thành "góc tam diện dẹt", do đó, mọi bộ "tứ điểm" $\{O, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}\}$ (với $\forall i = 1, 2, ..., n$) đều đồng phẳng. Ta đi đến kết luận: Dấu "=" ở (2) xảy ra khi và chỉ khi đường gấp khúc đóng được xét $A_1A_2...A_n$ là một n -giác phẳng (lồi) $\mathcal{P}$ nằm trong một mặt phẳng kính (chứa đường tròn lớn) của mặt cầu $\mathcal{C}(O, R)$ đã cho và ngoại tiếp đường tròn lớn $\mathcal{H}(O, R)$, là giao tuyến của mặt cầu $\mathcal{C}$ và mặt phẳng chứa n -giác $\mathcal{P}$ đó.

Lại vì $OA_i \cdot GA_i \geq \overline{OA_i} \cdot \overline{GA_i} (\forall i = 1, 2, ..., n)$

$$\text{nên } \sum_{i=1}^n OA_i \cdot GA_i \geq \sum_{i=1}^n \overline{OA_i} \cdot \overline{GA_i} \quad (3)$$



Thay $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_i}$ vào vế phải của (3) và để ý $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$, ta được

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^n GA_i^2 \quad (4)$$

Mặt khác, từ $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ hay $\left(\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA_i}\right)^2 = 0$,

và từ hệ thức $2\overrightarrow{GA_i} \cdot \overrightarrow{GA_j} = GA_i^2 + GA_j^2 - A_i A_j^2$ ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$) ta được

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n GA_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \overrightarrow{GA_i} \cdot \overrightarrow{GA_j} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \overrightarrow{GA_i} \cdot \overrightarrow{GA_j} = (n-1) \left(\sum_{i=1}^n GA_i^2 \right) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2 \end{array} \right. \quad (6)$$

Từ (2), (3), (4), (5) và (6) thu được BĐT (*) cần tìm. Đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng thức ở (2) và (3) đồng thời xảy ra. Dễ thấy rằng đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi ba điểm O, G, A_i thẳng hàng với $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Điều đó chỉ xảy ra khi $G \equiv O$ (vì nếu G không trùng với O thì tất cả các điểm A_i đều nằm trên một đường thẳng OG , mâu thuẫn với giả thiết). Ta đi đến kết luận: Đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi đường gấp khúc đóng n đốt $A_1 A_2 \dots A_n$ là một n -giác phẳng (lồi) ngoại tiếp một đường tròn lớn $\gamma(O, R)$ của mặt cầu $\mathcal{C}(O, R)$ là giao tuyến của $\mathcal{C}$ và mặt phẳng kính (của $\mathcal{C}$) chứa n -giác đó), đồng thời trọng tâm G của hệ các điểm $\{A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ trùng với tâm O của mặt cầu $\mathcal{C}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Các bạn tham gia giải bài toán trên không nhiều và đều sử dụng phép toán vectơ, trong đó có một BĐT về vectơ là BĐT (3). Đáng tiếc trên nửa số bạn đã không chú ý đầy đủ khi biện luận về điều kiện cần và đủ để xảy ra dấu bằng thức ở (*) nên đã để sót 1 trong 2 tính chất đặc trưng của đường gấp khúc đóng $A_1 A_2 \dots A_n$ được xét khi biểu thức (*) trở thành đẳng thức. Căn nguyên của thiếu sót này chính là các bạn đó đã không để ý đến BĐT (1) về tính chất các mặt của một góc tam diện mà chỉ quan tâm đến BĐT hiển nhiên (3) về tích vô hướng của hai vectơ.

2) Từ (5) và (6) ta được đẳng thức

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2 = n \left(\sum_{i=1}^n GA_i^2 \right) \quad (7)$$

- Để ý rằng (7) đúng với mọi n -giác $A_1 A_2 \dots A_n$ phẳng hoặc gập, trong đó G là trọng tâm của hệ các đỉnh $\{A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Ta có kết quả sau đây: "Trong mọi n -giác (phẳng hoặc gập), tổng bình phương các cạnh và các đường chéo gấp n lần tổng bình phương các khoảng cách từ trọng tâm của hệ các đỉnh của n -giác đó đến các đỉnh của nó".

- Ngoài ra, từ (3) và (4) thu được

$$\sum_{i=1}^n GA_i \cdot OA_i \geq \sum_{i=1}^n GA_i^2$$

ở đây O là tâm mặt cầu $\mathcal{C}$ "ngoại tiếp" n -giác $A_1 A_2 \dots A_n$.

Tuy nhiên, ta chứng minh được rằng BĐT này đúng với mọi điểm O của không gian. Nhân đây, các bạn hãy kiểm nghiệm để khẳng định rằng mỗi một BĐT rút ra từ BĐT kép sau đây đều là một trong ba BĐT đặc trưng cho trọng tâm G của một hệ n điểm $\{A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Đó là

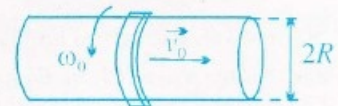
$$\sum_{i=1}^n GA_i^2 \leq \sum_{i=1}^n GA_i \cdot MA_i \leq \sum_{i=1}^n MA_i^2, (\forall M) \quad (**)$$

3) Nói khác đi $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ tương đương với một trong ba BĐT rút ra từ (**). Có hai bạn đã ngộ nhận rằng (*) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $A_1 A_2 \dots A_n$ là đa giác đều và $G \equiv O!!!$ Chẳng hạn các bạn có thể kiểm chứng rằng với hình thoi $A_1 A_2 A_3 A_4$ (khi $n = 4$), tuy không là hình vuông nhưng đẳng thức vẫn xảy ra ở (*).

4) Hai bạn **Vũ Thanh Tú**, 10A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang, **Hải Dương** và **Võ Xuân Thanh**, 12A6, THPT số 2 Tuy Phước, **Bình Định** có lời giải tốt hơn cả.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

★ **Bài L1/360.** Một vòng nhẫn được lồng vào một cái thanh dài hình trụ bán kính R như hình vẽ. Khi truyền cho vòng một vận tốc góc ω_0 thì vòng sẽ dừng lại sau thời gian t_0 . Nếu đồng thời vừa cấp cho vòng vận tốc góc ω_0 vừa truyền cho nó vận tốc dài v_0 dọc theo trục của thanh thì vòng sẽ chuyển động được quãng đường dọc theo thanh cho đến khi nó dừng hẳn là bao nhiêu? Biết rằng vòng nhẫn tiếp xúc khít với thanh lực cản chuyển động đối với mỗi điểm của vòng nhẫn không đổi theo thời gian và luôn luôn hướng ngược chiều với vận tốc của điểm đó. Bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực.

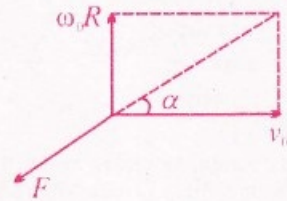


TOÁN HỌC

Tuổi trẻ Số 364 (10-2007) **25**

Lời giải. • Xét trường hợp vòng chỉ chuyển động quay: Ở thời điểm ban đầu, mỗi điểm trên vòng sẽ có vận tốc dài $v = \omega_0 R$. Do tác dụng của lực cản không đổi, vận tốc này giảm theo thời gian theo công thức $v_t = \omega_0 R - a.t$, trong đó a là gia tốc của mỗi điểm trên vòng $a = \frac{\omega_0 R}{t_0}$.

• Xét vòng nhận vừa quay vừa tịnh tiến: Vận tốc của mỗi



điểm ở thời điểm ban đầu là $u_0 = \sqrt{v_0^2 + (\omega_0 R)^2}$. Do lực cản không đổi nên vận tốc này cũng giảm theo thời gian theo công thức $u_t = u_0 - a.t$. Tại mỗi điểm trên vòng, lực cản không làm đổi hướng mà chỉ làm thay đổi độ lớn của vận tốc.

Do vậy, thời gian chuyển động của vòng trong trường hợp này là

$$t_1 = \frac{1}{a} \sqrt{v_0^2 + (\omega_0 R)^2} = \frac{t_0}{\omega_0 R} \sqrt{v_0^2 + (\omega_0 R)^2} \quad (1)$$

Quãng đường vòng đi được dọc theo thanh là

$$S = v_0 t_1^2 - a \cos \alpha \cdot \frac{t_1^2}{2} \quad (2)$$

$$\text{trong đó } \cos \alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + (\omega_0 R)^2}} \quad (3)$$

Thay (1) và (3) vào (2) ta được

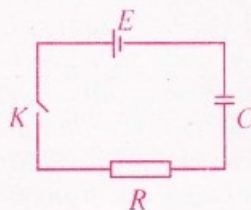
$$S = \frac{v_0 t_0}{2 \omega_0 R} \sqrt{v_0^2 + (\omega_0 R)^2} \cdot \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt:

Bác Ninh: Nguyễn Văn Bảo, Nguyễn Thành Linh, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nghe An:** Võ Thành Luân, 11A2, THPT Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, Trần Văn Thắng, A3 K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, Tp. Vinh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/360.** Một tụ có điện dung C được nạp điện tới hiệu điện thế $3E$, sau đó được mắc vào mạch điện như



hình vẽ, đóng khoá K. Hãy xác định nhiệt lượng tỏa ra trên điện trở R khi bỏ qua điện trở trong của nguồn.

Lời giải. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Trước khi đóng khoá K, bản trên của tụ điện tích điện dương. Năng lượng

$$\text{của tụ điện là } W_0 = \frac{C \cdot (3E)^2}{2} = \frac{9}{2} CE^2.$$

Sau khi đóng khoá K, ở trạng thái ổn định (không có dòng điện trong mạch), lúc này hiệu điện thế giữa hai bản tụ điện bằng E .

Trong khoảng thời gian bắt đầu đóng khoá K cho đến khi mạch ở trạng thái ổn định (không có dòng điện trong mạch) đã có một lượng điện tích $\Delta q = 3CE - (-CE) = 4CE$ chạy qua nguồn từ cực âm sang cực dương, do đó nguồn thực hiện công dương: $A = \Delta q \cdot E = 4CE^2$.

Năng lượng của tụ điện khi mạch ở trạng thái ổn định là $W = \frac{1}{2} CE^2$.

Nhiệt lượng tỏa ra trên điện trở R là

$$Q = W_0 + A - W = \frac{9}{2} CE^2 + 4CE^2 - \frac{1}{2} CE^2 = 8CE^2.$$

Trường hợp 2. Trước khi đóng khoá K, bản dưới của tụ điện mang điện dương.

Sau khi đóng khoá K, ở trạng thái ổn định, hiệu điện thế giữa hai bản tụ bằng E .

Trong khoảng thời gian bắt đầu đóng khoá K cho đến khi mạch ở trạng thái ổn định đã có một lượng điện tích $\Delta q' = 3CE - CE = 2CE$ chạy qua nguồn từ cực dương sang cực âm, do đó nguồn thực hiện công âm (nguồn như một máy thu điện). $A' = -\Delta q'E = -2CE^2$

Nhiệt lượng tỏa ra trên điện trở R là

$$Q' = W_0 + A' - W = \frac{9}{2} CE^2 - 2CE^2 - \frac{1}{2} CE^2 = 2CE^2. \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Tây: Nguyễn Mạnh Quân, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Quảng Ngãi:** Lê Huyền Trang, 11 Văn, THPT chuyên Lê Khiết; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thành Linh, Nguyễn Văn Bảo, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh.

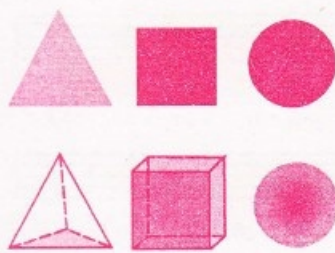
NGUYỄN VĂN THUẬN

Bạn có biết ?

Những bài toán về lấp không gian

Vấn chưa được hoàn chỉnh

Stanilas Ulam đã khẳng định rằng các khối cầu choán đầy không gian kém hơn mọi khối lồi khác. John Conway vừa chứng minh rằng các khối tứ diện có thể lấp không gian cũng tồi và có thể còn tồi hơn.



Tam giác, hình vuông, hình tròn là ba hình dạng cơ bản của mặt phẳng. Tương ứng hình tứ diện, hình lập phương, hình cầu là ba hình dạng cơ bản của không gian.

Trong những năm bảy mươi của thế kỉ trước, Stanilas Ulam đã khẳng định với chuyên gia trò chơi toán học Martin Garduer rằng trong tất cả các khối lồi (không rỗng), hình cầu là khối lát không gian kém nhất. Đây là một phỏng đoán về một trong những bài toán lấp không gian, có vẻ đơn giản nhưng chưa có ai giải được. John Conway, nhà sáng tạo trò chơi cuộc sống và bạn đồng nghiệp Salvatore Torquato ở trường đại học Princeton đều có ý định cho rằng Ulam đã nhìn nhận sai. Những bài toán lấp không gian là gì? Trong

mặt phẳng người ta có thể đặt những hình vuông không đè lên nhau để lấp kín, không có lỗ hổng nào. Cũng có thể như vậy với các hình tam giác đều hoặc hình lục giác đều, nhưng không thể với những hình ngũ giác đều. Với không gian ba chiều, có thể lấp kín không gian với những khối lập phương, nhưng không thể với

những khối cầu. Trong trường hợp lấp kín không thể làm được, thì thể tích tối đa có thể đạt được là bao nhiêu với một mẫu hình cho trước (không có sự chồm lên nhau)?

Khi tìm tòi những cách mới xếp những khối tứ diện ở trong không gian. John Conway và Salvatore Torquato đã tìm ra một cách cho phép lấp đầy không gian tới gần 72%. Còn Thomas Hales vừa chứng minh rằng thể tích tối đa có thể đạt được với những khối cầu là khoảng 74% (một kết quả đã được Johannes Kepler khẳng định và bốn thế kỉ sau mới chứng minh được).

Lúc này chưa thực sự đạt được phần không gian tối đa có thể có được với các khối tứ diện, hai nhà toán học John Conway và Salvator Torquato cho rằng ít có khả năng làm tốt hơn điều mà họ đã tìm ra. Nói cách khác, nếu sự trực giác của họ mà đúng thì phỏng đoán của Ulam là sai. Thế là khối tứ diện sẽ thay thế khối cầu với tư cách là khối lồi lấp đầy không gian kém nhất.

NGUYỄN VĂN THIÊM

(Theo La Recherche tháng 9-2006)

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/364. Suppose that M, N and P are three points lying respectively on the edges AB, BC, CA of a triangle ABC such that

$$AM + BN + CP = MR + NC + PA.$$

Prove the inequality $S_{MNP} \leq \frac{1}{4} S_{ABC}$.

T10/364. Find the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdots \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} \right)_{n \text{ signs of radical}}$$

T11/364. Denote by $[x]$ the largest integer not exceeding x and write $\{x\} = x - [x]$. Find the limit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{(7 + 4\sqrt{3})^n\}$.

T12/364. Let n be a positive integer and $2n + 2$ real numbers $a, b, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ such that $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) and the

function $F(x) = \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i x + b_i} - (ax + b)$ satisfies the following property: There exists distinct real numbers α, β such that $F(\alpha) = F(\beta) = 0$. Prove that α and β are the only real solutions of the equation $F(x) = 0$.

LÊ MINH HÀ dịch

TOÁN HỌC

Tuổi trẻ Số 364 (10-2007) 27

LTS: Đây là bài hát của tác giả Trần Phương sáng tác vào ngày 29/7/2007, bài hát này đã được Ban Tổ chức chọn làm bài hát chính thức trong Lễ bế mạc IMO 48 lúc 18h20 ngày 30/7/2007 tại Trung tâm Hội nghị Quốc gia, Hà Nội, Việt Nam.

IMO IN FLAMES

(Ngọn lửa IMO)

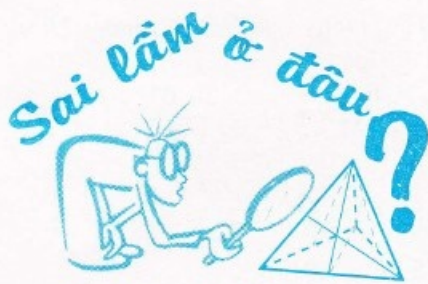
Music : TRAN PHUONG

(Email: tranphuong.math @ yahoo.com)

Ballade (♩ = 66)

The musical score is written in treble clef with a key signature of one sharp (F#) and a 4/4 time signature. The tempo is marked as 'Ballade' with a quarter note equal to 66 beats per minute. The melody is composed of eighth and quarter notes, with some rests. The lyrics are written in English and Vietnamese below the notes. The score includes a double bar line with a repeat sign and first/second endings.

Side - by - side we're com - ing. All for Vic - to - ry.
Bạn bè năm châu tới đây. Bao khát khao thi tài,
Let's light up with str - ong be - lief in win. O -
cùng thấp sáng lên rực cháy trong tim niềm tin. Mở
pen up our hearts. In the love for Maths and
rộng vòng tay bốn phương. Trong tình yêu toán học cùng
hand in hand b - right - ly shine I M O.
năm tay nhau chờ đón vinh quang I M O.
I M O holds us to - gether to make us al - ways shine.
I M O kết nối chúng ta, để chúng ta luôn tỏa sáng.
I M O holds na - tions - to make a bet - ter world.
I M O kết nối năm châu, để khắp năm châu rạng ngời.
I M O lights up, thou - sands of ta - lents.
I M O in flames, of the human know - ledge.
I M O thấp sáng, bao tài năng tri thức.
I M O sáng mãi, nơi đỉnh cao tri thức.
1. Though the way a - head, we'll - try the best to come
Gi - vâng us a dream, and will
Con đường đi phía trước, dù còn lắm chông gai vượt qua.
Chân trời xa mờ ước, và còn
2. be still in our heart.
mãi trong ta I M O.



Giải đáp bài: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT “Quá nhỏ”?

(Đề đăng trên THPT số 354, tháng 12.2006)

• Nhận thấy rằng, khi $a = b = -\frac{1}{2}$ thì $A = -\frac{5}{2} \neq -\frac{25}{4}$. Chứng tỏ $A = -\frac{25}{4}$ không phải là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Nguyên nhân dẫn đến sai lầm ở lời giải đã nêu là việc xét điều kiện để các bất đẳng thức trở thành đẳng thức (cả hai bất đẳng thức (1) và (2) được đánh giá trong lời giải không đồng thời trở thành đẳng thức).

Cụ thể là nếu giá trị nhỏ nhất của A là $-\frac{25}{4}$

$$\text{thì phải có } \begin{cases} a = b = -\frac{1}{2} \\ 2a^2 + 3b^2 = 5. \end{cases}$$

Dễ thấy không có bộ số thực $(a; b)$ nào thỏa mãn hệ điều kiện trên.

• Giải lại bài toán:

Sử dụng BDT Bunyakovski cho hai bộ số $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ và $(a\sqrt{2}; b\sqrt{3})$ ta có

$$A^2 = (a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + b\sqrt{3} \cdot \sqrt{3})^2 \leq 5(2a^2 + 3b^2) \leq 25 \quad (\text{do } 2a^2 + 3b^2 \leq 5).$$

Suy ra $-5 \leq A \leq 5$.

$$\text{Ta có } A = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2a + 3b = -5 \\ 2a^2 + 3b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -1.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là -5 , đạt được khi và chỉ khi $a = b = -1$.

• Nhận xét. Đây là một sai lầm khá phổ biến, quen thuộc nên có rất nhiều bạn đọc gửi lời bình về Tòa soạn. Tất cả đều chỉ đúng chỗ sai trong lời giải, đồng thời đưa ra được kết quả đúng $A_{\min} = -5 \Leftrightarrow a = b = -1$. Sau đây là năm bạn có đáp án tốt hơn cả được nhận tặng phẩm của tòa soạn: **Trần Bá Bách**, Địa chỉ: 8C, Võng Thị, Tây Hồ, Hà Nội; **Nguyễn Quang Chấn**, 10A1, THPT Yên Phong 1, Bắc Ninh; **Trần Thế Phúc**, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương; **Nguyễn Quốc Hội**, 10A2, khối THPT chuyên ĐH Vinh, Nghệ An; **Tô Anh Tin**, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, Bình Định.

NGỌC HIỀN

Đề ra có vấn đề?

Một bạn học sinh đưa ra cách giải bài toán (câu V, đề thi tuyển sinh vào Đại học, khối D, năm 2004):

Chứng minh phương trình sau có nghiệm duy nhất: $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$ (1)

như sau: Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $x^5 - (x+1)^2 = 0$ (2), suy ra $x \geq 0$.

PT (2) tương đương với

$$\left(x^{\frac{5}{2}} - x - 1\right)\left(x^{\frac{5}{2}} + x + 1\right) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Đặt } t = x^{\frac{1}{2}} \geq 0, \text{ lúc đó } t^5 + t^2 + 1 > 0 \quad (4)$$

$$\text{PT (3) trở thành } (t^5 - t^2 - 1)(t^5 + t^2 + 1) = 0.$$

Từ (4) suy ra PT $t^5 - t^2 - 1 = 0$ có nghiệm $t \geq 0$, dẫn đến PT $x^5 - x^2 - 1 = 0$ có nghiệm $x \geq 0$.

Kết hợp với PT (1) được $-2x = 0$, hay $x = 0$. Thử lại, thấy $x = 0$ không phải là nghiệm. Vậy PT đã cho vô nghiệm?

Bạn học sinh ấy rất băn khoăn chẳng lẽ đề bài có vấn đề? Các bạn hãy giải thích giúp bạn ấy nhé!

NGUYỄN CHÍ LINH
(Krông Năng, Đắk Lắk)

Kết quả cuộc thi...

(Tiếp bài 3)

Cách 2.

Bước 1	2	3	4	5	6
(Ec)	(Cb)	(Af)	(Ee)	(Dc)	(Ca)

Bước 7	8	9	10	11	12
(Ab)	(Bf)	(Dd)	(Cc)	(Aa)	(Bb)

LÊ BÍCH

Câu 6:

CÁNH ĐIỀU

Gọi bán kính hình quạt là $R(m)$, độ dài cung tròn là $x(m)$ (với $R > 0$, $x > 0$).

Khi đó chu vi hình quạt là $2R + x = 20,07(m)$ và diện tích hình quạt là $S = \frac{Rx}{2} (m^2)$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương $2R$ và x , ta có

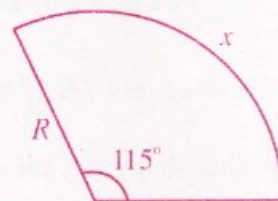
$$S = \frac{2R \cdot x}{4} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} (2R + x)^2 = \frac{20,07^2}{16}.$$

$$S = \frac{20,07^2}{16} \Leftrightarrow 2R = x = \frac{20,07}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 10,035 ; R = 5,0175.$$

Vậy với dây thép dài $20,07m$, có thể làm một mô hình cánh điều hình quạt tròn có diện tích lớn nhất là $\frac{20,07^2}{16} = 25,1753065(m)^2$.

Khi đó bán kính hình quạt bằng nửa độ dài cung tròn (và bằng $5,0175m$) và góc ở tâm bằng $\frac{180 \cdot x}{\pi R} \approx 115^\circ$ (bằng $2rad$).



VĨNH LINH

Danh sách các bạn đoạt giải TOÁN HỌC VUI 2007

Giải Nhất. (1 giải).

Nguyễn Kiều Nga, 12A2, Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội.

Giải Nhì. (3 giải)

1. Nguyễn Hằng Giang, Thôn 3, Nhân Mỹ, Lý Nhân, Hà Nam;
2. Trần Văn Hạnh, Đội 9, Nghĩa An, Ninh Giang, Hải Dương;
3. Nhữ Văn Vịnh, 11A1, THPT Tân Yên II, Tân Yên, Bắc Giang;

Giải Ba. (3 giải)

1. Lê Thanh Ngân Sơn, 11A2, Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội;
2. Lê Minh An, Xóm 2, Xuân Phú; Xuân Trường, Nam Định;
3. Hoàng Văn Đông, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đồ Lương, Nghệ An.

Giải Khuyến khích (6 giải)

1. Nguyễn Ngọc Đăng, 11A1, THPT Phú Xuyên A, Phú Xuyên, Hà Tây;
2. Nguyễn Đình Tương, 9A, THCS Phú Lâm, Hà Đông, Hà Tây;
3. Huỳnh Khánh Vân, 8E, THCS Trần Quốc Toàn, Tp. Tuy Hòa, Phú Yên;
4. Lê Ngọc Hải, 9C, THCS Trần Phú, Nông Cống, Thanh Hóa;
5. Dương Hoàng Huy, Số nhà 1, Tổ 5, Khối 10, TTr. EaT'ling, CưJut, Đắk Nông;
6. Hạ Văn Thanh, Xóm 6, An Lộc, Trung An, Vũ Thư, Thái Bình.

Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải.

THTT



Câu hỏi đơn giản nhưng trả lời không dễ chút nào! Nếu là nhà toán học, bạn sẽ trả lời:

- Trăm là số lượng phần tử của một tập hợp gồm 100 phần tử.
- Trăm là số thứ tự của phần tử đứng sau 99 phần tử trong một dãy sắp thứ tự ($a_1, a_2, \dots, a_{99}, a_{100}$).
- Trăm là đơn vị của hàng trăm (bằng 10^2 đơn vị) trong hệ thập phân, và cũng dùng để tính bội các đại lượng (1 ha = 100a, 1 tạ = 100kg, ...)

Nhưng trăm không chỉ dùng để tính toán, đo đếm một cách chính xác như trên mà trong đời sống, trong văn học, ..., trăm còn có nhiều ý nghĩa tượng trưng trong các ngữ cảnh khác nhau.

- Trăm biểu thị số lượng tương đối lớn, nhiều lần:
Trăm mỗi tối nằm không; Trăm cái đám không bằng một cái dạp; Trăm bó đuốc cũng vớ được một con ếch; Trăm nghe không bằng một thấy; ...
- Trăm chỉ số lượng khá lớn, khó mà đếm được:
Trăm hoa đua nở; Trăm công ngàn việc; Trăm đường nghìn lối; Trăm phương nghìn kế; Trăm cay ngàn đắng; Trăm thứ bà giằn; Làm dâu trăm họ...
- Trăm đứng cạnh số khác có ý so sánh:
Một đồn mười, mười đồn trăm; Trăm kẻ bán, vạn người mua; ...
- Trăm gắn với nghĩa hầu hết, dường như tất cả:
Trăm dầu đổ dầu tầm; Bá cáo cho trăm họ biết; Trăm sự nhờ trời; Trăm sông đổ vào một biển; ...



TRĂM? có nghĩa là gì

- Trăm biểu thị cho sự hiểu biết rộng
Trăm hay không bằng tay quen; Trăm khôn dòn một đại; ...
- Trăm tượng trưng cho cả đời người
Trăm năm trong cõi người ta; Sống lâu trăm tuổi; Kết bạn trăm năm; ...
- Trăm thể hiện thời gian rất lâu, hoặc có thể coi là mãi mãi

*Trăm năm bia đá thì mòn,
Ngàn năm bia miệng vẫn còn trơ trơ;*

*Trăm năm dầu lỗi hẹn hò,
Cây đa bến cũ con đò chốn xưa;*

*Trăm năm ai chớ quên ai,
Chỉ thù nên găm sắt mài nên kim....*

Chắc chắn rằng vài dòng trên chưa thể ghi hết các thành ngữ, tục ngữ, cách dùng số trăm, từ trăm trong tiếng Việt, các bạn có thể tiếp tục mách giúp.

Còn bây giờ các bạn đang cầm trên tay số THPT tháng 10 năm 2007, xin hỏi : MUỖI (CHỤC) có nghĩa là gì?

Những câu trả lời cùng tên các bạn có nhiều ý hay sẽ đăng trên THPT số tháng 12.2007. Hãy nhanh tay viết các bạn nhé.

VÂN KHANH

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 364(10.2007)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.5121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272, 04.5121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,
TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,
PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,
TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,
PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY,
GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools

Bùi Văn Có – Dùng ẩn phụ để rút gọn biểu thức và giải phương trình có chứa căn thức.

3 Lời giải đề thi vào lớp 10 khối THPT chuyên Trường Đại học Vinh năm học 2007–2008.

5 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2007–2008.

6 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation

Đặng Thanh Hải, Trần Tuyết Thanh –

Một số bài toán xác định các yếu tố trong tam giác.

10 Vũ Đình Hòa – Lời giải các bài toán thi Học sinh giỏi Quốc gia THPT năm học 2006–2007.

12 Phương pháp giải toán – Math Problem Solving

Huỳnh Lâm Linh – Đại số hóa lượng giác.

14 Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum

Nguyễn Mộng Hy – Giới thiệu Sách giáo khoa Hình học 11.

16 Đề ra kì này – Problems in This Issue

T1/364... T12/364, L1/364, L2/364.

18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems

Giải các bài của số 360.

27 Bạn có biết? – Do you know?

Nguyễn Văn Thiêm – Những bài toán về lập không gian vẫn chưa được hoàn chỉnh.

28 Trần Phương – Bài hát IMO in Flames.

29 Sai lầm ở đâu – Where's mistakes?

31 Câu lạc bộ – Math Club

Bìa 3: Toán học Vui – Math Fun

Đáp án đợt 2.

Kết quả Cuộc thi Toán học Vui năm 2007.

Biên tập : HỒ QUANG VINH. Mi thuật : MINH THO. Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330



KẾT QUẢ CUỘC THI

Toán học vui 2007

ĐÁP ÁN ĐỢT 2

Đề ra của Cuộc thi gồm 6 câu đố vui, được đăng trên THPT số 360 (tháng 6/2007) và số 361 (tháng 7/2007). Cuộc thi này được các bạn hưởng ứng sôi nổi và nhiều bạn đã gửi bài về Tòa soạn khá sớm. Có nhiều bài làm đúng và trình bày rất công phu, điển hình là bạn Nguyễn Kiều Nga, 12A2, Khối THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội. Bạn cũng là người đoạt giải Nhất của cuộc thi này. Vậy là chúng ta đã có một cuộc thi bổ ích cho một kì hè lí thú. Hẹn gặp lại các bạn vào kì hè năm sau. Sau đây là đáp án của Đợt 2 và danh sách các bạn đoạt giải cuộc thi TOÁN HỌC VUI.

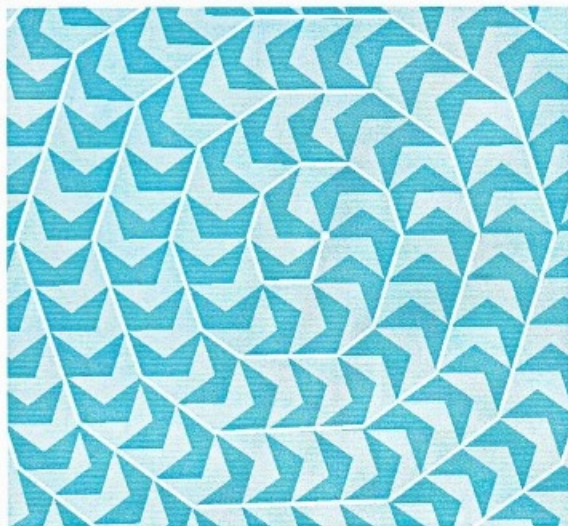
Câu 4:

LẮT QUẢNG TRƯỜNG

Chú ý rằng bốn đỉnh ở bốn góc nhỏ hơn 180° của viên gạch tạo thành bốn đỉnh của một ngũ giác đều (h. 1), từ đó ta có cách sắp xếp các viên gạch này theo hình xoắn ốc như ở hình 2, hoặc có thể theo các hàng song song cách đều mà một phần của cách này cũng thấy trên hình 2 (xem bìa 1).



Hình 1



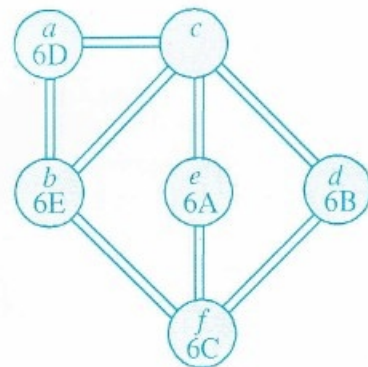
Hình 2

VÂN KHANH

Câu 5:

CHUYỂN LỚP

Số lần chuyển từ phòng này sang phòng khác theo đường đi trên sơ đồ ít nhất là 12. Kí hiệu lớp 6A chuyển đến phòng c là (Ac), ta đưa ra hai cách chuyển thỏa mãn đề bài như sau:



Cách 1.

Bước 1	2	3	4	5	6
(Bc)	(Cd)	(Ef)	(Db)	(Ba)	(Ac)

Bước 7	8	9	10	11	12
(Ee)	(Df)	(Bb)	(Aa)	(Cc)	(Dd)

(Xem tiếp trang 30)

TRƯỜNG THCS YÊN LẠC, HUYỆN YÊN LẠC, TỈNH VINH PHÚC



Hiệu trưởng, Bí thư chi bộ
NGUYỄN XUÂN TRANH

Trường THCS Yên Lạc, huyện Yên Lạc, tỉnh Vĩnh Phúc được thành lập ngay sau khi tái lập huyện Yên Lạc năm 1996, với nhiệm vụ và mục tiêu là phát hiện và bồi dưỡng học sinh giỏi phục vụ Chiến lược đào tạo học sinh giỏi cho huyện Yên Lạc và cho tỉnh Vĩnh Phúc.

Suốt chặng đường hơn 10 năm xây dựng, phấn đấu và trưởng thành, các thế hệ thầy và trò của nhà trường đã góp công xây dựng truyền thống dạy tốt, học tốt.

Những năm gần đây trong công tác bồi dưỡng học sinh giỏi, nhà trường luôn được xếp thứ hạng cao trong Tỉnh. Năm học 2005 - 2006 là đơn vị lá cờ đầu khối THCS, đứng đầu tỉnh về số giải Học sinh giỏi Quốc tế (4 Huy chương Vàng, 1 Huy chương Bạc Toán Singapore mở rộng; 1 Huy chương Đồng các môn khoa học Quốc tế và Khu vực). Trong Cuộc thi giải toán nhanh trên máy tính bỏ túi Casio, liên tục các năm nhà trường đều có học sinh đoạt giải: năm học 2006-2007 đoạt 2 giải Nhì, 1 giải Ba và 1 giải Khuyến khích.

Hàng năm trường có nhiều học sinh thi đỗ vào các trường chuyên của tỉnh Vĩnh Phúc và các Khối chuyên của các trường đại học có danh tiếng.

Học sinh của trường rất tích cực tham gia giải bài trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ và đã có nhiều em đoạt giải trong các cuộc thi của tạp chí.

Bên cạnh công việc đào tạo và bồi dưỡng nhân tài cho đất nước, nhà trường cũng rất quan tâm đến việc giáo dục toàn diện cho học sinh. Các em trường THCS Yên Lạc không chỉ học giỏi mà hát rất hay, tham gia các phong trào thể dục thể thao rất sôi nổi và đạt nhiều thành tích cao.

Các thầy, cô giáo của trường là những thầy cô có chuyên môn giỏi, tâm huyết với nghề nghiệp, 100% các thầy, cô giáo là giáo viên giỏi cấp huyện, cấp tỉnh.

Với những thành tích vinh dự và đáng tự hào trên, năm 2007 nhà trường đã được Nhà nước phong tặng Huân chương Lao động Hạng Ba và liên tục nhiều năm liền là đơn vị Tiên tiến Xuất sắc cấp Tỉnh.

Thời gian 10 năm đi qua chưa dài, nhưng những gì mà nhà trường đã đạt được hứa hẹn một kết quả tốt đẹp trong chặng đường sắp tới, xứng đáng với mảnh đất hiếu học, cần cù của huyện Yên Lạc.



Từ trái sang phải: Bà Nguyễn Thị Quý (Hiệu phó), Ông Nguyễn Xuân Thuồng (Bí thư huyện ủy Yên Lạc), Ông Nguyễn Xuân Tranh (Hiệu trưởng) và Ông Nguyễn Ngọc Hải (Hiệu phó)



Tiết mục văn nghệ của học sinh trong buổi lễ đón nhận Huân chương

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT66M7

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2007

Giá : 5000 đồng

Năm nghìn đồng