



# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964  
**8** 2007  
Số 362

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 44

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272, (04)5121606

Email: [tapchitoanhoc\\_tuoiitre@yahoo.com.vn](mailto:tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn) Web: [http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc\\_tuoiitre](http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre)



*Toàn cảnh Trường Trung học phổ thông Nguyễn Trãi, Hải Dương*

## Kết quả kì thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 48





Hà Nội, ngày 2 tháng 8 năm 2007

## Thư cảm ơn

Kính gửi: Ông Ngô Trần Ái, Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm Tổng Giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục.

Thay mặt Bộ Giáo dục và Đào tạo và Ban tổ chức Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 48 năm 2007 tại Việt Nam (IMO 2007), tôi chân thành cảm ơn sự tài trợ của Nhà xuất bản Giáo dục cho việc biên soạn, biên tập, in ấn, phát hành quyển sách *The Vietnamese Mathematical Olympiad (1990-2006)* và số tạp chí Toán học và Tuổi trẻ bằng tiếng Anh để tặng thành viên các đoàn và các đại biểu tham dự IMO 2007, nhằm giúp bạn bè quốc tế hiểu thêm về nền giáo dục toán học Việt Nam, đồng thời quảng bá hình ảnh Việt Nam, trong đó có Nhà xuất bản Giáo dục, góp phần làm nên thành công của IMO 2007.

Chúc Nhà xuất bản Giáo dục ngày càng phát triển.

Chúc đồng chí dồi dào sức khỏe.

KT. BỘ TRƯỞNG  
THỨ TRƯỞNG  
TRẦN VĂN NHUNG

## THƯ NGỎ CỦA TỔNG GIÁM ĐỐC NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Hà Nội, ngày 10 tháng 8 năm 2007



Bạn đọc thân mến!

Năm học mới (2007-2008) sắp về, các bậc phụ huynh, quý thầy cô giáo và các em học sinh đang chuẩn bị và nô nức đón ngày khai giảng, một trong những ngày hội lớn của ngành Giáo dục.

Năm học 2006-2007, ngành Giáo dục và Đào tạo đã tổ chức cuộc thi Toán Quốc Tế (IMO 2007). Qua cuộc thi, những học sinh giỏi toán nước ta không chỉ đã chứng tỏ được lòng yêu hòa bình, tinh thần thiện với bạn bè năm châu bốn bể, mà còn thể hiện được bản lĩnh, tinh thần hiếu học và trí tuệ của học sinh Việt Nam.

Chúng tôi rất tự hào, vì đa số các học sinh giỏi toán và đạt giải cao trong kì thi Toán Quốc tế là những bạn đọc trung thành, tiêu biểu cho hàng triệu bạn đọc thường xuyên của báo *Toán học và Tuổi trẻ*.

Nhân dịp này, chúng tôi chân thành cảm ơn quý tác giả, quý thầy cô giáo và các cháu học sinh, trong nhiều năm qua đã tích cực gửi bài vở, trao đổi thư từ, đóng góp ý kiến, giúp báo *Toán học và Tuổi trẻ* nội dung ngày càng phong phú, hình thức ngày càng giàu tính thẩm mỹ.

*Toán học và Tuổi trẻ* sẽ luôn cố gắng vươn lên, để xứng đáng với sự tin cậy của ngành Giáo dục và Đào tạo, của quý phụ huynh, quý thầy cô giáo và các cháu học sinh trong cả nước.

Chúng tôi tin rằng, năm học mới, trong tủ sách gia đình của các bậc phụ huynh, bên cạnh tập giáo án của quý thầy cô, trong cặp sách của các cháu học sinh, chắc chắn không thể thiếu được người bạn thủy chung và hữu ích là báo *Toán học và Tuổi trẻ*.

Trước thềm năm học mới, đại diện NXBGD, chúng tôi kính chúc quý phụ huynh sức khỏe, hạnh phúc; chúc quý thầy cô giáo đạt nhiều thắng lợi mới; chúc các cháu học sinh luôn là con ngoan, trò giỏi, mãi là người bạn thân thiết của báo *Toán học và Tuổi trẻ*.

Thân ái kính chào!

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục  
NGÔ TRẦN ÁI





# ỨNG DỤNG HÌNH HỌC để giải một số bài toán đại số

LÊ BÁ HOÀNG

(Phòng GD-ĐT Tx. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Việc ứng dụng hình học để giải bài toán đại số ở chương trình THCS quả là còn khá mới mẻ và lạ lẫm đối với học sinh. Nhưng việc ứng dụng này nhiều khi mang lại cho người học kết quả khá thú vị với lời giải ngắn gọn và độc đáo. Xin mời các bạn đọc và tham khảo vài ví dụ sau đây:

★ **Thí dụ 1.** Cho hai số dương  $a$  và  $b$ . Chứng minh rằng  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ .

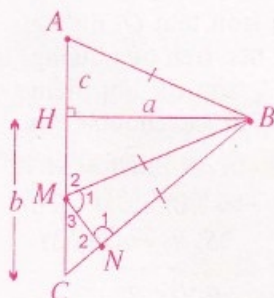
**Lời giải.** Nhận thấy  $(\sqrt{a})^2 = a$ ;  $(\sqrt{b})^2 = b$  nên ta nghĩ đến việc tạo ra tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có cạnh  $AB = \sqrt{a}$ ;  $AC = \sqrt{b}$ . Khi đó theo định lý Pythagore ta có  $BC = \sqrt{a+b}$ .

Do  $AB + AC > BC$  nên  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ . □

★ **Thí dụ 2.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  với  $b > c$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} < b - c.$$

**Lời giải.** Từ các biểu thức  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + c^2}$  và các số dương  $a, b, c$  ta nghĩ đến việc tạo ra các tam giác vuông  $HAB$  và  $HBC$  có hai cạnh góc vuông tương ứng là  $a, c$  và  $a, b$  (h. 1). Khi đó ta



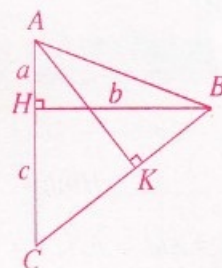
Hình 1

có  $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $BC = \sqrt{a^2 + c^2}$ . Do  $b > c > 0$  nên  $BC > AB$ ,  $HC > AH$ . Bài toán đưa về chứng minh rằng  $BC - AB < HC - HA$ .

Trên  $HC$ ,  $BC$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $HM = AH$ ,  $BN = AB$ . Dễ thấy  $AB = MB = BN$  suy ra  $\triangle BMN$  cân tại  $B$  nên  $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$ . Mặt khác  $\widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 (= 180^\circ)$  nên  $\widehat{N}_2 > \widehat{M}_3 \Leftrightarrow BC - AB < HC - HA$ . □

★ **Thí dụ 3.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng  $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \geq b(a + c)$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Lời giải.** Vẽ tam giác  $AHB$  vuông tại  $H$  với  $AH = a$ ,  $BH = b$ . Trên tia đối của tia  $HA$  lấy điểm  $C$  sao cho  $HC = c$ . Nối  $B$  với  $C$  (h. 2). Hạ  $AK$  vuông góc với  $BC$ . Khi đó ta có



Hình 2

$$2S_{ABC} = BH \cdot AC$$

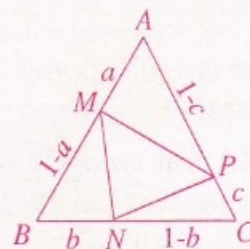
$$= AK \cdot BC \leq AB \cdot BC$$

$$\text{hay } b(a + c) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $AK = AB \Leftrightarrow K \equiv B \Leftrightarrow \triangle ABC$  vuông tại  $B \Leftrightarrow b^2 = ac$ . □

★ **Thí dụ 4.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thuộc khoảng  $(0; 1)$ . Chứng minh rằng  $a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) < 1$ .

**Lời giải.** Mỗi số hạng ở vế trái  $a(1 - b)$ ,  $b(1 - c)$ ,  $c(1 - a)$  có thể xem là tích độ dài hai cạnh của một tam giác nên gợi ý đến vẽ tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng 1. Trên các cạnh  $AB, BC$



Hình 3



và CA lấy các điểm M, N và P sao cho  $AM = a$ ,  $BM = b$ ,  $CP = c$ .

Ta có  $2S_{AMP} + 2S_{BMN} + 2S_{CPS} < 2S_{ABC}$

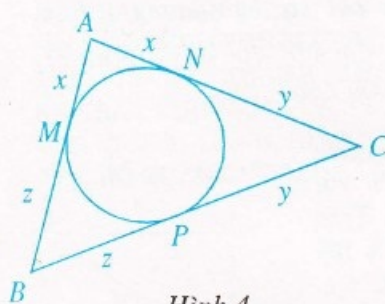
$$\text{hay } a(1-b)\sin 60^\circ + b(1-c)\sin 60^\circ + c(1-a)\sin 60^\circ < 1.1.\sin 60^\circ$$

Suy ra  $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) < 1$ .  $\square$

**Thí dụ 5.** Cho ba số dương  $x, y, z$ , thỏa mãn hệ thức  $xyz(x+y+z) = 4$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (x+y)(x+z)$ .

**Lời giải.** Từ tích  $xyz(x+y+z)$  ta nghĩ đến công thức Héron tính diện tích tam giác.

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  với  $a, b, c$  là độ dài các cạnh của tam giác ABC,  $p$  là nửa chu vi.



Hình 4

Với  $x, y, z$  là các số dương nên lấy các đoạn thẳng có độ dài lần lượt là  $x+y, y+z, z+x$  luôn là độ dài ba cạnh của một tam giác ABC (h.4) và

$x = AM = AN, y = CN = CP, z = BM = BP$  với M, N, P là các tiếp điểm của AB, AC và BC với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có  $p = x+y+z$

$$\Rightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (x+y+z)xyz = 4.$$

Suy ra

$$2S_{ABC} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = AB.AC.\sin A$$

$$\text{hay } 4 = (x+y)(x+z).\sin A.$$

Mà  $0 < \sin A \leq 1$  nên  $P = (x+y)(x+z) \geq 4$ .

$$(x+y)(x+z) = 4 \Leftrightarrow \sin A = 1 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow x(x+y+z) = yz.$$

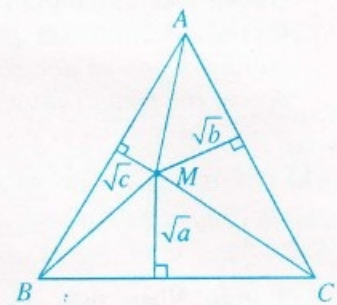
Kết hợp  $xyz(x+y+z) = 4$  có  $yz = 2$ . Chọn  $y = z = \sqrt{2}$  thì  $x = 2 - \sqrt{2}$ . Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4, chẳng hạn khi  $x = 2 - \sqrt{2}; y = z = \sqrt{2}$ .  $\square$

**Thí dụ 6.** Cho các số dương  $a, b, c$  và  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Chứng minh rằng hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{y-a} + \sqrt{z-a} = 1 \\ \sqrt{z-b} + \sqrt{x-b} = 1 \\ \sqrt{x-c} + \sqrt{y-c} = 1. \end{cases}$$

**Lời giải.** Xét tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Áp dụng kết quả sau: "Nếu M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đều, thì tổng các khoảng cách từ M xuống ba cạnh bằng chiều cao của nó".

Vẽ đường thẳng song song với BC cách BC một khoảng  $\sqrt{a}$  và đường thẳng song song với AC cách AC một khoảng  $\sqrt{b}$  chúng cắt nhau tại M (h. 5). Từ kết quả trên và giả thiết suy ra khoảng cách từ M xuống AB là  $\sqrt{c}$ . Từ định lý Pythagore ta nhận thấy  $x = MA^2; y = MB^2; z = MC^2$  là một nghiệm của hệ đã cho. Bằng phản chứng ta có thể dễ dàng chứng minh được hệ đã cho có nghiệm duy nhất trên.  $\square$

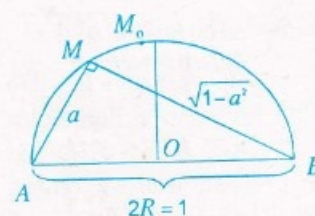


Hình 5

**Thí dụ 7.** Cho  $a, b, c$  là các số dương thuộc khoảng  $(0; 1)$  và  $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}$ . Tìm giá trị nhỏ

$$\text{nhất của biểu thức } M = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2}.$$

**Lời giải.** Dựng nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 1. Do  $0 < a < 1$  nên trên nửa đường



Hình 6

tròn đó lấy điểm M sao cho  $AM = a$  ta có  $\widehat{AMB} = 90^\circ$   
 $\Leftrightarrow AM \perp BM$  nên  
 $2S_{ABM} = AM.BM$   
 $= a.\sqrt{1-a^2}.$

(Xem tiếp trang 28)



# \*\*\*\*\* LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 \*\*\*\*\*

## TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH

### NĂM HỌC 2006 - 2007

(Đề thi đăng trên THPT số 360, tháng 6 năm 2007)

**Bài 1. a)** ĐK  $x \neq 0$ . Đặt  $t = 2x + \frac{1}{x}$ . Ta có PT  
 $t^2 - 4t + 3 = 0$ , giải PT này được  $t = 3$ ;  $t = 1$ .

\* Với  $t = 3$  thì  $2x + \frac{1}{x} = 3$ . PT này có hai nghiệm  $x = 1$  và  $x = \frac{1}{2}$ .

\* Với  $t = 1$ , ta thấy PT  $2x + \frac{1}{x} = 1$  vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có hai nghiệm  $x = 1$  và  $x = \frac{1}{2}$ .

**b)** Điều kiện  $x \neq 0$ ;  $|x| < \sqrt{2}$ .

Đặt  $y = \sqrt{2 - x^2}$ ,  $y > 0$ . Ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2xy \\ (x+y)^2 - (x+y) - 2 = 0. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của PT là  $\left\{1; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$ .  $\square$

**Bài 2.** Từ giả thiết PT  $x^2 + ax + b + 1 = 0$  có hai nghiệm nguyên dương  $x_1$  và  $x_2$ . Theo hệ thức Viète ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x_1 - x_2 \\ b = x_1 x_2 - 1 \end{cases}$$

$$f(1) = a + b, \quad f(-1) = -a + b.$$

$$\text{Vậy } P = a^2 + b^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1).$$

Do  $x_1^2 + 1 > 1$  và  $x_2^2 + 1 > 1$  nên  $P$  là hợp số.  $\square$

**Bài 3.** Giả sử  $(a, b) = m$ , suy ra  $a = mq$ ,  $b = mr$  với  $(q, r) = 1$ . Ta có

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{m^2 q^2} + \frac{1}{m^2 r^2} \Leftrightarrow p(r^2 + q^2) = m^2 q^2 r^2$$

$\Rightarrow p : q^2, p : r^2$  nên  $q = r = 1$ . (do  $p$  nguyên tố)

Lúc đó  $2p = m^2 \Rightarrow m = 2$  và  $p = 2$ . Vậy số nguyên tố duy nhất thỏa mãn đề bài là  $p = 2$ .  $\square$

**Bài 4. a)** Kẻ  $OH \perp CD$ . Vì  $H$  là trung điểm của  $CD$  và  $EF$  nên  $OH$  là đường trung bình của hình thang  $ABFE$ , suy ra

$$OH = \frac{1}{2}(AE + BF) = \frac{R\sqrt{3}}{2} \text{ nên } \triangle OCD$$

đều, do đó số đo  $\widehat{CKD} = 60^\circ$ . Vậy  $\widehat{AIB} = 60^\circ$ .

**b)** Ta thấy  $\triangle AEM \sim \triangle NFB$  suy ra  $EM \cdot NF = AE \cdot BF$  (không đổi). Ta có  $MN$  lớn nhất khi và chỉ khi  $EM + NF$  nhỏ nhất. Do  $EM \cdot FN$  (không đổi), nên  $EM + FN$  nhỏ nhất khi  $EM = FN = \sqrt{AE \cdot BF}$ . Vậy  $MN_{\max} = EF - 2\sqrt{AE \cdot BF}$ .

**Bài 5.** Giả sử tổng  $x + y + z < 1$ , thay  $z$  bởi  $z'$  sao cho  $x + y + z' = 1$ . Ta có  $0 < z < z' < 1$  và

$$2z + \frac{3}{z} - 2z' - \frac{3}{z'} = (z - z') \left( 2 - \frac{3}{zz'} \right) > 0, \text{ nên}$$

$$A > A' = 2(x + y + z') + 3 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z'} \right).$$

$$\text{Ta có } A' = 2 + 3 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z'} \right) \geq 2 + \frac{9}{\sqrt[3]{xyz'}}$$

$$\geq 2 + \frac{27}{x + y + z'} = 29.$$

Từ đó với  $x + y + z \leq 1$ , ta có  $A \geq 29$ . Đẳng thức

xảy ra khi  $x = y = z = \frac{1}{3}$ . Vậy  $A_{\min} = 29$ .  $\square$

HOÀNG NGỌC CẢNH  
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)  
sưu tầm và giới thiệu



## Tiến tới kì thi Quốc gia Trung học phổ thông



## Tính chất hình học TRONG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

NGUYỄN VĂN HIỀN

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

**LST.** Từ số 361, tháng 7 năm 2007 chúng tôi đã bắt đầu đăng chuyên đề ôn tập theo các chủ điểm. Theo dõi đều đặn các bạn sẽ có một bộ tài liệu ôn thi bổ ích để tiến tới kì thi Quốc gia THPT. Xin giới thiệu tiếp chuyên đề số 2.

**K**hi giải các bài toán hình học giải tích, nhiều học sinh đôi khi quên chú ý đến tính chất hình học của nó, mà những tính chất đó giúp ta đơn giản trong việc tính toán. Nhiều lúc nó còn giúp chúng ta định hướng cách giải của bài toán. Để giúp các bạn ôn thi đại học có hiệu quả, chúng tôi xin đưa ra một số thí dụ minh họa để khi gặp dạng đó các bạn dễ nhận ra.

**Thí dụ 1.** Trong không gian với hệ tọa độ Descartes Oxyz cho các điểm  $A(3; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$ . Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  (Đề tự ôn thi số 1, THPT số 343, tháng 1 năm 2006).

**Lời giải.** Vì các điểm  $A, B, C$  lần lượt nằm trên các trục  $Ox, Oy, Oz$  nên tứ diện  $OABC$  có các góc phẳng ở đỉnh  $O$  đều vuông. Vậy trực tâm tam giác  $ABC$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  lên mặt phẳng  $(ABC)$ .

Mặt phẳng  $(ABC)$  có phương trình  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1$  hay  $2x + 3y + 6z - 6 = 0$  (1)

nên nó có vector pháp tuyến  $\vec{v} = (2; 3; 6)$ .

Đường thẳng  $(d)$  qua  $O$  vuông góc với

$mp(ABC)$  có PT tham số  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t \end{cases} t \in \mathbb{R},$

thay vào PT (1) ta có  $4t + 9t + 36t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6}{49}$ , thay vào PT  $(d)$  ta có trực tâm tam

giác  $ABC$  là  $H\left(\frac{12}{49}; \frac{18}{49}; \frac{36}{49}\right)$ .  $\square$

**Thí dụ 2.** Trong không gian với hệ tọa độ Descartes Oxyz cho các điểm  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(5; 1; -2)$ ,  $C(7; 9; 1)$ . Viết phương trình chính tắc các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc  $A$  của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Ta biết đường chéo của hình thoi là phân giác của góc ở đỉnh hình thoi mà nó đi qua. Vậy đường phân giác trong của góc  $A$  của tam giác  $ABC$  có vector chỉ phương là

$$\vec{u} = \frac{1}{AB} \vec{AB} + \frac{1}{AC} \vec{AC} = \left(\frac{7}{5}; \frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right).$$

Do đó đường phân giác trong của góc  $A$  có PT  $\frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-3}$ .

Đường phân giác ngoài của góc  $A$  của tam giác  $ABC$  có vector chỉ phương là

$$\vec{v} = \frac{1}{AB} \vec{AB} - \frac{1}{AC} \vec{AC} = \left(\frac{1}{5}; -\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right).$$

Vậy đường phân giác ngoài của góc  $A$  có PT

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{-3}. \quad \square$$

**Thí dụ 3.** Trong không gian với hệ tọa độ Descartes Oxyz cho các vector  $\vec{v}_1 = (2; 2; 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (0; 3; 4)$ ,  $\vec{v}_3 = (1; 0; 0)$ . Lập phương trình đường thẳng  $(d)$  đi qua  $O$  có vector chỉ phương  $\vec{v}$  tạo với  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  các góc bằng nhau.

**Lời giải.** Một hình chóp có các cạnh bên bằng nhau thì chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy, và khi đó các cạnh bên tạo



## Tiến tới kì thi Quốc gia Trung học phổ thông

với đường cao đó các góc bằng nhau. Nhận thấy  $|5.\vec{v}_1| = |3.\vec{v}_2| = |15.\vec{v}_3| = 15$ .

Vậy ta chọn các điểm  $A, B, C$  sao cho  $\vec{OA} = 5.\vec{v}_1, \vec{OB} = 3.\vec{v}_2, \vec{OC} = 15.\vec{v}_3$ . Suy ra  $A(10; 10; 5), B(0; 9; 12), C(15; 0; 0)$ .

Khi đó đường thẳng  $(d)$  cần tìm là đường cao của hình chóp  $O.ABC$  hạ từ  $O$ .  $(d)$  có vectơ chỉ phương là  $\vec{v} = [\vec{AB}; \vec{AC}] = (75; -15; 105)$ .

Do đó  $(d)$  có PT  $\frac{x}{5} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{7}$ .  $\square$

**Thí dụ 4.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho đường thẳng  $(d): x - y + 1 = 0$  và đường tròn  $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ . Tìm điểm  $M$  thuộc  $(d)$  mà qua  $M$  kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn  $(C)$  tại  $A$  và  $B$  sao cho  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(-1; 2)$  và bán kính  $R = \sqrt{5}$ . Ta thấy  $\widehat{AMB} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{AMI} = 30^\circ \Leftrightarrow MI = 2R = 2\sqrt{5}$ . Vì tam giác  $AMI$  vuông tại  $A$ . Vậy ta cần tìm  $M$  trên  $(d)$  sao cho  $IM = 2\sqrt{5}$ . Đặt  $x_M = t$  thì  $M(t; t+1)$ . Khi đó  $IM = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (t+1)^2 + (t-1)^2 = 20 \Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 3$ .

Suy ra  $M(3; 4)$  hay  $M(-3; -2)$ .  $\square$

**Thí dụ 5.** Cho hypebol  $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  với hai tiêu điểm là  $F_1$  và  $F_2$ . Chứng minh rằng tiếp tuyến của  $(H)$  tại điểm  $M$  thuộc  $(H)$  là phân giác của góc  $F_1MF_2$ .

**Lời giải.** Tiếp tuyến của  $(H)$  tại điểm  $M(x_0; y_0)$  thuộc  $(H)$  có phương trình  $\frac{x_0.x}{a^2} - \frac{y_0.y}{b^2} = 1$ .

Tiếp tuyến này cắt trục  $Ox$  tại  $\left(\frac{a^2}{x_0}; 0\right)$ , mà  $F_1(-c; 0); F_2(c; 0)$  và  $MF_1 = e.x_0 + a; MF_2 = e.x_0 - a$ , nên ta có  $\frac{DF_1}{DF_2} = \frac{a+ex_0}{-a+ex_0} = \frac{MF_1}{MF_2}$ . Suy ra  $MD$  là phân giác của góc  $F_1MF_2$ .  $\square$

**Thí dụ 6.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai đường tròn  $(C_1): x^2 + (y-2)^2 = 1$  và

$$(C_2): (x-6)^2 + (y-4)^2 = 4.$$

Tìm điểm  $A$  trên  $(C_1)$ , điểm  $B$  trên  $(C_2)$  và điểm  $C$  trên trục  $Ox$  sao cho tổng  $AC + CB$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.**  $(C_1)$  là đường tròn có tâm  $E(0; 2)$  bán kính 1.  $(C_2)$  là đường tròn tâm  $F(6; 4)$  bán kính 2. Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua trục  $Ox$  thì

$$AC + CB = DC + CB.$$

Gọi  $(C_3)$  là đường tròn đối xứng với đường tròn  $(C_1)$  qua  $Ox$  thì  $D$  nằm trên  $(C_3)$ ,  $E'(0; -2)$  là tâm của  $(C_3)$  và dễ thấy rằng  $DC + CB$  ngắn nhất khi và chỉ khi  $D$  và  $B$  là giao của đoạn  $E'F$  với  $(C_3)$  và  $(C_2)$ . Do  $\vec{E'F} = (6; 6)$ , nên đường thẳng  $E'F$  có PT  $\begin{cases} x = t \\ y = -2 + t. \end{cases}$

Thay vào PT  $(C_3)$ , chú ý  $x_D > x_{E'}$ , ta được

$$D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), C(2; 0)$$

thay vào PT  $(C_3)$ , chú ý  $x_B < x_F$ , thu được  $B(6 - \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2})$ .

### BÀI TẬP

**Bài 1.** Cho parabol  $(P)$  có phương trình  $y^2 = 2px$ , tiêu điểm  $F$ .  $M$  là một điểm trên  $(P)$ . Chứng minh rằng tiếp tuyến của  $(P)$  tại  $M$  tạo với  $MF$  và với trục  $Ox$  những góc bằng nhau.

**Bài 2.** Viết phương trình đường tròn đi qua điểm  $A(4; 2)$  tiếp xúc với trục  $Ox$  và tiếp xúc với đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y - x = 0$ .

**Bài 3.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $3x - 4y - 12 = 0$  cắt trục  $Ox$  tại  $A$ .

a) Viết phương trình đường tròn  $(C)$  đi qua gốc tọa độ  $O$  và tiếp xúc với đường thẳng  $(d)$  tại  $A$ .

b) Đường tròn  $(C)$  cắt trục  $Oy$  tại  $B$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên  $(C)$  sao cho tam giác  $ABC$  cân.

**TOÁN HỌC**

**Tuổi trẻ** Số 362 (8-2007)

**5**



**ĐỀ THI VÀO LỚP 10 KHỐI THPT CHUYÊN****TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH**

Năm học 2007-2008

**VÒNG 1**

(Thời gian làm bài: 150 phút)

**Câu 1.** (2 điểm). Cho biểu thức

$$A = \left( \frac{\sqrt{x}}{4} - \frac{1}{4\sqrt{x}} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right).$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để  $2A + \sqrt{x} = \frac{5}{4}$ .**Câu 2.** (3 điểm).

a) Xác định giá trị của m để phương trình sau có nghiệm kép:

$$x^2 - 2x - m(m-3) - 1 = 0.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^3y + xy^3 = 30. \end{cases}$$

**Câu 3.** (1,5 điểm). Cho các số thực x, y thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 6$ . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x - \sqrt{5}y$ .**Câu 4.** (3,5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi AA', BB', CC' là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC.a) Chứng minh rằng AA' là đường phân giác trong của  $\widehat{B'A'C'}$ .b) Cho  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Chứng minh tam giác AOH là tam giác cân.**VÒNG 2**

(Thời gian làm bài: 150 phút)

**Câu 5.** (3,5 điểm).a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình  $5x - 2007y = 1$ , trong đó  $x \in (1; 3000)$ .b) Chứng minh rằng  $(5^{3n+2} + 2^{2n+3}) : 11$ , với mọi số tự nhiên n.**Câu 6.** (1 điểm). Xác định các số nguyên tố p, q sao cho  $p^2 - q + 2q^2$  và  $2p^2 + pq + q^2$  là các số nguyên tố cùng nhau.**Câu 7.** (1,5 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn  $a + b + c = 6$ . Chứng minh

$$\text{rằng } \frac{b+c+5}{1+a} + \frac{c+a+4}{2+b} + \frac{a+b+3}{3+c} \geq 6.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

**Câu 8.** (3 điểm). Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm H nằm trong đường tròn. Qua H ta vẽ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau.a) Tính  $AB^2 + CD^2$  theo R, biết rằng  $OH = \frac{R}{2}$ .

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, OH. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

**Câu 9.** (1 điểm). Trong một tam giác có cạnh lớn nhất bằng 2, người ta lấy 5 điểm phân biệt. Chứng minh rằng trong 5 điểm đó luôn tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá 1.LÊ QUỐC HÁN - LÊ XUÂN SƠN (GV ĐHV Vinh)  
sưu tầm và giới thiệu**Về cuộc thi TOÁN HỌC VUI**

Cuộc thi mini trong hè cho mọi người yêu toán mang tên Toán học vui (xem đề thi trên hai số tháng 6, 7.2007) còn tiếp tục nhận bài giải đến 20.8.2007 theo dấu Bưu điện. Đáp án sẽ đăng trong hai số 363, 364 (tương ứng tháng 9 và 10.2007) số 364 sẽ đăng danh sách các bạn đoạt giải. Mong các bạn tiếp tục gửi bài giải và đón đọc hai số 363, 364 để biết kết quả.

THTT





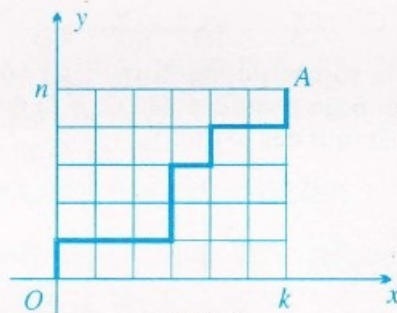
# Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA SỐ $C_n^k$ và ứng dụng

ĐỖ THANH HÂN  
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

**K**hông ít các bài toán đại số, khi giải bằng phương pháp hình học, lời giải đã trở nên gọn và đẹp hơn. Bài viết này giới thiệu ý nghĩa hình học của số  $C_n^k$  và một số bài toán áp dụng, hi vọng qua đó giúp các bạn thêm một công cụ khi giải một số bài toán về số tổ hợp.

## I. Ý nghĩa hình học của số $C_{k+n}^k$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm  $A(k; n)$  (h.1). Ta gọi đường đi ngắn nhất từ  $O(0; 0)$  đến  $A(k; n)$  là đường đi thỏa mãn quy tắc: chỉ theo hướng dương của các trục tọa độ và chỉ được phép đổi hướng đi (đổi từ hướng dương của trục tọa độ này sang hướng dương của trục tọa độ kia) tại các điểm có tọa độ nguyên.



Hình 1

**Mệnh đề.** Số đường đi ngắn nhất từ  $O(0; 0)$  đến  $A(k; n)$  là  $C_{k+n}^k$ .

**Chứng minh.** Mỗi đường đi ngắn nhất từ  $O(0; 0)$  đến  $A(k; n)$  đều gồm  $k + n$  đoạn thẳng, trong đó  $k$  đoạn ngang và  $n$  đoạn dọc (h.1) (mỗi đoạn dài 1 đơn vị). Các đường đi chỉ khác nhau bởi thứ tự kế tiếp của các đoạn ngang và đoạn dọc. Vì vậy: Số các đường đi ngắn nhất từ  $O(0; 0)$  đến  $A(k; n)$  bằng số cách chọn  $k$  đoạn ngang từ  $k + n$  đoạn dọc ngang, tức là bằng  $C_{k+n}^k$  (đpcm).

**Chú ý:** Vì ta có thể xét  $n$  đoạn dọc thay cho  $k$  đoạn ngang và khi đó số đường đi ngắn nhất từ  $O(0; 0)$  đến  $A(k; n)$  sẽ là  $C_{k+n}^n$ , như vậy ta đã chứng minh được  $C_{k+n}^k = C_{k+n}^n$ .

**Hệ quả 1.** Số đường đi ngắn nhất từ  $I(p; q)$  đến  $A(k; n)$  sẽ là  $C_{(k-p)+(n-q)}^{k-p} = C_{(k-p)+(n-q)}^{n-q}$ .  
(Với  $0 \leq p < k, 0 \leq q < n; p, q, k, n \in \mathbb{N}$ ).

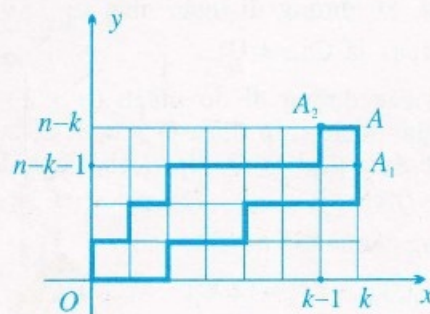
**Hệ quả 2.** Số đường đi ngắn nhất từ  $O(0; 0)$  đến  $A(k; n)$  đi qua  $I(p; q)$  bằng  $C_{p+q}^p \cdot C_{(k-p)+(n-q)}^{k-p}$ .

## II. Một số bài toán áp dụng

★ **Thí dụ 1.** Chứng minh rằng nếu  $k, n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$  thì  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ . (Quy tắc Pascal).

**Lời giải.** Số đường đi ngắn nhất từ  $O(0; 0)$  đến  $A(k; n-k)$  là  $C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$ . Ta chia các đường đi đó thành hai lớp không giao nhau (h.2):

- Lớp thứ nhất gồm các đường đi từ  $O$  đến  $A$  phải qua  $A_1(k; n-k-1)$ , số đường đi của lớp này là  $C_{k+(n-k-1)}^k = C_{n-1}^k$ .



Hình 2



• Lớp thứ hai gồm các đường đi từ  $O$  đến  $A$  phải qua  $A_2(k-1; n-k)$ , số đường đi của lớp này là  $C_{(k-1)+(n-k)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$ .

Theo quy tắc cộng, ta suy ra  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$  (đpcm).  $\square$

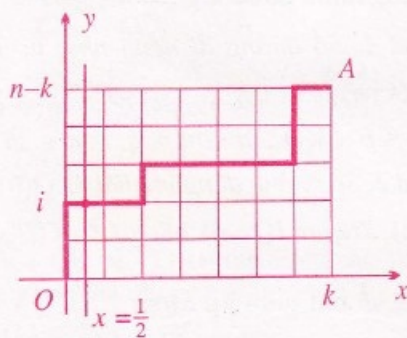
★ **Thí dụ 2.** Chứng minh rằng

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}$$

(với  $1 \leq k \leq n$ ).

**Lời giải.** Số đường đi ngắn nhất từ  $O(0;0)$  đến  $A(k; n-k)$  là  $C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$ .

Ta chia các đường đi đó thành  $(n-k+1)$  lớp không giao nhau: lớp thứ  $i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-k$ ) gồm các đường đi từ  $O$  đến  $A$  phải cắt đường thẳng  $x = \frac{1}{2}$  tại điểm  $\left(\frac{1}{2}; i\right)$  (h. 3).



Hình 3

Số đường đi của lớp này bằng số đường đi từ điểm  $(1; i)$  đến điểm  $(k; n-k)$  và bằng

$$C_{(k-1)+(n-k-i)}^{k-1} = C_{n-i-1}^{k-1}.$$

Theo quy tắc cộng suy ra  $C_n^k = \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-i-1}^{k-1}$  (đpcm).  $\square$

★ **Thí dụ 3.** Chứng minh rằng

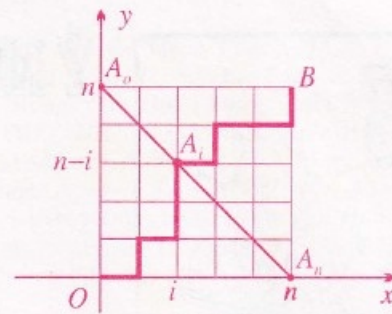
$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

**Lời giải.** Số đường đi ngắn nhất từ  $O(0;0)$  đến  $B(n;n)$  là  $C_{n+n}^n = C_{2n}^n$ .

Ta chia các đường đi đó thành  $(n+1)$  lớp không giao nhau: lớp thứ  $i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) gồm các đường đi từ  $O$  đến  $B$  phải qua điểm  $A_i(i; n-i)$  (h. 4).

Số đường đi của lớp này là

$$C_{i+(n-i)}^i C_{(n-i)+(n-(n-i))}^{n-i} = C_n^i \cdot C_n^{n-i} = (C_n^i)^2.$$



Hình 4

Theo quy tắc cộng, ta suy ra

$$C_{2n}^n = \sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 \quad (\text{đpcm}). \quad \square$$

★ **Thí dụ 4.** (Bài thi chọn Đội tuyển Việt Nam – 2003)

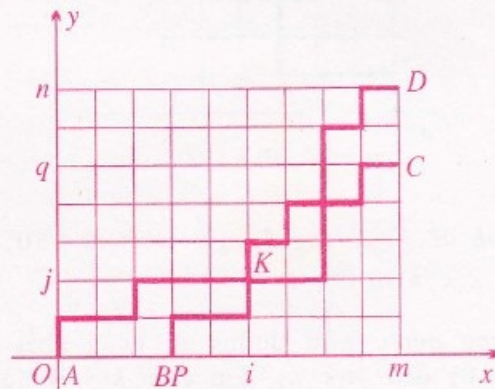
Cho các số nguyên dương  $m, n, p, q$  với  $p < m, q < n$ . Trên mặt phẳng tọa độ lấy bốn điểm  $A(0;0), B(p;0), C(m;q), D(m;n)$ . Xét các đường đi ngắn nhất từ  $A$  đến  $D$  và các đường đi ngắn nhất từ  $B$  đến  $C$ . Gọi  $S$  là số cặp đường đi  $(f; g)$  mà  $f$  và  $g$  không có điểm chung. Chứng minh rằng

$$S = C_{m+n}^n \cdot C_{m+q-p}^q - C_{m+q}^q \cdot C_{m+n-p}^n.$$

**Lời giải.** Số cặp đường đi  $(f; g)$  tùy ý là

$$M = C_{m+n}^n \cdot C_{q+m-p}^q = C_{m+n}^n \cdot C_{m+q-p}^q \quad (1)$$

Gọi  $U$  là số cặp đường đi  $(f'; g')$  với  $f'$  là đường đi ngắn nhất từ  $A$  đến  $C$ ,  $g'$  là đường đi ngắn nhất từ  $B$  đến  $D$  (h. 5).



Hình 5

Số cặp đường đi  $(f'; g')$  tùy ý là

$$U = C_{q+m}^q \cdot C_{n+m-p}^n = C_{m+q}^q \cdot C_{m+n-p}^n \quad (2)$$

Vì  $f'$  và  $g'$  luôn có ít nhất một điểm chung  $K(i; j)$  với  $p \leq i \leq m$  và  $0 \leq j \leq q$  ( $i, j \in \mathbb{N}$ ). Nên



Số đường đi  $f'$  phải qua  $K$  là  $C_{j+i}^j \cdot C_{(q-j)+(m-i)}^{q-j}$ .

Số đường đi  $g'$  phải qua  $K$  là  $C_{j+(i-p)}^j \cdot C_{(n-j)+(m-i)}^{n-j}$ .

$$\text{Vậy } U = C_{j+i}^j \cdot C_{(q-j)+(m-i)}^{q-j} \cdot C_{j+(i-p)}^j \cdot C_{(n-j)+(m-i)}^{n-j} \quad (3)$$

Vì  $K$  cũng là điểm chung các cặp đường đi  $(f; g)$  mà  $f$  và  $g$  có điểm chung, nên nếu gọi  $T$  là số cặp đường đi  $(f; g)$  mà  $f$  và  $g$  có điểm chung  $K$  thì tương tự ta có:

$$T = C_{j+i}^j \cdot C_{(n-j)+(m-i)}^{n-j} \cdot C_{j+(i-p)}^j \cdot C_{(q-j)+(m-i)}^{q-j} \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4) ta có  $T = U$ .

$$\text{Vậy } S = M - U = C_{m+n}^n \cdot C_{m+q-p}^q - C_{m+q}^q \cdot C_{m+n-p}^n \quad (\text{đpcm}). \quad \square$$

Để kết thúc bài báo, mời các bạn thử sử dụng phương pháp trên với hai bài tập nhỏ sau:

*Chứng minh rằng*

$$1) \quad C_n^m C_k^0 + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^1 + \dots + C_{n-m}^0 C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m$$

$$2) \quad C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0 = C_{m+n}^k.$$

### GIẢI BÀI ... (Tiếp trang 27)

$$F_{ms2} = \frac{\mu mg(1-\mu)}{\sqrt{2}(1+\mu^2)} \quad (7)$$

áp dụng định lý biến thiên động năng ta có

$$\frac{m\omega_0^2 R^2}{2} = (F_{ms1} + F_{ms2}) 2\pi R.n \quad (8)$$

trong đó  $n$  là số vòng quay của xilanh cho đến khi dừng lại.

Thay (6), (7) vào (8) ta được:

$$n = \frac{\omega_0^2 R(1+\mu^2)}{4\sqrt{2}\pi\mu g}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Hưng Yên:** Phạm Đức Linh, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Vinh Phúc:** Hoàng Mạnh Thắng, Tạ Đức Mạnh, 11A3, Lỗ Tấn Thắng, Lê Minh Hiếu, 10A3, THPT chuyên Vinh Phúc; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Sơn, Trần Văn Thắng, Trần Văn Giai, A3K34, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Trần Thế Minh, K33A1, THPT Nguyễn Huệ.

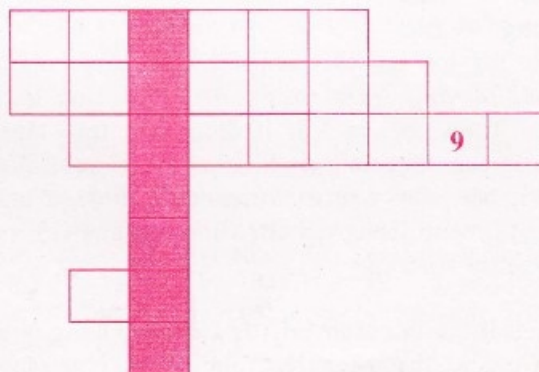
NGUYỄN VĂN THUẬN



## Ô CHỮ VÀ SỐ sau IMO 2007

Các báo đã đưa rất nhiều tin về kì thi thứ 48 của IMO trên đất nước Việt Nam. Nhưng liệu các bạn có giải được ô chữ và số này không nhỉ? Bạn tìm theo từng hàng nhé, chữ không cần dấu.

1. Kể cả lần này, đội Việt Nam đã mấy lần được xếp thứ 3 về tổng số điểm đạt được?
2. Nơi học sinh dự thi được đến tham quan không kể vịnh Hạ Long?
3. Số nước tham dự IMO 48?
4. Số nước chỉ cử quan sát viên (không có học sinh).
5. Số điểm thấp nhất của 1 học sinh đạt được.
6. Thứ hạng của đội Việt Nam năm 2001.
7. Số điểm cao nhất cho một bài toán.



Cộc dọc tô màu sẽ là gì nhỉ?

VŨ ĐO QUAN





**M**ột trong những cuộc thi đầu tiên trên thế giới dành cho học sinh và những người giỏi toán bắt đầu ở Hungari từ hơn 100 năm trước đây. Năm 1894 Nam tước Eötvös Loránd (1848-1919), nhà Vật lý nổi tiếng, Chủ tịch Viện Hàn lâm Khoa học Hungari, được cử làm Bộ trưởng Bộ Tôn giáo và Giáo dục Hungari. Để chào mừng và ghi nhớ sự kiện này, Hội Toán học và Vật lý Hungari - mà ông Eötvös là người sáng lập và chủ tịch đã quyết định tổ chức các kì thi toán học vào mùa thu hàng năm dành cho học sinh vừa tốt nghiệp trung học trong mùa hè năm đó. Mỗi kì thi có 3 bài toán làm trong 4 giờ.

Tác giả hai bài thi xuất sắc nhất được nhận **Giải thưởng Nam tước Eötvös** do Chủ tịch Hội Toán học và Vật lý đích thân trao tặng trong cuộc họp thường kì của Hội tiếp sau đó. Các bài của người trúng giải được đăng nguyên văn trong tạp chí khoa học của Hội là *Tạp san Toán Lí*.

Điều lí thú là chính Eötvös Loránd không ủng hộ các kì thi mang tên mình. Ông cho rằng việc kiểm tra lại các kiến thức đã học là làm khổ học sinh một cách vô ích, còn nếu đưa ra các bài toán khó chưa biết lời giải thì cuộc thi sẽ thất bại. Tuy vậy thực tế hơn 100 năm qua đã phủ nhận quan điểm này của ông. Các cuộc

thi được tổ chức đều đặn hàng năm cho đến nay (trừ 7 năm do chiến tranh hoặc biến động xã hội: 1919-1921, 1944-1946, 1956) và được hưởng ứng rộng rãi. Một số người được giải đã trở thành các nhà bác học nổi tiếng thế giới như: nhà toán học Fejér Lipót (1880-1959); nhà vật lý Theodor Von Kármán (1881-1963), chuyên gia về khí động học, máy bay siêu thanh, kĩ thuật tên lửa; nhà toán học Haar Alfréd (1885-1933); nhà vật lý hạt nhân Edward Teller (1908-2003), cha đẻ của bom H; nhà toán học Lovász László (sinh năm 1948), người bảo vệ luận án tiến sĩ trước khi tốt nghiệp đại học, giải thưởng Wolf 1999 (được coi như giải Nobel toán học vì giải Nobel không trao cho ngành toán), chủ tịch Liên đoàn Toán học Quốc tế (IMU) nhiệm kì 2007-2010.

Năm 1929, kỉ niệm 10 năm ngày mất của Eötvös Loránd, giáo sư viện sĩ Kürschák József (1869-1933), (người tham gia tổ chức các kì thi từ những

ngày đầu tiên), đã tập hợp các đề thi trong giai đoạn 1894-1928 cùng những lời giải hay nhất (của các thí sinh và của những người khác)

thành tập sách *Các đề thi toán học*. Trong cuốn sách này, ngoài các đề thi, bài giải, danh sách người được giải, Kürschák còn bổ sung thêm các phần nhận xét, ghi chú rất có giá trị, trong đó ông định nghĩa các khái niệm có trong bài giải, chứng minh các định lí được dùng đến, nêu các hướng tổng quát hóa, làm sáng tỏ mối quan hệ giữa đề thi và các công trình nghiên cứu nổi tiếng, phác thảo tiểu sử một số nhà toán học. Đôi khi tác giả giới thiệu sơ lược cả một ngành toán học (như hình học phi Euclid) hoặc một vấn đề lớn (như bài toán Fermat).

Cuốn sách nói trên được ba nhà toán học Hungari khác chỉnh lí và bổ sung cho đến kì

## Cuộc thi giỏi toán

### EÖTVÖS - KÜRSCHÁK ở HUNGARI

VŨ HOÀI CHƯƠNG  
(Viện Công nghệ Thông tin)



thi thứ 97 (năm 1997) và đã xuất bản 4 lần. Năm 1963 bản dịch tiếng Anh của tập 1 (các kì thi 1894-1928) được Random House của Mỹ xuất bản. Về sau có thêm các bản dịch tiếng Nga, tiếng Nhật Bản, tiếng Rumani, tiếng Hàn và tiếng A-rập của bộ sách này. Theo chúng tôi được biết đã có một bản tiếng Việt dịch qua tiếng Nga từ cách đây 10-20 năm.

Trong hơn 100 năm qua, việc tổ chức các kì thi có một số thay đổi. Sau chiến tranh thế giới lần thứ hai, từ năm 1947, các học sinh trung học cũng được phép dự thi cùng các anh chị vừa tốt nghiệp. Nhờ vậy mà số người dự thi đã tăng lên con số hàng trăm (trước đây thường không quá 50). Nhiều người đoạt giải trước khi tốt nghiệp trung học, một số người được giải 2 lần và có trường hợp được giải tới 3 lần. Số giải thưởng hàng năm cũng không cố định là 2, mà đôi khi có giải 3 và các giải khuyến khích. Trước đây kì thi được tiến hành ở 2 thành phố, ngày nay đã được tổ chức đồng thời ở 20 thành phố.

Khi Hội Toán học và Vật lí Hungari tách đôi, lẽ tự nhiên là Hội Vật lí và các kì thi vật lí mang tên nhà vật lí Eötvös Loránd. Năm 1947 Hội Toán học Hungari mang tên Bolyai János (1802-1860), một trong những người phát minh ra hình học phi Euclid. Từ năm 1949 các kì thi toán học cho học sinh tốt nghiệp trung học bắt đầu lưu giữ kỉ niệm về Kürschák József, tác giả cuốn sách nói trên, người trọn đời dành tâm huyết cho các kì thi này.

Việc giải các đề thi toán Kürschák không đòi hỏi kiến thức vượt quá chương trình trung học, mà cần đến các ý tưởng độc đáo. Chính vì cuộc thi này không nhằm mục đích kiểm tra những kiến thức đã học, cho nên trong hơn 100 năm trời, từ 1894 đến 2003, người dự thi có thể tự do sử dụng bất kì sách báo, tài liệu, dụng cụ học tập nào. Mấy năm gần đây quy định này bị bãi bỏ. Các thiết bị điện tử cũng không được phép sử dụng.

Hội Toán học Bolyai János tổ chức các cuộc gặp mặt riêng để công bố kết quả kì thi Kürschák József hàng năm và trao giải

thường. Đặc biệt họ tên những người trúng thưởng luôn được đi kèm với họ tên thầy dạy toán của mình. Tại cuộc gặp mặt này đại diện ban giám khảo giới thiệu các lời giải của kì thi, lưu ý đến các cách giải khác nhau, nêu các nhận xét liên quan đến các bài giải và các hướng tổng quát hóa cùng các vấn đề khác. Từ năm 1949 báo Toán học Trung học của Hungari đăng toàn văn các bản tổng kết này.

Trong kì thi Kürschák năm 1992 có một học sinh Việt Nam là *Phạm Minh Tuấn*, học sinh lớp 12 ở Budapest, giải được 2/3 bài và đoạt giải khuyến khích.

Năm 1994 Hội Toán học Bolyai János kết hợp với Viện Hàn lâm Khoa học Hungari và Bộ Giáo dục tổ chức kỷ niệm 100 năm kì thi toán Kürschák József (lúc đầu gọi là kì thi Eötvös Loránd). Nhưng do 7 lần bị gián đoạn, năm đó mới là kì thi thứ 94. Năm 2000 nhiều tờ báo nước ngoài có bài nói đến kì thi Kürschák thứ 100.

### Kì thi thứ 1. (mang tên Eötvös, năm 1894)

Được tổ chức vào ngày 17-09-1894 tại 2 thành phố. Trong số 67 người đã đăng kí dự thi có 54 người tham dự; 29 người nộp bài thi, trong đó 21 người không làm đúng bài nào, 5 người chỉ làm đúng 1 bài, 1 người làm đúng 2 bài, 2 người làm đúng cả 3 bài. Vì hai bài thi tốt nhất có chất lượng tương đương, ban giám khảo phải căn cứ vào thời gian nộp bài thi để xếp hạng: người nộp trước được giải nhất.

#### Bài 1. Chứng minh rằng các biểu thức

$$2x + 3y \text{ và } 9x + 5y$$

chia hết cho 17 với cùng một cặp giá trị nguyên  $x$  và  $y$ .

**Bài 2.** Cho một đường tròn và hai điểm  $P, Q$ . Hãy dựng tam giác vuông nội tiếp trong đường tròn này, mà một cạnh góc vuông đi qua điểm  $P$ , một cạnh góc vuông đi qua điểm  $Q$ . Vị trí nào của  $P$  và  $Q$  khiến bài toán không giải được?

**Bài 3.** Các cạnh của một tam giác tạo thành cấp số cộng với công sai  $d$ , diện tích tam giác là  $t$ . Tìm các cạnh và các góc của tam giác. Giải bài toán này với  $d = 1$  và  $t = 6$ .



**Kì thi thứ 100. (mang tên Kürschák, năm 2000)**

Được tổ chức vào ngày 27-10-2000 tại 20 thành phố. Tại thủ đô Budapest 110 người tham dự đã nộp 99 bài thi. Các thành phố khác cũng có 99 người nộp bài thi. Hơn mười người làm được 2 bài trở lên.

– 1 giải nhất (giải đúng cả 3 bài) với phần thưởng 25.000 forint ( $\approx 83 \$$ , theo tỉ giá tháng 12 năm 2000 là  $1\$ \approx 300$  forint)

– 2 giải nhì (giải đúng bài 1, bài 3 và phần lớn bài 2) với phần thưởng 15.000 forint ( $\approx 50 \$$ )

– 1 giải ba (giải đúng bài 1, bài 3 và bắt đầu giải bài 2) với phần thưởng 10.000 forint ( $\approx 33 \$$ )

**Bài 1.** Ta tô màu đỏ hoặc xanh lên các điểm lưới nằm trên các cạnh và bên trong hình vuông  $A(0, 0)$ ,  $B(n, 0)$ ,  $C(n, n)$ ,  $D(0, n)$  sao cho tất cả các hình vuông lưới đơn vị ở bên trong hình vuông  $ABCD$  có đúng 2 điểm màu đỏ. Có thể làm việc này bằng bao nhiêu cách khác nhau?

**Bài 2.**  $ABC$  là tam giác không đều,  $P$  là một điểm trên mặt phẳng không trùng với  $A, B, C$ . Ký hiệu  $A_P, B_P$  và  $C_P$  lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường thẳng  $AP, BP$  và  $CP$  với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng mặt phẳng có đúng 2 điểm  $P$  và  $Q$  sao cho  $A_P B_P C_P$  và  $A_Q B_Q C_Q$  là các tam giác đều và đường thẳng  $PQ$  chạy qua tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Bài 3.**  $k$  là số nguyên không âm và giả thiết rằng các số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  cho ta ít nhất  $2k$  số dư khác nhau khi chia cho  $(n+k)$ . Chứng minh rằng trong  $n$  số đó có một vài số mà tổng của chúng chia hết cho  $(n+k)$ .

**Kì thi mà lời giải ngắn gọn nhất (năm 1908)**

Trong cuốn sách *Các đề thi toán*, có một kì thi chỉ chiếm 2/3 trang sách vì những lời giải rất ngắn gọn. Để tiện so sánh, chúng tôi tham khảo thêm các lời giải của bạn đọc Hungari trong báo Toán học Trung học năm 1909.

**Bài 1.** Chứng minh rằng hiệu các lập phương của các số nguyên lẻ  $(a^3 - b^3)$  chia hết cho  $2^n$  khi và chỉ khi  $(a - b)$  chia hết cho  $2^n$ .

(Người được giải nhất giải trong 7 dòng, một bạn đọc giải có 4 dòng).

**Bài 2.** Chứng minh rằng trong tam giác vuông bất kì lũy thừa bậc  $n$  của cạnh huyền lớn hơn tổng lũy thừa bậc  $n$  của các cạnh góc vuông nếu  $n$  là số nguyên lớn hơn 2.

(Tác giả cuốn sách giải trong 2 dòng; 4 bạn đọc giải trong 11, 11, 19, 11 dòng)

**Bài 3.** Có 2 loại thập giác đều nội tiếp trong đường tròn. Loại 1 (thập giác đều bình thường) được tạo thành bằng cách chia chu vi đường tròn thành 10 phần bằng nhau và nối các điểm chia cạnh nhau. Loại 2 (thập giác ngôi sao đều) được tạo thành bằng cách nối các điểm chia với điểm thứ 3 (nhảy qua 2 điểm). Chứng minh rằng hiệu số các cạnh của 2 thập giác đều nói trên bằng với bán kính đường tròn.

(Người được giải nhì giải trong 4 dòng, một bạn đọc giải trong 18 dòng)

**Các cuộc thi toán khác ở Hungari**

Ngoài cuộc thi toán Kürschák József nói trên, những người vừa mới tốt nghiệp trung học, mỗi lứa tuổi học sinh, sinh viên Hungari đều có các cuộc thi riêng của mình.

1) Học sinh trung học hai năm cuối (17-18 tuổi) có *Cuộc thi Trung học Toàn quốc*, 2-3 vòng, mỗi vòng 5 giờ. Khoảng 2000-3000 em tham dự hàng năm.

2) Học sinh trung học 2 năm đầu (15-16 tuổi) có *Cuộc thi Toán học Arany Daniel*, 2-3 vòng, mỗi vòng 4 giờ.

3) Học sinh lớp 7-lớp 8 (13-14 tuổi) có *Cuộc thi Varga Tamás*.

4) Học sinh các lớp 5-6-7-8 có *Cuộc thi Kalmár László* do Hội Phổ biến kiến thức Khoa học tổ chức gồm 2 vòng, khoảng 3000 em tham dự.

(Xem tiếp trang 15)



# DIỄN ĐÀN

**DAY  
HOC  
TOAN**



**B**ài viết sau đây đề cập đến một vài nét về chương trình và SGK môn hình học 11.

## I. Nội dung chương trình Hình học lớp 11 nâng cao.

Chương trình Hình học lớp 11 được phân thành ba chương.

Chương 1 nói về các phép dời hình và các phép đồng dạng trong mặt phẳng. Kết thúc chương này cũng là kết thúc phần hình học phẳng mà học sinh đã được học từ

cấp THCS. Học sinh sẽ được làm quen với một số khái niệm thường gặp không chỉ trong toán học mà còn trong thực tế như phép tịnh tiến, phép đối xứng..., phép vị tự, hình có trục đối xứng hoặc có tâm đối xứng. Ngoài ra học sinh phải hiểu được thế nào là hai hình bằng nhau và hai hình đồng dạng.

Tiếp theo là phần Hình học không gian bao gồm hai chương: Chương 2 nói về quan hệ song song và Chương 3 nói về quan hệ vuông góc trong không gian. Ở cuối cấp PTCS học sinh đã bước đầu làm quen với một số khái niệm của hình học không gian bằng cách mô tả trực quan trên các mô hình cụ thể. Ở lớp 11 các khái niệm đó được trình bày một cách hệ thống và có chứng minh tương đối đầy đủ, chặt chẽ.

Về các hình trong không gian, ở lớp 11 chỉ giới thiệu hai loại quen thuộc: đó là hình lăng trụ, hình chóp và các trường hợp đặc biệt của chúng. Về các hình đa diện nói chung và mặt tròn xoay, đặc biệt là mặt cầu mặt trụ, mặt nón sẽ được giới thiệu tiếp tục ở lớp 12.

Hai chủ đề quan trọng cũng được đề cập một cách chi tiết là *khoảng cách* và *góc*.

## II. Yêu cầu về mức độ của chương trình

1. Mới nhìn qua, các nội dung chương trình cũng giống như trước đây, và như vậy có vẻ như không giảm tải được bao nhiêu so với chương trình cũ. Sự thực là về các chương mục, ta không thể bỏ được một nội dung nào hết.

Các khái niệm về phép dời hình và phép đồng dạng đều là những kiến thức cần có cho học sinh bậc phổ thông, cả về mặt toán học và thực tế. Trong đời sống hàng ngày chúng ta luôn gặp những hình bằng

nhau hay những hình đồng dạng với nhau. Chỉ ít thì học sinh phải hiểu thế nào là *hai hình đồng dạng* một cách chính xác chứ không phải một cách mơ hồ kiểu như: *hai hình đồng dạng là hai hình có hình dạng giống nhau*.

Học sinh bậc THPT phải được là quen với hình học không gian, chính là cái không gian mà chúng ta đang sống trong đó. Như vậy thì chủ đề về quan hệ song song nhất định phải có, và trong chủ đề đó không thể không có các đề mục như: hai đường thẳng song song, đường thẳng song song với mặt phẳng, hai mặt phẳng song song. Thêm vào đó cũng không thể bỏ phép chiếu song song bởi vì nó cần thiết để định nghĩa hình biểu diễn và vẽ các hình biểu diễn... Tương tự như vậy với chủ đề liên quan đến vuông góc.

# VỀ CHƯƠNG TRÌNH VÀ SÁCH GIÁO KHOA MÔN HÌNH HỌC LỚP 11 NÂNG CAO

VĂN NHƯ CƯƠNG

(Chủ biên Hình học 11 nâng cao)

**TOÁN HỌC**

**Tuổi trẻ** Số 362 (8-2007)

**13**



2. Như vậy việc giảm tải chỉ được thể hiện trong việc trình bày chi tiết các vấn đề lí thuyết và mức độ dễ hơn của các bài tập.

Về lí thuyết, SGK bỏ qua những trình bày thật chặt chẽ thường bị phê phán là “hàn lâm”. Có thể nêu một ví dụ sau đây:

Trong SGK, sự bằng nhau của các hình được định nghĩa như sau: “Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia”. Như vậy nếu có phép dời hình  $f$  biến hình  $H$  thành hình  $H'$  thì ta gọi hai hình  $H$  và  $H'$  là bằng nhau. Việc dùng thuật ngữ bằng nhau trong trường hợp này là một sự lạm dụng tế nhị. Nếu đòi hỏi chính xác thì phải trình bày như sau:

Trước hết nêu định nghĩa: Hình  $H$  gọi là bằng hình  $H'$  nếu có phép dời hình biến hình  $H$  thành hình  $H'$ . Sau đó ta chứng minh rằng quan hệ “bằng” nói trên là một quan hệ tương đương, tức là:

- i) Mọi hình  $H$  đều bằng chính nó
- ii) Nếu hình  $H$  bằng hình  $H'$  thì hình  $H'$  bằng hình  $H$ .
- iii) Nếu hình  $H$  bằng hình  $H'$  và hình  $H'$  bằng hình  $H''$  thì hình  $H$  bằng hình  $H''$ .

Ba tính chất trên có thể chứng minh dễ dàng nếu biết rằng tập hợp các phép dời hình làm thành một nhóm (phép đồng nhất là phép dời hình, nghịch đảo của phép dời hình là phép dời hình, hợp thành của hai phép dời hình là phép dời hình). Vì có tính chất ii) ta mới có thể nói rằng hai hình  $H$  và  $H'$  bằng nhau.

Nhưng khái niệm về nhóm các phép dời hình không được (và không thể) nêu ra cho học sinh và bởi thế chúng ta đành chấp nhận một cách trình bày không chặt chẽ như đã làm trong SGK.

Qua ví dụ trên ta có thể thấy rằng SGK đã bỏ qua nhiều khía cạnh “hàn lâm” để trình bày khái niệm bằng nhau mặc dầu không hoàn toàn chặt chẽ, nhưng học sinh có thể chấp nhận được.

Ngoài ra, nếu gặp những hiện tượng quá hiển nhiên, mà học sinh nào cũng thấy rõ thì SGK

cũng đơn giản bớt mà không nêu chứng minh cho khỏi rườm rà. Lấy ví dụ: “Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song” là một mệnh đề khá hiển nhiên có thể minh hoạ bằng những hình ảnh trực quan (các cột đèn cùng vuông góc với mặt sân vận động), bởi vậy không cần nêu chứng minh cho mất thì giờ. Chú ý rằng mệnh đề trên có thể xem như là tương tự của mệnh đề trong hình học phẳng: “Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song”. Tuy nhiên sự suy luận tương tự bao giờ cũng là con dao hai lưỡi, nếu không cẩn thận thì dễ mắc sai lầm, cho nên SGK đã chú ý học sinh bằng câu hỏi kiểu như: “Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có song song hay không?”

Một ví dụ khác: Việc chứng minh định lí về sự bảo tồn tỉ số của hai đoạn thẳng song song qua phép chiếu song song không mấy khó khăn nhưng khá dài dòng vì phải chia ra khá nhiều trường hợp. SGK chỉ minh hoạ định lí đó trong một trường hợp phổ biến.

3. Hệ thống các bài tập là nơi có thể giảm tải khá nhiều. Số lượng các bài tập trong SGK không nhiều như trước và cũng không khó bằng. Chúng tôi mong rằng các giáo viên sẽ không đưa thêm nhiều bài tập khó hơn các bài tập trong SGK. Chúng tôi có đề nghị một số bài kiểm tra (15' hoặc 45') trong SGK để các giáo viên tham khảo, qua đó các giáo viên thấy được mức độ mà chúng ta đòi hỏi học sinh sau mỗi chương.

Lấy ví dụ về hệ thống các bài tập liên quan đến phép dời hình và phép đồng dạng. SGK chỉ đưa ra những bài tập để củng cố các tính chất của các phép dời hình và đồng dạng đã học. Các bài tập vận dụng các phép đó để giải toán đặc biệt là các bài toán dựng hình và quỹ tích được giảm nhẹ đến tối thiểu.

Có nhiều bài tập rất hay (và do đó rất khó) về hình tứ diện và hình hộp cũng không đưa ra cho học sinh. Chẳng hạn các bài tập về tứ diện trực tâm, tứ diện gần đều.... Nhìn chung các bài tập chủ yếu là để học sinh rèn luyện ở các mức độ: nhận biết và thông hiểu là chủ yếu.



Cũng có một số bài tập ở mức độ vận dụng và sáng tạo nhưng không nhiều.

Những bài tập khó hơn có thể tìm trong cuốn Bài tập Hình học 11.

#### IV. Một số vấn đề về phương pháp giảng dạy

Chúng tôi chỉ xin lưu ý một số điểm sau đây:

1. SGK có nêu lên những *Câu hỏi* và *Hoạt động*. Các câu hỏi nhằm định hướng cho học sinh chú ý vào một khía cạnh nào đó trong quá trình nhận thức. Có thể là để học sinh nhớ lại một kiến thức đã biết có liên quan tới bài mới, có thể là để học sinh hiểu thêm một chi tiết nào đó trong vấn đề đang xét, có thể là để lật lại vấn đề,..., các câu hỏi như thế không quá khó, nhưng nếu động viên học sinh suy nghĩ và trả lời thì chắc hẳn là có lợi.

Các *Hoạt động* nhằm yêu cầu học sinh phải thực sự động não và làm việc trên giấy nháp. Có thể là yêu cầu học sinh tính toán đúng một kết quả nào đó, hoặc yêu cầu học sinh suy ra một hệ quả từ một định lý vừa nêu, hoặc yêu cầu học sinh áp dụng công thức đã có vào một trường hợp cụ thể... Các hình thức *Hoạt động* có thể là cá nhân, từng nhóm trao đổi, hay toàn lớp thảo luận. Đây cũng là hình thức giúp học sinh tập trung vào bài học và cùng xây dựng bài học. Chúng tôi chỉ xin nhắc lại rằng, các *Câu hỏi* và *Hoạt động* trong SGK chỉ

mang tính gợi ý, hoàn toàn không phải là áp đặt, bắt mọi thầy giáo phải theo. Tùy theo trình độ học sinh trong lớp mình, thầy giáo có thể đa ra những *Câu hỏi* và *Hoạt động* thích hợp hơn.

2. Nội dung trình bày trong SGK được chia thành hai phần: phần chính và phần phụ (ngay trong mỗi trang sách). Phần chính được in bắt đầu từ cột thứ nhất của trang sách, thường bao gồm các định nghĩa, các tính chất, các định lý hoặc các công thức, theo các kiểu chữ khác nhau: in đậm, in nghiêng, hoặc chữ bình thường, có đóng khung hoặc không đóng khung. Phần phụ được in lùi vào bên phải 4 cột so với lề trái, thường bao gồm: Các lời dẫn dắt, lời đặt vấn đề, các câu hỏi, các *Hoạt động*, các chứng minh của định lý, các ví dụ minh họa, các bài tập áp dụng. Như vậy có thể hình dung rằng khi bỏ phần phụ đi thì còn lại phần chính là tóm tắt những điều cần nhớ của bài học.

Với cách trình bày như vậy chúng tôi dụng ý là học sinh ít phải ghi chép, mà tập trung thì giờ để nghe giáo viên giảng, để suy nghĩ và trả lời các câu hỏi, để làm việc theo yêu cầu của các hoạt động. Chúng ta không nên làm mất thì giờ của học sinh một cách vô ích khi bắt họ chép nguyên văn định lý, tính chất, thậm chí cả chứng minh... vào vở của mình vì tất cả điều đó đã có trong SGK.

---

#### CUỘC THI... (Tiếp trang 12)

5) *Cuộc thi Toán học Zrinyi Ilona* theo hình thức trắc nghiệm dành cho học sinh tiểu học (từ lớp 3 đến lớp 8).

6) *Cuộc thi Toán học Hungary Quốc tế* dành cho học sinh trung học nói tiếng Hungari (15-18 tuổi) ở Hungari và các nước láng giềng, mỗi năm khoảng chừng 150-200 em tham dự.

7) *Cuộc thi Péter Rózsa* cho các sinh viên sư phạm.

8) *Cuộc thi Tưởng niệm Schweitzer Miklós* (nhà toán học Hungari, 1923-1945, giải nhì kì

thi toán Eötvös năm 1941) do Hội Toán học tổ chức dành cho sinh viên đại học, cao đẳng, từ năm 1950 nhằm tìm những nhà nghiên cứu cho tương lai. Đề thi thường gồm 10 bài toán khá khó do các nhà toán học nổi tiếng đề ra. Các thí sinh làm bài ở nhà trong 10 ngày và gửi bài giải qua đường bưu điện.

Có một thanh niên Việt Nam quê ở Nam Định tên là Vũ Hà Văn (con trai cả của nhà thơ Vũ Quần Phương) được phát hiện tài năng qua kì thi Schweitzer đã liên tục đoạt giải Schweitzer trong ba năm: giải nhì 1992, giải khuyến khích 1991, 1993.





## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/362. (Lớp 6).**

$$\text{Cho } S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n+1}} + \dots + \frac{2006}{2^{2007}}.$$

So sánh  $S$  với 1.

NGUYỄN ANH THUẤN  
(Sở GD-ĐT Hải Phòng)

**Bài T2/362. (Lớp 7).** Giả sử  $AH$  là đường cao của tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ . Gọi  $P$  và  $Q$  theo thứ tự là giao điểm các đường phân giác trong của các tam giác  $ABH$  và  $ACH$ . Đường thẳng  $PQ$  cắt  $AB$  tại  $E$  và cắt  $AC$  tại  $F$ . Chứng minh rằng  $AE = AF$ .

TRẦN ANH TUẤN  
(GV THCS Nhân Phú, Lý Nhân, Hà Nam)

**Bài T3/362.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  $(x; y)$  sao cho  $4x^2 + 6x + 3$  chia hết cho  $2xy - 1$ .

TRẦN HỒNG SƠN  
(Sở GD-ĐT Thái Bình)

**Bài T4/362.** Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2 + 4x + 7} = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 7.$$

CÙ HUY TOÀN  
(SV Khoa Công nghệ vật liệu 02, khóa 50  
ĐH Bách Khoa, Hà Nội)

**Bài T5/362.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{x}{x^2 + yz} + \frac{y}{y^2 + zx} + \frac{z}{z^2 + xy}$$

trong đó  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ .

NGUYỄN TẤN NGỌC  
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

**Bài T6/362.** Giả sử  $O$  là một điểm bất kì nằm trong tam giác  $ABC$ .  $AO$  cắt  $BC$  tại  $M$ ,  $BO$  cắt  $AC$  tại  $N$ ,  $CO$  cắt  $AB$  tại  $P$ . Chứng minh rằng giá trị của biểu thức

$$\left( \frac{OA \cdot AP}{OP} \right) \left( \frac{OB \cdot BM}{OM} \right) \left( \frac{OC \cdot CN}{ON} \right)$$

không phụ thuộc vào vị trí điểm  $O$ .

THÁI NHẬT PHƯƠNG  
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa  
Cam Ranh, Khánh Hòa)

**Bài T7/362.** Giả sử đường tròn  $(O)$  với tâm  $O$  bán kính  $R$ . Qua  $M$  vẽ hai dây cung  $CD$  và  $EF$  không đi qua tâm  $O$ . Hai tiếp tuyến tại  $C, D$  của  $(O)$  cắt nhau tại  $A$ , hai tiếp tuyến tại  $E, F$  của  $(O)$  cắt nhau tại  $B$ . Chứng minh rằng hai đường thẳng  $OM$  và  $AB$  vuông góc với nhau.

BÙI VĂN CHI  
(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

## CÁC LỚP THPT

**Bài T8/362.** Cho  $p$  là một số nguyên tố lớn hơn 2007 và  $n$  là số nguyên dương lớn hơn  $2006p$ . Chứng minh rằng  $C_n^{2006p} - C_k^{2006}$  chia hết cho  $p$ ,

trong đó  $k = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$  là phần nguyên của  $\frac{n}{p}$ .

TRẦN VIỆT ANH  
(GV Học viện Quản lý GD)

**Bài T9/362.** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi  $u_1$  và  $u_{n+1} = \frac{k + u_n}{1 - u_n}$ , trong đó  $k > 0, n = 1, 2, \dots$ . Biết rằng  $u_{13} = u_1$ . Hãy tìm các giá trị của  $k$ .

PHAN MẠNH HÀ  
(GV THPT Nam Yên Thành, Yên Thành, Nghệ An)

**Bài T10/362.** Giả sử  $a, b, c$  là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 3ab}} \geq \frac{3}{2}.$$

TRẦN QUANG VINH  
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu)

**Bài T11/362.** Xét tứ giác  $ABCD$  có điểm  $P$  tùy ý nằm bên trong nó sao cho  $\widehat{PAB}, \widehat{PBA}$ ,



$\widehat{PBC}$ ,  $\widehat{PCB}$ ,  $\widehat{PCD}$ ,  $\widehat{PDC}$ ,  $\widehat{PAD}$ ,  $\widehat{PDA}$  là các góc nhọn. Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $L$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $P$  trên các cạnh  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $\frac{AB}{PM} + \frac{BC}{PN} + \frac{CD}{PK} + \frac{DA}{PL}$ .

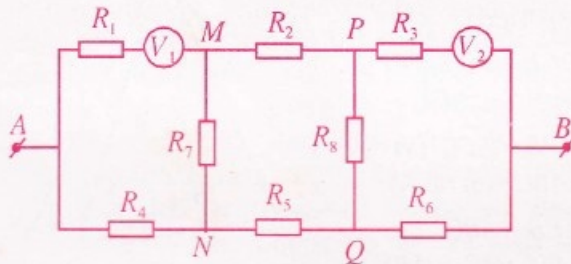
TRẦN VŨ HOÀNG ĐÀO  
(GV THPT Lê Quý Đôn, Long An)

**Bài T12/362.** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Lấy các điểm  $M$ ,  $N$  theo thứ tự trên các cạnh  $AA'$ ,  $CB$  sao cho  $\frac{AM}{AA'} = \frac{CN}{CB}$ . Chứng minh rằng độ dài đoạn  $MN$  không bé hơn khoảng cách từ đỉnh  $A'$  đến đường thẳng  $C'B$ .

NGUYỄN LÁI  
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

### CÁC ĐỀ VẬT LÝ

**Bài L1/362.** Cho mạch điện như hình vẽ.



Biết  $R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = R$ ,  $R_1 = 3R$ ,  $R_3 = 4R$ ,  $R_4 = 6R$ ,  $R_6 = 4R$ . Điện trở các vôn kế:  $R_{V1} = R$ ,  $R_{V2} = 2R$ . Hiệu điện thế  $U_{AB} = U$  không đổi. Bỏ qua điện trở các dây nối. Gọi số chỉ các vôn kế  $V_1$ ,  $V_2$  lần lượt là  $U_{V1}$ ,  $U_{V2}$ .

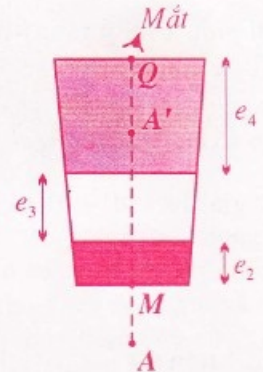
Xác định tỉ số  $\frac{U_{V1}}{U_{V2}}$ .

NGUYỄN MẠNH THẮNG

(GV THCS Khánh Dương, Yên Mô, Ninh Bình)

**Bài L2/362.** Một cốc thủy tinh (chiết suất  $n_2 = 1,5$ ) có đáy dày  $e_2 = 0,6\text{cm}$  (coi như một bản hai mặt song song). Trong cốc có một lớp nước dày  $e_3 = 2\text{cm}$ , chiết suất  $n_3 = \frac{4}{3}$ , trên

nước là một lớp dầu trong suốt dày  $e_4 = 2,8\text{cm}$ , chiết suất  $n_4 = 1,4$ . Đặt một điểm sáng  $A$  ở dưới đáy cốc  $M$  và cách  $M$  một khoảng  $AM = d_1 = 1,5\text{cm}$ . Nếu đặt mắt ở phía trên lớp dầu  $Q$  và nhìn thẳng đứng vào cốc thì sẽ thấy ảnh  $A'$  của  $A$ . Hỏi ảnh này cách mặt lớp dầu  $Q$  bao nhiêu centimet?



NGUYỄN QUANG HẬU  
(Hà Nội)

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/362. (For 6<sup>th</sup> grade).**

$$\text{Let } S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n+1}} + \dots + \frac{2006}{2^{2007}}.$$

Compare  $S$  with 1.

**T2/362. (For 7<sup>th</sup> grade).** Let  $AH$  be the altitude of a right triangle  $ABC$ , right angle at  $A$ . Let  $P$  and  $Q$  be the incenters of  $ABH$  and  $ACH$ , respectively.  $PQ$  meets with  $AB$  at  $E$  and with  $AC$  at  $F$ . Prove that  $AE = AF$ .

**T3/362.** Find all possible pairs of positive integers  $(x; y)$  such that  $4x^2 + 6x + 3$  is a multiple of  $2xy - 1$ .

**T4/362.** Solve the following equation

$$\sqrt{2x^2 + 4x + 7} = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 7.$$

**T5/362.** Find the maximum value of the following expression:  $A = \frac{x}{x^2 + yz} + \frac{y}{y^2 + zx} + \frac{z}{z^2 + xy}$ ,

where  $x, y, z$  are positive real numbers such that  $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ .

**T6/362.**  $O$  is a point chosen arbitrarily inside a triangle  $ABC$ .  $AO$ ,  $BO$  and  $CO$  meet  $BC$ ,  $CA$  and  $AB$  at  $M$ ,  $N$  and  $P$  respectively. Prove that

the value of ratio  $\left(\frac{OA \cdot AP}{OP}\right) \left(\frac{OB \cdot BM}{OM}\right) \left(\frac{OC \cdot CN}{ON}\right)$

does not depend on the position of the point  $O$ .

(Xem tiếp trang 28)





★ **Bài T1/358. (Lớp 6)** Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^3 + b^3 = c^3$ . So sánh  $a^{2007} + b^{2007}$  và  $c^{2007}$ .

**Lời giải.** Chú ý rằng với số  $x$  ta có:  $0 < x < 1$  khi và chỉ khi  $0 < x^n < 1$  với mỗi số nguyên dương  $n$ , và lúc đó  $x^n < x^m \Leftrightarrow m < n$  với mỗi cặp số nguyên dương  $m, n$ .

Từ giả thiết  $a^3 + b^3 = c^3$  với  $a, b, c$  là các số dương, ta có  $a^3 < c^3$  hay  $\left(\frac{a}{c}\right)^3 < 1$  nên theo

chú ý trên thì  $\frac{a}{c} < 1$  và  $\left(\frac{a}{c}\right)^{2007} < \left(\frac{a}{c}\right)^3$ .

Tương tự có  $\frac{b}{c} < 1$  và  $\left(\frac{b}{c}\right)^{2007} < \left(\frac{b}{c}\right)^3$ .

Từ đó  $\frac{a^{2007}}{c^{2007}} + \frac{b^{2007}}{c^{2007}} < \frac{a^3}{c^3} + \frac{b^3}{c^3}$

hay  $\frac{a^{2007} + b^{2007}}{c^{2007}} < 1$ .

Suy ra  $a^{2007} + b^{2007} < c^{2007}$ . □

◀ **Nhận xét.** 1) Các bạn Lê Đức Lương, 6A, THCS Lập Thạch, Vinh Phúc; Bạch Mỹ Hạnh, 6G, THCS Hoàng Liệt, Q. Hoàng Mai, Hà Nội; Nguyễn Duy Hưng, 6, THCS Phong Huy Lĩnh, Đông Hưng, Thái Bình; Nguyễn Thị Kim Oanh, 6C, THCS Bắc Hồng, Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh đã chứng minh bài toán tổng quát dưới đây với cách giải như trên.

"Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^n + b^n = c^n$  với  $n$  là số nguyên dương thì  $a^m + b^m < c^m$  với mỗi số  $m > n$ ".

Bạn Oanh còn nhận xét thêm là  $a^k + b^k > c^k$  với mỗi số  $1 \leq k < n$ .

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

**Phú Thọ:** Tô Khánh Huyền, 6A1, THCS Lâm Thao;  
**Vinh Phúc:** Tạ Thị Mai Hạnh, Nguyễn Thế Tùng, Nguyễn Hoàng Quốc Việt, Trần Công Sơn, 6A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Hoàng Anh Tú, 6I, THPT Marie Curie, Thanh Xuân; **Hưng Yên:** Phan Thị Hà, 6A, THCS Tiên Lữ; **Nghe An:** Trần Ngọc Đông, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Trần Dương Hằng, 6C, THCS Thông Tân, Hưng Nguyên, Nguyễn Quốc Đức, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Hoàng Thu Thảo, 6D, THCS Nam Hồng, TX. Hồng Lĩnh; **Bạc Liêu:** Trần Quang Minh, 6/1, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

## VIỆT HẢI

★ **Bài T2/358. (Lớp 7).** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Gọi  $E$  là điểm tùy ý nằm giữa  $B$  và  $C$ . Đường thẳng qua  $E$  vuông góc với  $AB$  và đường thẳng qua  $C$  vuông góc với  $AC$  cắt nhau ở  $D$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $BE$ . Tính độ lớn của góc  $AKD$ .

**Lời giải.** (Theo bạn Cao Thanh Tùng, 7A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Thanh Hóa).

Gọi  $F$  là giao của  $DE$  và  $AB$  (hình vẽ). Ta có

$\widehat{DCE} + \widehat{ACB} = 90^\circ$

(vì  $DC \perp AC$ )

$\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$  (vì

$\triangle ABC$  cân tại  $A$ )

$\widehat{FEB} + \widehat{ABC}$

$= 90^\circ$  ( $DE \perp AB$ )

$\widehat{FEB} = \widehat{DEC}$  (đối đỉnh).

Suy ra  $\widehat{DCE} = \widehat{DEC} \Rightarrow \triangle DEC$  cân tại  $D$

$\Rightarrow DC = DE$

(1)

Trên tia đối của tia  $KD$  lấy điểm  $L$  sao cho  $KL = KD$ . Theo giả thiết  $KB = KE$ , nên

$\triangle KBL = \triangle KED$  (c.g.c)  $\Rightarrow BL = ED$

(2)

và  $\widehat{BLK} = \widehat{EDK}$

(3)

Từ (1) và (2) suy ra  $DC = LB$ .

Từ (3) suy ra  $LB \parallel ED \Rightarrow LB \perp AB$

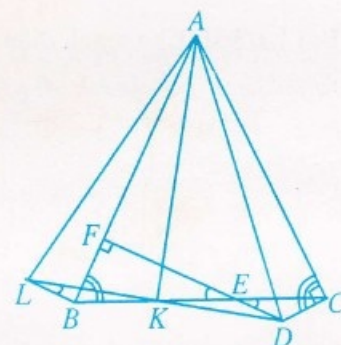
(vì  $ED \perp AB$ )  $\Rightarrow \widehat{LBA} = 90^\circ = \widehat{DCA}$ .

Mặt khác,  $AB = AC$  (vì  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ ).

Suy ra  $\triangle ABL = \triangle ACD$  do đó  $AL = AD$ .

Từ đó với chú ý rằng  $KL = KD$  ta có  $AK \perp LD$

Vậy  $\widehat{AKD} = 90^\circ$ . □





◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán này khá hay, nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng. Tuy nhiên, có một số bạn phải sử dụng các kiến thức liên quan tới tứ giác nội tiếp.

2) Xin nêu tên một số cá nhân và tập thể có lời giải tốt:

**Hà Nội:** Hoàng Tiến Long, 302, khu TT Đồng Xa, Mai Đình, Cầu Giấy; **Nghệ An:** Phan Phú Nguyên, 7A, Nguyễn Văn Thắng, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** Tập thể lớp 7A và 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T3/358.** Tìm số nguyên  $n$  ( $n > 1$ ) bé nhất sao cho  $\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n}$  là một số chính phương.

**Lời giải.** (Theo bạn Lê Trọng Tín, 9A, THCS Yên Phong, Yên Phong, Bắc Ninh).

Ta chứng minh được

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Giả sử  $(n+1)(2n+1) = 6k^2$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) (1)

Do  $2n+1$  lẻ nên  $n+1$  chẵn, vậy  $n$  lẻ.

Đặt  $n = 2m+1$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) và thay vào (1) ta có  $(m+1)(4m+3) = 3k^2$ .

Do  $(m+1; 4m+3) = 1$ ,  $4m+3$  không là số chính phương nên ta có

$$\begin{cases} m+1 = a^2 \\ 4m+3 = 3b^2 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{N}^*, ab = k)$$

Từ đó  $4a^2 - 3b^2 = 1 \Leftrightarrow (2a-1)(2a+1) = 3b^2$ .

Lại do  $(2a-1; 2a+1) = 1$  nên có hai khả năng:

$$a) \begin{cases} 2a-1 = 3a_1^2 \\ 2a+1 = b_1^2 \end{cases} \quad (a_1, b_1 \in \mathbb{N}^*)$$

Nên  $b_1^2 = 3a_1^2 + 2$ , vô lí vì số chính phương chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

$$b) \begin{cases} 2a-1 = a_2^2 \\ 2a+1 = 3b_2^2 \end{cases} \quad (a_2, b_2 \in \mathbb{N}^*)$$

Suy ra  $3b_2^2 - a_2^2 = 2 \Rightarrow a_2$  lẻ và không chia hết cho 3.

Dễ thấy rằng với  $a_2 = 5$  thì  $n = 337$  là số nguyên dương bé nhất thỏa mãn bài toán.

Khi đó

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} = \frac{(337+1)(2 \cdot 337+1)}{6} = 195^2$$

là số chính phương.  $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể biến đổi (1) về dạng

$$(4n+3)^2 - 48k^2 = 1 \text{ hay } x^2 - 48k^2 = 1 \text{ với } x = 4n+3.$$

Đây là phương trình Pell. Giải phương trình này ta tìm được  $x = 1351$ , do đó  $n = 337$  thỏa mãn bài toán.

2) Nhiều bạn giải bài toán này với những cách khác nhau. Có 10 bạn giải sai. Ngoài lời giải của bạn Tín ở trên, các bạn có lời giải tốt là:

**Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Pho, 9A1, THCS TT. Chờ, Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** Khương Mạnh Kháng, 8A, Lương Hồng Sơn, 9C, THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc; Nguyễn Hoàng Hải, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Nguyên:** Đào Hoàng Tùng, 8A3, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** Trần Xuân Quang, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/358.** Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{2a}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{2b}{c}\right)^2 + \left(1 + \frac{2c}{a}\right)^2 \geq \frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} (*)$$

trong đó  $a, b, c$  là các số thực dương.

**Đẳng thức xảy ra khi nào?**

**Lời giải.** Áp dụng BĐT Bunyakovski, ta có

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{2a}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{2b}{c}\right)^2 + \left(1 + \frac{2c}{a}\right)^2 \\ & \geq \frac{1}{3} \left(3 + 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & (ab+bc+ca) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \\ & = (ab+bc+ca) \left(\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca}\right) \\ & \geq \left(\sqrt{ab} \cdot \frac{a}{\sqrt{ab}} + \sqrt{bc} \cdot \frac{b}{\sqrt{bc}} + \sqrt{ca} \cdot \frac{c}{\sqrt{ca}}\right)^2 \\ & = (a+b+c)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Đặt  $S = \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$ , dễ thấy  $S \geq 3$ .



Từ (1) và (2), để chứng minh BĐT (\*) ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{1}{3}(3+2S)^2 \geq 9S \Leftrightarrow (S-3)(4S-3) \geq 0.$$

Điều này đúng, vì  $S \geq 3$ .

Đẳng thức ở (\*) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} S=3 \\ 1+\frac{2a}{b}=1+\frac{2b}{c}=1+\frac{2c}{a} \Leftrightarrow a=b=c. \square \\ \frac{a}{ab}=\frac{b}{bc}=\frac{c}{ca} \end{cases}$$

◀ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này và giải đúng. Một số bạn đã đưa và giải bài toán tổng quát:

"Cho  $a_1, a_2, \dots, a_k$  là các số thực dương và  $m, n, k$  là các số nguyên dương ( $n > m$ ). Chứng minh rằng

$$\left(m + \frac{na_1}{a_2}\right)^2 + \left(m + \frac{na_2}{a_3}\right)^2 + \dots + \left(m + \frac{na_k}{a_1}\right)^2 \geq (m+n)^2 \cdot \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2}{a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_ka_1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_k$ .

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Quảng Ninh:** Ngô Đức Long, 9A8, THCS Trần Quốc Toàn, TP. Hạ Long; **Hà Nội:** Phạm Duy Long, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Vĩnh Phúc:** Khương Mạnh Thắng, 8A, THCS Lập Thạch; **Mạc Thị Thu Huệ,** 7A, THCS Đồng Quế, Nguyễn Thị Ngọc, 8A1, THCS Yên Lạc; **Thái Bình:** Hoàng Minh Lập, 8E, THCS Quang Trung, Kiến Xương; **Nam Định:** Trần Vũ Trung, 9A9, THCS Phùng Chí Kiên, TP. Nam Định; **Hà Tây:** Nguyễn Khánh Việt, 9C, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Nguyễn Đình Tương,** 9A, THCS Phú Lâm, Hà Đông; **Bắc Ninh:** Lê Trọng Tín, 9A, THCS Yên Phong; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Khang, 8B, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Thanh Hóa:** Hoàng Tiến Dũng, 8A, THCS Lê Văn Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** Tăng Văn Bình, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** Huỳnh Khánh Vân, 8E, THCS Trần Quốc Toàn, TP. Tuy Hòa; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 9A4, THCS Trà Nóc; **TP. Hồ Chí Minh:** Bùi Trần Long, 9A5, THCS Chu Văn An, Q.1.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

### ★ Bài T5/358. Giải phương trình

$$x^3 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x+6}} = 6.$$

Lời giải. Đặt  $\begin{cases} \sqrt[3]{x+6} = z \\ \sqrt[3]{z+6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^3 - x = 6 \\ y^3 - z = 6 \end{cases}$

Mặt khác, với các phép đặt ẩn số phụ trên, từ phương trình trong đầu bài, ta có  $x^3 - y - 6 = 0$ .

Như vậy, ta được hệ phương trình (I):

$$\begin{cases} x^3 = y + 6 & (1) \\ y^3 = z + 6 & (2) \\ z^3 = x + 6 & (3) \end{cases}$$

Nhận thấy, hệ trên không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với  $x, y, z$  nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết  $x = \max(x, y, z)$  ( $x$  là số lớn nhất trong ba số  $x, y, z$  hay  $x \geq y, x \geq z$ ).

Nếu  $x > y$ , từ (1) và (2) suy ra  $y + 6 = x^3 > y^3 = z + 6 \Rightarrow y > z$ .

Khi đó từ (2), (3) suy ra  $z + 6 = y^3 > z^3 = x + 6 \Rightarrow z > x$ . Mâu thuẫn với giả thiết  $x \geq z$  ở trên. Do đó phải có  $x = y$ .

Với  $x = y$ , từ (1) và (2) suy ra  $y = z$ .

Vậy  $x = y = z$ .

Phương trình (1) trở thành  $x^3 - x - 6 = 0$

$$\text{hay } (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \quad (4)$$

Vì  $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$  nên PT (4) có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

Thử lại, nghiệm này thỏa mãn bài toán.

Vậy phương trình trong đầu bài có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .  $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn đã mắc sai lầm khi cho rằng vai trò của  $x, y, z$  trong hệ phương trình (I) như nhau nên đưa ra giả thiết  $x \geq y \geq z$  (!).

(ta chỉ có thể giả thiết  $x$  là số lớn nhất trong ba số  $x, y, z$  hay  $x \geq y, x \geq z$ ).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

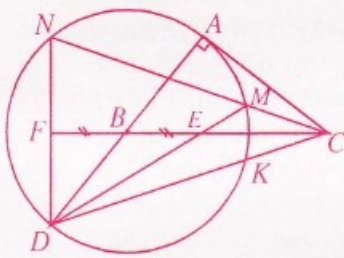
**Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Phò, 9A1, THCS TTr. Chờ, Yên Phong; **Nguyễn Hữu Dũng,** 5B, TH Mĩ Hương, Lương Tài; **Hà Nội:** Lưu Trọng Duy, 9H, THCS Lê Quý Đôn; **Nguyễn Quốc Hoàn,** 6A16, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; **Quảng Ninh:** Nguyễn Thị Trà Anh, 9A8, THCS Trần Quốc Toàn, TP Hạ Long; **Hà Tĩnh:** Trần Văn Tài, 9B, THCS Đức Thanh, Đức Thọ; **Bình Định:** Trần Quốc Thạch, 8A6, THCS Phước Hưng, Tuy Phước; **Bến Tre:** Lê Hạnh Thư, 9<sup>7</sup>, THCS Hương Mỹ, Mỏ Cày; **Phú Yên:** Phạm Quang Thịnh, 8H, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa; **Đắk Lắk:** Trương Thành Công, 8A, THCS Nguyễn Khuyến, Ea Kar; **Nguyễn Văn Thảo,** 7A5, THCS TTr. Phước An, Krông Pắc; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Thảo, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức; **Bình Thuận:** Nguyễn Anh Tú,



9A, THCS Tân An, Lagi; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 9A4, THCS Trà Nóc, TP Cần Thơ; **Nghệ An:** Dương Hoàng Hưng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Văn Tú, 9A, THCS Tân Lập, Lập Thạch.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T6/358.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ . Vẽ đường tròn tâm  $B$ , bán kính  $BA$ . Trên đường thẳng  $BC$  lấy các điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $B$  là trung điểm của  $EF$ . Vẽ đường kính  $AD$ . Các đường thẳng  $DE$  và  $DF$  cắt đường tròn  $(B)$  lần nữa theo thứ tự tại các điểm  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng ba điểm  $C, M, N$  thẳng hàng.



**Lời giải.** Gọi  $K$  là giao điểm của đường thẳng  $CD$  và đường tròn tâm  $B$  bán kính  $BA$ . Xét trường hợp  $E, F$  nằm trong đường tròn. Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{CMD} &= 180^\circ - \widehat{MCD} - \widehat{MDC} \text{ hay} \\ \text{sđ} \widehat{CMD} &= 180^\circ - \frac{1}{2} \text{sđ}(\widehat{DN} - \widehat{MK}) - \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{MK} \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{DN}.\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \text{sđ} \widehat{DMN} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{DN}.$$

$$\text{Nên } \text{sđ} \widehat{CMD} + \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{DMN} = 180^\circ.$$

Vậy  $C, M, N$  thẳng hàng. Trường hợp  $E, F$  nằm ngoài đường tròn chứng minh tương tự.  $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn đề ra bài toán tổng quát hơn, đó là các bạn **Trần Xuân Quang**, 9B, THCS Trần Mai Ninh, **Thanh Hóa**; **Phạm Anh Tuấn**, 8A16, THCS Ngô Sĩ Liên, **TP. Hồ Chí Minh**.

2) Các bạn có lời giải tốt:

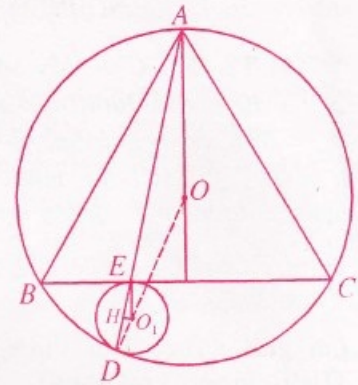
**Nam Định:** Phạm Hồng Phong, 9A1, THCS Nghĩa Hưng; **Bắc Giang:** Hoàng Trung Dũng, 6A, THCS Phúc Hòa, Tân Yên; **Phú Thọ:** Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** Lê Anh Công, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc và hai bạn nêu trên.

VŨ KIM THỦY

★ **Bài T7/358.** Cho tam giác đều  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Vẽ đường tròn  $(O_1)$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  và với cung nhỏ  $\widehat{BC}$ ; đường tròn  $(O_2)$  tiếp xúc với cạnh  $CA$  và với cung nhỏ  $\widehat{CA}$ ; đường tròn  $(O_3)$  tiếp xúc với cạnh  $AB$  và với cung nhỏ  $\widehat{AB}$ . Chứng minh rằng  $AO_1 = BO_2 = CO_3$  khi và chỉ khi bán kính các đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$  bằng nhau.

(Kí hiệu  $(X)$  là đường tròn tâm  $X$ ).

**Lời giải.** Giả sử  $(O_1)$  tiếp xúc với cung nhỏ  $\widehat{BC}$  tại  $D$ , tiếp xúc với  $BC$  tại  $E$ . Ta có  $O, O_1, D$  thẳng hàng và  $EO_1 \parallel AO$ . Các tam giác  $OAD$  và  $O_1ED$  cân, ta có



$\widehat{AOD} = \widehat{EO_1D} \Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{O_1DE} \Rightarrow A, E, D$  thẳng hàng. Gọi  $H$  là trung điểm của  $DE$ , ta có  $O_1H \perp AD$ , do đó

$$\begin{aligned}AO_1^2 &= AH^2 + HO_1^2 = AH^2 - HE^2 + HE^2 + HO_1^2 \\ &= (AH + HE)(AH - HE) + EO_1^2 \\ &= AE \cdot AD + R_1^2 \quad (R_1 \text{ là bán kính đường tròn } (O_1)).\end{aligned}$$

Ta lại có  $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$

$$\sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AD \cdot AE = AB^2 = a^2$$

( $a$  là cạnh tam giác đều  $ABC$ ).

$$\text{Do đó } AO_1^2 = a^2 + R_1^2 \quad (1)$$

Tương tự, đặt bán kính đường tròn  $(O_2), (O_3)$  là  $R_2, R_3$ , ta có  $BO_2^2 = a^2 + R_2^2$   $(2)$

$$CO_3^2 = a^2 + R_3^2 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có  $AO_1 = BO_2 = CO_3$

$$\Leftrightarrow R_1 = R_2 = R_3. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán này có nhiều cách giải. Ngoài các cách giải mà các bạn gửi đến, có thể chứng minh kết quả bằng cách xét các phép đối xứng qua các trục đối xứng của tam giác đều  $ABC$ .

**TOÁN HỌC**

**Tuổi trẻ** Số 362 (8-2007)

**21**



2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Phú Thọ:** Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, Tạ Đức Thành, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Mạc Thị Thu Huệ, 7A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch; **Hà Tây:** Nguyễn Đình Tương, 9A, THCS Phú Lâm, TP. Hà Đông; **Thái Bình:** Hà Thành Trung, 9D, THCS TTr. Đông Hưng, Đông Hưng; **Thanh Hóa:** Lê Nhật Minh, 9E, THCS Chu Văn An, Nga Sơn, Lê Trọng Cường, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** Trần Viết Thành, 9A2, THCS Trà Lân, Con Cuông, Hoàng Thị Thu Hiền, 9E, THCS Lê Mao, TP. Vinh; **TP. Hồ Chí Minh:** Phạm Anh Tuấn, 8A16, THCS Ngô Sĩ Liên, Tân Bình.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T8/358.** Cho dãy số  $(a_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) được xác định bởi:  $a_0 = 29, a_1 = 105, a_2 = 381$  và  $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n$  với mọi  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $m$  luôn tồn tại số tự nhiên  $n$  sao cho các số  $a_n, a_{n+1} - 1, a_{n+2} - 2$  đều chia hết cho số  $m$ .

**Lời giải.** (Theo bạn Vương Quốc Vũ, 11T, THPT chuyên An Giang).

Xét dãy số  $a_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) xác định bởi  $a_0 = 29, a_1 = 105, a_2 = 381, a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n$  (1)

Từ công thức truy hồi (1) ta tìm được  $a_{-1} = 8; a_{-2} = 2; a_{-3} = 1, a_{-4} = 0$ .

Giả sử  $a_n \equiv r_n \pmod{m}$  ở đó  $0 \leq r_n < m$ .

Xét các bộ ba  $(r_n, r_{n+1}, r_{n+2})$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

Vì số các bộ ba là vô hạn mà tập giá trị của các bộ ba này là hữu hạn (không vượt quá  $m^3$ ) nên tồn tại  $p, q$  mà  $p < q \in \mathbb{Z}$  sao cho

$$(r_p, r_{p+1}, r_{p+2}) = (r_q, r_{q+1}, r_{q+2})$$

$$\text{tức là } \begin{cases} r_p = r_q \\ r_{p+1} = r_{q+1} \\ r_{p+2} = r_{q+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_p \equiv a_q \pmod{m} \\ a_{p+1} \equiv a_{q+1} \pmod{m} \\ a_{p+2} \equiv a_{q+2} \pmod{m} \end{cases}$$

Từ công thức truy hồi (1) và hệ đồng dư trên ta dễ dàng suy ra  $a_{q+k} \equiv a_{p+k} \pmod{m} \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow a_k \equiv a_{q-p+k} \pmod{m} \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow a_k \equiv a_{t+k} \pmod{m}, t = q - p \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó  $a_k \equiv a_{et+k} \pmod{m} \forall k \in \mathbb{Z}, \forall e \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Nói riêng } \begin{cases} a_{l-4} \equiv a_{-4} = 0 \pmod{m} \\ a_{l-3} \equiv a_{-3} = 1 \pmod{m} \\ a_{l-2} \equiv a_{-2} = 2 \pmod{m} \end{cases}$$

Cho  $l$  đủ lớn ta có  $lt - 4 \in \mathbb{N}$ . Do đó tồn tại  $n = lt - 4 \in \mathbb{N}$  để  $a_n \equiv 0 \pmod{m}, a_{n+1} \equiv 1 \pmod{m}$  và  $a_{n+2} \equiv 2 \pmod{m}$ . Đó là điều phải chứng minh.  $\square$

◀ **Nhận xét.** Tất cả các bạn (trừ 1 bạn) gửi lời giải đều giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

**Đà Nẵng:** Nguyễn Như Đức Trung, 11A, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thanh Hóa:** Trần Xuân Quang, 9B, THCS Trần Mai Ninh; **Đắk Lắk:** Đoàn Nhật Minh, 11A4, THPT Ngô Gia Tự, Nguyễn Trọng Nghĩa, Trần Anh Quang, 11T, THPT chuyên Nguyễn Du.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T9/358.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0; 1]$  và thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\text{i) } f(0) = 0;$$

$$\text{ii) } f(1) = 1;$$

$$\text{iii) } 6f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = 5f(x) + f(y) \text{ với mọi } x, y \text{ thuộc } [0; 1] \text{ mà } x \geq y.$$

$$\text{Hãy tính } f\left(\frac{8}{23}\right).$$

**Lời giải.** (Theo đa số các bạn). Ta có

$$\begin{aligned} 6f\left(\frac{8}{23}\right) &= 6f\left[\frac{1}{3}\left(2\frac{12}{23} + 0\right)\right] \\ &= 5f\left(\frac{12}{23}\right) + f(0) = 5f\left(\frac{12}{23}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 6f\left(\frac{12}{23}\right) &= 6f\left[\frac{1}{3}\left(2\frac{18}{23} + 0\right)\right] \\ &= 5f\left(\frac{18}{23}\right) + f(0) = 5f\left(\frac{18}{23}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{và } 6f\left(\frac{18}{23}\right) &= 6f\left[\frac{1}{3}\left(2\frac{23}{23} + \frac{8}{23}\right)\right] \\ &= 5f(1) + f\left(\frac{8}{23}\right) = 5 + f\left(\frac{8}{23}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta thu được

$$\frac{6^3}{5^2} f\left(\frac{8}{23}\right) = 5 + f\left(\frac{8}{23}\right)$$



$$\text{hay } f\left(\frac{8}{23}\right) = \frac{125}{191}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Đây là một bài toán tính toán đơn giản, không cần đến giả thiết liên tục đối với hàm số  $f(x)$ . Nhiều bạn đã cho cách giải tương tự với bài toán mở rộng sau đây:

"Cho  $m, n$  là số nguyên dương,  $\alpha \in (0, 1)$  và cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $[0, 1]$  và thỏa mãn các điều kiện

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f\left(\frac{mx+n}{m+n}\right) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

với  $x \geq y, x, y \in [0, 1]$ . Chứng minh rằng

$$f\left(\frac{m^3}{(m+n)^3 - nm^2}\right) = \frac{\alpha^3}{1 - \alpha^2 + \alpha^3}.$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Phú Thọ:** Lê Đức Anh, 12A1, THPT Phong Châu, Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, THPT Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Quang Trường, Khổng Hoàng Thao, Nguyễn Tuấn Duy, Nguyễn Hoàng Hải, Nguyễn Tiến Dũng, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Trần Văn Bảo, 10A2T, THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội; **Hà Tây:** Nguyễn Thế Anh, 9C, THCS Ngô Sĩ Liên; **Hà Nam:** Trần Quang Chiến, 10A1, THPT chuyên Hà Nam; **Hải Dương:** Vũ Thanh Tú, 10A1, THPT Kê Sắt, Trường Thế Nghĩa, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** Trần Thị Hồng Vân, 10A1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Hải Phòng:** Nguyễn Quốc Hưng, 10A1, THPT chuyên Trần Phú, TP. Hải Phòng; **Thanh Hóa:** Lê Ngọc Đạt, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Lê Trung Sơn, 11T, THPT Nghĩa Đàn; **Đà Nẵng:** Phạm Trọng Khôi, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Đồng Tấn Phát, 10A1, THPT Phù Cát 3; **Đắk Lắk:** Nguyễn Đình Quốc Bảo, 11CT, THPT chuyên, Trương Công Thành, 10T1, THPT Ngô Gia Tự; **Cần Thơ:** Lê Đại Hành, 9A4, THCS Trà Nóc.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T10/358.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+(b-c)^2} + \sqrt{b+(c-a)^2} + \sqrt{c+(a-b)^2} \geq \sqrt{3}.$$

**Lời giải.** Do các số  $a, b, c$  có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử  $a \geq b$

$$\geq c. \text{ Lúc đó } a \geq \frac{1}{3}.$$

Chú ý: với các số thực không âm  $x, y, u, v$  BĐT

$$\sqrt{x+u^2} + \sqrt{y+v^2} \geq \sqrt{2(x+y)+(u+v)^2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+u^2} + \sqrt{y+v^2})^2 \geq 2(x+y) + (u+v)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+u^2)(y+v^2)} \geq x+y+2uv$$

$$\Leftrightarrow 4(x+u^2)(y+v^2) \geq (x+y+2uv)^2$$

$$\Leftrightarrow 4xy + 4(xv^2 + yu^2) + 4u^2v^2$$

$$\geq (x+y)^2 + 4uv(x+y) + 4u^2v^2$$

$$\Leftrightarrow 4(u-v)(yu-xv) \geq (x-y)^2$$

Với  $x = a, y = b, u = b - c, v = a - c$  ta có

$$4(u-v)(yu-xv) = 4(b-a)(b(b-c) - a(a-c))$$

$$= 4(a-b)^2(a+b-c) \geq (a-b)^2. \quad \text{BĐT này}$$

đúng vì  $4(a+b-c) \geq 4a \geq 4 \cdot \frac{1}{3} > 1$ , nghĩa là

BĐT (1) được chứng minh.

Áp dụng BĐT (1), ta thấy

$$\sqrt{a+(b-c)^2} + \sqrt{b+(a-c)^2}$$

$$\geq \sqrt{2(a+b)+(a+b-2c)^2}$$

$$= \sqrt{2(1-c)+(1-3c)^2}$$

$$= \sqrt{2(1-c)+((1-\sqrt{3}c)(1+\sqrt{3}c))^2}$$

$$\geq \sqrt{2(1-c)+(1-\sqrt{3}c)^2} = \sqrt{3+c-2\sqrt{3}c}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{c}.$$

Do đó

$$\sqrt{a+(b-c)^2} + \sqrt{b+(c-a)^2} + \sqrt{c+(a-b)^2}$$

$$\geq \sqrt{a+(b-c)^2} + \sqrt{b+(c-a)^2} + \sqrt{c} \geq \sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$  và

$$c = \frac{1}{3}, \text{ tức là } a = b = c = \frac{1}{3}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Đây là bài toán bất đẳng thức hay, có nhiều đánh giá mới. Có nhiều bạn gửi lời giải tới tòa soạn, hầu hết đều giải đúng và cơ bản giống lời giải trên, trong đó có các bạn học sinh THCS sau:

**Phú Thọ:** Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, THCS Lâm Thao; **Hà Tây:** Vũ Minh Thắng, 9B, THCS Bê Công, Chương Mỹ; **Hà Nam:** Trần Thế Khải, 9B, THCS Trần Phú, Phù Lý; **Thanh Hóa:** Trần Xuân Quang, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Quảng Bình:** Võ Thành Văn, 7B, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Phú Yên:** Phạm Quang Thịnh, 8H, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T11/358.** Gọi  $H$  và  $I$  theo thứ tự là trực tâm và tâm đường tròn nội tiếp một tam giác nhọn  $ABC$ . Các đường thẳng  $AH, BH, CH$  theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác

**TOÁN HỌC**

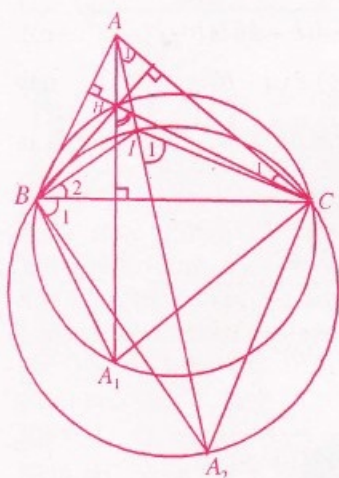
& Tuổi Trẻ Số 362 (8-2007)

**23**



*HBC, HCA, HAB lần nữa tại  $A_1, B_1, C_1$ . Các đường thẳng  $AI, BI, CI$  theo thứ tự cắt lại đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $IBC, ICA, IAB$  lần nữa tại  $A_2, B_2, C_2$ . Chứng minh rằng*

$$HA_1 \cdot HB_1 \cdot HC_1 + 64R^3 \geq 9IA_2 \cdot IB_2 \cdot IC_2.$$



**Lời giải.** Xét tứ giác nội tiếp  $HBA_1C$ , ta thấy  $\widehat{CBA_1} = \widehat{CHA_1} = \widehat{CBA}$ , nên tam giác  $ABA_1$  cân tại B, suy ra  $BA_1 = BA$ . Tương tự ta cũng có  $CA = CA_1$ . Đặt  $BC = a, AC = b, AB = c$ .

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp

$BHCA_1$ , ta có  $HA_1 \cdot BC = HB \cdot CA_1 + HC \cdot BA_1$ .

Từ đó, theo BĐT Cauchy ta có

$$HA_1 = HB \cdot \frac{AC}{BC} + HC \cdot \frac{AB}{BC} \geq 2 \sqrt{HB \cdot HC \cdot \left( \frac{bc}{a^2} \right)}.$$

$$\text{Tương tự } HB_1 \geq 2 \sqrt{HC \cdot HA \cdot \left( \frac{ac}{b^2} \right)};$$

$$HC_1 \geq 2 \sqrt{HA \cdot HB \cdot \left( \frac{ab}{c^2} \right)}.$$

Suy ra  $HA_1 \cdot HB_1 \cdot HC_1 \geq 8HA \cdot HB \cdot HC$ .

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$8HA \cdot HB \cdot HC + 64R^3 \geq 9IA_2 \cdot IB_2 \cdot IC_2 \quad (*)$$

**Nhận xét.** Nếu gọi  $R_1, R_2, R_3, R$  là các bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $HBC, HCA, HAB$  và  $ABC$  theo thứ tự, thì  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ .

Từ nhận xét trên ta có  $HB = 2R \cdot \sin \widehat{HCB} = 2R \cdot \cos B$ . Tương tự với  $HC, HA$ , suy ra

$$HA \cdot HB \cdot HC = 8R^3 \cdot \cos A \cos B \cos C \quad (1)$$

Xét tứ giác nội tiếp  $IBA_2C$  có  $\widehat{B_1} = \widehat{I_1} = \widehat{A_1} + \widehat{C_1} = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2}$ , dẫn đến  $\widehat{IBA_2} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^\circ$ , nghĩa

là  $IA_2$  là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $IBC$ . Vậy

$$BC = IA_2 \cdot \sin \widehat{BIC} = IA_2 \cdot \sin \frac{B+C}{2} = IA_2 \cdot \cos \frac{A}{2}.$$

Lại vì  $BC = 2R \cdot \sin A$ , nên  $IA_2 = 4R \sin \frac{A}{2}$ .

Tương tự với  $IB_2, IC_2$  ta đi đến

$$IA_2 \cdot IB_2 \cdot IC_2 = 64R^3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy BĐT (\*) tương đương với

$$1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \geq 9 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (3)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương, ta được

$$(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \geq 9 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \quad (4)$$

Để ý đến các hệ thức lượng giác quen thuộc

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C.$$

Từ (4) ta thấy BĐT (3) được chứng minh, do đó BĐT (\*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác  $ABC$  đều.  $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

**Hà Nội:** Nguyễn Đức Bằng, 12A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Q. Cầu Giấy; **Hải Phòng:** Lý Trần Đức Anh, Trần Hoàng Bá, 11 Toán, THPT NK Trần Phú; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Huy Hoàng, Phạm Văn Thành, Khổng Hoàng Thao, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Trần Văn Hạnh, 10A5, THPT Ninh Giang, Vũ Thanh Tú, 10A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang, Tường Thế Nghĩa, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương; **Nam Định:** Nguyễn Quốc Đại, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Lương Thu Hương, 9C, THCS TTr. Quỳnh Côi, Quỳnh Phú; **Nghệ An:** Thân Trọng Đức, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nguyễn Đức Công, 10A1, THPT Đô Lương I, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Võ Tá Sơn, 12A1, THPT Trần Phú, Đức Thọ; **Đà Nẵng:** Nguyễn Như Đức Trung, 11A1, Nguyễn Như Quốc Trung, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Đắk Lắk:** Lê Duy Tùng, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Bình Định:** Bùi Hữu Nhân, 10T, Dương Tú, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Võ Xuân Thanh, 12A6, THPT số 2 Tuy Phước; **Đồng Nai:** Nguyễn Ngọc Hoa Quỳnh, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa.

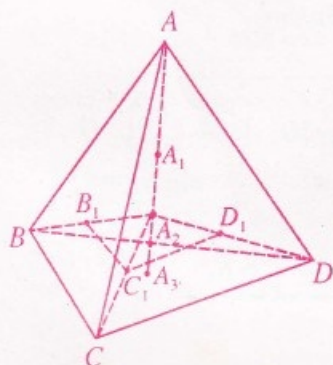
HỒ QUANG VINH



★ **Bài T12/358.** Gọi  $G$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ . Lấy các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  theo thứ tự nằm trong các đoạn  $GA, GB, GC, GD$ . Gọi  $A_2, B_2, C_2, D_2$  theo thứ tự là các giao điểm của  $GA$  với mặt phẳng  $(B_1C_1D_1)$ , của  $GB$  với mặt phẳng  $(C_1D_1A_1)$ , của  $GC$  với mặt phẳng  $(D_1A_1B_1)$ , của  $GD$  với mặt phẳng  $(A_1B_1C_1)$ .

Chứng minh rằng

$$3 \left( \frac{GA}{GA_1} + \frac{GB}{GB_1} + \frac{GC}{GC_1} + \frac{GD}{GD_1} \right) = \frac{GA}{GA_2} + \frac{GB}{GB_2} + \frac{GC}{GC_2} + \frac{GD}{GD_2} \quad (*)$$



**Lời giải.**

(Dựa theo Dương Tú, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định).

Trước hết, ta thiết lập hệ thức:

$$\frac{GA}{GA_2} = \frac{GB}{GB_1} + \frac{GC}{GC_1} + \frac{GD}{GD_1} \quad (i)$$

Gọi  $\{A_3\} = GA \cap (BCD)$  thì  $A_3$  là trọng tâm của mặt  $BCD$ , do đó

$$s(A_3BC) = s(A_3CD) = s(A_3DB)$$

Suy ra  $v(GA_3BC) = v(GA_3CD) = v(GA_3DB)$

$$= \frac{1}{3} v(GBCD) \quad (1)$$

( $v(XYZT)$  là kí hiệu thể tích tứ diện  $XYZT$ ).

$$\text{Lại vì } \frac{v(GB_1C_1D_1)}{v(GBCD)} = \frac{GB_1 \cdot GC_1 \cdot GD_1}{GB \cdot GC \cdot GD} \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{v(GB_1C_1A_2)}{v(GBCA_3)} = \frac{GA_2}{GA_3} \cdot \frac{GB_1 \cdot GC_1}{GB \cdot GC}$$

Do đó, đối chiếu với (1) ta được

$$\frac{v(GB_1C_1A_2)}{v(GBCD)} = \frac{GA_2}{GA} \cdot \frac{GB_1 \cdot GC_1}{GB \cdot GC}, \quad (3)$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{v(GC_1D_1A_2)}{v(GBCD)} = \frac{GA_2}{GA} \cdot \frac{GC_1 \cdot GD_1}{GC \cdot GD} \quad (4)$$

$$\frac{v(GD_1B_1A_2)}{v(GBCD)} = \frac{GA_2}{GA} \cdot \frac{GD_1 \cdot GB_1}{GD \cdot GB} \quad (5)$$

Đến đây cộng (3), (4) và (5) theo vế rồi đối chiếu với (2), ta được

$$\frac{GB_1 \cdot GC_1 \cdot GD_1}{GB \cdot GC \cdot GD} = \frac{GA_2}{GA} \cdot \left( \frac{GC_1 \cdot GD_1}{GC \cdot GD} + \frac{GD_1 \cdot GB_1}{GD \cdot GB} + \frac{GB_1 \cdot GC_1}{GB \cdot GC} \right)$$

Sau đó rút gọn ta thu được hệ thức (i) cần tìm.

Tiếp tục chứng minh tương tự bằng hoán vị vòng quanh các bộ chữ  $\{A, B, C, D\}$ ,  $A_i, B_i, C_i, D_i$  ta được 3 hệ thức nữa:

$$\frac{GB}{GB_2} = \frac{GC}{GC_1} + \frac{GD}{GD_1} + \frac{GA}{GA_1} \quad (ii)$$

$$\frac{GC}{GC_2} = \frac{GD}{GD_1} + \frac{GA}{GA_1} + \frac{GB}{GB_1} \quad (iii)$$

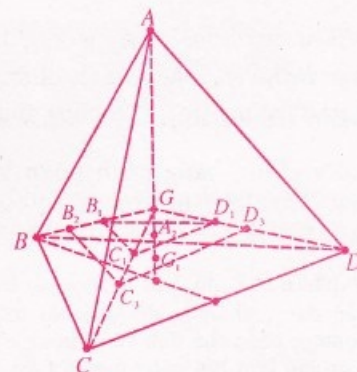
$$\frac{GD}{GD_2} = \frac{GA}{GA_1} + \frac{GB}{GB_1} + \frac{GC}{GC_1} \quad (iv)$$

Cuối cùng, cộng theo vế bốn đẳng thức (i), (ii), (iii), và (iv) ta thu được hệ thức (\*), đpcm.  $\square$

**Lời giải 2.**

(Theo Ngô Thị Mỹ Liên, THPT Lê Quý Đôn, Bình Định)

Xét tứ diện  $GBCD$ , gọi  $G_1$  là trọng tâm của nó. Có hai trường hợp phải xét



• Trường hợp 1:  $A_2 \neq G_1$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $G_1$  và  $(\alpha) \parallel mp(B_1C_1D_1)$ ;  $(\alpha)$  lần lượt cắt  $GB, GC, GD$  theo thứ tự ở  $B_3, C_3, D_3$ . Khi

$$\text{đó ta có } \frac{GB_1}{GB_3} = \frac{GC_1}{GC_3} = \frac{GD_1}{GD_3} = \frac{GA_2}{GG_1} \quad (1)$$



Mặt khác, vì  $G_1$  là trọng tâm tứ diện  $GBCD$  nên  $\overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

$$\text{Từ đó } \overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \quad (2)$$

Vì các điểm  $B_3, C_3, D_3$  theo thứ tự nằm trong các đoạn  $GB, GC, GD$  nên ta được

$$\overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{4} \left( \frac{GB}{GB_3} \overrightarrow{GB_3} + \frac{GC}{GC_3} \overrightarrow{GC_3} + \frac{GD}{GD_3} \overrightarrow{GD_3} \right).$$

Lại vì bốn điểm  $G_1, B_3, C_3, D_3$  đồng phẳng nên ta có hệ thức  $\frac{1}{4} \left( \frac{GB}{GB_3} + \frac{GC}{GC_3} + \frac{GD}{GD_3} \right) = 1$ , hay

$$\begin{aligned} & \text{là } \left( \text{do } \frac{GA}{GG_1} = 4 \right) \\ & \frac{GB}{GB_3} + \frac{GC}{GC_3} + \frac{GD}{GD_3} = \frac{GA}{GG_1} \\ \Leftrightarrow & \frac{GB}{GB_1} \cdot \frac{GB_1}{GB_3} + \frac{GC}{GC_1} \cdot \frac{GC_1}{GC_3} + \frac{GD}{GD_1} \cdot \frac{GD_1}{GD_3} \\ & = \frac{GA}{GA_2} \cdot \frac{GA_2}{GG_1} \end{aligned} \quad (3)$$

Đối chiếu (3) và (1) ta thu được hệ thức (i) như Lời giải 1 đã chỉ ra ở trên:

$$\frac{GA}{GA_2} = \frac{GB}{GB_1} + \frac{GC}{GC_1} + \frac{GD}{GD_1} \quad (i)$$

• Trường hợp 2:  $A_2 \equiv G_1$ ; khi đó  $mp(\alpha) \equiv mp(B_1C_1D_1)$ . Bằng cách chứng minh tương tự như ở trường hợp 1 ta cũng thu được (i).

Cuối cùng, bằng cách hoán vị vòng quanh ta thu được các hệ thức (ii), (iii), (iv) như Lời giải 1 rồi sau đó thu được hệ thức (\*) là đpcm.

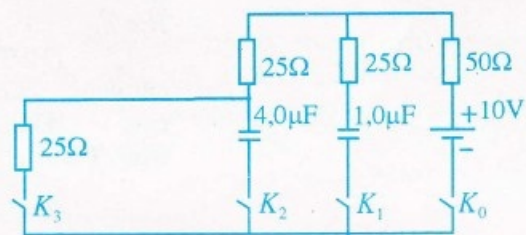
◀ **Nhận xét.** 1) Nói chung có hai phương pháp cơ bản được sử dụng để giải bài toán trên đây. Đó là phương pháp thể tích và phương pháp vectơ được thể hiện lần lượt bởi các lời giải 1 và 2 như đã nêu lên ở trên. Mỗi lời giải đều có ưu điểm nổi bật và sắc thái riêng biệt nhưng *tựu chung* là vận dụng những kiến thức cơ bản như *công thức về tỉ số thể tích của hai hình chóp tam giác* (có chung nhau một góc tam diện) và *điều kiện để bốn điểm đồng phẳng* (liên quan đến vectơ) để thiết lập hệ thức (i) rồi từ đó mà thiết lập hệ thức (\*) nêu trong bài toán.

2) Ngoài hai bạn đã được nêu lời giải trên đây, các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn gàng hơn cả:

**Phú Thọ:** Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, THCS Lâm Thao; **Hung Yên:** Hoàng Đức Tâm, 12 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Phòng:** Trần Hoàng Bá, 11 Toán, THPT NK Trần Phú; **Thanh Hóa:** Lê Duy Toàn, 11A11, THPT Lương Khắc Bằng, Hoàng Hóa; **Đà Nẵng:** Nguyễn Như Đức Trung, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Bùi Hữu Nhân, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** Dương Văn An, 11A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

★ **Bài L1/358.** Có một mạch điện như hình vẽ. Nguồn điện 10V; hai tụ  $1,0\mu\text{F}$  và  $4,0\mu\text{F}$ ; một điện trở  $50\Omega$  và ba điện trở  $25\Omega$ . Bốn ngắt điện, lúc đầu tất cả đều mở.



a) Hãy tính điện tích của mỗi tụ sau một thời gian dài trong mỗi trường hợp sau:

- i) Khi  $K_0, K_1, K_2$  đóng;  $K_3$  mở.
- ii) Khi  $K_0, K_1, K_2, K_3$  đóng.
- iii) Khi  $K_0$  và  $K_3$  mở;  $K_1$  và  $K_2$  đóng.

b) Khi  $K_2$  và  $K_3$  mở;  $K_0$  và  $K_1$  đóng. Sau một thời gian dài, ta cho vào trong tụ  $1,0\mu\text{F}$  một tấm điện môi có hằng số điện môi là 3,0 lấp đầy không gian giữa hai bản cực. Tính công toàn phần được thực hiện khi đưa rất chậm tấm điện môi vào trong tụ (tức là công được thực hiện bởi ta và bởi nguồn).

**Lời giải.** a) (Theo bạn Trần Văn Giai, A3, K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An).

a) i) Khi  $K_0, K_1, K_2$  đóng;  $K_3$  mở. Sau một thời gian dài, không có dòng điện chạy trong mạch, hiệu điện thế giữa hai bản của mỗi tụ bằng suất điện động của nguồn.

Điện tích trên các tụ  $1,0\mu\text{F}$  và  $4,0\mu\text{F}$  lần lượt là:



$$q_1 = C_1 \cdot E = 10^{-6} \cdot 10 = 10^{-5} \text{ (C)} = 10 \text{ (}\mu\text{C)}$$

$$q_2 = C_2 \cdot E = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ (C)} = 40 \text{ (}\mu\text{C)}$$

ii) Khi  $K_0, K_1, K_2, K_3$  đóng.

Sau một thời gian dài, điện tích trên các tụ đã ổn định, cường độ dòng điện trong mạch là:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{10}{50 + 25 + 25} = 0,1 \text{ (A)}$$

Hiệu điện thế giữa hai bản các tụ  $1,0 \mu\text{F}$  và  $4,0 \mu\text{F}$  lần lượt là:

$$U_1 = R_1 I = 50 \cdot 0,1 = 5 \text{ (V)}$$

$$U_2 = R_4 I = 25 \cdot 0,1 = 2,5 \text{ (V)}$$

Điện tích tương ứng trên các tụ:

$$q_1 = C_1 U_1 = 10^{-6} \cdot 5 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ (C)} = 5 \text{ (}\mu\text{C)}$$

$$q_2 = C_2 U_2 = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5 = 10^{-5} \text{ (C)} = 10 \text{ (}\mu\text{C)}$$

iii) Khi  $K_0, K_3$  mở;  $K_1, K_2$  đóng

Các tụ không tích điện:  $q_1 = q_2 = 0$ .

b) Khi  $K_2, K_3$  mở;  $K_0, K_1$  đóng, sau một thời gian dài hiệu điện thế trên tụ  $1,0 \mu\text{F}$  bằng suất điện động của nguồn, tụ  $4,0 \mu\text{F}$  không tích điện.

Năng lượng của tụ  $1,0 \mu\text{F}$  là:

$$W_1 = \frac{C_1 E^2}{2} = \frac{10^{-6} \cdot 10^2}{2} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ (J)}.$$

Sau khi cho tấm điện môi vào tụ điện, điện dung của tụ tăng lên  $\epsilon = 3$  lần;  $C'_1 = \epsilon C_1 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ (F)}$ .

Năng lượng của tụ lúc này:

$$W'_1 = \frac{C'_1 E^2}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2}{2} = 15 \cdot 10^{-5} \text{ (J)}$$

Công toàn phần được thực hiện để đưa tấm điện môi vào trong tụ bằng độ biến thiên năng lượng của tụ điện:

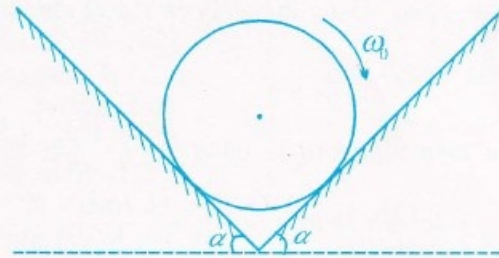
$$A = \Delta W = W'_1 - W_1 = 15 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-5} = 10^{-4} \text{ (J)}. \square$$

◀ **Nhận xét.** Ngoài bạn *Trần Văn Giai*, các bạn sau có lời giải tốt:

**Vĩnh Phúc:** Tạ Đức Mạnh, 11A3, THPT chuyên;  
**Bắc Ninh:** Bùi Văn Hải, 11A1, THPT Quế Võ số 1;  
**Hà Tây:** Nguyễn Ngọc Đăng, 11A1, THPT Phú Xuyên A. **Hưng Yên:** Phạm Đức Linh, 11 Lý, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Lê Bá Sơn, 11F, THPT chuyên Lam Sơn; **Quảng Nam:** Nguyễn Bá Huỳnh Quang, 11/1, THPT Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn.

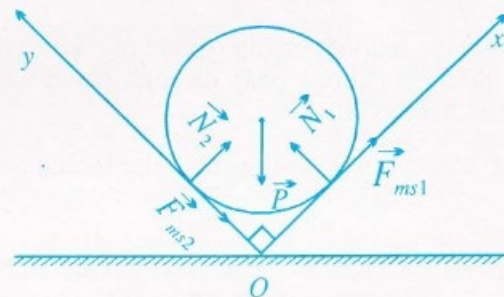
NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/358.** Người ta quay một xilanh thành mỏng bán kính  $R$  cho đến vận tốc góc  $\omega_0$  rồi đặt vào giữa hai mặt phẳng nghiêng  $\alpha = 45^\circ$  so với phương ngang (hình 1). Hệ số ma sát giữa mặt phẳng nghiêng và xi lanh là  $\mu$ . Xác định số vòng quay của xilanh cho đến khi dừng lại. Coi trục của xi lanh đứng yên khi bị hãm.



Hình 1

**Lời giải.** Các lực tác dụng lên xilanh được biểu diễn như hình 2.



Hình 2

Để trục của xilanh đứng yên thì

$$\vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{ms1} + \vec{F}_{ms2} = \vec{0} \quad (1)$$

Chiếu (1) lên trục  $Ox$ :

$$-P \sin \alpha + N_2 + F_{ms1} = 0 \quad (2)$$

Chiếu (1) lên trục  $Oy$ :

$$-P \cos \alpha + N_1 - F_{ms2} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác } F_{ms1} = \mu N_1 \quad (4)$$

$$F_{ms2} = \mu N_2 \quad (5)$$

Từ các phương trình (2), (3), (4), (5) và thay  $\alpha = 45^\circ$  ta tìm được:

$$F_{ms1} = \frac{\mu mg(1 + \mu)}{\sqrt{2}(1 + \mu^2)} \quad (6)$$

(Xem tiếp trang 9)



## ỨNG DỤNG... (Tiếp trang 2)

Để thấy  $2S_{ABM} \leq 2S_{ABM_0}$  (với  $M_0$  là điểm chính giữa của nửa đường tròn đã cho) (h. 6).

$$a\sqrt{1-a^2} \leq OM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2(1-a^2) \leq \frac{1}{4}$$

hay  $\frac{1}{1-a^2} \geq 4a^2$  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$M \equiv M_0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có  $\frac{1}{1-b^2} \geq 4b^2$ ;

$$\frac{1}{1-c^2} \geq 4c^2 \text{ do đó } M = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2}$$

$$\geq 4(a^2 + b^2 + c^2) = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6.$$

Vậy  $M$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi  $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .  $\square$

Để kết thúc bài viết chúng tôi xin mời các bạn làm quen với phương pháp đã trình bày ở trên qua các bài tập sau:

**Bài 1.** Cho  $a > b > c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}.$$

**Bài 2.** Cho  $a > c$ ;  $b > c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} < \sqrt{ab}.$$

**Bài 3.** Cho  $x, y, z, t$  là các số thực dương thuộc khoảng  $(0; 1)$ . Chứng minh rằng

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-t) + t(1-x) < 2.$$

**Bài 4.** Chứng minh rằng với mọi số thực dương  $a, b, c, d$  ta luôn có

$$\sqrt{a^2 + c^2}(b^2 + c^2) + \sqrt{a^2 + d^2}(b^2 + d^2) \geq (a+b)(c+d).$$

**Bài 5.** Chứng minh rằng với mọi số thực dương  $a, b, c$  ta luôn có

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| < |b - c|.$$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c$  là các số dương thuộc khoảng

$$(0; 1) \text{ và } a + b + c = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \text{ Chứng minh rằng}$$

$$M = \frac{1}{a(1-a^2)} + \frac{1}{b(1-b^2)} + \frac{1}{c(1-c^2)} \geq 6\sqrt{2}.$$

## PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

**T6/362.**  $O$  is a point chosen arbitrarily inside a triangle  $ABC$ .  $AO, BO$  and  $CO$  meet  $BC, CA$  and  $AB$  at  $M, N$  and  $P$  respectively. Prove that

$$\text{the value of ratio } \left(\frac{OA \cdot AP}{OP}\right) \left(\frac{OB \cdot BM}{OM}\right) \left(\frac{OC \cdot CN}{ON}\right)$$

does not depend on the position of the point  $O$ .

**T7/362.** Let  $M$  be a point inside a circle ( $O$ ) with center at  $O$  and radius  $R$ . Draw two chords  $CD$  and  $EF$  through  $M$  but not passing through  $O$ . The tangent lines with ( $O$ ) at  $C$  and  $D$  intersects at  $A$ , and the tangent lines at  $E$  and  $F$  meets at  $B$ . Prove that  $OM$  and  $AB$  are orthogonal.

### FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T8/362.** Let  $p > 2007$  be a prime number and  $n$  is an integer exceeding  $2006p$ . Prove that

$$C_n^{2006p} - C_k^{2006} \text{ is a multiple of } p, \text{ where } k = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$$

is the largest integer which is not larger than  $\frac{n}{p}$ .

**T9/362.** Let  $(u_n)$  be a sequence given by  $u_1$

$$\text{and the formula } u_{n+1} = \frac{k + u_n}{1 - u_n}, \text{ where } k > 0,$$

where  $n = 1, 2, \dots$ . Given that  $u_{13} = u_1$ , find the value of  $k$ .

**T10/362.** Suppose  $a, b$ , and  $c$  are the three lengths of sides of a triangle. Prove that

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 3ab}} \geq \frac{3}{2}.$$

**T11/362.** Let  $P$  be a arbitrary point in a quadrilateral  $ABCD$  such that  $\widehat{PAB}, \widehat{PBA}, \widehat{PBC}, \widehat{PCB}, \widehat{PCD}, \widehat{PDC}, \widehat{PAD},$  and  $\widehat{PDA}$  are all acute angles. Let  $M, N, K, L$  denote the feet of the altitude from  $P$  on  $AB, BC, CD$  and  $DA$  respectively. Find the smallest value of

$$\text{the sum } \frac{AB}{PM} + \frac{BC}{PN} + \frac{CD}{PK} + \frac{DA}{PL}.$$

**T12/362.** Let  $ABC.A'B'C'$  be a triangular prism.  $M$  and  $N$  are two points, chosen on  $AA'$  and

$$CB \text{ respectively such that } \frac{AM}{AA'} = \frac{CN}{CB}. \text{ Prove}$$

that the length of  $MN$  is no less than the distance from  $A'$  to the straight line  $C'B$ .

LÊ MINH HÀ dịch



## KÌ THI... (Tiếp bài 3)

Sau đây là bảng xếp hạng thứ tự 10 nước có tổng số điểm cao nhất

| TT | Tên nước   | Điểm | HCV | HCB | HCD | BK |
|----|------------|------|-----|-----|-----|----|
| 1  | Nga        | 184  | 5   | 1   | 0   | 0  |
| 2  | Trung Quốc | 181  | 4   | 2   | 0   | 0  |
| 3  | Việt Nam   | 168  | 3   | 3   | 0   | 0  |
| 4  | Hàn Quốc   | 168  | 2   | 4   | 0   | 0  |
| 5  | Hoa Kỳ     | 155  | 2   | 3   | 1   | 0  |
| 6  | Ucraina    | 154  | 3   | 1   | 2   | 0  |
| 7  | Nhật Bản   | 154  | 2   | 4   | 0   | 0  |
| 8  | Triều Tiên | 151  | 1   | 4   | 0   | 1  |
| 9  | Bungari    | 149  | 2   | 3   | 1   | 0  |
| 10 | Đài Loan   | 149  | 2   | 3   | 1   | 0  |

Đề thi do 34 nước gửi về gồm 115 bài. Ban đề thi đã chọn lọc ra được 30 bài. Sau 40 lần biểu quyết trong cuộc họp các trường đoàn, các trường đoàn thống nhất chọn được 6 bài toán. Bài thi năm nay được dự luận đánh giá là có hai bài toán khó.

Konstantin Matveev, người Nga, thí sinh duy nhất đạt điểm cao nhất 37 điểm. Tại những kì trước, thường có 4-5 thí sinh được điểm tuyệt đối 42 điểm.

Sáu bài toán năm nay gồm bài số 1 (giải tích) của New Zealand, số 2 (hình học) của Luxembourg, số 3 (đồ thị) của Nga, số 4 (hình học) của Cộng hòa Czech, bài 5 (số học) của Anh và bài 6 (đại số) của Hà Lan.

Theo quy định trường đoàn của 6 nước có bài thi được chấm điểm bài đó cho các học sinh của đội chủ nhà Việt Nam.

### Kết quả của đoàn học sinh Việt Nam

| TT | Họ và tên          | Điểm | Kết quả |
|----|--------------------|------|---------|
| 1  | Đỗ Xuân Bách       | 31   | HCV     |
| 2  | Nguyễn Xuân Chương | 28   | HCB     |
| 3  | Lê Ngọc Sơn        | 28   | HCB     |
| 4  | Phạm Thành Thái    | 30   | HCV     |
| 5  | Đặng Ngọc Thanh    | 22   | HCB     |
| 6  | Phạm Duy Tùng      | 29   | HCV     |

Sau đây là sáu bài toán thi:

**Bài 1.** Cho trước các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Với mỗi  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) đặt

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

và đặt  $d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$ .

a) Chứng minh rằng, với các số thực  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  tùy ý, ta có

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. (*)$$

b) Hãy chỉ ra rằng tồn tại các số thực  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  sao cho bất đẳng thức (\*) trở thành đẳng thức.

**Bài 2.** Xét năm điểm  $A, B, C, D$  và  $E$  sao cho  $ABCD$  là một hình bình hành và  $BCED$  là một tứ giác nội tiếp. Cho  $\lambda$  là một đường thẳng đi qua  $A$ . Giả sử rằng  $\lambda$  cắt miền trong của đoạn thẳng  $DC$  tại  $F$  và cắt đường thẳng  $BC$  tại  $G$ . Cũng giả sử rằng  $EF = EG = EC$ . Chứng minh rằng  $\lambda$  là phân giác của góc  $DAB$ .

**Bài 3.** Trong một kì thi học sinh giỏi toán có một số thí sinh là bạn bè của nhau. Quan hệ bạn bè luôn là quan hệ hai chiều. Gọi một nhóm các thí sinh là *nhóm bạn bè* nếu như hai người bất kì trong nhóm này là bạn bè của nhau. (Một nhóm tùy ý ít hơn hai thí sinh cũng vẫn được coi là một nhóm bạn bè). Số lượng các thí sinh của một nhóm bạn bè được gọi là *cỡ* của nó.

Cho biết rằng, trong kì thi này, cỡ của một nhóm bạn bè có nhiều người nhất là một số chẵn. Chứng minh rằng có thể xếp tất cả các thí sinh vào hai phòng sao cho cỡ của nhóm bạn bè có nhiều người nhất trong phòng này cũng bằng cỡ của nhóm bạn bè có nhiều người nhất trong phòng kia.

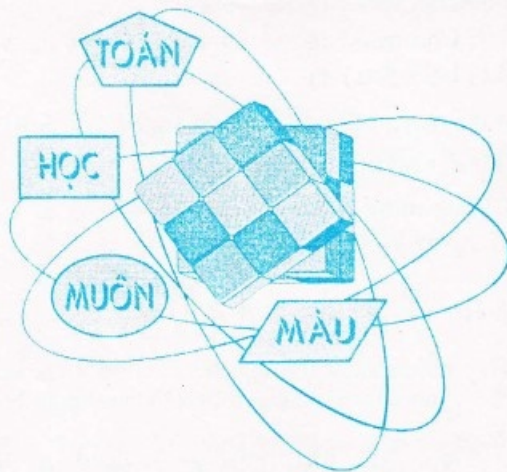
**Bài 4.** Trong tam giác  $ABC$ , đường phân giác của góc  $BCA$  cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác tại  $R$ , cắt đường trung trực của  $BC$  tại  $P$ , và đường trung trực của  $AC$  tại  $Q$ . Trung điểm của  $BC$  là  $K$  và trung điểm của  $AC$  là  $L$ . Chứng minh rằng tam giác  $RPK$  và tam giác  $RQL$  có diện tích bằng nhau.

**Bài 5.** Cho trước  $a$  và  $b$  là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu số  $4ab-1$  là ước số của  $(4a^2-1)^2$  thì  $a = b$ .

**Bài 6.** Cho  $n$  là một số nguyên dương. Xét  $S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x+y+z > 0\}$

như là một tập hợp gồm  $(n+1)^3 - 1$  điểm trong không gian 3-chiều. Hãy xác định số nhỏ nhất có thể các mặt phẳng mà hợp của chúng chứa tất cả các điểm của  $S$  nhưng không chứa điểm  $(0, 0, 0)$ .





## Phân chia tam giác thành các tam giác bằng nhau

Ta luôn phân chia được một tam giác cho trước thành  $n^2$  ( $n$  là số nguyên dương), tam giác nhỏ bằng nhau bằng cách chia mỗi cạnh thành  $n$  đoạn bằng nhau rồi kẻ các đường thẳng qua các điểm chia mà song song với các cạnh của tam giác đó (với  $n = 3$  xem hình 1).



Hình 1

Nhưng nếu số lượng tam giác được phân chia ra khác  $n^2$  thì sao? Ta xét trường hợp tam giác vuông.

### Dành cho bạn đọc

- 1) Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  với  $AB = 3$  (cm) và  $AC = 5$  (cm). Hãy trình bày cách phân chia tam giác  $ABC$  thành 34 tam giác bằng nhau.
- 2) Hãy khái quát hóa bài toán trên và cho lời giải.

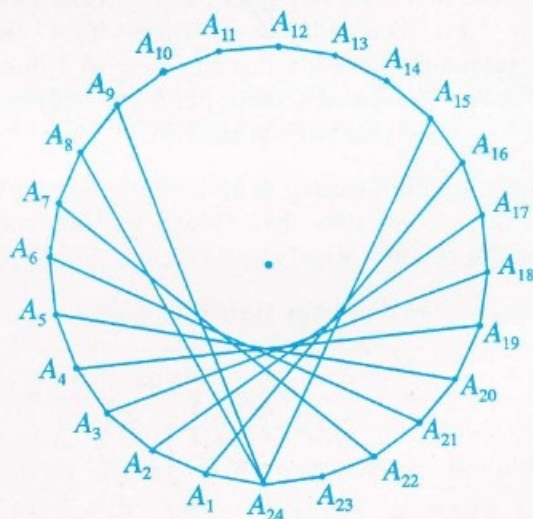
## Giải đáp bài: Phân chia một đa giác theo đường chéo

(Đề đăng trong THTT số 359 tháng 5.2007)

Trước hết ta chứng minh Bổ đề sau:

**Bổ đề:** Nếu vẽ  $n$  đường chéo của một đa giác lồi mà chúng đôi một cắt nhau tại  $k$  điểm nằm trong đa giác (không có quá hai đường nào đồng quy) thì số miền đa giác rời nhau được phân chia ra bằng  $s_n = 1 + n + k$ .

**Chứng minh:** Bằng quy nạp theo  $n$ . Với  $n = 2$ ,  $k = 1$  thì đa giác được phân chia thành  $1 + 2 + 1 = 4$  miền rời nhau, bổ đề đúng. Giả sử bổ đề đúng với  $n$  đường chéo cắt nhau tại  $k$  điểm, nghĩa là  $s_n = 1 + n + k$ . Xét đường chéo thứ  $n + 1$  mà cắt  $n$  đường chéo cũ tại  $h$  điểm. Mỗi đoạn thẳng với hai đầu mút là cặp giao điểm kề nhau của đường chéo thứ  $n + 1$  (kể cả hai đầu mút của đường chéo thứ  $n + 1$ ) thì phân chia đa giác chứa đoạn thẳng ấy thành hai đa giác, như vậy ứng với  $h$  giao điểm có  $2(h + 1)$  đa giác mới được phân chia ra từ  $h + 1$  đa giác cũ, nghĩa là số đa giác được tăng thêm là  $h + 1$ .



Hình 2





## Giải đáp bài

# Tạo đẳng thức "123456789 = 100"

(Đề đăng trên THPT số 358, tháng 4 năm 2007)

Số lời giải gửi về Tòa soạn rất đông! Trong đó có nhiều bạn ở bậc THCS đã tham gia và cho kết quả đúng, ngoài thí dụ đã đề ra. Sau đây là đáp án thỏa mãn yêu cầu đề bài của bạn Nguyễn Văn Thạch, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.

Ta có các cách tạo đẳng thức "123456789 = 100" như sau:

- 1)  $1+2+3-4+5+6+78+9 = 100$ ;
- 2)  $1+23-4+56+7+8+9 = 100$ ;
- 3)  $1+2+34-5+67-8+9 = 100$ ;
- 4)  $1+23-4+5+6+78-9 = 100$ ;

- 5)  $12+3-4+5+67+8+9 = 100$ ;
- 6)  $12-3-4+5-6+7+89 = 100$ ;
- 7)  $12+3+4+5-6-7+89 = 100$ ;
- 8)  $123-45-67+89 = 100$ ;
- 9)  $123-4-5-6-7+8-9 = 100$ ;
- 10)  $123+45-67+8-9 = 100$ ;
- 11)  $123+4-5+67-89 = 100$ .

Ngoài bạn Thạch, các bạn sau cũng có đáp án đúng, gửi bài về sớm:

Vũ Thắng, 6A, Nguyễn Hữu Trung, 6B, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**; Phùng Mạnh Linh, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh, **Nam Định**; Đoàn Ngọc Thúy, 11A2, khối THPT chuyên, ĐH Vinh, **Nghệ An**; Nguyễn Thị Diệu Hoa, 10A2 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.

QUANG PHÚC

## Tìm chín số NGUYỄN DƯƠNG

Bạn hãy điền chín số nguyên dương phân biệt  $a, b, c, d, e, f, k, m, n$  vào bảng bên sao cho tích của ba số theo mỗi hàng, tích của ba số theo mỗi cột đều bằng 120 và

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $a$ | $d$ | $k$ |
| $b$ | $e$ | $m$ |
| $c$ | $f$ | $n$ |

$$a^2 + b.c = d^2 + e.f = k^2 - m.n = x^2.$$

DAN QUỲNH

Do đó  $s_{n+1} = s_n + h + 1 = 1 + n + k + h + 1 = 1 + (n + 1) + (k + h)$ .

Bổ đề đúng với  $n + 1$  nên được chứng minh.

1) Với  $n = 10$  đường chéo của đa giác đều 24 cạnh, chẳng hạn như ở hình 2 thì có 7 đường chéo (xuất phát từ các đỉnh  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ ) đôi một cắt nhau và chúng cùng cắt 3 đường chéo còn lại (xuất phát từ các đỉnh  $A_8, A_9, A_{15}$ ) nên số giao điểm của chúng là  $k = C_7^2 + 7.3 = 42$ . Từ đó số đa giác được phân chia ra là  $s_{10} = 1 + n + k = 1 + 10 + 42 = 53$  miền.

2) Số giao điểm tối đa của 10 đường chéo là  $C_{10}^2 = 45$ . Theo Bổ đề số miền đa giác được phân chia ra của đa giác lồi 24 cạnh, tối đa là  $\max s_{10} = 1 + n + k = 1 + 10 + 45 = 56$  miền.

Các bạn sau có lời giải tốt:

Dương Văn An, 11A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

Trần Văn Hạnh, 10A5, THPT Ninh Giang, **Hải Dương**.

PHI PHI



# Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 362(8.2007)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.5121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272, 04.5121606

Email: tapchitoanhoc\_tuoiitre@yahoo.com.vn

## BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

## CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

## HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Toà soạn : ThS. VŨ KIM THỦY

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HẢI, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

## TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**

Lê Bá Hoàng – Ứng dụng hình học để giải một số bài toán đại số.

- 3 **Lời giải đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Hà Tĩnh.**

- 4 **Đề thi vào lớp 10 khối THPT chuyên trường ĐH Vinh năm học 2007-2008.**

- 5 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**

Nguyễn Văn Hiền – Tính chất hình học trong các bài học giải tích.

- 7 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**

Đỗ Thanh Hân – Ý nghĩa hình học của số  $C_n^k$  và ứng dụng.

- 9 **Câu lạc bộ – Math Club**

- 11 **Nhìn ra thế giới – Around the World**

Vũ Hoài Chương – Cuộc thi giải toán Eötvös - Kürschák ở Hungari.

- 13 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**

Văn Như Cương – Về chương trình và sách giáo khoa môn Hình học lớp 11 nâng cao.

- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**  
T1/362, ..., T12/362, L1/362, L2/362.

- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**

Giải các bài của số 358.

- 30 **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**

- 31 **Giải trí toán học – Math Recreation**

Bìa 3: Kì thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 48.

Biên tập : HỒ QUANG VINH. Mi thuật : MINH THO. Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THỦY, NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330





# KÌ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 48

VŨ ĐÌNH HÒA  
(Trưởng đoàn Việt Nam)

**K**ì thi toán Quốc tế lần thứ 48 được tổ chức tại thủ đô Hà Nội từ 19/7/2006 tới 31/7/2006. Tham dự có 103 nước đăng kí, nhưng cuối cùng có đại diện của 95 nước và vùng lãnh thổ trên thế giới có mặt.

Điểm nổi bật ở kì thi này là số lượng thí sinh và các nước tham gia lớn nhất từ trước tới nay, và quy mô tổ chức của Việt Nam ở mức cao nhất. Buổi lễ khai mạc có Thủ tướng Nguyễn Tấn Dũng tới dự. Chủ tịch nước Nguyễn Minh Triết đã tới bế mạc và trao giải cho 18 thí sinh xuất sắc nhất, trong đó có bạn Đỗ Xuân Bách. Phải nói, chúng ta đã dành cho các bạn bè quốc tế những điều kiện ăn ở và sinh hoạt tốt nhất có thể. GS Hà Huy Khoái cho biết có trường đoàn quốc tế phải thốt lên là các thí sinh của họ chưa bao giờ được ở trong những điều kiện sinh hoạt tốt như thế. Năm nay lực lượng chấm thi của Việt Nam rất hùng hậu trong đó có những người từng đoạt giải IMO đang công tác tại nước ngoài về tham gia ban chấm thi và đã chấm chính xác các bài thi viết bằng nhiều thứ ngoại ngữ.



Trong số đại biểu các nước tới Việt Nam chỉ có 93 quốc gia và vùng lãnh thổ cử đội tuyển với tổng số là 520 thí sinh, trong đó 39 thí sinh đoạt Huy chương Vàng (HCV), 83 thí sinh đoạt Huy chương Bạc (HCB), 131 thí sinh đoạt Huy chương Đồng (HCD) và 149 thí sinh Bằng khen (BK) (hoàn thành trọn vẹn 1 bài thi).

(Xem tiếp trang 29)



*Ban chấm thi IMO 2007*



# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI TỈNH HẢI DƯƠNG

**T**rường THPT chuyên Nguyễn Trãi tỉnh Hải Dương được thành lập ngày 22/12/1984 (từ khi thành lập đến năm 1997 trường mang tên là trường Phổ thông Năng khiếu Hải Hưng) với nhiệm vụ và mục tiêu là phát hiện, khơi nguồn, bồi dưỡng học sinh giỏi phục vụ chiến lược đào tạo nhân tài cho địa phương và cho đất nước. Suốt 23 năm phấn đấu và trưởng thành, trải qua nhiều thời kì, nhiều khó khăn và biết bao thử thách, các thế hệ thầy và trò đã góp công xây dựng truyền thống dạy tốt học tốt. Những năm gần đây trong sự nghiệp đào tạo, bồi dưỡng học sinh giỏi, nhà trường luôn được xếp trong top 5 của toàn quốc với 2 năm đứng thứ nhất

toàn quốc về số giải học sinh giỏi Quốc gia (năm 2002 đoạt 72 giải, năm 2007 đoạt 59 giải. Hàng năm nhà trường đều đoạt được từ 1 đến 5 giải Nhất quốc gia, đều có học sinh giỏi quốc tế và khu vực châu Á - Thái Bình Dương (APMO) trong đó có 3 Huy chương Vàng (HCV), 1 Huy chương Bạc (HCB), 2 Huy chương Đồng (HCD), 1 Bằng khen (BK) và 4 Huy chương APMO. Đó là Nguyễn Quang Bằng (HCD Toán APMO - 2000), Tô Minh Hoàng (HCD Toán APMO - 2001), Nguyễn Văn Khiêm (HCB Hóa - 2001), Nghiêm Viết Nam (HCD Lí - 2002), Bùi Hữu Tài (BK Hóa - 2002), Hoàng Trung Trí (HCD Lí APMO - 2003), Lê Thanh Tùng (HCD Hóa - 2003), Lê Hữu Tôn (KK Lí APMO - 2004), Ngô Xuân Hoàng (HCV Hóa - 2005), Nguyễn Duy Mạnh (HCV IMO - 2006), Phạm Thành Thái (HCV IMO - 2007).

Hàng năm tỉ lệ học sinh thi đỗ vào các trường đại học đạt từ 93% đến 95% và đều có học sinh đỗ thủ khoa các trường đại học danh tiếng trong nước, được tuyển đi du học.

Song song với việc đào tạo, bồi dưỡng học sinh giỏi, nhà trường còn quan tâm chú trọng tới việc giáo dục toàn diện cho học sinh. Học sinh nhà trường không chỉ học giỏi mà còn hát hay, múa giỏi, có khả năng tổ chức, thực hiện các câu lạc bộ chuyên môn



Thư trưởng Bộ GD-ĐT TS. Đặng Huỳnh Mai, Phó chủ tịch UBND tỉnh Hải Dương Đặng Thị Bích Liên, Giám đốc Sở GD-ĐT Hải Dương TS. Nguyễn Vinh Hiền cùng Ban giám hiệu nhà trường

cũng như các câu lạc bộ thời trang, văn nghệ, TDTT đạt chất lượng cao tạo nên những sân chơi trí tuệ và hoạt động xã hội bổ ích và lí thú. Trong số giáo viên của nhà trường đã có 2 thầy cô bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ toán học, 35 thầy cô có trình độ Thạc sĩ.

Với những thành tích đáng trân trọng và tự hào ấy, nhà trường đã được Nhà nước tặng thưởng Huân chương Lao động hạng Ba, liên tục trong nhiều năm liền là đơn vị Tiên tiến Xuất sắc. Hội đồng giáo dục nhà trường đã có 6 thầy cô được Nhà nước phong tặng danh hiệu Nhà giáo ưu tú, nhiều nhà giáo được Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ, của Bộ GD&ĐT.

Năm học 2006-2007 được sự quan tâm của Tỉnh ủy, HĐND, UBND tỉnh và Sở GD&ĐT Hải Dương, nhà trường được chuyển ra địa điểm mới tại phường Thanh Bình, thành phố Hải Dương với khuôn viên 4000m<sup>2</sup> đất, được xây dựng và trang bị đầy đủ đáp ứng cho việc giảng dạy và học tập của học sinh 11 môn chuyên.

Trên đà phát triển, sự nghiệp trồng người của trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương đã bước những bước tiến vững chắc và hi vọng còn gặt hái được những mùa vàng bội thu, xứng đáng với truyền thống hiếu học của tỉnh Đông.

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT64M7

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2007

Giá : 5000 đồng

Năm nghìn đồng