



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

7 2007
Số 361

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 44

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04)5121607, (04)5121606; ĐT-Fax Phát hành, Trì sự: (04)5144272

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre



**Một số điểm cần lưu ý khi dạy học
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11 nâng cao**



HÃY TẠO NÊN SỰ KHÁC BIỆT VỚI NEXTGEN AWARDS VIỆT NAM 2007



Cơ
hội đóng
góp ý tưởng vì
lợi ích cộng
đồng

Cơ
hội đoạt giải
thưởng tiền
mặt lên đến
\$1500

Biến ý tưởng
thành hiện thực
cùng Mạng lưới
Chuyên gia

Được vinh
danh trên kênh
truyền hình
quốc gia

Cuộc thi "Ý tưởng
sử dụng điện thoại di
động nhằm
cải thiện SỨC KHỎE, duy trì MÔI
TRƯỜNG, phổ cập GIÁO DỤC
NextGen Awards Việt Nam 2007,
cuộc thi quốc tế lần đầu tiên được tổ
chức trên thế giới.
Dành cho các bạn trẻ đầy sáng tạo
tuổi từ 13 đến 20
(có ngày sinh thuộc khoảng
01/01/1987 đến
31/12/1994)

Gia
nhập Mạng
lưới Lãnh đạo
NextGen toàn
cầu

Bạn chỉ cần:

* Có một ý tưởng

thuộc 01 trong 03 lĩnh vực Sức khỏe, Môi trường hay Giáo dục để tham gia cuộc thi

* Mời một thầy, cô giáo hay một cán bộ trong trường làm Cố vấn để xác nhận các thông tin cá nhân của bạn hay giúp bạn phát triển ý tưởng.

* Gửi bài dự thi trước ngày 15/10/2007

Bạn có thể nộp bài dự thi theo 3 cách:

1. Nộp bài dự thi trực tiếp tại trang web: www.nextgenawards.vn (Chuyên mục: Mẫu đăng ký dự thi)
2. Gửi mẫu hồ sơ dự thi vào địa chỉ email: vietnam07@nextgenawards.vn
3. Hoặc gửi bài dự thi tới: anh Trịnh Quang Dũng, tầng 1 tòa nhà VietNamNet, số 4 Láng Hạ, Hà Nội, hồ sơ ghi: Tham gia cuộc thi NextGen và Cố vấn.

Góc Tư vấn miễn phí: Blog:
<http://360.yahoo.com/cuocthnextgen>
Đường dây nóng: 04 7722 729,
máy lẻ 116 (gặp Ms. Quỳnh Anh)

Nhà tài trợ



TOSHIBA



TỪ MỘT BÀI TOÁN trong sách giáo khoa

PHẠM ĐỨC HÒE

(GV trường THCS Nguyễn Lương Bằng,
Thanh Miện, Hải Dương)

Trong Sách giáo khoa Hình học 9 tập hai trang 105 có bài toán số 9, nội dung như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông ở A . Trên cạnh AC lấy một điểm M và vẽ đường tròn $\mathcal{C}_1$ đường kính MC . Đường thẳng BM cắt $\mathcal{C}_1$ tại D . Đường thẳng DA cắt $\mathcal{C}_1$ tại S . Chứng minh rằng:

- $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.
- CA là tia phân giác của góc SCB .

Lời giải. a) Do tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (1)

D nằm trên đường tròn $\mathcal{C}_1$ nên $\widehat{BDC} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $\mathcal{C}_0$ đường kính BC .

b) Ta có $\widehat{BCA} = \widehat{BDA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$ của $\mathcal{C}_0$) (3)

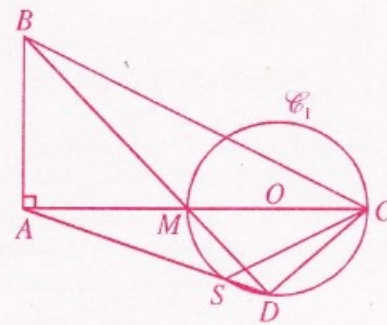
Xét ba trường hợp:

+) Trường hợp S nằm trên cung nhỏ $\widehat{MD}$ (h. 1).

Xét đường tròn ($\mathcal{C}_1$):

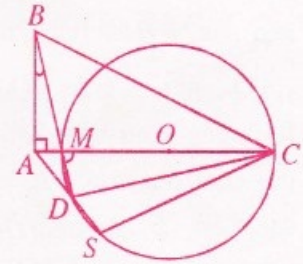
$$\widehat{MDS} = \widehat{MCS} \text{ (cùng chắn } \widehat{MS} \text{)} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{MCS}$.



Hình 1

+) Trường hợp D nằm trên cung nhỏ $\widehat{MS}$ (h. 2).



Hình 2

Xét đường tròn

($\mathcal{C}_1$):

$$\widehat{MDA} = \widehat{MCS} \text{ (cùng bù với } \widehat{MDS} \text{)} \quad (5)$$

Từ (3) và (5) suy

ra $\widehat{BCA} = \widehat{MCS}$.

+) Trường hợp D trùng với S . Khi đó AD là tiếp tuyến của đường tròn ($\mathcal{C}_1$). Ta có $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = \widehat{MCS}$. $\square$

Khi giải câu b) nhiều bạn thường chỉ xét một trường hợp (tùy thuộc vào hình vẽ ra). Hơn nữa chắc ít bạn đặt được các câu hỏi: Vị trí của điểm M thế nào để điểm D nằm trên cung nhỏ $\widehat{MS}$? Điểm S nằm trên cung nhỏ $\widehat{MD}$? Điểm S trùng với D ?

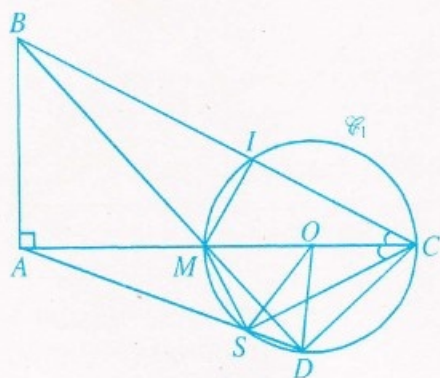
Bài toán 2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Điểm M di động trên cạnh AC , vẽ đường tròn $\mathcal{C}_1$ đường kính MC , BM cắt $\mathcal{C}_1$ tại D , đường thẳng AD cắt $\mathcal{C}_1$ tại S . Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AC để:

a) Điểm S nằm trên cung nhỏ $\widehat{MD}$.

b) Điểm D nằm trên cung nhỏ $\widehat{MS}$.

Lời giải. a) (h. 3) S thuộc cung nhỏ $\widehat{MD}$ khi và chỉ khi $\widehat{MOS} < \widehat{MOD}$.

Do hai tam giác OMS và OSD đều cân tại O nên suy ra $\widehat{OMS} > \widehat{OMD} \Leftrightarrow \widehat{OMS} > \widehat{AMB}$ (6)



Hình 3

Nếu gọi giao điểm của $\mathcal{C}_1$ với BC là I thì $\widehat{MIC} = 90^\circ$ dẫn đến tứ giác $ABIM$ nội tiếp được, nên $\widehat{ABC} = \widehat{IMC}$ (cùng bù với $\widehat{AMI}$) (7)

Lại do $\widehat{ICM} = \widehat{MCS}$ (bài toán 1 câu b) và MC là đường kính của đường tròn $\mathcal{C}_1$ nên I và S đối xứng nhau qua MC có $\widehat{IMC} = \widehat{CMS}$ (8)

Từ (7) và (8) dẫn đến $\widehat{OMS} = \widehat{ABC}$ (9)

Từ (6) và (9) suy ra $\widehat{ABC} > 90^\circ - \widehat{ABM}$
 $\Leftrightarrow 90^\circ - \widehat{ACB} > 90^\circ - \widehat{ABM} \Leftrightarrow \widehat{ABM} < \widehat{ACB}$.

b) Lập luận tương tự ta có kết quả D thuộc cung nhỏ $\widehat{MS}$ khi và chỉ khi $\widehat{ABM} > \widehat{ACB}$. Vì M thuộc cạnh AC nên cần có điều kiện $AC > AB$. $\square$

Từ bài toán 2 dẫn đến suy nghĩ:

Khi nào hai điểm S và D trùng nhau? Từ đó ta có bài toán sau.

★ **Bài toán 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A , Điểm M thuộc cạnh AC , vẽ đường tròn $\mathcal{C}_1$ đường kính MC , BM cắt $\mathcal{C}_1$ tại D . Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AC để AD là tiếp tuyến của đường tròn $\mathcal{C}_1$.

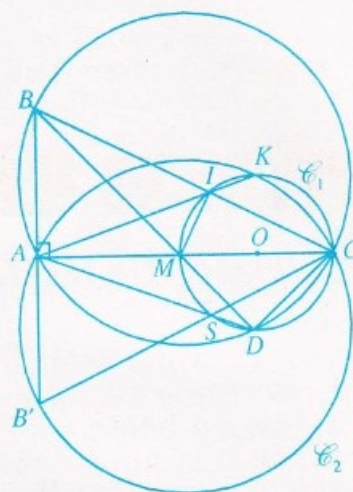
Lập luận tương tự bài toán 2 ta thấy AD là tiếp tuyến của đường tròn $\mathcal{C}_1$ khi và chỉ khi $\widehat{ABM} = \widehat{ACB}$. Để cho M thuộc cạnh AC nên cần có điều kiện $AC > AB$. $\square$

Đến đây ta thấy đáng phải suy nghĩ về vị trí của điểm M . Do điểm M có thể thay đổi trên cạnh AC nên nhiều điểm khác cũng thay đổi theo. Các bạn hãy quan sát tia AI , nó thay đổi nên giao điểm K của nó với đường tròn $\mathcal{C}_1$ cũng thay đổi theo. Dẫn ta đến bài toán sau.

★ **Bài toán 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Điểm M thay đổi trên cạnh AC . Vẽ đường tròn $\mathcal{C}_1$ đường kính MC . Gọi giao điểm của BC với đường tròn $\mathcal{C}_1$ là I , giao điểm của AI với đường tròn $\mathcal{C}_1$ là K . Tìm tập hợp điểm K .

Lời giải. (h. 4).

Do hai tia AI và AS đối xứng nhau qua đường kính MC của đường tròn $\mathcal{C}_1$ và A thuộc đường thẳng MC nên ta dễ dàng chứng minh được K và D đối xứng nhau qua AC .



Hình 4

Do $\widehat{BDC} = 90^\circ$ nên có thể chỉ ra được quỹ tích điểm D khi M chuyển động trên cạnh AC là cung nhỏ $\widehat{AC}$ của đường tròn đường kính BC .

Từ đó ta dự đoán quỹ tích điểm K khi M chuyển động trên cạnh AC là hình đối xứng với cung nhỏ $\widehat{AC}$ qua cạnh AC . Quỹ tích này là một cung tròn của đường tròn $\mathcal{C}_2$ đối xứng với đường tròn đường kính BC qua cạnh AC . Từ đó ta xác định được đường tròn $\mathcal{C}_2$ như sau:

- Lấy B' đối xứng với B qua cạnh AC ;
- Vẽ đường tròn $\mathcal{C}_2$ đường kính $B'C$.

Sử dụng kết quả của các bài tập trên ta dễ dàng chứng minh được B', M, K thẳng hàng suy ra $\widehat{B'KC} = \widehat{MKC} = 90^\circ$.

Vậy quỹ tích điểm K khi M chuyển động trên cạnh AC là cung nhỏ $\widehat{AC}$ của đường tròn đường kính $B'C$. $\square$

Như vậy nếu quan sát tốt, nghiên cứu kỹ thì chỉ từ một bài tập trong sách giáo khoa, chúng ta có thể khai thác được nhiều kết quả thú vị. Chúc các bạn gặt hái được nhiều kết quả.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9

TP. Hồ Chí Minh

NĂM HỌC 2006 - 2007

(Đề thi đăng trên THPT số 359, tháng 5 năm 2007)

Câu 1.

a) Ta có $A = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2} = 3$.

b) $B = \sqrt{8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}}$
 $= \sqrt{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

c) $C = \left(\frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1} + \frac{4(\sqrt{6}+2)}{6-2^2} - \frac{12(3+\sqrt{6})}{3^2-6} \right) (\sqrt{6}+11)$
 $= (\sqrt{6}-11)(\sqrt{6}+11) = -115$.

Câu 2. a) Ta thấy

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0.$$

BĐT này đúng. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

b) Áp dụng kết quả câu a)

$$(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1})^2$$

$$\leq 3(4x+1+4y+1+4z+1) = 21. \text{ Suy ra}$$

$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Câu 3. a) Ta thấy x, y, z khác 0. Hệ đã cho được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{18} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{13}{36} \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được $x=4, y=6, z=9$.

b) Điều kiện $x^2-4 \geq 0$, hay $x \geq 2$ hoặc $x \leq -2$.

Đặt $\sqrt{x^2-4} = y$ ($y \geq 0$). Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{\frac{y^2+4}{4}} + y = 8 - (y^2+4) \Leftrightarrow 2y^2 + y - 6 = 0.$$

Giải PT này và đối chiếu với điều kiện trên ta tìm được $y = \frac{3}{2}$. Dẫn đến $x = \pm \frac{5}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{5}{2}; x = -\frac{5}{2}.$$

Câu 4. Nhận xét: Một số chính phương lẻ khi chia cho 8 sẽ có số dư là 1.

Thật vậy, xét số chính phương lẻ m^2 ($m \in \mathbb{Z}$), m là số lẻ, đặt $m = 2n+1$. Lúc này $m^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1$ chia cho 8 dư 1.

Trở lại bài toán, ta có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$. Do b lẻ nên theo nhận xét trên b^2 chia cho 8 dư 1. Đặt $b^2 = 8k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Lại vì a, c lẻ nên ac lẻ, đặt $ac = 2l-1$ ($l \in \mathbb{Z}$).

Khi đó $\Delta = 8k+1 - 4(2l-1) = 8(k-l)+5$ chia cho 8 dư 5. Từ nhận xét trên ta thấy Δ không phải là số chính phương.

Nghiệm PT đã cho (nếu có) là $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{4a}$.

Do $\sqrt{\Delta}$ là số vô tỉ, nên nếu PT đã cho có nghiệm thì các nghiệm ấy không thể là số hữu tỉ (đpcm).

Câu 5. a) (h. 1). Ta có $\widehat{CMH} = 2\widehat{AMH}$,
 $\widehat{DMH} = 2\widehat{BMH}$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

Năm học 2007-2008

MÔN TOÁN AB (dành cho các lớp chuyên Toán, Tin, Lí, Hóa, Sinh)

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. Cho phương trình

$$\frac{x^2 - 2x\sqrt{m} + 2\sqrt{m}(\sqrt{m} + 1) - 3}{x - 1} = 0 \quad (1)$$

a) Tìm m để $x = -1$ là một nghiệm của phương trình (1).

b) Tìm m để phương trình (1) vô nghiệm.

Câu 2. a) Giải bất phương trình

$$|(x+3)(x-1)| - 2|x-1| < x^2 - 7.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} = 3x\sqrt{2x-1} \\ y\sqrt{x} + 2x\sqrt{y} = 3y\sqrt{2y-1}. \end{cases}$$

Câu 3. a) Cho a, b là hai số thực thỏa mãn điều kiện

$$\begin{aligned} & a^2 - 3ab + 2b^2 + a - b \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - 5a + 7b = 0. \end{aligned}$$

Chứng tỏ rằng $ab - 12a + 15b = 0$.

b) Cho

$$A = \frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(x+\sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+4}+2)\sqrt{x-2\sqrt{x+1}}}{x(x\sqrt{x}-1)}$$

Hãy tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq 0$.

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn có trục tâm là H và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M, N, P lần lượt là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC và I là trung điểm của BC .

a) Chứng minh rằng tam giác INP đều.

b) Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC . Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Giả sử IA là phân giác của $\widehat{NIP}$. Hãy tính số đo của góc $\widehat{BCP}$.

Câu 5. Một công ti may giao cho tổ A may 16800 sản phẩm, tổ B may 16500 sản phẩm và bắt đầu thực hiện công việc cùng một lúc. Nếu sau sáu ngày, tổ A được hỗ trợ thêm 10 công nhân may thì họ hoàn thành công việc cùng lúc với tổ B. Nếu tổ A được hỗ trợ thêm 10 công nhân may ngay từ đầu thì họ sẽ hoàn thành công việc sớm hơn tổ B một ngày. Hãy xác định số công nhân ban đầu của mỗi tổ. Biết rằng mỗi công nhân mỗi ngày may được 20 sản phẩm.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (TP. Hồ Chí Minh)
sưu tầm và giới thiệu

BÌNH LUẬN... (Tiếp trang 10)

Vậy

$$2S = \int_0^1 (1+x)^{2n} dx - \int_{-1}^0 (1+x)^{2n} dx = \frac{2^{2n+1} - 2}{2n+1}.$$

Ta được điều cần chứng minh. $\square$

Nhận xét. 1) Có thể xét $P(x) = (1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}$

sau đó tính $\int_0^1 P(x)dx$ để suy ra kết quả.

2) Nếu phải tính tổng

$$C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \frac{1}{5}C_{2n}^4 + \dots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$$

thì ta xét $P(x) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$, sau đó

tính $\int_0^1 P(x)dx$.

Bài luyện tập. Tính tổng

$$S = \frac{1}{2}C_{2n}^0 + \frac{1}{4}C_{2n}^2 + \frac{1}{6}C_{2n}^4 + \dots + \frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}.$$



ỨNG DỤNG SỰ BIẾN THIÊN HÀM SỐ để giải một số bài toán về hệ phương trình

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Một số lưu ý chung

1) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm của phương trình (PT) là số giao điểm của đồ thị hàm số (HS) $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$.

$$2) \text{ Khi gặp hệ PT dạng } \begin{cases} f(x) = f(y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Ta có thể tìm lời giải theo một trong hai hướng sau:

$$\text{Hướng 1. PT(1)} \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \quad (3)$$

Tìm cách đưa (3) về một PT tích.

Hướng 2. Xét HS $y = f(t)$. Ta thường gặp trường hợp HS liên tục trong tập xác định của nó.

Nếu HS $y = f(t)$ đơn điệu, thì từ (1), suy ra $x = y$. Khi đó bài toán đưa về giải hoặc biện luận PT (2) theo ẩn x .

Nếu HS $y = f(t)$ có một cực trị tại $t = a$ thì nó thay đổi chiều biến thiên một lần khi qua a . Từ (1) suy ra $x = y$ hoặc x, y nằm về hai phía của a (xem thí dụ 2).

3) Nếu hệ PT ba ẩn x, y, z không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với x, y, z thì không mất tính tổng quát có thể giả thiết $x = \max(x, y, z)$. Nghĩa là $x \geq y, x \geq z$ (xem thí dụ 3).

Việc sử dụng khảo sát biến thiên của HS để giải hoặc biện luận một số hệ PT tạo nên sự phong phú về thể loại và phương pháp giải toán, phù hợp với các kì thi tuyển sinh vào Đại học. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

Giải hệ phương trình

★Thí dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} e^x - e^y = x - y \\ \log_2 \frac{x}{2} + \log_{\sqrt{2}} 4y^3 = 10 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Lời giải. ĐK $x > 0, y > 0$.

PT (1) được viết lại dưới dạng

$$e^x - x = e^y - y \quad (3)$$

Xét HS $f(t) = e^t - t$, có $f'(t) = e^t - 1 > 0, \forall t > 0$.

Do đó HS $f(t)$ đồng biến khi $t > 0$.

$$\text{Từ (3) suy ra } \begin{cases} f(x) = f(y) \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Rightarrow x = y.$$

$$\text{Thay vào (2) được } \log_2 \frac{x}{2} + \log_{\sqrt{2}} 4x^3 = 10$$

$$\log_2 x - 1 + 2(2 + 3 \log_2 x) = 10, \text{ hay } \log_2 x = 1.$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 2)$.

★Thí dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \\ 2x^2 - 5xy + y^2 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Lời giải. ĐK $x > -1, y > -1$. PT(1) của hệ được viết lại dưới dạng

$$\ln(1+x) - x = \ln(1+y) - y \quad (3)$$

Xét HS $f(t) = \ln(1+t) - t$, với $t \in (-1; +\infty)$ có

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}.$$

Ta thấy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

HS $f(t)$ đồng biến trong $(-1; 0)$ và nghịch biến trong $(0; +\infty)$.

Ta có $(3) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Lúc đó $x = y$ hoặc $xy < 0$ (nếu x, y thuộc cùng một khoảng đơn điệu thì $x = y$, trong trường hợp ngược lại thì $xy < 0$).

Nếu $xy < 0$ thì vế trái của (2) luôn dương. PT không thỏa mãn.

Nếu $x = y$, thay vào PT (2), ta được nghiệm của hệ là $x = y = 0$.

★ **Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 4y \\ y^3 - 3y^2 + 5y + 1 = 4z \\ z^3 - 3z^2 + 5z + 1 = 4x \end{cases}$$

Lời giải. Xét HS $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$, có $f'(t) = 3t^2 - 6t + 5 > 0, \forall t$.

Do đó HS $f(t)$ luôn đồng biến.

Hệ PT có dạng
$$\begin{cases} f(x) = 4y \\ f(y) = 4z \\ f(z) = 4x \end{cases}$$

Vì hệ không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với x, y, z nên có thể giả thiết $x \geq y, x \geq z$.

Nếu $x > y$ thì $f(x) > f(y) \Rightarrow y > z \Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow z > x$. Mâu thuẫn.

Tương tự nếu $x > z$ ta cũng đi đến mâu thuẫn, suy ra $x = y = z$.

Từ một PT trong hệ, ta có $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

Ta được nghiệm của hệ: $x = y = z = 1$;

$$x = y = z = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Nhận xét. Xét hệ PT có dạng
$$\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x). \end{cases}$$

Nếu các HS $f(t), g(t)$ cùng đồng biến (hoặc cùng nghịch biến) thì lí luận như trên, ta suy ra $x = y = z$.

Biện luận hệ phương trình

★ **Thí dụ 4.** Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{3-y} = m \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{3-x} = m \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Lời giải. ĐK $-1 \leq x, y \leq 3$.

Trừ theo vế của (1) cho (2) và chuyển vế, ta được:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} = \sqrt{y+1} - \sqrt{3-y} \quad (3)$$

Dễ thấy HS $f(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{3-t}$ đồng biến trên $(-1; 3)$ nên từ (3) suy ra $x = y$.

Khi đó từ (1) có $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = m$.

Xét HS $g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$, ta có $g(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$ và

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ta có $g(-1) = 2, g(1) = 2\sqrt{2}, g(3) = 2$.

Từ đó $2 \leq g(x) \leq 2\sqrt{2}$.

Vậy hệ có nghiệm khi $2 \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

★ **Thí dụ 5.** Chứng minh rằng với mọi $m > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} 3x^2y - 2y^2 - m = 0 \\ 3y^2x - 2x^2 - m = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Lời giải. Nếu $y \leq 0$ thì vế trái của (1) âm, PT không thỏa mãn, suy ra $y > 0$. Tương tự có $x > 0$.

Trừ theo vế của (1) cho (2), ta được

$$\begin{aligned} 3x^2y - 3y^2x + 2x^2 - 2y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-y)(3xy + 2x + 2y) &= 0 \end{aligned}$$

Vì $x, y > 0$ nên $3xy + 2x + 2y > 0$. Ta được $x - y = 0$ hay $x = y$.

Khi đó, từ PT(1) có $3x^3 - 2x^2 = m$.

Xét HS $f(x) = 3x^3 - 2x^2$, có $f'(x) = 9x^2 - 4x$.

Ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{4}{9}$.

HS đồng biến trong $(-\infty; 0)$ và $(\frac{4}{9}; +\infty)$,

nghịch biến trong $(0; \frac{4}{9})$, $f_{CB} = f(0) = 0$,

$$f_{CT} = f\left(\frac{4}{9}\right) < 0.$$

Vậy với mọi $m > 0$, PT $f(x) = 0$ có một nghiệm $x > 0$.

Do đó với $m > 0$, hệ có nghiệm duy nhất $x = y > 0$ (bạn đọc tự vẽ đồ thị hoặc lập bảng biến thiên của HS để kiểm tra kết quả trên).

Bài luyện tập

1. Giải các hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} \cos x = 1 - \frac{y^2}{2} \\ \cos y = 1 - \frac{x^2}{2} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = \sin y \\ y = \sin z \\ z = \sin x \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \ln x - \ln y = x - y \\ 2^{x+y} \cdot 3^{\frac{x+1}{y}} = 36 \end{cases}$$

2. Tìm m để các hệ PT sau có nghiệm

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = \cos x - \cos y \\ 2 \sin x - 3 \cos y = m \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \cos x + \cos y = -1 \\ \cos 3x + \cos 3y = m. \end{cases}$$

3. Giả sử x, y là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = m. \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $x^3 + y^3$.



Hỏi - số này

1.(7.07). Trong một lời giải bài toán có các biến đổi

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{2x} + \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{2x}. \end{aligned}$$

Có ý kiến cho rằng làm như trên là sai vì

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{2x} \text{ và } \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{2x} \text{ lúc đó có dạng } \frac{0}{0}.$$

Xin hỏi lời giải biến đổi như trên đúng hay sai?

(N.N., 11A1, THPT Lạng Giang, Bắc Giang).

Mong nhận được ý kiến trả lời của các bạn giúp 2 bạn N.N.

Trả lời - những số trước

1. (3.07). Ý kiến 3 là chưa chính xác. Ta nên vẽ trước bằng bút chì rồi sau tô lại bằng bút mực. Nếu không lúc đầu vẽ bằng nét đứt những chỗ đường khuất. Làm đến câu sau mới xem xét vẽ đường nét liền cho chính xác.

(Nhữ Văn Vịnh, 11A1, THPT Tân Yên II, Bắc Giang)

**ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
DÀI HẠN TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN
TRONG CẢ NƯỚC**

Bình luận về

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A năm 2007

NGỌC THẢO
(Hà Nội)

Đề thi TSDH môn Toán khối A năm nay sát với chương trình phổ thông. Tỷ lệ giữa các câu dễ, trung bình, khó là hợp lý. Học sinh khá, giỏi với kiến thức chắc chắn mới có thể đạt được điểm cao. Việc giải đầy đủ và chính xác các câu II.2, IV.2... không phải đơn giản. Sau đây là lời giải một số câu trong đề thi và một số nhận xét về các lời giải đó.

★ Câu I.2. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2} \quad (1)$$

m là tham số. Tìm m để hàm số (1) có cực đại cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác vuông tại O .

Lời giải. Ta có $y' = \frac{x^2 + 4x + 4 - m^2}{(x+2)^2}$.

Hàm số có cực trị khi $m \neq 0$.

Giả sử A và B là các điểm cực trị của hàm số (1). Ta có $\overline{OA} = (-2-m; -2)$,

$$\overline{OB} = (-2+m; 4m-2).$$

ΔOAB vuông tại O khi và chỉ khi $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$,

$$\text{hay } m^2 + 8m - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -4 \pm 2\sqrt{6} \text{ (thỏa mãn } m \neq 0). \quad \square$$

Nhận xét. Nếu sử dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông OAB thì lời giải sẽ dài, tính toán phức tạp hơn.

Bài luyện tập. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + (2m-3)x + 3m+5}{x-1}$$

và điểm $P(2; -1)$. Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với điểm P tạo thành một tam giác nhọn tại đỉnh P .

★ Câu II.2 Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-1}.$$

Lời giải. ĐK $x \geq 1$. Phương trình trên tương đương với $m\sqrt{x+1} = -3\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2-1}$.

Chia cả hai vế của PT cho $\sqrt{x+1} > 0$, ta được

$$m = -3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{x+1}}.$$

Vì $x \geq 1$, nên $0 \leq t < 1$.

Từ (1), ta được $m = -3t^2 + 2t = g(t)$.

Ta có $g'(t) = -6t + 2$; $g'(t) = 0$ khi $t = \frac{1}{3}$.

Lập bảng biến thiên của hàm $g(t)$ với $0 \leq t < 1$ ta thấy $-1 < g(t) \leq \frac{1}{3}$, suy ra $-1 < m \leq \frac{1}{3}$. $\square$

Nhận xét. 1) Khi đặt điều kiện cho t , dễ mắc sai lầm là chỉ thấy $t \geq 0$ mà không thấy $0 \leq t < 1$. Từ đó dẫn tới kết quả sai là $m \leq \frac{1}{3}$ (!)

2) Khi gặp PT dạng $au^2 + buv + cv^2 = 0$, cách giải chung là:

Nếu $v \neq 0$, chia cả hai vế của PT cho v^2 , sau đó đặt $t = \frac{u}{v}$, ta được một PT bậc hai đối với t (trường hợp $v = 0$ được xét riêng).

3) Nếu PT có dạng $m = f(t)$, thì PT này có nghiệm khi m thuộc tập giá trị của HS $f(t)$.

Bài luyện tập. Biện luận số nghiệm của PT

$$\sqrt{x-1} + 4m\sqrt{x^2-3x+2} + (m+3)\sqrt{x-2} = 0.$$

TOÁN HỌC

Tuổi trẻ Số 361 (7-2007)

9

★ **Câu IV.1.** Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(e+1)x, y=(1+e^x)x$.

Lời giải. PT $(e+1)x=(1+e^x)x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \int_0^1 |(e+1)x - (1+e^x)x| dx \\ &= \int_0^1 ex \cdot dx - \int_0^1 xe^x \cdot dx = I_1 - I_2. \end{aligned}$$

$$\text{Ta thấy } I_1 = \int_0^1 ex \cdot dx = \frac{e}{2}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=x \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x. \end{cases}$$

$$\text{Tính được } I_2=1, \text{ suy ra } S=\frac{e}{2}-1 \text{ (đvdt). } \square$$

Nhận xét. Nếu HS dưới dấu tích phân có dạng $p(x) \cdot e^x$, trong đó $p(x)$ là một đa thức, thì ta giải bài toán bằng phương pháp tích phân từng phần với phép đặt $\begin{cases} u=p(x) \\ dv=e^x dx. \end{cases}$

Bài luyện tập. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{e^{\sqrt{3x+1}}}; y=0; x=0; x=1$.

★ **Câu IV.2.** Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương trên mỗi tử số, và từ $xyz=1$, ta được

$$P \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \quad (1).$$

Đặt $a=x\sqrt{x}, b=y\sqrt{y}, c=z\sqrt{z}$ thì $a, b, c > 0; abc=1$.

BĐT (1) trở thành

$$P \geq \frac{2a}{b+2c} + \frac{2b}{c+2a} + \frac{2c}{a+2b} \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Bunyakovski cho hai bộ số

$$(\sqrt{a(b+2c)}; \sqrt{b(c+2a)}; \sqrt{c(a+2b)})$$

$$\text{và } \left(\sqrt{\frac{a}{b+2c}}; \sqrt{\frac{b}{c+2a}}; \sqrt{\frac{c}{a+2b}} \right),$$

ta được $(a+b+c)^2$

$$\leq 3(ab+bc+ca) \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \right) \quad (3)$$

$$\text{Lại có } 3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2,$$

$$\text{nên từ (3) suy ra } \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1 \quad (4)$$

Từ (2) và (4), ta có $P \geq 2$. Từ đó $\min P = 2$ khi $x=y=z=1$. $\square$

Nhận xét. Cái khó của bài toán ở chỗ khéo sử dụng BĐT Bunyakovski để chứng minh BĐT (4).

Bài luyện tập. Cho a, b, c và m, n là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{mb+nc} + \frac{b}{mc+na} + \frac{c}{ma+nb} \geq \frac{3}{m+n}.$$

★ **Câu Va.2.** Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} C_{2n}^1 + \frac{1}{4} C_{2n}^3 + \frac{1}{6} C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n} C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}.$$

Lời giải. Ta gọi biểu thức trong vế trái là S .

$$\text{Xét đa thức } P(x) = (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k.$$

Lưu ý rằng nếu k là số chẵn thì

$$\int_0^1 C_{2n}^k x^k dx - \int_{-1}^0 C_{2n}^k x^k dx = 0.$$

Khi k lẻ thì

$$\int_0^1 C_{2n}^k x^k dx - \int_{-1}^0 C_{2n}^k x^k dx = \frac{2}{k+1} C_{2n}^k.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} & \int_0^1 P(x) dx - \int_{-1}^0 P(x) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} C_{2n}^1 + \frac{1}{4} C_{2n}^3 + \frac{1}{6} C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n} C_{2n}^{2n-1} \right) \\ &= 2S. \end{aligned}$$

(Xem tiếp trang 5)



BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH VỀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

TRẦN TUYẾT THANH

(GV Học viện Phòng không - Không quân)

Bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số khá đa dạng, phong phú và có thể nói là khó không những đối với các bạn học sinh phổ thông mà còn đối với các bạn sinh viên các trường đại học, đặc biệt là các hàm số có chứa tham số. Rất nhiều trường hợp, việc tìm GTLN, GTNN của hàm số gặp không ít khó khăn, thậm chí không tìm được. Tuy nhiên, chúng ta mong muốn biết được một số tính chất nào đó của GTLN, GTNN. Điều này hoàn toàn phù hợp với thực tế (chẳng hạn dự báo thời tiết ngày hôm nay vào khoảng bao nhiêu độ, độ ẩm là bao nhiêu?...).

Với mong muốn đóng góp một ý tưởng nhỏ cho việc khảo sát GTLN, GTNN của hàm số, bài viết trình bày một phương pháp đánh giá GTLN, GTNN của hàm số mang tính định tính thông qua các giá trị của hàm số tại một số điểm đặc biệt của hàm số, từ đó đạt được kết quả mong muốn.

Trước hết xin nhắc lại khái niệm GTLN, GTNN của hàm số.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên miền D ($D \subset \mathbb{R}$). Giả sử M, m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm $f(x)$ trên miền D .

$$M = \max_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = M \end{cases}$$

$$m = \min_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = m. \end{cases}$$

Sau đây là một số bài toán minh họa.

★ Bài toán 1. Cho hàm số

$$f(x) = 4ax^3 + 2bx^2 + (1-3a)x - b$$

trong đó a, b là các số thực tùy ý. Gọi

$$M = \max_{x \in [-1; 1]} f(x). \text{ Chứng minh rằng } M \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải. Trước hết ta có các kết quả sau:

$$\max\{\alpha, \beta\} \geq \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad (1)$$

$$\min\{\alpha, \beta\} \leq \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad (2)$$

$$|\alpha| + |\beta| \geq \alpha - \beta \quad (3)$$

Do $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ thuộc đoạn $[-1; 1]$, nên ta có

$$\begin{aligned} M &\geq f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left| 4a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 2b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1-3a)\frac{\sqrt{3}}{2} - b \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} \right|. \end{aligned}$$

$$M \geq f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \left| 4a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 2b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1-3a)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - b \right|$$

$$= \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} \right|.$$

$$\text{Từ đó suy ra } M \geq \max \left\{ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}$$

$$= \max \left\{ \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} \right|, \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} \right| \right\}$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} \right| + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} \right| \right) \text{ (theo kết quả (1))}$$

$$\geq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} \right) \right] \text{ (theo kết quả (3))}$$

$$\text{Vậy } M \geq \frac{\sqrt{3}}{2}. \square$$

★ **Bài toán 2.** Cho hàm số

$$f(x) = 2x^2 - 1 + ax - 2007\sqrt{1-x^2},$$

trong đó a là tham số thực tùy ý.

$$\text{Gọi } M = \max_{x \in [-1;1]} f(x); m = \min_{x \in [-1;1]} f(x).$$

$$\text{Chứng minh rằng } \begin{cases} M \geq 1 \\ m \leq -\frac{2007}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} M \geq f(1) = 1 + a \\ M \geq f(-1) = 1 - a. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } M \geq \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)) = 1 \text{ (đpcm)}$$

Tương tự ta có

$$\begin{cases} m \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{2007}{\sqrt{2}} \\ m \leq f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{2007}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] \text{ (theo kết quả 2).}$$

$$\text{Vậy } m \leq -\frac{2007}{\sqrt{2}}. \square$$

★ **Bài toán 3.** Giả sử M là giá trị lớn nhất của $|b|$ sao cho $4bx^3 + (a-3b)x \leq 1$, với mọi giá trị của $x \in [-1;1]$ và với mọi số thực a . Chứng minh rằng $M \leq 1$.

Lời giải. Đặt $f(x) = 4bx^3 + (a-3b)x$. Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} f(1) = 4b + a - 3b = a + b \leq 1 \\ f(-1) = -4b - (a-3b) = -a - b \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } -1 \leq a + b \leq 1 \quad (4)$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{b}{2} + (a-3b) \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2} - b \leq 1 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{b}{2} - (a-3b) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a}{2} + b \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } -1 \leq -\frac{a}{2} + b \leq 1 \quad (5)$$

Từ (4) và (5), ta nhận được

$$\begin{cases} -1 \leq a + b \leq 1 \\ -2 \leq -a + 2b \leq 2 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq 3b \leq 3 \Rightarrow |b| \leq 1.$$

$$\text{Suy ra } \max |b| \leq 1. \text{ Vậy } M \leq 1. \square$$

Để củng cố phương pháp, mời các bạn giải các bài toán sau:

★ **Bài toán 4.** Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các tham số thực thỏa mãn

$$\text{các điều kiện } \begin{cases} a + b + c \leq 1 \\ a - b + c \geq 0 \\ c \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Gọi } M = \max_{x \in [0;1]} f(x). \text{ Chứng minh rằng } M \leq \frac{9}{8}.$$

★ **Bài toán 5.** Cho hàm số

$$f(x) = \cos 2x + a \cos(x + \alpha),$$

trong đó a, α là các tham số thực tùy ý. Giả sử $M = \max f(x); m = \min f(x)$. Chứng minh rằng $M^2 + m^2 \geq 2$.

BẠN CÓ BIẾT?

Phát triển thêm LÍ THUYẾT SỐ NGUYÊN TỐ

Một trong những người được giải thưởng Fields 2006, Terence Tao, đã đẩy việc nghiên cứu các số nguyên tố đi xa hơn, bằng cách đưa ra một định lý mới.

Nhà toán học trẻ Terence Tao, ở trường Đại học Los Angeles, người năm ngoái được nhận Huy chương Field với các kết quả nghiên cứu về các số nguyên tố, đã làm cho lý thuyết các số nguyên tố phát triển hơn nữa. Cùng với bạn đồng sự Tamar Ziegler ở trường Đại học Michigan, Terence Tao đã chứng minh rằng dãy số nguyên tố chứa những "cấp số đa thức dài tùy ý" ⁽¹⁾.

Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 chỉ chia hết cho 1 và chính số đó. Với định nghĩa cực kỳ đơn giản đó, người ta đã xây dựng những vấn đề toán học rất phức tạp.

Từ thời văn minh cổ đại, người ta đã biết các số nguyên tố tạo thành một dãy vô hạn. Những số nguyên tố đầu tiên là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23... Khi các số càng lớn thì việc xác định các số nguyên tố càng khó khăn hơn. Dường như khi các số càng lớn thì số nguyên tố càng hiếm. Hiện nay các nhà toán học chưa thể mô tả rõ ràng cách thức mà các số nguyên tố được phân bố trong dãy các số tự nhiên.

Năm 2004, cùng với Ben Green, ở trường Đại học Cambridge, Terence Tao đã chứng minh

một trong những kết quả đã mang lại cho ông Huy chương Fields: Tập hợp các số nguyên tố chứa những "cấp số cộng có độ dài tùy ý" tức là số hạng lớn tùy ý. Ví dụ, dãy 5, 11, 17, 23 là một cấp số có 4 số nguyên tố hơn kém nhau 6 ($5 + 6 = 11$, $11 + 6 = 17$, $17 + 6 = 23$). Đây là một cấp số cộng có công sai là 6.

Phải chăng tồn tại những dãy số không phải là cấp số cộng nhưng có thể mô tả quy luật về khoảng cách giữa hai số nguyên tố liên tiếp thuộc dãy?

Định lý mới mở rộng kết quả trước cho những cấp số "đa thức", tức là những cấp số có khoảng cách giữa các số hạng liên tiếp không nhất thiết là một hằng số, như trong trường hợp các cấp số cộng. Ví dụ, dãy 3, 5, 13, 31 là một cấp số có bốn số nguyên tố, có khoảng cách giữa số hạng thứ n và số hạng thứ $n + 1$ bằng $2n^2$. Định lý Terence Tao và Tamar Ziegler chỉ rõ rằng có thể đạt được những cấp số có nhiều số hạng hơn nữa (không hạn chế), có khoảng cách của mỗi số hạng với số hạng tiếp sau được xác định bằng một công thức cùng loại, trong đó chỉ dùng đến hàng n và các lũy thừa của nó. Sự

chứng minh định lý đó dựa trên cùng những ý tưởng đã cho phép Ben Green và Terence Tao giải quyết trường hợp các cấp số cộng. Tập hợp những số nguyên tố được nhận định như là một tập hợp con của tập hợp những số nguyên gọi là "gần như nguyên tố". Trên tập hợp đó, người ta xây dựng một hàm đặc biệt cho phép làm nổi rõ một số tính chất đặc biệt của các số nguyên tố. Như vậy các số nguyên tố để lộ ra thêm chút ít những điều bí mật của chúng.

NGUYỄN VĂN THIÊM

(theo "La Recherche" tháng 1-2007)

(1) T.Tao et T.Ziegler.





Sách giáo khoa (SGK) *Đại số và Giải tích 11 nâng cao* được biên soạn theo chương trình môn Toán Trung học Phổ thông ban hành theo Quyết định số 16/2006/QĐ-BGDĐT ngày 05-5-2006 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, trên cơ sở tổng kết các ưu và nhược điểm của cuốn SGK thí điểm *Đại số và Giải tích 11* ban Khoa học Tự nhiên (bộ 1) sau hai năm giảng dạy thí điểm tại gần 50 trường THPT và tiếp thu các ý kiến tâm huyết của rất nhiều cán bộ, giáo viên trong cả nước.

SGK *Đại số và Giải tích 11 nâng cao* tiếp tục quán triệt quan điểm biên soạn SGK *Đại số 10 nâng cao* (xem THPT số 348) là:

Sát thực, tức là gắn với thực tiễn dạy học ở phổ thông nhằm nâng cao tính khả thi của chương trình và SGK mới; tiếp cận thực tiễn đời sống, thực tiễn khoa học.

Trực quan, tức là coi trực quan là phương pháp chủ đạo trong việc tiếp cận các khái niệm toán học; dẫn dắt học sinh nhận thức từ trực quan sinh động đến tư duy trừu tượng.

Nhẹ nhàng, tức là xác định những yêu cầu vừa phải đối với học sinh; tránh hàm lâm; cố gắng trình bày vấn đề ngắn gọn, súc tích, không gây căng thẳng cho người học.

Đổi mới, tức là cách tân cách trình bày, nâng cao tính sư phạm; góp phần đổi mới phương pháp dạy học và phương pháp đánh giá.

Trong khuôn khổ của bài báo này, với các quan điểm nêu trên, chúng tôi trình bày những vấn đề trọng yếu nhất mà mỗi giáo viên và học sinh cần lưu ý khi sử dụng cuốn SGK này trong năm học sắp tới, đặc biệt là những điểm mới và khác so với chương trình và SGK lớp 11 chỉnh lí hợp nhất năm 2000 (SGK2000).

I. VỀ NỘI DUNG CHƯƠNG TRÌNH

So với SGK2000, SGK *Đại số và Giải tích 11 nâng cao* có những điểm khác biệt sau đây:

– Về *lượng giác*, học sinh đã làm quen với các kiến thức mở đầu về lượng giác ở lớp 10. Do đó phần lượng giác lớp 11 chỉ còn vấn đề *các hàm số lượng giác* và *phương trình lượng giác*. Chương trình **không đề cập** các vấn đề về *bất phương trình* và *hệ phương trình lượng giác*.

– Các kiến thức về *tổ hợp* và *xác suất* đang ngày càng trở nên quan trọng đối với mỗi con người trong xã hội hiện đại. Vì vậy, ở

nhiều nước, *tổ hợp* và *xác suất* đã được giảng dạy trong trường phổ thông từ lâu nhưng với mức độ rất khác nhau. Ở nước ta, đây là lần đầu tiên *xác*

suất được đưa vào chương trình phổ thông (không kể đến chương trình phân ban thí điểm năm 1995).

– Các vấn đề về *hàm số mũ* và *hàm số lôgarit* được chuyển sang lớp 12, dành thời lượng cho chương "*Đạo hàm*" (gồm khái niệm đạo hàm và các công thức tính đạo hàm, chỉ trừ công thức đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit). Chương trình quy định **không đưa vào khái niệm đạo hàm một bên**.

Việc đưa *đạo hàm* cùng với các nội dung *tổ hợp* và *xác suất* vào lớp 11 là một đặc điểm mới, nổi bật của chương trình. Điều đó còn nhằm cung cấp những công cụ toán học cần

Một số điểm cần lưu ý khi dạy - học ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11 nâng cao

NGUYỄN HUY ĐOAN

(Chủ biên SGK *Đại số và Giải tích 11 Nâng cao*)

thiết chuẩn bị cho việc học tốt một số môn học khác (như Vật lí, Sinh học, Hóa học, Địa lí,...), thể hiện tính liên môn trong toàn bộ *Chương trình giáo dục phổ thông*.

II. VỀ PHƯƠNG PHÁP TIẾP CẬN VÀ MỨC ĐỘ YÊU CẦU

Chương I (*Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác*) là phần nối tiếp của phần lượng giác lớp 10. Khi *khảo sát sự biến thiên* của các hàm số lượng giác, SGK *Đại số và Giải tích 11 nâng cao* sử dụng **phương pháp trực quan**, tức là khảo sát sự chuyển động của các điểm để suy ra sự tăng-giảm của các hàm số lượng giác. Phương pháp tịnh tiến đồ thị (đã học ở lớp 10) cũng được nhắc lại và sử dụng để vẽ đồ thị của các hàm số lượng giác.

Khái niệm *hàm số tuần hoàn* hoàn toàn không coi là **nội dung trọng yếu**. Do đó SGK giới thiệu định nghĩa *hàm số tuần hoàn* rồi đưa ra một vài ví dụ như để khái quát các tính chất đặc trưng về tính tuần hoàn của các hàm số lượng giác đã học trước đó.

Về *phương trình lượng giác*, SGK đã cố gắng **giảm nhẹ** các yêu cầu về kỹ năng như: không xét các phương trình lượng giác chứa tham số, loại bỏ các dạng phương trình có biến đổi hoặc phải xét điều kiện phức tạp, không giới thiệu phương pháp đặt ẩn phụ $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Việc đưa các kí hiệu $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$ và arccot nhằm giúp giáo viên và học sinh trình bày lời giải các phương trình lượng giác được gọn, không nhằm giới thiệu các hàm số lượng giác ngược.

Mục đích của chương II (*Tổ hợp và Xác suất*) là để học sinh làm quen với những vấn đề đơn giản có nội dung tổ hợp thường gặp trong đời sống và khoa học. Do đó hầu hết các ví dụ trong SGK đều được lấy từ **thực tế cuộc sống**. Học sinh cần hiểu và phân biệt được các khái niệm, nhớ và vận dụng được các quy tắc, các công thức vào những bài toán đơn giản, **không đòi hỏi suy luận qua nhiều bước trung gian**. Đặc biệt, cần gắn với những bài toán thực tế như vấn đề chọn cán bộ lớp, vấn đề điểm số, vấn đề an toàn giao thông, vấn đề dân số, ...

Nội dung chương III (*Dãy số, cấp số cộng và cấp số nhân*) và chương IV (*Giới hạn*) về cơ bản cũng giống như trước đây. Tuy nhiên có một **điều khác biệt rất quan trọng** là khái niệm *giới hạn vô cực* được hiểu theo nghĩa *giới hạn* hoặc bằng $+\infty$, hoặc $-\infty$, không chấp nhận *giới hạn* bằng ∞ chung chung như trước đây. Chẳng hạn, đẳng thức $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \infty$ nay không được chấp nhận, mặc dù nó đúng theo định nghĩa của SGK2000. Sự thay đổi đó có nhiều ưu điểm và phù hợp với SGK của nhiều nước trên thế giới. Chắc chắn nó sẽ gây ra một số khó khăn cho giáo viên bởi nó đòi hỏi giáo viên phải thay đổi trong một số cách trình bày lời giải.

Chẳng hạn:

– Không viết $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ mà phải viết $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

– Không viết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ mà phải viết $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Ngoài những định lí về giới hạn mà các SGK trước đây thường đề cập, SGK còn cung cấp những quy tắc chủ yếu nhằm giúp học sinh biết xác định xem một giới hạn vô cực khi nào thì bằng $+\infty$, khi nào thì bằng $-\infty$.

Do có thay đổi như thế, giáo viên cần nghiên cứu kĩ SGK để tránh các sơ suất do thói quen cũ để lại.

Đạo hàm là nội dung khá quen thuộc trong chương trình toán phổ thông. Điều đáng lưu ý là sự **đổi mới cách tiếp cận** một số vấn đề như: ví dụ mở đầu dẫn đến *khái niệm đạo hàm*, ý nghĩa hình học của đạo hàm, đạo hàm của *hàm số hợp*, *vi phân*. Chẳng hạn, về ý nghĩa hình học của đạo hàm, SGK có trình bày rõ cách xác định đầu là "vị trí giới hạn của cát tuyến M_0M khi M di chuyển dọc theo đồ thị dẫn đến M_0 " mà trong các sách trước đã không đề cập.

Các tác giả rất mong nhận được các ý kiến xây dựng của các thầy giáo, cô giáo, các nhà khoa học và của các em học sinh để SGK ngày càng tốt hơn.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/361. (Lớp 6). Số $(9x)^8$ với $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số?

VŨ HỮU CHÍN

(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T2/361. (Lớp 7). Gọi H là giao điểm ba đường cao của một tam giác nhọn ABC và M là trung điểm cạnh BC . Đường thẳng vuông góc với MH ở H cắt hai đường thẳng AB và AC tương ứng ở P và Q . Chứng minh rằng $HP = HQ$.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV ĐHSPT Hà Nội)

Bài T3/361. Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là các số nguyên dương đôi một khác nhau sao cho biểu thức $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}$ là một số nguyên thì tích $abcd$ là một số chính phương.

CÙ HUY TOÀN

(Khoa Công nghệ Vật liệu 02, khóa 50, ĐHBK Hà Nội)

Bài T4/361. So sánh giá trị của các số A và B sau:

$$A = \min_{|x| \leq 1} \max_{|y| \leq 1} (x^2 + yx)$$

$$B = \max_{|x| \leq 1} \min_{|y| \leq 1} (x^2 + yx).$$

LÊ THANH HẢI

(SV Khai thác, K44, ĐH Mỏ - Địa chất, Cẩm Phả, Quảng Ninh)

Bài T5/361. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{8}{3} \\ x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{118}{9} \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} - \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{y\sqrt{y}} - \frac{1}{z\sqrt{z}} = \frac{728}{27} \end{cases}$$

ĐẶNG QUỐC CHẤN

(GV THCS Nam Sơn, Nam Trực, Nam Định)

Bài T6/361. Cho hình bình hành $ABCD$. Điểm M nằm cùng mặt phẳng với $ABCD$ sao cho $\widehat{MDA} = \widehat{MBA}$. Chứng minh rằng hai tam giác MAB và MCD có cùng trực tâm.

NGUYỄN ĐĂNG KHÔI

(GV THCS Bạch Liêu, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T7/361. Gọi AD, BE, CF theo thứ tự là các đường phân giác trong tam giác ABC ($D \in BC, E \in CA, F \in AB$); O và R theo thứ tự là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Gọi O_1, O_2 và O_3 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, BCE và ACF . Chứng minh rằng

$$\frac{3}{2}R \leq OO_1 + OO_2 + OO_3 < 2R.$$

LA VĂN THỊNH

(SV K49, AIT, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/361. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = [a + b] + [b + c] + [c + a]$, trong đó kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của x .

VŨ HỒNG PHONG

(GV THPT Tiên Du 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

Bài T9/361. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^3 - y) + 2y(3f^2(x) + y^2) = f(y + f(x))$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

DƯƠNG CHÂU DINH

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T10/361. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có

$$-1 < 6\cos A + 3\cos B + 2\cos C < 7.$$

NGUYỄN VĂN MẬU, NGUYỄN THU HẰNG
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/361. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi E là trung điểm của AB . Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$.

Dựng hình bình hành $AEMF$. Chứng minh rằng

$$MA + MB + MC \leq \sqrt{11(R^2 - OM^2)}.$$

Giả sử $(O; R)$ là đường tròn cố định. Hãy dựng tam giác ABC nội tiếp $(O; R)$ sao cho

$$MA + MB + MC = \sqrt{11(R^2 - OM^2)}.$$

NGUYỄN VĂN ĐỨC
(GV khoa Toán, ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài T12/361. Cho tứ diện $ABCD$ có DA, DB, DC vuông góc từng đôi một. Kí hiệu x, y, z theo thứ tự là góc nhị diện cạnh AB, BC, CA của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng

$$(2 + \tan^2 x)(2 + \tan^2 y)(2 + \tan^2 z) \geq 64.$$

HOÀNG THANH VÂN
(GV THPT Định Hóa, Thái Nguyên)

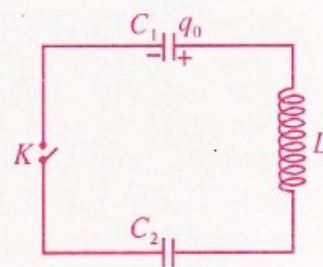
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/361. Trong mạch dao động LC trên hình vẽ, khi khóa K ngắt, điện tích trên tụ thứ nhất có điện dung C_1 bằng q_0 , còn tụ thứ hai có điện dung C_2 không tích điện. Hỏi bao lâu

sau khi khóa K đóng điện tích trên tụ C_2 đạt giá trị cực đại? Bỏ qua điện trở thuần của mạch.

NGUYỄN XUÂN QUANG

(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)



Bài L2/361. Một quả cầu đồng chất bán kính R được thả vào trong một chất lỏng. Khi quả cầu ở vị trí cân bằng thì tâm quả cầu cách mặt thoáng của chất lỏng một đoạn H . Chứng tỏ rằng quả cầu sẽ dao động điều hòa nếu nó lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ theo phương thẳng đứng. Tìm chu kì dao động của quả cầu.

NGUYỄN ĐỨC HIỆP

(GV THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP. HCM)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/361. (For 6th grade). The number $(9x)^8$, where $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ contains how many digits when written in decimal form?

T2/361. (For 7th grade). Let H be the orthocenter of an acute triangle ABC and denote by M the midpoint of BC . The perpendicular line to MH through H meets AB and AC at P and Q respectively. Prove that $HP = HQ$.

T3/361. Prove that if a, b, c and d are distinct positive integers such that the sum

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}$$

is also an integer, then the product $abcd$ is a perfect square.

T4/361. Compare the values of the following two numbers

$$A = \min_{|y| \leq 1} \max_{|x| \leq 1} (x^2 + yx)$$

$$B = \max_{|x| \leq 1} \min_{|y| \leq 1} (x^2 + yx).$$

T5/361. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{8}{3} \\ x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{118}{9} \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} - \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{y\sqrt{y}} - \frac{1}{z\sqrt{z}} = \frac{728}{27} \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 31)



★ **Bài T1/357.** Cho hai bình, mỗi bình có dung tích 1 lít. Bình thứ nhất đựng đầy nước và bình thứ hai không đựng gì cả. Ban đầu, người ta rót $\frac{1}{2}$ lượng nước trong bình thứ nhất sang bình thứ hai, tiếp đó lại rót $\frac{1}{3}$ lượng nước trong bình thứ hai sang bình thứ nhất, sau đó lại rót $\frac{1}{4}$ lượng nước có trong bình thứ nhất sang bình thứ hai và quá trình này tiếp tục: $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \dots$ Hỏi cứ rót đi, rót lại như thế thì sau lần rót thứ 2007 có bao nhiêu nước trong mỗi bình?

Lời giải. Ta có số nước trong mỗi bình như sau:

Lần 1: Bình thứ nhất có $\frac{1}{2}$ (l),

bình thứ hai có $\frac{1}{2}$ (l).

Lần 2: Bình thứ nhất có $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ (l),

bình thứ hai có $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (l).

Lần 3: Bình thứ nhất có $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ (l),

bình thứ hai có $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (l).

Nếu tính tiếp, ta thấy lượng nước trong bình thứ nhất sau lần rót thứ 5, 7, .. đều là $\frac{1}{2}$ (l).

Dự đoán: Lượng nước trong bình thứ nhất sau mỗi lần rót thứ lẻ là $\frac{1}{2}$ (l).

Thật vậy, giả sử sau lần rót thứ $2n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$), trong mỗi bình có $\frac{1}{2}$ (l). Thế thì sau lần rót thứ $2n$, trong bình thứ nhất có

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+1} \text{ (l)}.$$

Sau lần rót thứ $2n+1$, trong bình thứ nhất có

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{n+1}{2n+1} \\ &= \frac{n+1}{2n+1} \left(1 - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{2} \text{ (l)}. \end{aligned}$$

Điều dự đoán trên đã được chứng minh.

Vậy sau lần rót thứ 2007 số nước trong mỗi bình là $\frac{1}{2}$ lít. □

◀ **Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn đều từ một số lần rót đầu, rút ra nhận xét tổng quát, rồi từ đó kết luận mà không qua bước chứng minh tổng quát. Làm như vậy là không chặt chẽ. Kết quả dự đoán trong một số bài toán có thể không đúng!

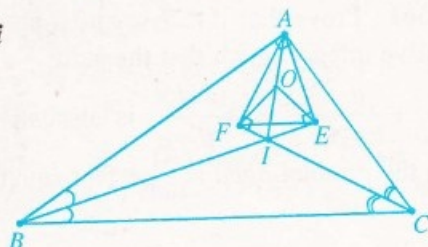
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Quốc Hoàn, 6A16, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; Đỗ Trường Sơn, 6G1, THCS Marie Curie; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Thanh Thảo, 6A1, TH Trung Vương, Mê Linh; **Hà Nam:** Nguyễn Hoa Quỳnh, 6A1, THCS Nguyễn Khuyến, Bình Lục; **Nam Định:** Lê Thị Phương Thanh, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định; **Hải Phòng:** Hoàng Thị Quyên, 6D, THCS Hoà Bình, Vĩnh Bảo; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Kim Oanh, 6C, THCS Bắc Hồng, TX Hồng Lĩnh; **Bạc Liêu:** Trần Quang Minh, 6/1, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T2/357.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong; E, F lần lượt là hình chiếu của A trên BI, CE. Chứng minh rằng $2EF^2 = AI^2$.

Lời giải



Trong các tam giác vuông IAE, IAF ta có

$$\begin{cases} \widehat{IAE} + \widehat{AIE} = 90^\circ \\ \widehat{IAF} + \widehat{AIF} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{IAE} + \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = 90^\circ \\ \widehat{IAF} + \widehat{ICA} + \widehat{IAC} = 90^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{IAE} + \frac{1}{2} \widehat{CBA} + 45^\circ = 90^\circ \\ \widehat{IAF} + \frac{1}{2} \widehat{BCA} + 45^\circ = 90^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{IAE} + \widehat{IAF} + \frac{1}{2} (\widehat{CBA} + \widehat{BCA}) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EAF} + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAF} = 45^\circ \quad (1)$$

Gọi O là trung điểm của AI . Vì $\widehat{IEA} = \widehat{IFA} = 90^\circ$

$$\text{nên ta có } \begin{cases} OE = OA \\ OF = OA. \end{cases}$$

Do đó các tam giác OAE, OAF cân tại O .

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \widehat{EOF} &= \widehat{EOI} + \widehat{FOI} = 2\widehat{EAO} + 2\widehat{FAO} \\ &= 2\widehat{EAF} = 90^\circ \text{ (theo 1)} \end{aligned}$$

Suy ra tam giác OEF cân tại O . Từ đó

$$EF^2 = OE^2 + OF^2 = 2OI^2 \text{ (vì } OE = OF = OI)$$

$$= \frac{1}{2} AI^2 \text{ (vì } OI = \frac{1}{2} AI) \Rightarrow 2EF^2 = AI^2. \square$$

◀ **Nhận xét:** 1) Tất cả các bạn đều nhận thấy đề bài không chuẩn: *CE cần phải được sửa thành CI*. Đối với học sinh lớp 7, đây là bài toán khó.

2) Xin nêu tên các bạn có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Lê Văn Tú, 7A₁, THCS Yên Lạc, Yên Lạc. **Thái Bình:** Nguyễn Văn Pha, 10A₃, THPT Bắc Kiến Xương. **Nghệ An:** Phan Phú Nguyên, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **TP Hồ Chí Minh:** Bùi Trần Long, 9A₃, THCS Chu Văn An, Q₁. **Phú Yên:** Huỳnh Khánh Ván, 8E, THCS Trần Quốc Toán, TP. Tuy Hòa.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T3/357.** Tìm tất cả các tập hợp hữu hạn A ($A \subset \mathbb{N}^*$) sao cho tồn tại tập hợp hữu hạn B ($B \subset \mathbb{N}^*$) thỏa mãn $A \subset B$ và tổng các số của tập hợp B bằng tổng bình phương các số của tập hợp A .

Lời giải. Gọi m là số lớn nhất trong A . Ta xét ba trường hợp:

1) $m = 1$. Khi đó $A = \{1\}$. Ta chọn $B = \{1\}$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

2) $m = 2$. Trong trường hợp này ta có hoặc $A = \{2\}$ hoặc $A = \{1; 2\}$.

• Xét trường hợp $A = \{2\}$. Khi đó $\sum_{x \in A} x^2 = 4$.

Như thế nếu tồn tại tập B thỏa mãn các điều kiện của bài toán thì $\sum_{x \in B \setminus A} x = 4 - 2 = 2$. Từ đó

$B \setminus A = \{2\}$, mâu thuẫn, vì $2 \in A$.

• Xét trường hợp $A = \{1; 2\}$. Tương tự như trên ta cũng chứng minh được rằng không tồn tại tập B thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

3) $m > 2$.

$$\text{Xét số } y = \sum_{x \in A} (x^2 - x).$$

$$\text{Ta có } y = \sum_{x \in A} (x^2 - x) \geq m^2 - m = m(m-1) \geq 2m > m.$$

Như thế $y \notin A$. Xét tập hợp $B = A \cup \{y\}$.

Ta có $\sum_{x \in B} x = \left(\sum_{x \in A} x \right) + y = \sum_{x \in A} x^2$, do đó tập B thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các tập hợp A thỏa mãn đề bài là $A = \{1\}$ hoặc A là tập hữu hạn tùy ý mà phần tử lớn nhất của nó lớn hơn 2. $\square$

◀ **Nhận xét:** 1) Bài toán tương đối hay và khó về mặt lập luận logic. Một số bạn xét đủ ba trường hợp nhưng trong kết luận loại bỏ trường hợp $A = \{1\}$.

2) Các bạn có lời giải đúng là:

Nghệ An: Vũ Đình Long, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** Phạm Quang Thịnh, 8H, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T4/357.** Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n ($n \geq 2$) ta có

$$1 + \sqrt[3]{1 + \frac{4}{3!}} + \sqrt[3]{1 + \frac{9}{4!}} + \dots + \sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{(n+1)!}} < n + \frac{1}{2}$$

trong đó kí hiệu $n! = 1.2.3 \dots n$.

Lời giải. *Trước hết, nhận xét rằng với $x > 0$ và $k \in \mathbb{N}^*$ ($k \geq 2$) luôn có

$$(1+x)^k > 1+kx \quad (1)$$

Thật vậy, với $k = 2$ ta có

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x.$$

Vậy (1) đúng khi $k = 2$.

Giả sử (1) đúng với k ($k \geq 2$) tức là

$$(1+x)^k > 1+kx. \text{ Khi đó}$$

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x) \\ = 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x.$$

Vậy (1) đúng với $k+1$. Theo nguyên lí quy nạp thì (1) đúng với mọi số tự nhiên k ($k \geq 2$).

Từ (1) suy ra $\sqrt[k]{1+kx} < 1+x$.

$$\text{Với } x = \frac{k}{(k+1)!} \text{ ta có } \sqrt[k]{1 + \frac{k^2}{(k+1)!}} < 1 + \frac{k}{(k+1)!}$$

$$\text{hay } \sqrt[k]{1 + \frac{k}{(k+1)!}} < 1 + \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \quad (2)$$

* Gọi P là vế trái của BĐT cần chứng minh và vận dụng BĐT (2) với $k = 2, 3, \dots, n$, cho $n-1$ số hạng của P , ta có

$$P < \left(1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(1 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots + \\ + \left(1 + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!} < n + \frac{1}{2}.$$

◀ **Nhận xét.** 1) Để dẫn đến BĐT

$$\sqrt[k]{1 + \frac{k^2}{(k+1)!}} < 1 + \frac{k}{(k+1)!},$$

nhiều bạn đã sử dụng BĐT Cauchy cho k số không âm gồm $(k-1)$ số là 1 và 1 số là $1 + \frac{k^2}{(k+1)!}$ điều này

vượt quá chương trình của cấp THCS, hoặc sử dụng BĐT Bernoulli mà không chứng minh.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Bắc Ninh: Nguyễn Hữu Trường, 8A, THCS Yên Phong; Nguyễn Văn Phò, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thành Tín, 9A, THCS Lập Thạch; **Nam Định:** Trần Vũ Trung, 9A9, THCS Phùng Chí Kiên; Hà Nam; Trần Trung Kiên, 9B, THCS Trần Phú; Trần Thị Thuý Hoan, 8D, THCS Trần Quốc Toàn, Phù Lý; **Thanh Hoá:** Lê Hồng Quân, 8B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; Hoàng Kiên An, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn; **Nghệ An:** Trần Viết Thành, 9A2 THCS Trà Lân, Con Cuông, Tăng Văn Bình, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Hồ Hữu Quân, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **TP. Hồ Chí Minh:** Bùi Trần Long, 9A5, THCS Chu Văn An; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 9A4, THCS Trà Nóc.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/357.** Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Trên cung nhỏ $\widehat{BC}$ lấy điểm M bất kì (M khác B, C). Các đường thẳng CM và DB cắt nhau tại điểm E ; các đường thẳng DM và AB cắt nhau tại điểm F . Chứng minh rằng hai tam giác ABE và DOF có diện tích bằng nhau.

Lời giải.

• **Cách 1.** Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{CMD} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{EBF} = \widehat{FME} = 45^\circ$ nên tứ giác $MBEF$ nội tiếp được.

Từ đó

$$\widehat{BEF} = 180^\circ - \widehat{BMF} = 90^\circ.$$

Như vậy tam giác BEF vuông cân tại E . Ta có

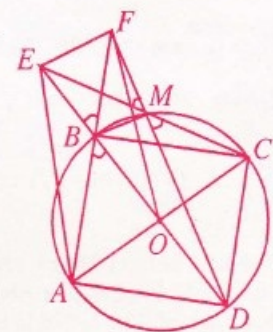
$$BE = EF \text{ nên } \frac{1}{2} \times OA \times BE = \frac{1}{2} \times OD \times EF.$$

Vậy hai tam giác ABE và DOF có diện tích bằng nhau.

• **Cách 2.** Ta có $\text{sđ}\widehat{BEM} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{CD} - \text{sđ}\widehat{BM})$

$$= 45^\circ - \frac{\text{sđ}\widehat{BM}}{2}.$$

$$\text{Tương tự } \text{sđ}\widehat{BFM} = 45^\circ - \frac{\text{sđ}\widehat{BM}}{2}.$$



Nên $\widehat{BEM} = \widehat{BFM}$ hay tứ giác $BMFE$ nội tiếp được. Từ đó $\widehat{BEF} = 180^\circ - \widehat{BMF} = 90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{EBF} = \widehat{ABD} = 45^\circ$ nên tam giác BEF vuông cân tại E . Kẻ $EH \perp BF$. Ta có

$$\frac{1}{2} \times AB \times EH = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times OD \times \frac{EF}{\sqrt{2}} \\ = \frac{1}{2} \times OD \times EF. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn giải bày này rất dài. Có những bạn phải dùng đến hàm số lượng giác.

2) Các bạn có lời giải tốt:

Phú Thọ: Tạ Đức Thành, 9A3, Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Mạc Thị Thu Huệ, 7A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch, Nguyễn Thành Tín, 9A, THCS Lập Thạch; **Hải Dương:** Vũ Thanh Tú, 10A1, THPT Kê Sắt, Bình Giang; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Phò, 9A1, THCS TTr. Chờ, Yên Phong; **Hà Nội:** Phạm Duy Long, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Nam Định:** Nguyễn Thanh Quyết, 9A2, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định, Trần Vũ Trung, 9A9, THCS Phùng Chí Kiên; **Thanh Hóa:** Đàm Triệu Đạt, 9A, THCS Hợp Thành, Triệu Sơn; **Nghệ An:** Võ Văn Công, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Trịnh Ngọc Thuyền, 9D, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** Phan Long Tri Yên, 8H, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa.

VŨ KIM THÙY

★ **Bài T6/357. Chứng minh rằng với mỗi cặp số nguyên dương n và k , số $(\sqrt{n}-1)^k$ được biểu diễn dưới dạng $\sqrt{a_k} - \sqrt{a_k - (n-1)^k}$ với $a_k \in \mathbb{N}^*$.**

Lời giải. Từ công thức khai triển nhị thức Newton, ta có

$$(1 - \sqrt{n})^k = A - B\sqrt{n} \\ (1 + \sqrt{n})^k = A + B\sqrt{n}, \text{ với } A, B \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Từ đó } A^2 - B^2n = (1 - \sqrt{n})^k \cdot (1 + \sqrt{n})^k \\ = ((1 - \sqrt{n})(1 + \sqrt{n}))^k = (-1)^k \cdot (n-1)^k.$$

Có hai trường hợp cần xét, đó là:

• **Trường hợp 1.** k chẵn. Lúc này $A^2 - B^2n = (n-1)^k$, suy ra $B^2n = A^2 - (n-1)^k$. Do đó

$$(\sqrt{n}-1)^k = A - B\sqrt{n} = \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2n} \\ = \sqrt{A^2} - \sqrt{A^2 - (n-1)^k}.$$

Trong trường hợp này, khẳng định ở đầu bài được chứng minh, nếu ta chọn $a_k = A^2 \in \mathbb{N}^*$.

• **Trường hợp 2.** k lẻ. Khi đó

$$A^2 - B^2n = -(n-1)^k, \text{ suy ra } A^2 = B^2n - (n-1)^k.$$

$$\text{Vậy } (\sqrt{n}-1)^k = -(1 - \sqrt{n})^k = B\sqrt{n} - A \\ = \sqrt{B^2n} - \sqrt{A^2} = \sqrt{B^2n} - \sqrt{B^2n - (n-1)^k}.$$

Trong trường hợp này, khẳng định ở đầu bài được chứng minh, nếu chọn $a_k = B^2n \in \mathbb{N}^*$.

Tóm lại: Từ hai trường hợp trên ta thấy số $(\sqrt{n}-1)^k$ luôn được biểu diễn dưới dạng

$$\sqrt{a_k} - \sqrt{a_k - (n-1)^k}, \text{ với } a_k \in \mathbb{N}^*. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Bạn Nguyễn Đức Công, 10A1, THPT Đô Lương I, **Nghệ An** đã chỉ ra bài T6/357 là trường hợp riêng của bài toán 5, trang 31 trong cuốn sách *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ*, Quyển 2 với nội dung như sau:

Cho a, k là các số nguyên dương. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n bất kì luôn tồn tại số tự nhiên m sao cho $(\sqrt{a+k} - \sqrt{a})^n = \sqrt{m-k^n} - \sqrt{m}$.

Cho $a = 1, k = n - 1, n = k, m + k^n = a_k$, ta có bài T6/357.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Thị Thanh Hoa, 11A1 Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Phan Quốc Khánh, 9C, THCS Tam Dương, Tam Dương, Nguyễn Huy Hoàng, Mạc Thế Trường, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Đỗ Thị Tuyết, 10A6 chuyên Văn, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Phòng:** Trần Hoàng Bá, 11 Toán, THPT NK Trần Phú; **Bắc Ninh:** Nguyễn Minh Hằng, 11A0, THPT Yên Phong I, Yên Phong; **Hòa Bình:** Vũ Việt Dũng, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, TP. Hòa Bình; **Nghệ An:** Thân Trọng Đức, Vũ Thanh Thủy, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Hoàng Hải, 11A1, THPT Lê Viết Thuật, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Cẩm Hằng, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh, Võ Tá Sơn, 12A1, THPT Trần Phú, Đức Thọ; **Đà Nẵng:** Nguyễn Như Đức Trung, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Trần Quốc Thuận, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Dương Văn An, 11A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa, Đinh Ngọc Thái, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

HỒ QUANG VINH

★ Bài T7/357. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq 5 \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Kí hiệu $f(A, B, C)$

$$= 3\sqrt{3} + 2\sin A \sin B \sin C - 10\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Bất đẳng thức (BĐT) (1) tương đương với
BĐT $f(A, B, C) \geq 0$ (2)

Do vai trò của A, B, C là như nhau trong BĐT (1), nên không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $C \leq \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(A, B, C) - f\left(\frac{A+B}{2}, \frac{A+B}{2}, C\right) &= \left(2\sin A \sin B - 2\sin^2 \frac{A+B}{2}\right) \sin C \\ &\quad - 5\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 2\cos^2 \frac{A+B}{2}\right) \cos\frac{C}{2} \\ &= (\cos(A-B) - \cos(A+B) + \cos(A+B) - 1) \times \\ &\quad \times 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} - \\ &\quad - 5\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A+B}{2} - 1\right) \cos\frac{C}{2} \\ &= \cos\frac{C}{2} \left(4\left(\cos^2 \frac{A-B}{2} - 1\right) \sin\frac{C}{2} - 5\left(\cos\frac{A-B}{2} - 1\right)\right) \\ &= \cos\frac{C}{2} \left(\cos\frac{A-B}{2} - 1\right) \times \\ &\quad \times \left(4\left(\cos\frac{A-B}{2} + 1\right) \sin\frac{C}{2} - 5\right) \quad (3) \end{aligned}$$

Chú ý $0 < C \leq \frac{\pi}{3}$, suy ra

$$4\left(\cos\frac{A-B}{2} + 1\right) \sin\frac{C}{2} \leq 4.2.\sin\frac{\pi}{6} = 4 < 5.$$

Do đó từ (3) suy ra

$$f(A, B, C) \geq f\left(\frac{A+B}{2}, \frac{A+B}{2}, C\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B$ (4)

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $f\left(\frac{A+B}{2}, \frac{A+B}{2}, C\right) \geq 0$.

Đặt $x = \sin\frac{C}{2}$. Vì $0 < C \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f\left(\frac{A+B}{2}, \frac{A+B}{2}, C\right) &= 3\sqrt{3} + 2\sin^2 \frac{A+B}{2} \sin C - 10\cos^2 \frac{A+B}{2} \cos\frac{C}{2} \\ &= 3\sqrt{3} + 2\cos^2 \frac{C}{2} \cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} - 5\left(\cos\frac{A+B}{2} + 1\right) \cos\frac{C}{2} \\ &= 3\sqrt{3} + \sqrt{1-x^2} \cdot (4x(1-x^2) - 5(x+1)) \\ &= 3\sqrt{3} - g(x) \quad (5) \end{aligned}$$

trong đó $g(x) = \sqrt{1-x^2} (4x^3 + x + 5)$.

Lại chú ý $\sqrt{1-x^2} \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned} &= (1-x^2)(12x^2+1) - x(4x^3+x+5) \\ &= -16x^4 + 10x^2 - 5x + 1 \\ &= (10x^2 - 5x) + (1 - (2x)^4) \\ &= (2x-1)(5x-1-2x-4x^2-8x^3) \\ &= (2x-1)(-x-(2x-1)^2-8x^3) > 0 \end{aligned}$$

với mọi $0 < x < \frac{1}{2}$.

Như vậy hàm số $g(x)$ với $0 < x \leq \frac{1}{2}$ đồng biến

thực sự. Bởi vậy với mọi $0 < x \leq \frac{1}{2}$, ta có

$$g(x) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \cdot 6 = 3\sqrt{3}.$$

Do đó theo (5) thì

$$f\left(\frac{A+B}{2}, \frac{A+B}{2}, C\right) = 3\sqrt{3} - g(x) \geq 0.$$

Kết hợp với (4) ta có $f(A, B, C) \geq 0$, tức là BĐT (1) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B$ và $x = \frac{1}{2}$, tức là $A = B$ và $C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán BĐT tam giác lượng hay, khá phức tạp. Trong các bạn gửi lời giải tới tòa soạn có rất nhiều bạn giải không đúng. Ví dụ: có

không ít bạn khẳng định $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq \frac{1}{8}$!

2) Cho đến bây giờ vẫn chưa có lời giải thuần túy lượng giác cho BĐT (1). Một câu hỏi nữa vẫn còn chưa có lời giải: Liệu $k = 8$ có phải là số thực lớn nhất sao cho

$$\frac{3\sqrt{3}}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + k \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq 4 + \frac{k}{8}$$

đúng với mọi tam giác ABC hay không?

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Nguyễn Minh Hằng, 11A0, THPT Yên Phong I; **Hà Nội:** Trịnh Ngọc Dương, 11A1, PTCTT, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Hoàng Hải, Nguyễn Huy Hoàng, Trần Quang Sự, 10A1, THPT chuyên; **Hải Dương:** Đỗ Đức Tài, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phạm Thị Hải Yến, 11T, THPT Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Kiên Giang:** Vũ Đại Nghĩa, 10T, THPT chuyên Huỳnh Mẫn, TP. Rạch Giá.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T8/357.** Cho dãy (x_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) được xác định như sau:

x_0, x_1, x_2 là các số dương cho trước;

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

Lời giải. (Theo bạn Bùi Tiến Mạnh, 11A1, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** và đa số các bạn)

Xét các dãy số (a_n) và (b_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = \max\{x_0, x_1, x_2, 9\} \\ a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\text{và } \begin{cases} b_0 = \min\{x_0, x_1, x_2, 9\} \\ b_{n+1} = 3\sqrt{b_n}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ta thấy dãy (a_n) là dãy giảm dần về 9, còn dãy (b_n) tăng dần về 9. Suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 9 \quad (1)$$

Ta chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\begin{cases} b_n \leq \min\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \\ a_n \geq \max\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Thật vậy, với $n = 0$ thì (2) hiển nhiên đúng. Giả sử (2) đúng với $n = k \in \mathbb{N}$. Khi đó với $n = k + 1$ ta có

$$\begin{aligned} b_n &\leq b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} \leq x_{3k+3} = \sqrt{x_{3k+2}} + \sqrt{x_{3k+1}} + \sqrt{x_{3k}} \\ &\leq 3\sqrt{a_n} = a_{n+1} \leq a_n, \\ b_n &\leq b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} \leq x_{3k+4} = \sqrt{x_{3k+3}} + \sqrt{x_{3k+2}} + \sqrt{x_{3k+1}} \\ &\leq 3\sqrt{a_n} = a_{n+1} \leq a_n, \\ b_n &\leq b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} \leq x_{3k+5} = \sqrt{x_{3k+4}} + \sqrt{x_{3k+3}} + \sqrt{x_{3k+2}} \\ &\leq 3\sqrt{a_n} = a_{n+1}. \end{aligned}$$

Vậy (2) cũng đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, (2) đúng với mọi n tự nhiên.

Từ (1) và (2), theo định lý kẹp ta có

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 9, \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 9. \quad \square \end{aligned}$$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là một bài toán về giới hạn của dãy số sinh bởi hàm số sơ cấp và ứng dụng nguyên lý kẹp, thuộc dạng không quen thuộc ở bậc phổ thông nên có ít bạn tham gia giải. Đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên. Một số bạn còn mở rộng bài toán theo các hướng khác nhau.

2) Ngoài bạn **Bùi Tiến Mạnh**, các bạn sau đây có lời giải đúng:

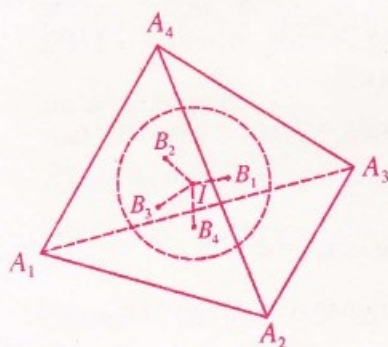
Hà Tây: Nguyễn Văn Trung, 11A2, THPT Bình Minh, Đan Phượng, Nguyễn Bao Sách, 10T, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hòa Bình:** Vũ Việt Dũng, 12T, THPT chuyên Hòa Bình; **Thanh Hóa:** Lê

Duy Toàn, Trịnh Quang Thanh, 10T, THPT Lam Sơn; Thừa Thiên – Huế: Phan Thanh Dương, 11T, THPT Quốc học Huế; Bà Rịa – Vũng Tàu: Dương Văn An, 11A1, THPT Châu Thành; Bình Định: Huỳnh Chí Hiếu, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Võ Xuân Thanh, 12A6, THPT số 2 Tuy Phước.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T9/357.** Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Mặt cầu tâm I , bán kính r nội tiếp tứ diện tiếp xúc với các mặt đối diện các đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4 của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ theo thứ tự tại B_1, B_2, B_3, B_4 . Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 là độ dài các đường cao tương ứng hạ từ A_1, A_2, A_3, A_4 của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian, ta đều có

$$\frac{MB_1^2}{h_1} + \frac{MB_2^2}{h_2} + \frac{MB_3^2}{h_3} + \frac{MB_4^2}{h_4} \geq r \quad (*)$$



Lời giải. (Dựa theo Vũ Việt Dũng, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình).

Kí hiệu V là thể tích tứ diện $A_1A_2A_3A_4$; S_i

là diện tích mặt $A_jA_kA_l$ đối diện đỉnh A_i của tứ diện ($\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$), và $\sum_{i=1}^4 S_i = S$ là diện tích toàn phần của tứ diện.

Thế thì ta có $3V = S_i h_i$, ($i = 1, 2, 3, 4$) (1)

Ngoài ra, lại vì $IB_i = r$ ($i = 1, 2, 3, 4$) nên theo định lí "con nhím", ta có đẳng thức vector sau đây:

$$S_1 \cdot \overrightarrow{IB_1} + S_2 \cdot \overrightarrow{IB_2} + S_3 \cdot \overrightarrow{IB_3} + S_4 \cdot \overrightarrow{IB_4} = \vec{0} \quad (2)$$

Bây giờ đặt f là vế trái của BĐT (*) cần chứng minh, nghĩa là $f = \sum_{i=1}^4 \frac{MB_i^2}{h_i}$.

Từ (1) ta được

$$f = \frac{1}{3V} (S_1 \cdot MB_1^2 + S_2 \cdot MB_2^2 + S_3 \cdot MB_3^2 + S_4 \cdot MB_4^2), (\forall M) \quad (3)$$

$$\text{trong đó} \quad 3V = Sr \quad (4)$$

Mặt khác, lại có

$$MB_i^2 = \overrightarrow{MB_i}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB_i})^2 = MI^2 + r^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB_i}; \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5)$$

Sau cùng, thay MB_i^2 bởi vế phải của (5) vào (3) rồi sử dụng (2) và (4) ta được

$$f = \frac{1}{3V} S(r^2 + MI^2) = r + \frac{MI^2}{r} \quad (\forall M)$$

Đến đây, ta được kết quả (BĐT (*)) cần tìm:

$$f = r + \frac{MI^2}{r} \geq r \quad (*)$$

Đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi $MI^2 = 0$, tức là khi và chỉ khi điểm M trùng với tâm I mặt cầu nội tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn đều sử dụng công cụ vector, trong đó có định lí "con nhím" trong việc giải bài toán này. Tuy nhiên, các bạn không biết sử dụng hệ thức (4) về thể tích của tứ diện liên quan đến diện tích toàn phần S và bán kính mặt cầu nội tiếp nên phải viện đến hệ thức $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r}$ là hệ quả trực tiếp của hai công thức (1) và (4) về thể tích của tứ diện.

2) Một số ít bạn không sử dụng vector thì cần đến BĐT Cauchy–Bunyakovski–Schwarz, tuy nhiên cũng cần đến BĐT sau về thể tích:

$$\sum v(MA_jA_kA_l) \geq v(A_1A_2A_3A_4) = V.$$

nhưng không chứng minh (xem như hiển nhiên đúng). Đó là BĐT

$$\left(\sum_{i=1}^4 \frac{MB_i^2}{h_i} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{h_i} \right) \geq \left(\sum_{i=1}^4 \frac{MB_i}{h_i} \right)^2.$$

Đáng tiếc trong số các bạn cho lời giải theo hướng này có một bạn lại ngộ nhận rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi "tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là đều và M là tâm của nó"(!).

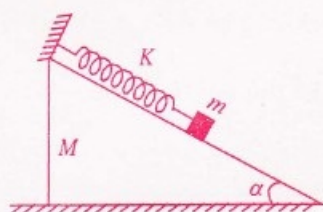
3) Ngoài bạn Vũ Việt Dũng, các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn gàng hơn cả:

Hải Dương: Nguyễn Ngọc Uyển, 12A3, THPT Phúc Thành, Kinh Môn, **Trần Văn Hạnh**, 10A5, THPT Ninh Giang; **Hải Phòng:** Trần Hoàng Bá, 11 Toán,

THPT NK Trần Phú; Nghệ An: Chu Quang Thắng, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; Đà Nẵng: Nguyễn Như Đức Trung, 11A1, Nguyễn Như Quốc Trung, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; Đắk Lắk: Nguyễn Đình Quốc Bảo, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du; Tiền Giang: Nguyễn Cao Cường, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; Bà Rịa - Vũng Tàu: Đinh Ngọc Thái, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

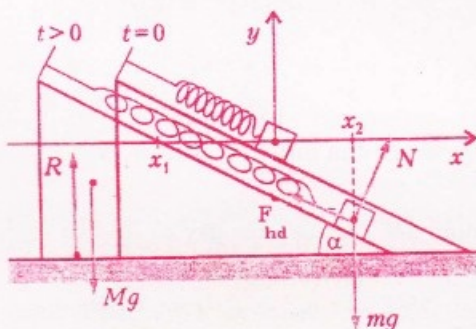
NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

★ Bài L1/357. Trên một mặt phẳng nằm ngang có một cái nêm, góc nhọn ở đỉnh là α . Trên mặt phẳng nghiêng của nêm có một vật gắn với lò xo có độ cứng k và đầu kia của lò xo gắn chặt vào nêm (như hình vẽ). Khối



lượng của nêm là M , khối lượng của vật là m . Hãy tính chu kỳ dao động nhỏ của toàn hệ thống, bỏ qua mọi ma sát.

Lời giải.



Các ngoại lực tác dụng lên hệ nêm và vật chỉ hướng theo phương thẳng đứng. Do đó động lượng theo phương ngang của hệ được bảo toàn, nghĩa là $Mv_1 + mv_2 = 0$.

Lấy tích phân theo thời gian, ta được

$$Mx_1 + mx_2 = 0$$

Gọi ΔL là độ giãn của lò xo ở thời điểm t , ta có

$$\Delta L = \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha} = \frac{x_2}{\cos \alpha} \left(1 + \frac{m}{M} \right).$$

Độ dịch chuyển của vật theo phương thẳng đứng:

$$y_2 = -x_2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) \tan \alpha$$

$$\text{Suy ra } a_{2y} = -a_{2x} \left(1 + \frac{m}{M} \right) \tan \alpha.$$

Có ba lực tác dụng lên vật là lực đàn hồi, trọng lực và phản lực (xem hình vẽ). Theo định luật II Newton, ta có:

$$m\vec{a}_2 = \vec{F}_{dh} + m\vec{g} + \vec{N}.$$

Chiếu phương trình trên lên các trục tọa độ ta được

$$ma_{2x} = -k\Delta L \cos \alpha + N \sin \alpha$$

$$ma_{2y} = k\Delta L \sin \alpha - mg + N \cos \alpha$$

Sau khi đã khử N và chú ý đến hai biểu thức của ΔL và a_{2y} ta được phương trình

$$m \left(\cos^2 \alpha + \left(1 + \frac{m}{M} \right) \sin^2 \alpha \right) a_{2x}$$

$$= -k \left(1 + \frac{m}{M} \right) x_2 + mg \tan \alpha.$$

Đây chính là phương trình mô tả dao động điều hoà của vật đối với VTCB được xác định bởi hệ thức $k\Delta L_0 = mg \sin \alpha$.

Đặt biến số mới $X_2 = x_2 - \frac{\Delta L_0}{\cos \alpha}$, phương trình trên được đưa về dạng $X_2'' = -\omega^2 X_2$

trong đó

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \frac{1 + \frac{m}{M}}{\cos^2 \alpha + \left(1 + \frac{m}{M} \right) \sin^2 \alpha}}$$

Chu kỳ dao động của hệ là

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k} \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \left(1 + \frac{m}{M} \right) \sin^2 \alpha}{1 + \frac{m}{M}}}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng

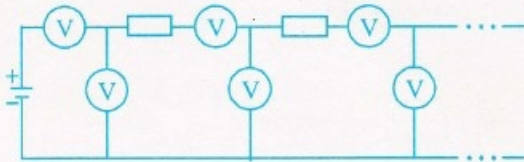
Vĩnh Phúc: Hoàng Mạnh Thắng, Tạ Đức Mạnh, 11A3, Lỗ Tắt Thắng 10A3, THPT chuyên; **Bắc Ninh:** Trần Việt Long Nguyễn Văn Bảo, 11 Lí, THPT chuyên; **Hưng Yên:** Phạm Đức Linh, 11 Lí, THPT chuyên; **Thanh Hóa:** Mai Minh Tùng, 12B2, THPT Triệu Sơn I, Lê Bá Sơn, 11F THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Sơn, Trần Văn Thắng, Trần Văn Giai, Nguyễn Hồ Như Ý, A3 K34, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Tiền Giang:** Trương Mai Thanh Tâm, 11 Lí, THPT chuyên; **Bình Phước:** Nguyễn Thành Hưng, 12 Toán, THPT chuyên Quang Trung.

NGUYỄN XUÂN QUANG

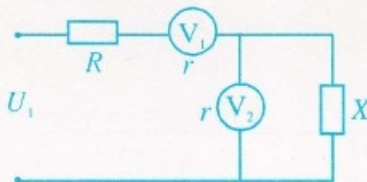
★ **Bài L2/357.** Một mạch điện gồm một số rất lớn ô mạng, mỗi ô gồm một điện trở và hai vôn kế (như hình vẽ). Các vôn kế giống nhau, các điện trở giống nhau. Mạch điện được mắc vào nguồn điện. Cặp vôn kế đầu tiên chỉ 6V và 4V. Hãy tìm

a) Số chỉ của cặp vôn kế thứ hai.

b) Tổng số chỉ của mọi vôn kế.



Lời giải. Gọi R và r tương ứng là điện trở của chiếc điện trở và của vôn kế, X là điện trở tương đương của phần mạch điện còn lại (hình dưới).



Do số ô mạng là rất lớn nên

$$\frac{rX}{r+X} + r + R = X \quad (1)$$

Mặt khác ta có

$$I_1 = I_2 + I_X; \quad \frac{6}{r} = \frac{4}{R} + \frac{4}{X} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $R = \frac{r}{3}$.

Dễ dàng thấy rằng $U_R = 2V$;

$$U_1 = U_R + U_{V1} + U_{V2} = 2V + 6V + 4V = 12V.$$

Kết quả cho thấy

$$U_1 = 12V; \quad U_{V1} = \frac{1}{2}U_1; \quad U_{V2} = \frac{1}{3}U_1$$

Suy ra $U_2 = U_{V2} = 4V$; $U_{V3} = \frac{1}{2}U_2 = 2V$;

$$U_{V4} = \frac{1}{3}U_2 = \frac{4}{3}V.$$

Số chỉ của cặp vôn kế thứ hai là 2V và $\frac{4}{3}V$.

$$b) \sum U_V = (6+4) + \left(2+\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right) + \dots$$

$$= 10 + \frac{10}{3} + \frac{10}{3^2} + \dots + \frac{10}{3^n} + \dots$$

$$= 10 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots \right) = 15V$$

Tổng số chỉ của mọi vôn kế là 15V. □

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và tốt:

Thanh Hoá: Lê Bá Sơn, 11F, THPT Lam Sơn, Nguyễn Thanh Tùng, 11A11, THPT Lương Đức Bằng, Đào Xuân Nam, 11A2, THPT Quảng Xương III, Lê Trung Dũng, 11A1, THPT Đông Sơn I; **Nghệ An:** Đinh Viết Thắng, 11A1, THPT Diễn Châu IV, Trần Văn Giai, Trần Văn Thắng, A3K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, Phan Đình Thái, lớp GK43, THPT Nghĩa Đàn; **Hưng Yên:** Phạm Đức Linh, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** Lỗ Tắt Thắng, Nguyễn Trung Quân, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** Dương Văn An, 11A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa; **Hải Phòng:** Trần Hoàng Bá, Lý Trần Đức Anh, THPT Năng khiếu Trần Phú; **Hà Tĩnh:** Trần Thế Minh, K33A1, THPT Nguyễn Huệ; **Bắc Ninh:** Trần Việt Long, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nam:** Đinh Hoàng Thanh, 10A2, THPT chuyên Hà Nam.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Nhiều cách giải cho một bài toán

Năm cách giải CHO MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

PHẠM BẢO

(32 Nguyễn Khuyến, Hà Nội)

Trong chương trình hình học Trung học cơ sở có định lý: "Trong một tam giác cân, đường phân giác của hai góc đáy bằng nhau". Chứng minh định lý này quá dễ. Tuy nhiên định lý đảo: "Nếu một tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau thì tam giác đó cân" thì không phải vậy. Hơn nữa nếu đào sâu suy nghĩ vẫn có thể phát hiện ra nhiều cách chứng minh cho định lý đảo này.

Cách thứ nhất. Tam giác ABC có hai đường phân giác trong BE và CE bằng nhau, $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$; $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (h. 1).

Từ D kẻ DF song song và bằng BE , ta có $\triangle CDF$ cân ($CD = DF$) nên $\widehat{DFC} = \widehat{DCF}$ ($\widehat{F}_2 + \widehat{F}_1 = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_3$).

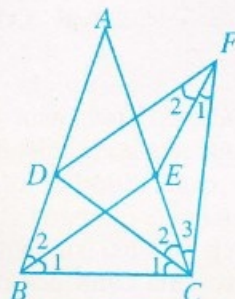
Tứ giác $BDFE$ là hình bình hành nên $\widehat{B}_2 = \widehat{F}_2$, $BD = EF$.

Giả sử $\widehat{B}_2 \neq \widehat{C}_2$, không giảm tổng quát ta coi

$\widehat{B}_2 > \widehat{C}_2$ thì $\widehat{F}_2 > \widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{F}_1 < \widehat{C}_3$ lúc đó $EF > CE$ hay $BD > CE$.

$\triangle BDC$ và $\triangle BEC$ có cạnh BC chung, $DC = BE$, $BD > CE$ nên $\widehat{C}_1 > \widehat{B}_1$ mâu thuẫn với $\widehat{B}_2 > \widehat{C}_2$. Vậy $\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2$ nên $\widehat{B} = \widehat{C}$ tức là $\triangle ABC$ cân. $\square$

Cách thứ hai. Xét $\triangle BDC$ và $\triangle BEC$ có BC chung; $CD = BE$. So sánh cạnh BD và CE . Đặt $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$ (h. 1).



Hình 1

Theo tính chất đường phân giác trong $\frac{BD}{DA} = \frac{a}{b}$

$$\text{nên } \frac{BD}{DA+BD} = \frac{a}{a+b}.$$

$$\text{Suy ra } BD = \frac{ac}{a+b}. \text{ Tương tự } CE = \frac{ab}{a+c}.$$

Nếu $BD > CE$ thì

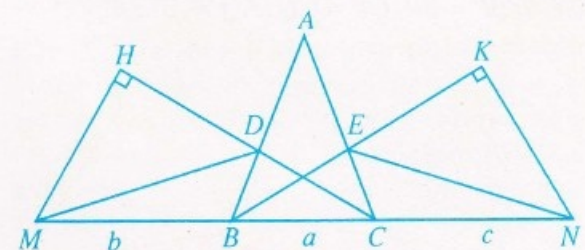
$$\frac{ac}{a+b} > \frac{ab}{a+c} \Rightarrow c(a+c) > b(a+b), \text{ hay}$$

$$a(c-b) + c^2 - b^2 > 0 \Rightarrow (c-b)(a+b+c) > 0$$

nên $c > b$.

Tương tự nếu $BD < CE$ thì $c < b$. Do đó $BD = CE \Leftrightarrow c = b$. Vậy $\triangle ABC$ cân.

Cách thứ ba. Tạo hai tam giác MDC và NBE có diện tích bằng diện tích tam giác ABC bằng cách trên cạnh BC kéo dài về phía B lấy đoạn $BM = b$, về phía C lấy đoạn $CN = c$ (h. 2).



Hình 2

Khi đó D cách đều hai cạnh BC và AC nên $S_{ADC} = S_{DMB}$. Từ đó suy ra $S_{DMC} = S_{ABC}$, tương tự

$$S_{EBN} = S_{ABC}, \text{ do đó } S_{DMC} = S_{EBN}; S_{DMC} = \frac{1}{2} CD.MH;$$

$$S_{EBN} = \frac{1}{2} BE.NK; CE = BE \text{ nên } BH = NK.$$

Mặt khác

$$MH = (a+b) \sin \frac{C}{2}; NK = (a+c) \sin \frac{B}{2}.$$

$$\text{Suy ra } (a+b) \sin \frac{C}{2} = (a+c) \sin \frac{B}{2} \text{ nên}$$

$$a \left(\sin \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \right) + b \sin \frac{C}{2} - c \sin \frac{B}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Thay } b = 2R \sin B = 4R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2},$$

$$c = 2R \sin C = 4R \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \text{ vào (1)}$$

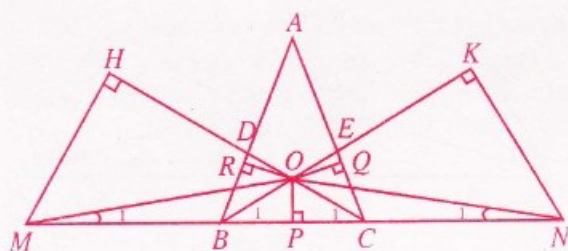
ta có

$$a \left(\sin \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \right) + 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) = 0.$$

Vì $4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 0$, còn $\left(\sin \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \right)$ và $\left(\cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right)$ là hai đại lượng cùng dấu

nên đẳng thức trên chỉ đúng khi $\frac{B}{2} = \frac{C}{2}$ tức là ΔABC cân. $\square$

Cách thứ tư. Gọi O là giao của BE và CD , tức O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC . P, Q, R lần lượt là hình chiếu của O trên BC, CA, AB . Ta có $BP = BR; CP = CQ; AQ = AR$. (h. 3).



Hình 3

Mặt khác $PM = PB + BM = PB + CQ + QA$;

$$PN = PC + CN = PC + BR + AR.$$

Do đó $PM = PN$, $OP \perp MN$, ΔMON cân, $OM = ON$, $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$, $\Delta MHO = \Delta NOK$ (vì $OM = ON$; $MH = NK$ theo chứng minh ở cách trên), Suy ra $\widehat{HOM} = \widehat{KON}$, $\widehat{HOM} = \widehat{C}_1 + \widehat{M}_1$, $\widehat{KON} = \widehat{B}_1 + \widehat{N}_1$ nên $\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1$. Vậy ΔABC cân. $\square$

Cách thứ năm. Dùng công thức tính diện tích

$$\text{tam giác: } S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad S_{ACD} = \frac{1}{2} b \cdot CD \sin \frac{C}{2},$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} a \cdot CD \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{ta tính được } CD = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b}$$

$$\text{tương tự } BE = \frac{2ac \cos \frac{B}{2}}{a+c}$$

$$\text{nên } BE = CD$$

$$\Leftrightarrow \frac{2ac \cos \frac{B}{2}}{a+c} = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow c(a+b) \cos \frac{B}{2} - b(a+c) \cos \frac{C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow bc \left(\cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) + a \left(c \cos \frac{B}{2} - b \cos \frac{C}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow bc \left(\cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) +$$

$$+ 2aR \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left(\sin \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \right) = 0.$$

Lập luận tương tự như cách thứ hai ta có $\frac{B}{2} = \frac{C}{2}$ và do vậy ΔABC cân.

Nhận xét. Trong năm cách giải trên ngoài việc sử dụng chung giả thiết đường phân giác $BE = CD$ thì cách thứ nhất sử dụng định nghĩa đường phân giác chia góc thành hai phần bằng nhau, cách thứ hai sử dụng tính chất đường phân giác chia cạnh đối diện thành hai phần tỉ lệ với cạnh bên; cách thứ ba sử dụng tính chất một điểm trên đường phân giác cách đều hai cạnh của góc (để tạo những tam giác có diện tích bằng nhau); cách thứ tư sử dụng triệt để tính chất cách đều hai cạnh để nhận ra điểm O là tâm đường tròn nội tiếp; cách thứ năm sử dụng công thức diện tích tam giác để khai thác tính chất chia góc thành hai phần bằng nhau. Tóm lại từ một giả thiết đơn giản Độ dài hai đường phân giác trong của một tam giác bằng nhau ta có nhiều cách khai thác khác nhau để từ đó sáng tạo được nhiều cách giải khác nhau.

Nhân ngày Báo chí Việt Nam,
Tập chí Toán học và Tuổi trẻ
nhận được thư chúc mừng,
lẵng hoa và quà tặng của Nhà xuất bản Giáo
dục và các đơn vị bạn. Xin trân trọng cảm ơn
thịnh tình của các quý cơ quan. Cũng nhân dịp
này, ông Nguyễn Minh Khang, Phó Tổng Giám
đốc NXB Giáo dục đã gửi tặng THPT một bài
thơ. Xin giới thiệu cùng bạn đọc.

*Tập chí Toán em viết cho tuổi trẻ
Qua tuổi trẻ rồi anh có được đọc không
Vấn cos, sin đường thẳng, đường cong
Đùa em vui, tuổi nào không phải học*

*Giàu tri thức làm say mê người đọc
Tuổi học trò mơ tới ước mơ xa
Mơ làm thầy, mơ bác sĩ, kĩ sư...
Những khát vọng cháy rục trời phương đỏ.*

Toán học và Tuổi trẻ

NGUYỄN MINH KHANG
(Tặng tập chí THPT)

*Tập chí Toán chứa nhiều điều mới lạ
Nơi khơi nguồn tri thức bách khoa
Có những điều ấp ủ ước mơ
Theo đường thẳng đường cong vào vũ trụ*

*Có bài toán làm anh lí thú
Say mê tìm lời giải nguồn vui
Tri thức em cập nhật đầy vơi
Cùng anh mở chân trời khoa học.*

*Giúp cho đời thỏa lòng mong ước
Giàu tư duy nghị lực con người
Viết cho tuổi thơ cho cả cuộc đời
Cho cuộc sống muôn màu cùng toán học.*

21.6.2007

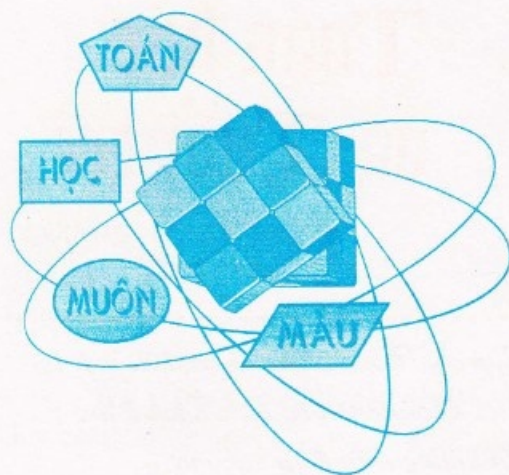
LỄ TRAO GIẢI THƯỞNG CÁC KỊCH BẢN SÂN KHẤU VÀ PHÁT ĐỘNG LIÊN HOAN HỘI DIỄN SÂN KHẤU VỀ NHÀ GIÁO VIỆT NAM

Nhằm tôn vinh những Nhà giáo Việt Nam trong sự nghiệp xây dựng và bảo vệ Tổ quốc; thêm một hình thức giáo dục thông qua nghệ thuật sân khấu, làm phong phú hơn các hoạt động của nhà trường vì trách nhiệm trồng người cho tương lai đất nước, Bộ giáo dục và Đào tạo, Bộ Văn hóa - Thông tin, Công đoàn Giáo dục Việt Nam và Nhà xuất bản Giáo dục đã phối hợp tổ chức Trại chuyển thể 855 trong tổng số 3500 truyện ngắn tham dự cuộc thi Viết truyện ngắn về Nhà giáo Việt Nam sang các hình thức sân khấu.

Ngày 29 tháng 6 năm 2007, tại Hội trường A Bộ Giáo dục và Đào tạo, 31 kịch bản sân khấu đã được trao giải. Nhân buổi lễ trao tặng thưởng này, Ban chỉ đạo đã phát động liên hoan hội diễn sân khấu về Nhà giáo Việt Nam. Mong rằng các đoàn nghệ thuật, các Sở Giáo dục - Đào tạo trong cả nước nhiệt tình hưởng ứng dàn dựng để tham gia hội diễn văn nghệ chào mừng tháng tôn vinh Nhà giáo Việt Nam - tháng 11/2007 sắp tới.

PTBN

TOÁN HỌC
& **Tuổi trẻ** Số 361 (7-2007) **29**



Giải đáp bài:

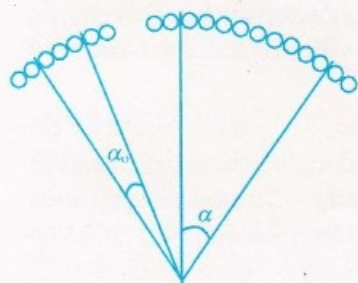
Sắp xếp

2007 đèn ba màu

Đề bài đăng trên THPT số 356 tháng 2.2007 do sơ suất đã in thiếu điều kiện ở giả thiết như dưới đây. Thành thật xin lỗi bạn đọc.

Điều kiện: Sau mỗi lần sắp xếp 2007 đèn ba màu nếu quay theo chiều kim đồng hồ 2007 đèn quanh tâm một góc α nào đó với $0^\circ < \alpha < 36^\circ$ thì lại được sự sắp xếp như thế (*).

Lời giải. Gọi α_0 là góc nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện (*), nếu $360^\circ = \alpha_0 \cdot t + \beta$ với $0^\circ < \alpha_0 < 36^\circ$, t nguyên và $0^\circ < \beta < \alpha_0$ thì góc β cũng thỏa mãn (*), do đó $360^\circ = \alpha_0 \cdot t$. Gọi n là số đèn nằm trong góc α_0 thì $2007 = n \cdot t$ và trong n đèn phải có cả ba màu. Vì $0^\circ < \alpha < 36^\circ$ nên $t > 10$ mà $2007 = 3^2 \cdot 223$, suy ra chỉ có thể $n = 3$ hoặc $n = 9$ (hình vẽ).



Ta chuyển việc xét số cách sắp xếp 2007 đèn ba màu về việc xét số cách sắp xếp dãy n đèn trong một góc α_0 với ít nhất một đèn màu Tím ở đầu trái.

1) Nếu có không quá ba đèn cùng màu liên nhau trong một góc α_0 thì $n < 3 + 3 + 3 = 9$ nên chỉ có thể $n = 3$. Lúc đó chỉ có 2 cách là Tím, Lam, Đỏ và Tím, Đỏ, Lam.

2) Nếu có không quá bốn đèn cùng màu liên nhau trong một góc α_0 và ít nhất một màu có hai đèn thì $2 + 1 + 1 < n < 4 + 4 + 4$ nên chỉ có thể $n = 9$. Xảy ra ba trường hợp dưới đây tương ứng với việc có 1 đèn Tím, 2 đèn Tím và 3 đèn Tím trong dãy 9 đèn.

A. Với 1 đèn Tím ở đầu trái của dãy 9 đèn thì còn 8 vị trí cho đèn màu Lam và màu Đỏ.

A1. Với 4 đèn màu Lam (4 vị trí còn lại là đèn màu Đỏ), thì có 2 trường hợp 4 đèn cùng màu liên tiếp. Vậy có $C_8^4 - 2 = 68$ cách sắp xếp.

A2. Với 3 đèn màu Lam và 5 đèn màu Đỏ thì có 41 cách.

Với 3 đèn màu Đỏ và 5 đèn màu Lam thì có 41 cách.

A3. Với 2 đèn màu Lam và 6 đèn màu Đỏ thì có 10 cách.

Với 2 đèn màu Đỏ và 6 đèn màu Lam thì có 10 cách.

B. Với 2 đèn màu Tím, trong đó 1 đèn Tím ở đầu trái của dãy 9 đèn thì còn 8 vị trí cho 1 đèn Tím và các đèn màu Lam, màu Đỏ.

B1. Với 3 đèn màu Lam và 4 đèn màu Đỏ thì có 20 trường hợp 4 đèn cùng màu liên tiếp. Vậy có $8 \cdot C_7^3 - 20 = 260$ (cách).

B2. Với 2 đèn màu Lam và 5 đèn màu Đỏ thì có 120 cách.

Với 2 đèn màu Đỏ và 5 đèn màu Lam thì có 120 cách.

C. Với 3 đèn màu Tím, trong đó có 1 đèn Tím ở đầu trái của dãy 9 đèn thì còn 8 vị trí cho 2 đèn màu Tím, 3 đèn màu Lam và 3 đèn màu Đỏ. Vậy có $C_8^2 \cdot C_6^3 = 560$ (cách).

Như vậy tổng số cách sắp xếp 2007 đèn ba màu trong trường hợp $n = 9$ là 1490 cách.

(Xem tiếp trang 4)

Về kì thi

OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ

lần thứ 48 tại Việt Nam

Theo tin từ ông Nguyễn Khắc Minh, Trưởng Ban thư kí IMO 2007, IMO 2007 tại Việt Nam do Bộ Giáo dục và Đào tạo chủ trì, phối hợp với Hội Toán học Việt Nam, Viện Toán học - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, trường Đại học Khoa học tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, tổ chức, sẽ diễn ra từ ngày 19.7.2007 đến 31.7.2007.

Đến ngày 10.7.2007 đã có 95 quốc gia và vùng lãnh thổ hoàn tất việc đăng kí nhân sự cử tham dự IMO 2007. Theo đó, hiện có 527 học sinh và 266 cán bộ đã chính thức đăng kí tham dự kì thi.

Ngày 24.7.2007 Lễ Khai mạc sẽ diễn ra tại Trung tâm Hội nghị Quốc gia Mỹ Đình. Học sinh sẽ thi trong hai ngày 25 và 26.7.2007. Ngày 30.7.2007 sẽ diễn ra Lễ Bế mạc và trao giải tại Trung tâm Hội nghị Quốc gia Mỹ Đình. Trong hai ngày 27 và 28.7, học sinh được đi tham quan, du lịch tại tỉnh Quảng Ninh và tỉnh Hà Tây; trong thời gian này, các Trưởng, Phó trưởng đoàn sẽ cùng Ban tổ chức IMO 2007 tiến hành chấm thi. Hiện Ban tổ chức IMO 2007 đã tuyển chọn được gần 60 cán bộ, sinh viên hiện đang công tác và học tập tại các trường Đại học, Viện Toán học, tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, các trường THPT chuyên và năng khiếu trong cả nước tham gia Ban chấm thi IMO 2007. Các cán bộ và sinh viên này đã trải qua hai đợt tập huấn về công tác chấm thi bằng tiếng nước ngoài tại Viện Toán học. Cùng với lực lượng này, sẽ có gần 30 cán bộ, sinh viên những người đã từng đạt giải tại các IMO hiện đang công tác và học tập tại nước ngoài sẽ về tham gia chấm thi.

Để biết thêm các thông tin chi tiết liên quan đến IMO 2007, bạn đọc có thể xem trên trang tin điện tử (website) chính thức của Ban tổ chức IMO 2007 (<http://www.imo2007.edu.vn>).

VŨ NGUYỄN

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T6/361. Let $ABCD$ be a parallelogram. Let M be a point in the plane spanned by the parallelogram $ABCD$ such that $\widehat{MDA} = \widehat{MBA}$. Prove that the two triangles MAB and MCD share a common orthocenter.

T7/361. Let AD , BE , CF be the three bisectors of a triangle ABC ($D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$); Denote by O the circumcenter of this triangle and by R its. Let O_1 , O_2 and O_3 be the circumcenters of the triangles ABD , BCE and ACF respectively. Prove that

$$\frac{3}{2}R \leq OO_1 + OO_2 + OO_3 < 2R.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/361. Let a , b , c be positive real numbers such that $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1$. Find the smallest possible value of $P = [a+b] + [b+c] + [c+a]$, where $[x]$ is the largest integers which is smaller than x .

T9/361. Find all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that the following equality holds for all $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^3 - y) + 2y(3f^2(x) + y^2) = f(y + f(x)).$$

T10/361. Prove that in any triangle ABC , the following inequality holds

$$-1 < 6\cos A + 3\cos B + 2\cos C < 7.$$

T11/361. Let ABC be a triangle with circumcircle $(O; R)$. Let E be the midpoint of AB and denote by F the point on AC such that $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$. Construct a parallelogram $AEMF$.
 Prove that $MA + MB + MC \leq \sqrt{11(R^2 - OM^2)}$.

Now suppose that $(O; R)$ is fixed. Construct a triangle ABC , inscribed in (O, R) such that

$$MA + MB + MC = \sqrt{11(R^2 - OM^2)}.$$

T12/361. Let $ABCD$ be a tetrahedron whose sides DA , DB and DC are pairwise perpendicular. Denote by x , y , z the angles formed from sides AB , BC and CA respectively. Prove that

$$(2 + \tan^2 x)(2 + \tan^2 y)(2 + \tan^2 z) \geq 64.$$

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 361(7.2007)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.5121607, 04.5121606

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự: 04.5144272

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Toà soạn : ThS. VŨ KIM THỦY

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,
TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,
PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,
TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,
PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. VŨ DUANG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG,
ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools

Phạm Đức Hòe – Từ một bài toán trong sách giáo khoa.

3 Lời giải đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh năm học 2006-2007.

5 Đề thi vào lớp 10, trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2007-2008.

6 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation

Nguyễn Anh Dũng – Ứng dụng sự biến thiên hàm số để giải một số bài toán về hệ phương trình.

8 X hỏi, Y, Z trả lời

9 Bình luận về đề thi tuyển sinh đại học khối A năm 2007.

11 Phương pháp giải toán – Math Problem Solving

Trần Tuyết Thanh – Bài toán định tính về cực trị của hàm số.

13 Bạn có biết? – Do you know?

Nguyễn Văn Thiêm – Phát triển thêm lí thuyết số nguyên tố.

14 Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum

Nguyễn Huy Doan – Một số điểm cần lưu ý khi dạy – học Đại số và Giải tích 11 nâng cao.

16 Đề ra kì này – Problems in This Issue
T1/361, ..., T12/361, L1/361, L2/361.

18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems

Giải các bài của số 357.

27 Nhiều cách giải cho một bài toán

Phạm Bảo – Năm cách giải cho một bài toán hình học.

30 Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics

Bìa 1: Ảnh: Vũ Thanh Hà.

Bìa 3: Toán học vui – Maths Fun.

Bìa 4: Câu lạc bộ – Math Club.

Biên tập : HỒ QUANG VINH. **Mĩ thuật :** MINH THO. **Trĩ sự, Chế bản :** VŨ ANH THŨ, NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330



❁ Câu 4: LÁT QUẢNG TRƯỜNG

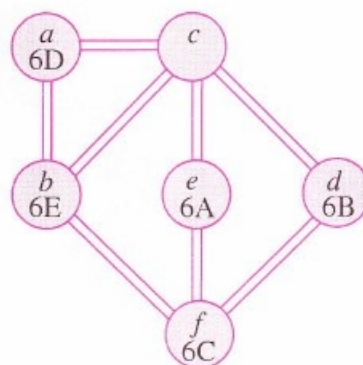
Bạn hãy trình bày cách sắp xếp một loại gạch như hình bên, các viên gạch đều bằng nhau, để lát kín một quảng trường phẳng (không cần mạch vữa) với diện tích có giới hạn tùy ý, tức là nếu một số viên gạch chừa ra ngoài biên thì phải cắt gọt đi.



VÂN KHANH

❁ Câu 5: CHUYỂN LỚP

Các học sinh 6A, 6B, 6C, 6D, 6E đi học ngoại khóa theo phòng bộ môn hiện đang ở các phòng với các đường đi như hình vẽ. Mỗi phòng chỉ đủ cho một lớp. Hãy nêu cách chuyển các lớp 6A, 6B, 6C, 6D, 6E về đúng phòng học của mình theo thứ tự là a, b, c, d, e sao cho số lần chuyển từ phòng này sang phòng khác theo đường đi trên sơ đồ là ít nhất. Bạn có bao nhiêu cách chuyển như vậy?



LÊ BÍCH

❁ Câu 6:



CÁNH
ĐIỀU

Trong ngày hội thả diều, bạn tổ chức muốn dùng dây thép dài 2007cm làm một mô hình cánh diều dạng hình quạt tròn sao cho có diện tích lớn nhất. Bạn hãy giúp bạn tổ chức nhé và cho biết diện tích đó là bao nhiêu mét vuông?

VĨNH LINH

TẠP CHÍ Toán học và Tuổi trẻ GẶP GỠ CÁC GIÁO VIÊN TOÁN 32 TỈNH THÀNH MIỀN BẮC

Từ ngày 2.7.2007 đến 8.7.2007 tại Thị xã Cửa Lò, Nghệ An đã diễn ra Hội nghị tập huấn bồi dưỡng giáo viên về thay sách giáo khoa toán lớp 11 của Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức cho các tỉnh, thành miền Bắc từ Thừa Thiên - Huế trở ra. Ông Lê Quán Tần, Vụ trưởng Vụ Giáo dục Trung học đã khai mạc Hội nghị. Nhân dịp này tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã tổ chức cuộc gặp giữa THPT và các chuyên viên của Bộ Giáo dục và Đào tạo, các thầy là báo cáo viên của Bộ và các thầy, cô giáo toán đại diện của 32 tỉnh, thành và một số trường ĐHSPT để giới thiệu những định hướng đổi mới của Tạp chí nhằm đáp ứng những yêu cầu mới của độc giả.

VKT



Giải đáp ô chữ

ĐỌC BÁO trong hè

(Đề đăng trên THPT tháng 5/2007)



Nhận xét. Các bạn rất hào hứng với ô chữ này.

Các bạn **Đặng Duy Chiến**, 9A4, THCS Lâm Thao; **Phú Thọ**; **Lê Quý Dương**, 10, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; **Nguyễn Kiều Nga**, 11A2, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Nguyễn Thị Hồng Tươi**, 11A5, THPT chuyên Hà Nam; **Nguyễn Hải Yến**, 11B, THPT chuyên **Tuyên Quang**; **Lê Trung Văn**, THPT Vạn Tường, **Quảng Ngãi** được nhận quà của CLB.

- 1) Ngày lập hạ là 6 THÁNG 5
- 2) Tháng mà THPT ra đồng thời hai tờ báo tiếng Việt và tiếng Anh là THÁNG SÁU NÀY.
- 3) Cuộc thi sẽ có trong hè là cuộc thi TOÁN HỌC VUI.
- 4) Đề ra trong cuộc thi này sẽ KHÔNG KHÓ.
- 5) Lần đầu tiên hè này THPT sẽ có một số bằng TIẾNG ANH.
- 6) Nơi ta có thể đặt mua THPT là BUU ĐIỆN.
- 7) Vừa chỉ một tháng, vừa có nghĩa thời gian nói chung là THÁNG NĂM.
- 8) Tháng công bố kết quả cuộc thi Toán học vui là THÁNG MUỐI.

Cột hàng dọc là tháng năm. Tháng Năm là tháng mà những hàng phượng vĩ nở đỏ thắm, báo hiệu hè về, các bạn nhỏ nghỉ học và các bạn lớp 12 chuẩn bị cho kì thi kết thúc những tháng năm học hành vất vả.

Nhiều bạn còn kể tháng Năm có ngày Quốc tế Lao động, ngày Chiến thắng Điện Biên Phủ, Lễ Phật đản, ngày bầu cử Quốc hội...

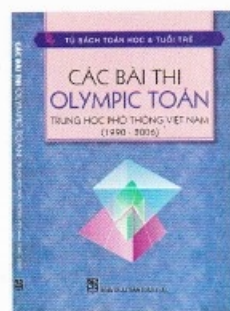
ĐỖ SONG BÌNH

THPT ĐÃ PHÁT HÀNH CUỐN SÁCH

Các bài thi Olympic Toán THPT Việt Nam (1990-2006)

Sách gồm các đề thi và hướng dẫn giải các bài toán thi tuyển chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia THPT (Bảng A và bảng B) từ 1990-2006. Sách cũng đăng các đề thi chọn đội tuyển Toán Quốc gia Việt Nam dự thi Toán Quốc tế từ 1990 đến 2006. Trong sách còn giới thiệu danh sách và thành tích của đoàn Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế từ lần đầu dự thi (năm 1974) đến nay. Sách dày 284 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bán lẻ 39.500 đồng.

Địa chỉ liên hệ: TAP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VỐ, HÀ NỘI
ĐT/FAX: 04.5144272; Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn



ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT63M7

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2007

Giá : 5000 đồng

Năm nghìn đồng