



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

6 2007
Số 360

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 44

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

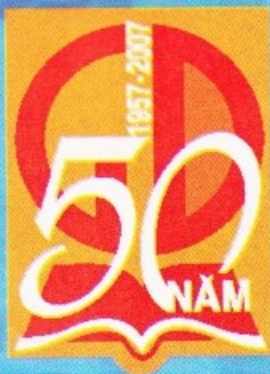
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04)5121607, (04)5121606; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc_tuoiitre



Chào mừng
**KÌ THI OLYMPIC
TOÁN QUỐC TẾ
LẦN THỨ 48
TẠI VIỆT NAM**



**Nhà xuất bản Giáo dục
(1.6.1957 - 1.6.2007)**



HÃY TẠO NÊN SỰ KHÁC BIỆT VỚI NEXTGEN AWARDS VIỆT NAM 2007



Cyber Century Forum



Cuộc thi
"Ý tưởng sử dụng điện thoại di động nhằm
cải thiện **SỨC KHỎE**, duy trì **MÔI TRƯỜNG**, phổ cập **GIÁO DỤC**
NextGen Awards Việt Nam 2007, cuộc thi quốc tế lần đầu tiên được tổ chức trên thế giới.
Dành cho các bạn trẻ đầy sáng tạo tuổi từ 13 đến 20
(có ngày sinh thuộc khoảng 01/01/1987 đến 31/12/1994)

Góc Tư vấn miễn phí: Blog: <http://360.yahoo.com/cuocthinxnextgen>
Đường dây nóng: 04 7722 729, máy lẻ 116 (gặp Ms. Quỳnh Anh)

Nhà tài trợ

EVMS

MobiFone
mọi lúc mọi nơi



Giải một số phương trình vô tỉ có dạng đặc biệt

NGUYỄN PHƯỚC
(GV THCS Lê Hồng Phong,
Thừa Thiên - Huế)

Trong các kì thi học sinh giỏi cấp THCS hoặc tuyển sinh vào các trường THPT ta thường gặp các dạng phương trình vô tỉ. Ngoài một số cách giải đã được trình bày ở sách giáo khoa, chúng tôi xin được tập hợp cách giải một số phương trình vô tỉ có dạng đặc biệt để giới thiệu cùng bạn đọc.

1. Phương trình dạng

$$\alpha \cdot P(x) + \beta \cdot Q(x) + \gamma \cdot \sqrt{P(x) \cdot Q(x)} = 0 \quad (\alpha\beta\gamma \neq 0)$$

a) Cách giải

* Nếu $P(x) = 0$ thì $Q(x) = 0$. Dẫn đến giải hệ

$$\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0. \end{cases}$$

* Trường hợp $P(x) \neq 0$, ta chia hai vế của PT

$$\text{cho } P(x) \text{ được } \alpha + \beta \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} + \gamma \cdot \sqrt{\frac{Q(x)}{P(x)}} = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{Q(x)}{P(x)}} \quad (t \geq 0)$. Phương trình trở thành $\beta t^2 + \gamma t + \alpha = 0$. Từ đó tìm t , rồi tìm x .

b) Thí dụ 1. Giải phương trình

$$2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8} \quad (1)$$

Lời giải. Biến đổi PT (1) về dạng

$$2(x^2 - 2x + 4) - 2(x + 2) = 3\sqrt{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}.$$

Điều kiện: $x \geq -2$ (vì $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$).

Do $x = -2$ không phải là nghiệm của PT (1) nên chia hai vế cho $x + 2$ ta được

$$\frac{2(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} - 3\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2}} - 2 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2}} \quad (t \geq 0)$ ta có

$$2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ (loại) hoặc } t = 2.$$

Với $t = 2$ thì $\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2}} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{13} \text{ hoặc } x = 3 - \sqrt{13} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy tập nghiệm của PT (1) là $\{3 \pm \sqrt{13}\}$. $\square$

2. Phương trình dạng

$$\alpha(P(x) + Q(x)) + \beta(\sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}) \pm 2\alpha\sqrt{P(x) \cdot Q(x)} + \gamma = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

a) Cách giải. Đặt $t = \sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}$ thì

$$t^2 = P(x) + Q(x) \pm 2\sqrt{P(x) \cdot Q(x)}.$$

Phương trình trên trở thành $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$.

Do α và β không đồng thời bằng 0 nên $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ trở thành phương trình bậc nhất hoặc bậc hai của t . Giải PT tìm t rồi thay $t = \sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}$ để tìm nghiệm của phương trình.

b) Thí dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16 \quad (2)$$

Lời giải. Biến đổi PT (2) về dạng

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 2x + 3 + x + 1 + 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} - 20.$$

Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \quad (t \geq 0)$ thì

$$t^2 = 3x + 4 + 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x+1}.$$

Dẫn đến $t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = -4$ (loại) hoặc $t = 5$.

Thay $t = 5$ vào $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$ ta được

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x+1} = 21-3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 7 \\ x^2 - 146x + 429 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 7 \\ \begin{cases} x = 73 + \sqrt{4755} \\ x = 73 - \sqrt{4755} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 73 - \sqrt{4755}.$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = 73 - \sqrt{4755}$. $\square$

3. Phương trình dạng

$$ax^2 + bx + c = \sqrt{px^2 + qx + r} \text{ trong đó } \frac{a}{p} = \frac{b}{q}$$

a) **Cách giải.** Đặt $t = \sqrt{px^2 + qx + r}$ ($t \geq 0$).

Phương trình trên trở thành $at^2 + \beta t + \gamma = 0$. Từ đó tìm t , rồi tìm x .

b) **Thí dụ 3.** Giải phương trình

$$4x^2 + 10x + 9 = 5\sqrt{2x^2 + 5x + 3} \quad (3)$$

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 5x + 3}$ ($t \geq 0$) thì

$$t^2 = 2x^2 + 5x + 3 \Leftrightarrow 2t^2 + 3 = 4x^2 + 10x + 9.$$

$$\text{PT(3) trở thành } 2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = \frac{3}{2}.$$

• Với $t = 1$ thì $\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}.$$

• Với $t = \frac{3}{2}$ thì $\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 20x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{19}}{4}.$$

Vậy tập nghiệm của PT (3) là

$$\left\{ -2, -\frac{1}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{19}}{4} \right\}. \square$$

4. Phương trình dạng $\sqrt{F(x)+a} \pm \sqrt{F(x)} = b$

a) **Cách giải.** Nhân hai vế của phương trình với biểu thức liên hợp $\sqrt{F(x)+a} \mp \sqrt{F(x)}$ khác 0.

Lúc đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{F(x)+a} \pm \sqrt{F(x)} = b \\ \sqrt{F(x)+a} \mp \sqrt{F(x)} = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được x .

b) **Thí dụ 4.** Giải phương trình

$$\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + \sqrt{4x^2 + 5x + 7} = 3 \quad (4)$$

Lời giải. Ta có $4x^2 + 5x + 7 = \left(2x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{87}{16} > 0$

với mọi x ;

$$4x^2 + 5x + 1 = \left(2x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \geq 0 \Leftrightarrow \left|2x + \frac{5}{4}\right| \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \text{ hoặc } x \leq -1.$$

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$ hoặc $x \leq -1$.

Nhân hai vế với $\sqrt{4x^2 + 5x + 7} - \sqrt{4x^2 + 5x + 1} (\neq 0)$

PT (4) trở thành

$$\sqrt{4x^2 + 5x + 7} - \sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 2 \quad (5)$$

Cộng theo vế của (4) và (5) và biến đổi dẫn đến $16x^2 + 20x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -10 \pm 2\sqrt{13}$ hoặc $x = -10 - 2\sqrt{13}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy tập nghiệm của PT (4) là $\{-10 \pm 2\sqrt{13}\}$. $\square$

Phương trình vô tỉ rất phong phú và đa dạng, vì vậy đòi hỏi học sinh phải hết sức thận trọng khi trình bày lời giải. Rất mong các bạn bổ sung thêm để làm phong phú cách giải phương trình vô tỉ có dạng đặc biệt. Mời các bạn tham gia giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = x^2 - 3x + 1$;

2) $\sqrt{4x+3} + \sqrt{2x+1} = 6x + \sqrt{8x^2 + 10x + 3} - 16$;

3) $18x^2 - 18x + 5 = 3\sqrt{9x^2 - 9x + 2}$;

4) $\sqrt{3x^2 + 5x + 1} - \sqrt{3x^2 + 5x - 7} = 2$;

5) $\sqrt{3x+8+6\sqrt{3x-1}} + \sqrt{3x+8-6\sqrt{3x-1}} = 3x+4$.

Lời giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, ĐỒNG NAI

NĂM HỌC 2006-2007

(Đề thi đăng trên THPT số 358, tháng 4 năm 2007)

Bài 1. 1) Xét hai trường hợp

$$\text{i) } 8x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{8}.$$

PT đã cho có dạng $11x^2 - 2x - 12 = 0$.

$$\text{PT này có nghiệm } x = \frac{1 + \sqrt{133}}{11}$$

(thỏa mãn $x \geq \frac{9}{8}$).

$$\text{ii) } 8x - 9 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{9}{8}.$$

PT đã cho có dạng $11x^2 - 34x + 24 = 0$.

$$\text{PT này có nghiệm } x = \frac{12}{11} \text{ (thỏa mãn } x < \frac{9}{8} \text{)}.$$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{1 + \sqrt{133}}{11} \text{ và } x = \frac{12}{11}.$$

2) ĐK $xy \neq 0$ và $(x+2)(y+2) \neq 0$. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x - y - 2 = 2xy + 4x \\ 3x - y + 6 = -4xy - 8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5y+2}{3} \\ 10y^2 + 22y + 12 = 0 \end{cases}$$

Hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là

$$(-1; -1), \left(-\frac{4}{3}; -\frac{6}{5}\right).$$

Bài 2. 1) Nhận xét rằng (d) đi qua hai điểm $(0; -4)$ và $C(4; 0)$; (d_1) đi qua hai điểm $A(-2; 0)$ và $(0; -1)$; (d_2) đi qua hai điểm $(0; 2)$ và $B(1; 0)$ (h.1).

Nhận thấy (d) , (d_1) , (d_2) đồng quy tại $I(2; -2)$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của I lên

trục Ox . Khi đó

$$ID = 2, AC = 6,$$

$$BC = 3.$$

Dùng định lí

Pythagore,

tính được

$$AI = 2\sqrt{5},$$

$$BI = \sqrt{5}.$$

Từ đó

$$\frac{AI}{BI} = 2 = \frac{AC}{BC},$$

suy ra C thuộc

phân giác ngoài của góc AIB .

$$2) \text{ Ta có } u^2 + v^2 + t^2 = u + v + t$$

$$\Leftrightarrow (u^2 - u) + (v^2 - v) + (t^2 - t) = 0 \quad (1)$$

Nhận thấy

$$u^2 - u = \frac{1}{4}((2u-1)^2 - 1) \geq 0, \text{ với mọi } u \in \mathbb{Z}$$

$$(\text{vì } (2u-1)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2u-1 \geq 1 \text{ hoặc } 2u-1 \leq -1 \Leftrightarrow u \geq 1 \text{ hoặc } u \leq 0).$$

Tương tự $v^2 - v \geq 0$; $t^2 - t \geq 0$. Do đó có 8 bộ $(u; v; t)$ thỏa mãn (1) là $(0; 0; 0)$, $(0; 0; 1)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 1; 1)$, $(1; 0; 0)$, $(1; 0; 1)$, $(1; 1; 0)$, $(1; 1; 1)$.

Bài 3. 1) (h. 2) Tam giác

AQM cân tại Q nên

$$\widehat{PAQ} = \widehat{AMQ}.$$

Tương tự

$$\widehat{PNM} = \widehat{PMN} \text{ và}$$

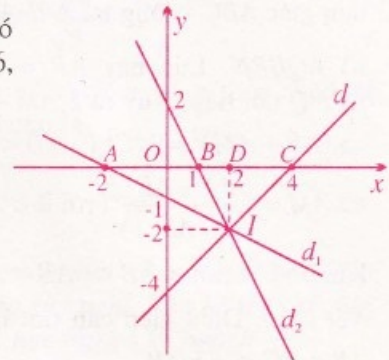
$$\widehat{QNM} = \widehat{QMN}.$$

Từ đó

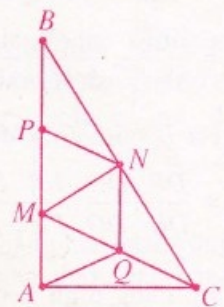
$$\widehat{PAQ} + \widehat{PNQ} = \widehat{AMQ} + \widehat{PNM} + \widehat{QNM}$$

$$= \widehat{AMQ} + \widehat{PMN} + \widehat{QMN}$$

$$= 180^\circ \text{ (đpcm).}$$



Hình 1



Hình 2

2) Xét hai khả năng sau.

i) $NQ \parallel AP$ hay N là trung điểm của BC . Lúc đó $MB = MC \Rightarrow (AB - AM)^2 = MC^2$ (với $0 < AM < AB$) $\Leftrightarrow AM = \frac{AB^2 - AC^2}{2AB}$ (với $0 < AM < AB$). Khi đó $0 < AM < AB \Leftrightarrow AC < AB$.

Vậy trong khả năng này điều kiện cần tìm của tam giác ABC vuông tại A là $AC < AB$.

ii) $AQ \parallel PN$. Lúc này $AP = NQ$ (do tứ giác $APNQ$ nội tiếp), suy ra $2(AM + MP) = 2NQ \Rightarrow (AB + AM)^2 = MC^2$ (với $0 < AM < AB$) $\Leftrightarrow AM = \frac{AC^2 - AB^2}{2AB}$ (với $0 < AM < AB$).

Khi đó $0 < AM < AB \Leftrightarrow AB < AC < \sqrt{3} \cdot AB$.

Kết luận: Điều kiện cần tìm là $AC < AB$ hoặc $AB < AC < \sqrt{3} \cdot AB$.

Bài 4. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Trong tam IAD có $AD < IA + ID$. Tương tự $BC < IB + IC$. Từ đó $AD + BC < AC + BD$ (2). Theo giả thiết $AC + AD \leq BC + BD$ (3)

Cộng (2), (3) theo vế, ta thu được $AD < BD$.

LƯƠNG QUANG DƯƠNG

(Sở GD-ĐT Đồng Nai)
sưu tầm và giới thiệu

PHÉP CHỨNG MINH...

(Tiếp trang 7)

Theo định lí sin ta có

$$\frac{\sin K_1}{\sin K_2} \cdot \frac{\sin H_1}{\sin H_2} \cdot \frac{\sin G_1}{\sin G_2} = \frac{\sin K_1}{\sin P_1} \cdot \frac{\sin Q_1}{\sin K_2} \cdot \frac{\sin H_1}{\sin R_1} \cdot \frac{\sin S_1}{\sin H_2} \cdot \frac{\sin G_1}{\sin M_1} \cdot \frac{\sin N_1}{\sin G_2}$$

(vì $\widehat{P}_1 = \widehat{S}_1$; $\widehat{Q}_1 = \widehat{M}_1$; $\widehat{R}_1 = \widehat{N}_1$)

$$= \frac{DP}{DK} \cdot \frac{DK}{DQ} \cdot \frac{FR}{FH} \cdot \frac{FH}{FS} \cdot \frac{BM}{BG} \cdot \frac{BG}{BN} = 1.$$

Áp dụng định lí Ceva dạng sin cho tam giác KHG , ta có AD , CF , EB đồng quy. Định lí đã được chứng minh.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH

NĂM HỌC 2006-2007

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (2 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $4x^2 + \frac{1}{x^2} + 7 = 8x + \frac{4}{x}$; b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$.

Câu 2. (1 điểm)

Cho $f(x) = x^2 + ax + b - 1$. Giả sử phương trình $f(x) = -2$ có hai nghiệm nguyên dương.

Chứng minh rằng $P = \frac{1}{2}(f^2(1) + f^2(-1))$ là hợp số.

Câu 3. (2 điểm)

Tìm số nguyên tố p sao cho $\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, với a, b là các số nguyên dương.

Câu 4. (3 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên đường thẳng CD . Tia AD cắt tia BC tại I . Biết rằng $AE + BF = R\sqrt{3}$.

a) Tính số đo góc AIB .

b) Trên cung nhỏ CD lấy điểm K . Gọi giao điểm của KA, KB với CD lần lượt là M, N . Tìm giá trị lớn nhất của MN khi K di động trên cung nhỏ CD .

Câu 5. (2 điểm)

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 2(x + y + z) + 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)
sưu tầm và giới thiệu.



Đổi mới nội dung cho chuyên mục CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

Thi vào Đại học và Cao đẳng là nguyện vọng của đông đảo các bạn học sinh. Chúng tôi luôn chú ý để độc giả sử dụng một cách tốt nhất chuyên mục này. Từ tháng 7.2007 tức là số 361 chúng tôi sẽ cho đăng các chuyên đề ôn tập theo các chủ điểm. Theo dõi đều đặn các bạn sẽ có được bộ tài liệu luyện thi đầy đủ các kiến thức, dạng loại bài tập với các phương pháp giải. Chuyên mục cũng mong nhận được nhiều bài viết của các thầy giáo, các cộng tác viên theo hướng này. Nhân đây cũng xin thông báo tiêu mục **Đề tự luyện** khép lại từ số THPT này.

THHT

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Ta có $y' = \frac{x^2 - 4x + 10m - 7}{(x-2)^2}$.

Hàm số có cực đại (CĐ), cực tiểu (CT) khi PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Khi đó $m < \frac{11}{10}$.

Giả sử hàm số có điểm CĐ $(x_1; y_1)$ và CT $(x_2; y_2)$.

Ta có $x_1 + x_2 = 4$; $x_1 x_2 = 10m - 7$;

$y_1 = 2x_1 - 2m - 3$; $y_2 = 2x_2 - 2m - 3$.

Hai điểm CĐ, CT nằm về hai phía của đường thẳng $x + y - 7 = 0$ khi và chỉ khi

$$(y_1 + x_1 - 7)(y_2 + x_2 - 7) < 0$$

$$\Leftrightarrow 9x_1 x_2 - 3(2m+3)(x_1 + x_2) + (2m+3)^2 < 0$$

Đáp số: $\frac{-41-3\sqrt{229}}{4} < m < \frac{-41+3\sqrt{229}}{4}$.

Câu II.

1) $\sin^3 x - \cos^3 x = \cos 2x \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

ĐK: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$.

Ta có $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

PT trở thành $\sin^3 x - \cos^3 x = -\cos 2x$, dẫn đến $(\sin x - \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$.

Đáp số: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2) Ta có hệ $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 2y & (1) \\ y^3 - 2y^2 + 2y + 1 = 2x & (2) \end{cases}$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + 2t + 1$ có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 2 > 0, \forall t$.

nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến

Nếu $x > y$ thì $2y = f(x) > f(y) = 2x \Rightarrow y > x$ vô lí.

Tương tự, không thể có $x < y$. Vậy $x = y$.

Thay vào (1) ta có

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 1) = 0.$$

Tìm được $x = 1, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ PT có ba nghiệm $(x; y)$ là

$$(1; 1); \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Câu III. 1) Có $\vec{u}_{AB} = (1; 1; -1)$.

PT đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

Giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) là $M(0; -2; 3)$.

Có $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{u}_{AB}]$ nên $\vec{u}_d = (2; -1; 1)$.

PT đường thẳng (d) là $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

2) Có $\vec{n}_{ABC} = [\vec{n}_P, \vec{u}_{AB}]$ nên $\vec{n}_{ABC} = (2; -1; 1)$.

PT mặt phẳng (ABC) có dạng $2x - y + z - 5 = 0$.

PT mặt phẳng trung trực của AB là
 $x + y - z - 1 = 0$.

Toạ độ của điểm $C(x; y; z)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y - 4z + 8 = 0 \\ 2x - y + z - 5 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ tìm được $C(2; 1; 2)$.

Câu IV. 1) $I = \int_0^1 \sqrt{4-3(x-1)^2} dx$

Đặt $x-1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó

$$I = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos^2 t dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 (1 + \cos 2t) dt$$

$$I = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}.$$

2) Ta có $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$.

Nếu $x^2 - xy + y^2 = 0$ thì $x = 0; y = 0$. Thỏa mãn.

Với $x^2 - xy + y^2 > 0$. Đặt $a = \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - xy + y^2}$.

Nếu $y = 0$ thì $a = 1$.

Với $y \neq 0$, đặt $x = ty$, ta được $a = \frac{t^2 + ty - 2}{t^2 - ty + 1}$.

Từ đó $(a-1)t^2 - (a+1)t + a + 2 = 0$.

Với $a \neq 1$ có $\Delta = -3a^2 - 2a + 9$. Ta thấy

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1-2\sqrt{7}}{3} \leq a = \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - xy + y^2} \leq \frac{-1+2\sqrt{7}}{3}.$$

Vì $x^2 - xy + y^2 > 0$ nên

$$-(1+2\sqrt{7}) \frac{x^2 - xy + y^2}{3} \leq x^2 + xy - 2y^2$$

$$\leq (-1+2\sqrt{7}) \frac{x^2 - xy + y^2}{3}.$$

Theo giả thiết $0 < \frac{x^2 - xy + y^2}{3} \leq 1$.

Nên $-1-2\sqrt{7} \leq x^2 + xy - 2y^2 \leq -1+2\sqrt{7}$.

Câu Va. 1) Tâm $I \in (d)$ nên $I(x; x-1)$.

Có $\overrightarrow{IA} = (-x; 3-x), \overrightarrow{IB} = (4-x; 6-x)$

$$IA \perp IB \Rightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2}; x = 2..$$

Ta được hai nghiệm:

$\{C(9; 5), D(5; 2)\}, \{C(4; 0), D(0; -3)\}$.

2) Số tạo thành có 5 vị trí. Xét hai trường hợp

TH1. Số tạo thành có chữ số 0.

Có bốn cách chọn vị trí cho chữ số 0. Số cách chọn hai trong bốn vị trí còn lại cho hai chữ số 1 là C_4^2 . Số cách chọn hai trong tám chữ số còn lại cho hai vị trí còn lại là A_8^2 . Theo quy tắc nhân, số các số là $4 \cdot C_4^2 \cdot A_8^2 = 1344$.

TH2. Số tạo thành không có chữ số 0.

Số cách chọn hai trong năm vị trí cho hai chữ số 1 là C_5^2 . Số cách chọn ba trong tám chữ số khác 0, 1 cho ba vị trí còn lại là A_8^3 . Theo quy tắc nhân, số các số là $C_5^2 \cdot A_8^3 = 3360$. Theo quy tắc cộng, số các số phải tìm là

$$1344 + 3360 = 4704.$$

Câu Vb.

1) Đặt $\log_5(3 + \sqrt{3^x + 1}) = \log_4(3^x + 1) = t$

$$\text{Ta được } \begin{cases} 3^x + 1 = 4^t \\ 3 + \sqrt{3^x + 1} = 5^t \end{cases} \Rightarrow 3 + 2^t = 5^t \quad (3)$$

$$\text{Có } (3) \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{2}{5}\right)^t = 1.$$

Về trái của PT là hàm số nghịch biến, về phải bằng 1 nên nghiệm $t = 1$ là duy nhất.

Với $t = 1$ ta có $x = 1$.

2) Giả sử $AB = a$, I là trung điểm AB , trong

tam giác SIA có $SI = \frac{a}{2} \cot \frac{\alpha}{2}, HI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$\text{Vì } SH^2 = SI^2 - HI^2 \text{ nên } a^2 = \frac{12h^2}{3\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{ha^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{h^3 \sqrt{3}}{3\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}, \text{ với } 0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}.$$

NGUYỄN ANH DŨNG

(Hà Nội)



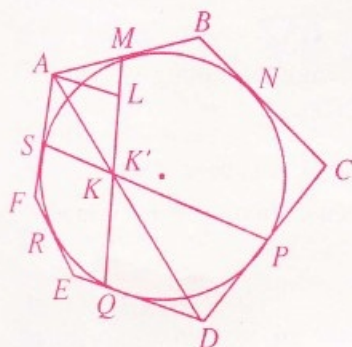
PHÉP CHỨNG MINH KHÁC của định lí Brianchon

NGUYỄN MINH HÀ
(GV ĐHSPT Hà Nội)

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ đưa ra một chứng minh khác cho định lí Brianchon, Tác giả của phép chứng minh này là Đào Thu Hà, một học sinh cũ của tôi, Huy chương Đồng IMO lần thứ 39. Để cho thuận tiện, ta chỉ phát biểu và chứng minh định lí đối với lục giác ngoại tiếp một đường tròn.

Định lí. Nếu lục giác $ABCDEF$ ngoại tiếp một đường tròn thì AD, CF, EB đồng quy.

Chứng minh



Hình 1

Gọi M, N, P, Q, R, S tương ứng là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA của lục giác. Gọi K là giao điểm của AD và MQ ; K' là giao điểm

của AD và SP (h. 1). Qua A , dựng đường thẳng song song với DE , cắt MQ tại L .

Ta có $\widehat{AML} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{MSRQ} = \widehat{EQM} = \widehat{ALM}$, vì $AL \parallel DE$.

Từ đó suy ra, tam giác AML cân với $AM = AL$.

Áp dụng định lí Thalès, ta có

$$\frac{AK}{DK} = \frac{AL}{DQ} = \frac{AM}{DQ} \quad (1)$$

Tương tự
$$\frac{AK'}{DK'} = \frac{AS}{DP} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) với chú ý rằng $AM = AS; DQ = DP$, ta có $\frac{AK}{DK} = \frac{AK'}{DK'}$. Từ đó $K \equiv K'$. Vậy AD, MQ, SP đồng quy.

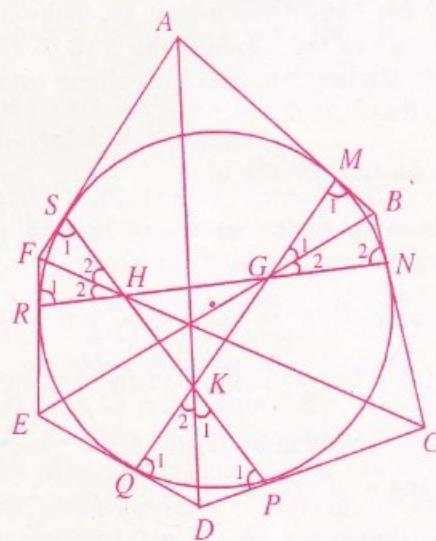
Tương tự, ta cũng chứng minh được CF, PS, NR đồng quy; EB, QM, RN đồng quy.

Có hai trường hợp cần xem xét.

Trường hợp 1. MQ, PS, NR đồng quy. Bởi lập luận trên, ta nhận thấy rằng AD, BE, CF đồng quy tại điểm đồng quy của MQ, PS, NR .

Trường hợp 2. MQ, PS, NR không đồng quy.

Gọi K là điểm đồng quy của AD, MQ, SP ; H là điểm đồng quy của CF, PS, NR ; G là điểm đồng quy của EB, QM, NR . (h.2).



Hình 2

(Xem tiếp trang 4)



Ứng dụng số phức để giải toán tổ hợp

TRẦN VIỆT ANH
(Học viện Quản lý GD)

Chúng ta đã biết rằng số phức có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực toán học như hình học, đại số, ... Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu một số kết quả của việc ứng dụng số phức về toán tổ hợp. Trong

bài viết, ta kí hiệu $\binom{n}{k}$, $S(X)$ và $|X|$ lần lượt là

số tổ hợp chập k của n phần tử, tổng tất cả các phần tử của tập hợp hữu hạn X và số các phần tử của tập hợp hữu hạn X trừ những trường hợp khác được chỉ rõ.

1. Kiến thức chuẩn bị

Ta luôn giả thiết p là một số nguyên tố lẻ trừ những trường hợp được chỉ rõ.

- Phương trình $x^p = 1$ có đúng p nghiệm phức phân biệt là $x_k = \cos \frac{2k\pi}{p} + i \sin \frac{2k\pi}{p}$, với $k = 0, 1, \dots, p-1$ và phương trình $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0$ có đúng $p-1$ nghiệm phân biệt là

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{p} + i \sin \frac{2k\pi}{p} \text{ với } k = 1, 2, \dots, p-1.$$

- Gọi α là một nghiệm bất kì của phương trình $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0$ thì tập nghiệm của

phương trình $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0$ là $\{\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-1}\}$ và $(\alpha^n, \alpha^{2n}, \dots, \alpha^{(p-1)n})$ là một hoán vị của $(\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-1})$, trong đó n là số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với p .

- Cho đa thức $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ và số nguyên dương m . Ta có

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(z^j) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^n a_k z^{jk} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^{m-1} z^{jk},$$

$$\text{với } z = \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}.$$

$$\text{Từ } \sum_{j=0}^{m-1} z^{jk} = \begin{cases} m & \text{nếu } k \text{ chia hết cho } m, \\ 0 & \text{nếu } k \text{ không chia hết cho } m, \end{cases}$$

suy ra tổng của các số a_k , với k chia hết cho m bằng $\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f(z^j)$.

- Cho m, k là hai số nguyên dương với $m > 1$, khi đó

$$\sum_{j=1}^{m-1} e^{\frac{-2\pi kji}{m}} = \begin{cases} m-1 & \text{nếu } k \text{ chia hết cho } m, \\ -1 & \text{nếu } k \text{ không chia hết cho } m, \end{cases}$$

2. Một số bài toán

Bài 1. Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương n nguyên tố cùng nhau với p . Tìm số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ gồm $p-1$ số tự nhiên sao cho tổng $x_1 + 2x_2 + \dots + (p-1)x_{p-1}$ chia hết cho p , trong đó mỗi số $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ đều không lớn hơn $n-1$.

Lời giải. Xét đa thức $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ và đặt $F(x) = f(x)f(x^2) \dots f(x^{p-1})$.

Bằng cách triển khai đa thức $F(x)$, ta có thể

$$\text{viết } F(x) = \sum_{k=0}^{\frac{(n-1)p(p-1)}{2}} a_k x^k, \text{ trong đó } a_k \text{ là số các}$$

bộ $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$, với mỗi $x_j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ sao cho $x_1 + 2x_2 + \dots + (p-1)x_{p-1} = k$. Vậy số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ gồm $p-1$ số tự nhiên thỏa mãn điều kiện bài toán, bằng tổng của các số

a_k với k chia hết cho p . Ta biết rằng tổng của các số a_k với k chia hết cho p bằng $\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} F(\alpha^j)$,

$$\text{với } \alpha = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}.$$

Chú ý rằng $f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ nếu $x \neq 1$ và $\alpha^{kj} \neq 1$

$$\text{với } k, j = 1, 2, \dots, p-1. \text{ Do đó } f(\alpha^{kj}) = \frac{\alpha^{nkj} - 1}{\alpha^{kj} - 1}$$

với $k, j = 1, 2, \dots, p-1$. Nhân các đẳng thức ở trên với $k = 1, 2, \dots, p-1$, ta được

$$\begin{aligned} F(\alpha^j) &= f(\alpha^j) f(\alpha^{2j}) \dots f(\alpha^{(p-1)j}) \\ &= \frac{(\alpha^{nj} - 1)(\alpha^{2nj} - 1) \dots (\alpha^{(p-1)nj} - 1)}{(\alpha^j - 1)(\alpha^{2j} - 1) \dots (\alpha^{(p-1)j} - 1)} \end{aligned}$$

với $j = 1, 2, \dots, p-1$. Vì $(n, p) = 1$ nên $(j, p) = (nj, p) = 1$ với $j = 1, 2, \dots, p-1$, do đó

$(\alpha^{nj}, \alpha^{2nj}, \dots, \alpha^{(p-1)nj})$ và $(\alpha^j, \alpha^{2j}, \dots, \alpha^{(p-1)j})$ là những hoán vị của $(\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-1})$ với $j = 1, 2, \dots, p-1$. Vậy với mọi $j = 1, 2, \dots, p-1$ thì $F(\alpha^j) = 1$. Chú ý rằng $F(\alpha^0) = F(1) = n^{p-1}$, từ đó số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ gồm $p-1$ số tự nhiên thỏa mãn điều kiện bài toán, bằng $\frac{n^{p-1} + p - 1}{p}$. $\square$

Bài 2. Cho ba số nguyên dương m, n, p trong đó $n + 2$ chia hết cho m và m lớn hơn p . Tìm số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ gồm p số nguyên dương sao cho tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ chia hết cho m , trong đó mỗi số $x_1, x_2, \dots, x_p$ đều không lớn hơn n .

Lời giải. Xét đa thức $f(x) = (x^n + x^{n-1} + \dots + x)^p$. Bằng cách khai triển đa thức $f(x)$, ta có thể viết

$$f(x) = \sum_{k=0}^{pn} a_k x^k, \text{ trong đó } a_k \text{ là các bộ } (x_1, x_2, \dots,$$

$x_p)$ với mỗi $x_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $x_1 + x_2 + \dots + x_k = k$. Vậy số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ gồm p số nguyên dương thỏa mãn điều kiện Bài toán bằng tổng của các số a_k với k chia hết cho m . Ta biết rằng tổng của các số a_k với k chia hết

cho m bằng $\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f(\alpha^j)$, với $\alpha = \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}$.

Vì m lớn hơn p nên m lớn hơn 1, do đó $\alpha^j \neq 1$ với $j = 1, 2, \dots, m-1$. Mặt khác, vì $n + 2$ chia hết cho m nên $\alpha^{(n+2)j} = 1$ với $j = 1, 2, \dots, m-1$.

Đề ý $f(x) = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} - 1 \right)^p$ nếu $x \neq 1$. Do đó với $j = 1, 2, \dots, m-1$ thì

$$\begin{aligned} f(\alpha^j) &= \left(\frac{\alpha^{(n+1)j} - 1}{\alpha^j - 1} - 1 \right)^p = \left(\frac{\alpha^{(n+2)j} - \alpha^j}{\alpha^j(\alpha^j - 1)} - 1 \right)^p \\ &= \left(\frac{1 - \alpha^j}{\alpha^j(\alpha^j - 1)} - 1 \right)^p = (-1)^p \left(\frac{1}{\alpha^j} + 1 \right)^p \\ &= (-1)^p \left(e^{\frac{-2\pi j i}{m}} + 1 \right)^p = (-1)^p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} e^{\frac{-2\pi k j i}{m}}. \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó } f(\alpha^j) = (-1)^p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} e^{\frac{-2\pi k j i}{m}},$$

với $j = 1, 2, \dots, m-1$.

Lấy tổng các đẳng thức ở trên với $j = 1, 2, \dots, m-1$, ta được

$$\sum_{j=1}^{m-1} f(\alpha^j) = (-1)^p \left(\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} \sum_{j=1}^{m-1} e^{\frac{-2\pi k j i}{m}} + m - 1 \right).$$

Chú ý rằng k không chia hết cho m , với $k = 1, 2, \dots, p$. Vì $m > p$ và

$$\sum_{j=1}^{m-1} e^{\frac{-2\pi k j i}{m}} = \begin{cases} m-1 & \text{nếu } k \text{ chia hết cho } m, \\ -1 & \text{nếu } k \text{ không chia hết cho } m, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ta có } \sum_{j=1}^{m-1} f(\alpha^j) &= (-1)^p \left(-\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} + m - 1 \right) \\ &= (-1)^p \left(-\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} + m \right) = (-1)^p (m - 2^p). \end{aligned}$$

Chú ý rằng $f(\alpha^0) = f(1) = n^p$, vậy số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ gồm p số nguyên dương thỏa mãn điều kiện của bài toán, bằng

$$\frac{n^p + (-1)^p (m - 2^p)}{m} = \frac{n^p - (-2)^p}{m} + (-1)^p. \square$$

Cuối cùng, chúng tôi xin giới thiệu một số bài toán có thể giải quyết nhờ sử dụng công cụ số phức.

(Xem tiếp trang 24)



Lời giải đại số của bài toán hình học T11/344 (Tháng 2 năm 2006)

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
(Hà Nội)

Lời tòa soạn. Lời giải hình học của bài toán T11/344 đã được giới thiệu trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ trong số 348, tháng 6 năm 2006. Vì khuôn khổ của mục Giải bài kì trước, trong số đó chưa đề cập được lời giải đại số của bài toán này. Thế theo nguyện vọng của nhiều bạn yêu toán, Tòa soạn giới thiệu tiếp lời giải đại số của bài toán đó trong số 360 này.

Trước hết, xin nhắc lại bài toán T11/344.

Giả sử ba tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ và $A_3B_3C_3$ thỏa mãn các điều kiện: $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{C_3}$, $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3$ và $B_1C_1 + C_2A_2 = B_2C_2 + C_3A_3 = B_3C_3 + C_1A_1$ (*)

Chứng minh rằng ba tam giác đó bằng nhau.

Sau đây xin được giới thiệu lời giải đại số của bài toán trên.

Đặt $\widehat{C_i} = \gamma$ ($0 < \gamma < \pi$), $-2\cos\gamma = k$; $A_iB_i = c$, $B_iC_i = x_i$, $C_iA_i = y_i$; ($i = 1, 2, 3$). Áp dụng định lí cosin vào các tam giác $A_iB_iC_i$ ta có

$$x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\gamma = x_i^2 + y_i^2 + kx_i y_i = c^2, \\ (i = 1, 2, 3) \text{ với } x_i > 0, y_i > 0.$$

Ta xem 6 số dương x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$) là các nghiệm dương của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + y_2 = x_2 + y_3 = x_3 + y_1 = d & (*) \\ x_1^2 + y_1^2 + kx_1 y_1 = x_2^2 + y_2^2 + kx_2 y_2 \\ = x_3^2 + y_3^2 + kx_3 y_3 = c^2 & (**) \end{cases}$$

($c > 0, d > 0, i = 1, 2, 3$).

Chúng ta sẽ chứng tỏ rằng: Nếu hệ phương trình (H) có nghiệm thì $x_1 = x_2 = x_3 (= x)$ và $y_1 = y_2 = y_3 (= y)$.

Thật vậy, từ (*) thay $y_1 = d - x_3, y_2 = d - x_1$ và $y_3 = d - x_2$ vào (**).

Sau khi thực hiện các phép tính rồi rút gọn ta được hệ ba phương trình sau đối với ba ẩn x_1, x_2 và x_3 :

$$\begin{cases} (kx_1 - 2x_3)d - (x_2^2 + kx_3 x_1) + X = 0 \\ (kx_2 - 2x_1)d - (x_3^2 + kx_1 x_2) + X = 0 \\ (kx_3 - 2x_2)d - (x_1^2 + kx_2 x_3) + X = 0 \end{cases} \quad (i)$$

trong đó $X = d^2 - c^2 + \sum_{i=1}^3 x_i^2$.

Từ đó ta biểu thị được d bằng ba biểu thức khác nhau như dưới đây.

$$d = \frac{x_1^2 + kx_2 x_3 - X}{kx_3 - 2x_2} = \frac{x_2^2 + kx_3 x_1 - X}{kx_1 - 2x_3} \\ = \frac{x_3^2 + kx_1 x_2 - X}{kx_2 - 2x_1} \quad (ii)$$

(với quy ước nếu mẫu số triệt tiêu thì tử số cũng triệt tiêu).

Sau đó áp dụng tính chất của dãy các tỉ số bằng nhau để khử đại lượng X , ta thu được

$$d = t_1 = t_2 = t_3,$$

$$\text{trong đó } t_1 = \frac{(x_3 - x_2)(x_3 + x_2 - kx_1)}{2(x_3 - x_1) + k(x_2 - x_1)} \quad (iii)$$

và t_2 nhận được từ t_1 cũng như t_3 nhận được từ t_2 bởi hoán vị vòng quanh các chỉ số $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Đến đây, từ các đẳng thức $t_i = t_j$ ($i \neq j \in \{1, 2, 3\}$) ta đều thu được sự triệt tiêu $f(k) = 0$, trong đó

$$f(k) = \alpha k^2 + \beta k + \gamma \quad (\text{iv})$$

Chẳng hạn, từ $t_3 = t_1$ (hay $t_3 - t_1 = 0$), thì α, β và γ lần lượt đều có dạng là những đa thức bậc ba thuần nhất và đối xứng với các đối số x_1, x_2, x_3 theo nghĩa hoán vị vòng quanh các chỉ số 1, 2, 3 như đã nói ở trên. Cụ thể là:

$$\alpha = -x_2x_1^2 - x_3x_2^2 - x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_3 \quad (\text{v})$$

$$\beta = -2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3) + \gamma \quad (\text{vi})$$

$$\gamma = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_2x_1^2 - x_3x_2^2 - x_1x_3^2) + 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_3x_1^2 - x_1x_2^2 - x_2x_3^2) \quad (\text{vii})$$

Sau vài phép biến đổi đơn giản ta thu được

$$-\alpha = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)x_2 + (x_3 - x_2)^2 x_1 \quad (\text{v}')$$

$$\beta = -(x_1 + x_2 + x_3)[(x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2] + \gamma \quad (\text{vi}')$$

$$\gamma = (x_2 - x_1)[2(x_2^2 - x_1^2) + (x_3^2 - x_1^2)] + (x_3 - x_2)(2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2) \quad (\text{vii}')$$

Ngoài ra, nhờ hoán vị vòng quanh ta nhận thêm được hai biểu thức khác nữa của α, γ và β .

Đối với việc xét dấu của α, β và γ , không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả định quy ước rằng $0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3$, lúc đó $\alpha \leq 0$ và $\gamma \geq 0$, còn đương nhiên là $\beta^2 \geq 0$. Từ đó suy ra biệt số của (iv) không âm: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$. Ngoài ra, với các biểu thức (v') và (vii') của α và γ , ta nhận ra ngay rằng: $\alpha = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$; $\gamma = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$. Và do đó $\alpha = 0, \gamma = 0$, kéo theo $\beta = 0$.

Mặt khác, dễ thấy: Từ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ suy ra $\Delta = 0$ khi và chỉ khi hoặc $\alpha = 0$ và $\beta = 0$, hoặc $\gamma = 0$ và $\beta = 0$.

Bởi vậy, chúng ta đi đến kết luận:

$\Delta = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 (= x)$ kéo theo $y_1 = y_2 = y_3 (= y)$.

Nhưng $\Delta = 0$ lại là điều kiện cần và đủ để k là nghiệm duy nhất của hệ phương trình (H) được xét (nếu hệ này có nghiệm). Như vậy là: Dãy đẳng thức điều kiện (*) của bài toán chỉ được thỏa mãn với: $B_1C_1 = B_2C_2 = B_3C_3$ và $C_1A_1 = C_2A_2 = C_3A_3$ mà thôi. Và do đó, ba tam giác $A_iB_iC_i$ ($i = 1, 2, 3$) bằng nhau; đó là đpcm.

Chú thích bổ sung. 1) Vì $k = -2\cos\gamma$, trong đó $0 < \gamma < \pi$ và γ là độ lớn cho trước của các góc bằng nhau $\widehat{C_i}$ của ba tam giác $A_iB_iC_i$ ($i = 1, 2, 3$) nên khi γ đã cho, tức là khi đã cho k thì $\Delta = 0$ là điều kiện cần và đủ để $k = -2\cos\gamma$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình (H). Tuy nhiên, γ chỉ cần thỏa mãn BĐT $0 < \gamma < \pi$ và do đó, k chỉ cần thỏa mãn điều kiện $-1 < k < 1$ ($|k| < 1$). Bởi vậy, theo lập luận trên đây ta thấy $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$ ($\Leftrightarrow y_1 = y_2 = y_3$) và do đó, k có thể có vô số giá trị, miễn là thỏa mãn điều kiện $|k| < 1$.

2) Các hằng số dương c và d đưa vào trong hệ phương trình (H) chỉ là phương tiện để lập luận với điều kiện giả định rằng nếu hệ (H) có nghiệm thì nhất thiết phải xảy ra $x_1 = x_2 = x_3 (= x)$ và $y_1 = y_2 = y_3 (= y)$. Bằng những phép tính đơn giản ta đi đến kết luận rằng: Hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = d \\ x^2 + y^2 + kxy = c^2 \end{cases}$$
 có hai nghiệm dương khi và chỉ khi:

a) Hoặc $k \leq 2 - 4\left(\frac{d^2 - c^2}{d^2}\right), c < d$;

b) Hoặc $k \geq 2 + 4\left(\frac{c^2 - d^2}{d^2}\right), c > d$.

**ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ DÀI HẠN
TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC**



Bất đẳng thức CAUCHY-BUNYAKOVSKI-SCHWARZ

GABRIEL DOSPINESCU - TRẦN NAM DŨNG

Cùng với các bất đẳng thức (BĐT) giữa trung bình cộng và trung bình nhân, Schur, Jensen và Hölder, BĐT Cauchy-Bunyakovski-Schwarz (CBS) là một kết quả kinh điển, có nhiều ứng dụng. Câu hỏi quan trọng nhất ở đây là làm sao ta nhận biết được một bất đẳng thức có thể giải bằng phương pháp này? Rất khó có thể nói một cách rõ ràng, nhưng có lẽ là nên nghĩ đến BĐT CBS khi ta thấy tổng của các căn thức, tổng của các bình phương hay đặc biệt là khi ta có các biểu thức chứa căn.

Đầu tiên, ta sẽ xét một số bài toán mà trong lời giải áp dụng BĐT CBS ở dạng kinh điển:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Khó khăn lớn nhất là chọn a_i và b_i . Ta sẽ thấy rằng trong một vài trường hợp, điều này là hiển nhiên, trong vài trường hợp khác lại không đơn giản chút nào. Sau đây chúng ta giải một số bài toán.

★ **Thí dụ 1.** Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, thì bất đẳng thức sau đây đúng: $x + y + z \leq 2 + xyz$.

(Đề đề nghị IMO, Ba Lan)

Lời giải. Tại sao ta lại nghĩ đến BĐT CBS? Nguyên nhân là BĐT cần chứng minh có dạng $x(1-yz) + y + z \leq 2$ và ta cần phải đánh giá thông qua tổng $x^2 + y^2 + z^2$. Tuy nhiên, có rất nhiều cách để áp dụng BĐT CBS. Chọn lựa

$(x(1-yz) + y + z)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(2 + (1-yz)^2)$ không mấy thành công. Vì thế có thể sẽ tốt hơn nếu coi $y + z$ như một số hạng. Nếu chúng ta để ý rằng bất đẳng thức có dấu bằng chẳng hạn khi $x = 1, y = 1$ và $z = 0$, chọn lựa $x(1-yz) + y + z \leq \sqrt{(x^2 + (y+z)^2)(1 + (1-yz)^2)}$ trở nên khá tự nhiên. Như thế cần chứng minh $2(1+yz)(2-2yz+y^2z^2) \leq 4 \Leftrightarrow y^3z^3 \leq y^2z^2$, điều này hiển nhiên vì $2 \geq y^2 + z^2 \geq 2yz$. □

Một ứng dụng không tầm thường khác của BĐT CBS là bài toán sau.

★ **Thí dụ 2.** Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ax + by + cz = xyz$. Chứng minh rằng $x + y + z > \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$.

Lời giải. Ta viết $\frac{a}{yz} + \frac{b}{zx} + \frac{c}{xy} = 1$ và phép thế $a = yzu, b = zxv$ và $c = xyw$ trở nên tự nhiên.

Như vậy, cần chứng minh

$$\sqrt{z(yu+xv)} + \sqrt{x(zv+yw)} + \sqrt{y(zu+xw)} < x + y + z$$

với $u + v + w = 1$.

Có thể thấy dạng của BĐT CBS:

$$\left(\sqrt{z(yu+xv)} + \sqrt{x(zv+yw)} + \sqrt{y(zu+xw)} \right)^2 \leq (x+y+z)(yu+yw+xv+xw+zu+zv)$$

và biểu thức cuối cùng nhỏ hơn $(x+y+z)^2$ vì $u + v + w = 1$. □

Ta thấy có thể áp dụng BĐT CBS khi có các tổng. Thế còn với tích số thì sao? Thí dụ sau sẽ chứng tỏ rằng trong trường hợp này, ta cần có một chút sáng tạo.

★**Thí dụ 3.** Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương (với $n \geq 2$). Chứng minh rằng

$$(a_1^3 + 1)(a_2^3 + 1) \dots (a_n^3 + 1) \geq (a_1^2 a_2 + 1) \dots (a_n^2 a_1 + 1).$$

(Cuộc thi CH Séc-Slovakia-Ba Lan, 2001)

Lời giải. Ta thử áp dụng BĐT CBS cho mỗi thừa số có mặt ở vế phải. Một cách tự nhiên, ta viết $(1 + a_1^2 a_2)^2 \leq (1 + a_1^3)(1 + a_2^3 a_1)$, vì ta cần $1 + a_1^3$, biểu thức có mặt ở vế trái. Tương tự, ta có thể viết

$$(1 + a_2^2 a_3)^2 \leq (1 + a_2^3)(1 + a_3^2 a_2), \dots,$$

$$(1 + a_n^2 a_1)^2 \leq (1 + a_n^3)(1 + a_1^2 a_n).$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức này với nhau, ta được

$$\begin{aligned} & ((a_1^2 a_2 + 1) \dots (a_n^2 a_1 + 1))^2 \\ & \leq (a_1^3 + 1) \dots (a_n^3 + 1) (1 + a_2^3 a_1) \dots (1 + a_1^2 a_n) \end{aligned} \quad (*)$$

Nhưng đây chưa phải là điều ta cần. Như thế BĐT CBS không có hiệu quả cho BĐT này. Không hẳn thế! Ta lại áp dụng lí luận này một lần nữa để có

$$\begin{aligned} & ((1 + a_2^2 a_1) \dots (1 + a_1^2 a_n))^2 \\ & \leq (a_1^3 + 1) \dots (a_n^3 + 1) (a_1^2 a_2 + 1) \dots (a_n^2 a_1 + 1) \end{aligned} \quad (**)$$

Như thế nếu

$$(a_1^2 a_2 + 1) \dots (a_n^2 a_1 + 1) \geq (1 + a_2^2 a_1) \dots (1 + a_1^2 a_n),$$

thì (*) sẽ cho chúng ta kết quả, còn nếu ngược lại thì (**) sẽ kết thúc lời giải của chúng ta. □

Bây giờ ta sẽ xem xét những bài toán khó hơn.

★**Thí dụ 4.** Cho hai số dương x, y sao cho $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Chứng minh rằng $x^3 + y^3 \leq 2$.

(CHLB Nga, 1999)

Lời giải. Ý tưởng ở đây là chặn $x^3 + y^3$ bởi $A(x^3 + y^4)$ với A nào đó. Điều này là có lí nếu nhìn vào các lũy thừa. Ta thử áp dụng vài thủ thuật với BĐT CBS và BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân:

$$\begin{aligned} (x^3 + y^3)^2 & \leq (x^3 + y^4)(x^3 + y^2) \leq (x^2 + y^3)(x^3 + y^2) \\ & \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + x^3 + y^3}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Như vậy ta đã chứng tỏ rằng $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2$. Nhưng $(x^2 + y^2)^2 \leq (x + y)(x^3 + y^3)$ và do đó $x^2 + y^2 \leq x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$, suy ra $x^2 + y^2 \leq 2$ và $x^3 + y^3 \leq 2$. □

★**Thí dụ 5.** Chứng minh rằng nếu x, y, z thuộc đoạn $[-1; 1]$ thoả mãn điều kiện $x + y + z + xyz = 0$, thì ta có

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} \leq 3.$$

Lời giải. Đầu tiên ta sẽ áp dụng BĐT CBS ở dạng hiển nhiên:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} \leq \sqrt{3(x+y+z+3)}.$$

Nhưng biểu thức vế phải có nhỏ hơn 3? Có, nếu như $x + y + z \leq 0$. Bây giờ ta giả sử rằng $x + y + z > 0$. Khi đó $xyz < 0$. Có thể giả sử $z < 0$. Từ đây ta có $x, y \in (0; 1]$. Ta sẽ không từ bỏ và cố gắng áp dụng BĐT CBS một lần nữa, nhưng lần này là cho hai căn:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} \leq \sqrt{2x+2y+4} + \sqrt{z+1}.$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt{2x+2y+4} + \sqrt{z+1} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+y)}{2+\sqrt{2x+2y+4}} \leq \frac{-z}{1+\sqrt{z+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-z(xy+1)}{2+\sqrt{2x+2y+4}} \leq \frac{-z}{1+\sqrt{z+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2xy + 2(1+xy)\sqrt{1+z} \leq \sqrt{2x+2y+4}.$$

Vì $1+z = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy}$, nên tất cả quy về chứng

minh $xy + \sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)} \leq \sqrt{1 + \frac{x+y}{2}}$. Ta

muốn sử dụng BĐT CBS thế nào đó để làm mất đi $1-x$ ở vế trái. Cụ thể là

$$\begin{aligned} & xy + \sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)} \\ & = \sqrt{x} \cdot \sqrt{xy^2} + \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+xy-y-xy^2} \\ & \leq \sqrt{1+xy-y} \leq 1 \leq \sqrt{1 + \frac{x+y}{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

Có thể thí dụ khó nhất trong các bài toán dạng này là bài toán sau đây.

★ **Thí dụ 6.** Chứng minh rằng với các số dương a, b, c, x, y, z ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}(y+z) + \frac{b}{c+a}(z+x) + \frac{c}{a+b}(x+y) \geq 3 \cdot \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}.$$

(Crux Mathematicorum)

Lời giải. Kí hiệu $a+b+c = \sum a$. Tương tự với các tổng có các biến số được lấy hoán vị vòng quanh. Ta có

$$\begin{aligned} \sum \frac{a}{b+c}(y+z) + \sum (y+z) &= (\sum a) \left(\sum \frac{y+z}{b+c} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sum (b+c)) \left(\sum \frac{y+z}{b+c} \right) \geq \frac{1}{2} (\sum \sqrt{y+z})^2 \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{2} (\sum (\sqrt{y+z}))^2 \geq \frac{3 \sum yz}{\sum x} + 2 \sum x \quad (1)$$

từ đây suy ra đpcm.

Ta có (1) tương đương với

$$\begin{aligned} &(\sum (x + \sqrt{x^2 + xy + yz + zx})) (\sum x) \\ &\geq 3(\sum yz) + 2(\sum x)^2 \end{aligned}$$

Bởi vì

$$\sum \sqrt{x^2 + (xy + yz + zx)} \geq \sqrt{(\sum x)^2 + 9(\sum yz)}.$$

Nên chỉ cần chứng minh

$$(\sum x) \sqrt{(\sum x)^2 + 9(\sum yz)} \geq (\sum x)^2 + 3(\sum yz).$$

Nhưng điều này là hiển nhiên sau khi bình phương hai vế của BĐT. $\square$

Bây giờ ta sẽ nói về một thủ thuật đã được áp dụng khá nhiều trong những năm gần đây để giải các bài toán thi. Đây chính là một trong những phương án của BĐT CBS:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{b_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2}{\sum_{k=1}^n b_k},$$

với mọi a_k thực và b_k dương, $k = 1, 2, \dots, n$.

Một áp dụng đơn giản của thủ thuật này là bài toán sau, được đề nghị tại Cuộc thi giữa các thành phố (Tournament of The Towns Competition).

★ **Thí dụ 7.** Chứng minh rằng với các số thực dương a, b, c ta có bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} &\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \\ &\geq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}. \end{aligned}$$

Lời giải. Nếu viết lại vế phải dưới dạng

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)},$$

ta sẽ biết cần làm gì:

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^3}{a^2+ab+b^2} &= \sum \frac{(a^2)^2}{a(b^2+ab+a^2)} \\ &\geq \frac{(\sum a^2)^2}{\sum a(a^2+ab+b^2)}. \end{aligned}$$

Như vậy, ta sẽ có điều phải chứng minh nếu $\sum a(a^2+ab+b^2) \leq (\sum a) \cdot (\sum a^2)$, và thực tế thì ở đây xảy ra dấu bằng. $\square$

Sẽ có những trường hợp mà gần như ta không thể tìm được a_i và b_i . Ta sẽ thảo luận một số bài toán mà trong đó thủ thuật này được áp dụng một cách không hiển nhiên chút nào.

★ **Thí dụ 8.** Chứng minh rằng với ba số dương a, b, c ta có bất đẳng thức

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

(Nhật Bản, 1997)

Lời giải. Cách thức tự nhiên nhất là

$$\sum \frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} = \sum \frac{\left(\frac{b+c}{a}-1\right)^2}{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \geq \frac{\left(\sum \frac{b+c}{a}-3\right)^2}{3+\sum \left(\frac{b+c}{a}\right)^2}$$

vì trong cách này ta thu được một bất đẳng thức ba biến số mà đã biết khá rõ một số tính chất. Như vậy, cần chứng minh rằng nếu

$$x=\frac{b+c}{a}, y=\frac{c+a}{b}, z=\frac{a+b}{c} \text{ thì}$$

$$(x+y+z-3)^2 \geq \frac{3}{5}(x^2+y^2+z^2+3),$$

điều này tương đương với

$$(\sum x)^2 - 15\sum x + 3\sum xy + 18 \geq 0.$$

Đáng tiếc là không thể sử dụng trực tiếp dữ kiện $xy+yz+zx \geq 12$. Vì vậy, cần tìm các bất đẳng thức dạng như $xy+yz+zx \geq k(x+y+z)$. Hằng số tốt nhất là $k=2$ (vì ta có dấu bằng khi $x=y=z=2$). Thật thế, sau một số tính toán trực tiếp, BĐT này có thể viết dưới dạng $(\sum a^3)+3abc \geq \sum ab(a+b)$, và đó chính là BDT Schur. Từ đó, ta có thể viết:

$$\begin{aligned} & (\sum x)^2 - 15\sum x + 3\sum xy + 18 \\ & \geq (\sum x)^2 - 9\sum x + 18 \geq 0. \end{aligned}$$

Và BDT cuối cùng đúng vì $x+y+z \geq 6$. $\square$

Tại kì thi Toán Quốc tế 2001, bài toán 2 đã gây được khá nhiều khó khăn cho các thí sinh. Ta đưa ra một cách tiếp cận khác, cho phép đưa ra một mở rộng đẹp.

★ **Thí dụ 9.** Cho k là số thực, $k \geq 8$. Chứng minh rằng với các số nguyên dương a, b, c ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+kca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+kab}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+1}}.$$

Lời giải. Ta có, theo BDT CBS thì

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}\right) \left(\sum a\sqrt{a^2+kbc}\right) \geq (\sum a)^2.$$

Bây giờ, áp dụng BDT CBS cho tổng thứ hai

$$\left(\sum a\sqrt{a^2+kbc}\right)^2 = \left(\sum \sqrt{a}\sqrt{a^3+kabc}\right)^2$$

$$\leq (\sum a) \left(\sum (a^3+kabc)\right).$$

Như vậy chỉ cần chứng minh

$$(k+1)(\sum a)^3 \geq 9(\sum (a^3+kabc)).$$

Nhưng điều này tương đương với

$$(k-8)(a^3+b^3+c^3) + 3(k+1)(a+b)(b+c)(c+a) \geq 27kabc.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên theo BDT trung bình cộng – trung bình nhân. $\square$

Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho x, y, z là các số lớn hơn 1 thỏa mãn

$$\text{điều kiện } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2. \text{ Chứng minh rằng}$$

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

(Iran, 1998)

Bài 2. Chứng minh rằng nếu các số $a_1, a_2, \dots, a_6$

thuộc đoạn $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$, thì ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a_1-a_2}{a_2+a_3} + \frac{a_2-a_3}{a_3+a_4} + \frac{a_3-a_4}{a_4+a_5} + \frac{a_4-a_5}{a_5+a_6} \\ & + \frac{a_5-a_6}{a_6+a_1} + \frac{a_6-a_1}{a_1+a_2} \geq 0. \end{aligned}$$

Bài 3. Cho $x \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$x(13\sqrt{1-x^2} + 9\sqrt{1+x^2}) \leq 16.$$

(Olympic 30/4, 1996)

Bài 4. Chứng minh rằng với $2n$ số thực $a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ ta có

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)} \geq \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Kvant, 1989)

Bài 5. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực sao cho $(a+b+c)(x+y+z)=3$ và

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4.$$

Chứng minh rằng $ax+by+cz \geq 0$.

(Cuộc thi Mathlinks, 2005)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/360. (Lớp 6) Cho dãy số $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 6, \dots, a_{n+1} = a_n + n, \dots$

- Số 2006 có thuộc dãy số trên không?
- Số thứ 2007 của dãy số trên là số nào?
- Tính tổng của 100 số hạng đầu tiên của dãy số trên?

LÊ TRỌNG CHÂU
(Phòng GD Lộc Hà, Hà Tĩnh)

Bài T2/360. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ACB} = 54^\circ$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = 54^\circ$. Chứng minh rằng $BC < AE$.

TRẦN VĂN HÌNH
(GV THCS Nam Giang, Nam Trực, Nam Định)

Bài T3/360. Cho tổng gồm 2006 số hạng

$$S = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{4+1}{4}} + \dots + \sqrt[2007]{\frac{2007+1}{2007}}$$

Hãy tính $[S]$.

(Kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a).

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T4/360. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - \frac{4}{x} = 2y - \frac{2}{y} \\ 2x = y^3 + 3 \end{cases}$$

LÊ BÁ HOÀNG
(Phòng GD-ĐT Tx. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Bài T5/360. Cho a, b, c là các số không nhỏ hơn $-\frac{3}{2}$ và thỏa mãn điều kiện

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c \geq 0.$$

Chứng minh rằng $a + b + c \geq 0$.

PHAN THỊ MÙI
(GV THCS Trần Quốc Toàn, Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T6/360. Lấy các điểm M, N, P ở phía ngoài tam giác ABC sao cho thỏa mãn các điều kiện: $\widehat{CAN} = \widehat{CBM} = 30^\circ, \widehat{ACN} = \widehat{BCM} = 20^\circ, \widehat{PAB} = \widehat{PBA} = 40^\circ$. Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều.

PHẠM HUY THÔNG
(49 Bạch Mai, Hà Nội)

Bài T7/360. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH . Gọi I, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, AHB, AHC . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác I_1I_2 bằng đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/360. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x).f(y) = f(x + yf(x)), \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

HUỖNH TẤN CHÂU
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T9/360. Tìm số thực m lớn nhất sao cho tồn tại một số thực k thuộc đoạn $[1; 2]$ để bất đẳng thức

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^{2k} \geq (k+1)(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + m$$

được thỏa mãn với mọi số thực dương bất kì a, b, c .

NGUYỄN ĐÌNH NHUẬN
(163A Tôn Thất Thuyết, Khu phố 3, P.5, TX. Đồng Hà, Quảng Trị)

Bài T10/360. Cho dãy số tăng $(u_k), k = 1, 2, \dots, n$.

Lập tập A_n gồm các số dương $u_i - u_j (1 \leq j < i \leq n)$. Chứng minh rằng nếu tập A_n có ít hơn n phần tử thì dãy $(u_k), k = 1, 2, \dots, n$, là một cấp số cộng.

NGUYỄN BÁ THÀNH
(11 ngõ 85, đường Đoàn Xá, P.Đông Hải, Q. Hải An, Hải Phòng)

Bài T11/360. Cho tứ giác $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song và hai đường chéo

AC, BD cắt nhau tại O . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB và OCD cắt nhau tại X và O . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB và OCB cắt nhau tại Y và O . Các đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại Z và T . Chứng minh rằng bốn điểm X, Y, Z, T cùng thuộc một đường thẳng hoặc cùng thuộc một đường tròn.

HÀ DUY HUNG
(GV ĐHSPT Hà Nội)

Bài T12/360. Trong không gian cho đường gấp khúc đóng $A_1A_2...A_n$ có các cạnh tiếp xúc với mặt cầu $\mathcal{C}$ tâm O bán kính R . Gọi G là trọng tâm hệ điểm $A_i, i = 1, 2, ..., n$ (tức là $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$) và kí hiệu $\widehat{A_i} = \widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$ (với quy ước: $A_0 \equiv A_n$ và $A_{n+1} \equiv A_1$).

Chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n \frac{GA_i}{\sin \frac{A_i}{2}} \geq \frac{1}{nR} \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2.$$

HOÀNG KHẮC HIẾU
(K50, Lớp ĐKTD1, ĐHBK Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/360. Một vòng nhẫn được lồng vào một cái thanh dài hình trụ bán kính R như

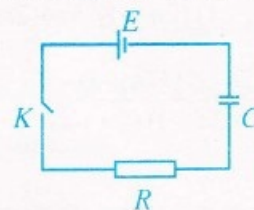
hình vẽ. Khi truyền cho vòng một vận tốc góc



ω_0 thì vòng sẽ dừng lại sau thời gian t_0 . Nếu đồng thời vừa cấp cho vòng vận tốc góc ω_0 vừa truyền cho nó vận tốc dài v_0 dọc theo trục của thanh thì vòng sẽ chuyển động được quãng đường dọc theo thanh cho đến khi nó dừng hẳn là bao nhiêu? Biết rằng vòng nhẵn tiếp xúc khít với thanh lực cản chuyển động đối với mỗi điểm của vòng nhẵn không đổi theo thời gian và luôn luôn hướng ngược chiều với vận tốc của điểm đó. Bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực.

TRẦN VĂN NGA
(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài L2/360. Một tụ có điện dung C được nạp điện tới hiệu điện thế $3E$, sau đó được mắc vào mạch điện như hình vẽ, đóng khóa K . Hãy xác định nhiệt lượng tỏa ra trên điện trở R khi bỏ qua điện trở trong của nguồn.



NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT Amsterdam, Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/360. (For 6th grade)

Consider the following sequence $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 6, ..., a_{n+1} = a_n + n, ...$

- Is 2006 a number in the above sequence?
- What is the 2007th number in this sequence?
- Calculate the sum of the first 100 numbers in the above sequence?

T2/360. (For 7th grade)

Let ABC be a right triangle with right angle at A , and $\widehat{ACB} = 54^\circ$. Choose a point E on the open ray in opposite direction to CA such that $\widehat{ABE} = 54^\circ$. Prove that $BC < AE$.

T3/360. Consider the following sum of 2006 terms

$$S = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{4+1}{4}} + ... + \sqrt[2007]{\frac{2007+1}{2007}}.$$

Find $[S]$.

(Here $[a]$ denote the largest integer which does not exceed a).

T4/360. Solve the following system of equations

$$\begin{cases} x - \frac{4}{x} = 2y - \frac{2}{y} \\ 2x = y^3 + 3. \end{cases}$$

T5/360. Let a, b, c be numbers, all greater than or equal $-\frac{3}{2}$, such that

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c \geq 0.$$

Prove that $a + b + c \geq 0$.

(Xem tiếp trang 27)



★ Bài T1/356. Tính tổng sau gồm 1002 số hạng

$$S = \frac{1.3}{3.5} + \frac{2.4}{5.7} + \dots + \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} + \dots + \frac{1002.1004}{2005.2007}$$

Lời giải. Ta biến đổi số hạng tổng quát như sau:

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{4(n^2-1)}{4(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{(2n-1)(2n+1)-3}{4(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Cho n lần lượt nhận giá trị 2, 3, ..., 1003, ta được

$$\frac{1.3}{3.5} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right);$$

$$\frac{3.5}{5.7} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right);$$

.....

$$\frac{1002.1004}{2005.2007} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2005} - \frac{1}{2007} \right).$$

Do đó

$$\begin{aligned} S &= 1002 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2005} - \frac{1}{2007} \right) \\ &= \frac{501}{2} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2007} \right) = \frac{167501}{669}. \end{aligned}$$

Vậy $S = \frac{167501}{669}$. □

◀ Nhận xét. 1) Điều then chốt để giải bài toán là tạo ra phân tích

$$\frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Một số bạn có cách phân tích khác nhưng dài hơn.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Đỗ Quỳnh Trang, 6A1, THCS Lâm Thao;

Vĩnh Phúc: Phan Văn Tín, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Kiều Thị Thủy Nguyên, Nguyễn Thị Phương, Lê Thị Thanh Loan, 6A1, THCS Thạch Đà, Mê Linh; Hà Nội: Lê Hồng Dung, 6A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Đỗ Trường Sơn, 6G1, THCS Marie Curie, Lê Minh Phúc, 6A5, Nguyễn Quốc Hoàn, 6A16, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; Hải Dương: Phạm Quý Cường, Vũ Đăng Tú, Phạm Văn Tú, Vũ Thị Hương A, Nguyễn Thị Cúc, Vũ Thị Mai Anh, Vũ Thị Phương, Trịnh Bá Thắng, Chu Thị Tố Uyên, Phạm Thị Hải Yến, Nguyễn Thị Minh Thu, 6A1, Vũ Mai Anh, 6A2, THCS Vũ Hữu, Bình Giang;

An Dục Mạnh, 6/3, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương; Hải Phòng: Vũ Hải Long, 6A8, THCS Chu Văn An; Nghệ An: Trần Dương Hằng, 6C, THCS Thông Tân, Hưng Nguyên; Hà Tĩnh: Nguyễn Thị Kim Oanh, 6C, THCS Bắc Hồng, Hồng Lĩnh; Thừa Thiên - Huế: Hoàng Phước Nhã Thi, 6A, THCS Nguyễn Tri Phương, TP. Huế; Quảng Ngãi: Nguyễn Thị Trần, 6A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; TP. Hồ Chí Minh: Nguyễn Trần Thiên Nghĩa, 6/6, THCS Trương Văn Ngu, Q. Thủ Đức.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T2/356. Gọi BE và CF là hai đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A khi và chỉ khi

$$AB + BE = AC + CF.$$

Lời giải. Cách 1. Đặt $AB = c$, $AC = b$ và gọi S là diện tích tam giác ABC.

Ta có

$$AB + BE = AC + CF$$

$$\Leftrightarrow c + \frac{2S}{b} = b + \frac{2S}{c}$$

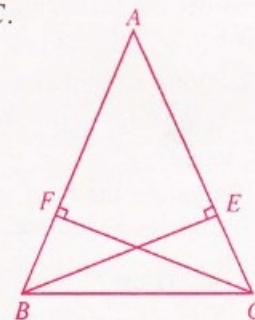
$$\Leftrightarrow b - c + \frac{2S(b-c)}{bc} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-c) \left(1 + \frac{2S}{bc} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow b - c = 0 \left(\text{do } 1 + \frac{2S}{bc} > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại A.}$$

Cách 2. • Điều kiện cần. Để thấy nếu ΔABC cân tại A thì $AB + BE = AC + CF$.



- Điều kiện đủ. Giả sử $AB + BE = AC + CF$.

Ta có

$$AB \cdot CF = AC \cdot BE (= 2S_{ABC})$$

$$\text{nên } \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF} = \frac{AB+BE}{AC+CF} = 1. \text{ Dẫn tới}$$

$$AB = AC \text{ hay } \triangle ABC \text{ cân tại A. } \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn giải đúng (chỉ có 2 bạn giải sai). Khi chứng minh điều kiện đủ (ở cách 2), sử dụng phương pháp đánh giá, nhiều bạn cũng có lời giải ngắn gọn.

2) Các bạn có lời giải ngắn gọn là:

Phú Thọ: Nguyễn Văn Hùng, 7E, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Vinh Phúc:** Nguyễn Thị Hồng Hạnh, 6A1, THCS Thạch Đà, Mê Linh, **Khổng Hoàng Trang,** 7D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Thanh Hóa:** Đinh Uýt Nảy, 6B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** Cao Hữu Bang, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Đặng Trung Anh,** 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Thừa Thiên - Huế:** Hoàng Phước Nhã Thi, 6¹, Trần Thị Khánh Quỳnh, 8¹, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế; **Bình Định:** Võ Thị Kim Yến, 7A2, THCS Phước Quang, Tuy Phước.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T3/356.** Cho A là một số tự nhiên lớn hơn 9 và tạo bởi các chữ số 1, 3, 7, 9. Chứng minh rằng A luôn có ít nhất một ước nguyên tố lớn hơn hoặc bằng 11.

Lời giải. Chú ý: Nếu $x, y \in \{1, 3, 7, 9\}$, h và k đều là các số chẵn thì $xy = 10u + v$, trong đó $v \in \{1, 3, 7, 9\}$, u là số chẵn và

$$(10h+x)(10k+y) = 100hk + 10(hy+kx+u) + v, \text{ trong đó } hy+kx+u \text{ là số chẵn. Từ đó}$$

$$(10h+x)(10k+y) = 10t + v \text{ với } v \in \{1, 3, 7, 9\}, t \text{ là số chẵn.}$$

Bây giờ giả sử rằng A có ước số nguyên tố p với $p < 11$ thì $p \neq 2, p \neq 5$ (theo giả thiết), nên $p=3$ hoặc $p=7$, do đó A có dạng $A = 3^m \cdot 7^n$ với $m=0, n>1$, hoặc $n=0, m>2$, hoặc $m>0, n>0$.

Theo Chú ý trên thì A phải có chữ số chẵn ở hàng chục, trái giả thiết. Vậy ước số nguyên tố của A phải không nhỏ hơn 11. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vinh Phúc:** Lê Thị Tuyết Mai, 8A1, THCS Yên Lạc, **Mạc Thị Thu Huệ,** 7A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch; **Hà Nội:** Đỗ Trường Sơn, 6G1, THCS

Marie Curie, Q. Thanh Xuân; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 8B, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn, **Nguyễn Văn Huy,** 8A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Đinh Viết Tú, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VIỆT HÀI

★ **Bài T4/356.** Cho 10 số thực không âm $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ thỏa mãn các điều kiện $a_i^2 + b_i^2 = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) và $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}.$$

Lời giải. • Trước hết ta chứng minh BĐT

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2 (*)$$

Thật vậy, BĐT (*) tương đương với

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 + (c-d)^2 + (b-d)^2 + (a-d)^2 \geq 0.$$

BĐT này luôn đúng và xảy ra đẳng thức khi $a = b = c = d$.

- Từ điều kiện của bài toán suy ra

$$b_1^2 = 1 - a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2.$$

Áp dụng BĐT (*) ta có

$$4b_1^2 = 4(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \geq (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2.$$

Do b_1, a_2, a_3, a_4, a_5 là các số không âm nên khai căn hai vế ta được

$$2b_1 \geq a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_2 = a_3 = a_4 = a_5$.

Tương tự, ta cũng có

$$2b_2 \geq a_1 + a_3 + a_4 + a_5 \quad (2)$$

$$2b_3 \geq a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \quad (3)$$

$$2b_4 \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_5 \quad (4)$$

$$2b_5 \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (5)$$

Cộng theo vế của (1), (2), (3), (4), (5) nhận được $2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) \geq 4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$

Do đó $P \geq 2$.

$$P = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 \\ a_i^2 + b_i^2 = 1 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_i = \frac{\sqrt{5}}{5}, b_i = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 tại $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ và $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. $\square$

Nhận xét. 1) Bài toán này có nhiều bạn tham gia và đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên, đa số các bạn đều thừa nhận và áp dụng ngay BĐT Bunyakovski cho hai bộ bốn số.

2) Một số bạn đã nêu và chứng minh bài toán tổng quát:

Cho $2n$ ($n \geq 2$) số thực không âm a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) thỏa mãn các điều kiện $a_i^2 + b_i^2 = k$ và $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = k$ ($k > 0$). Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ bằng $\sqrt{n-1}$, đạt được tại $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \sqrt{\frac{k}{n}}$ và $b_1 = b_2 = \dots = b_n = \sqrt{\frac{k(k+1)}{n}}$.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Phạm Duy Long, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; Phạm Đức Nam, 9B, THCS Cự Khối, Long Biên; **Phú Thọ:** Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, THCS Lâm Thao; **Hà Tây:** Nguyễn Thế Anh, 9C, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Nghệ An:** Phạm Lê Nhất Hoàng, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Bình Định:** Nguyễn Đồng Tiến, THCS Lương Thế Vinh, Quy Nhơn.

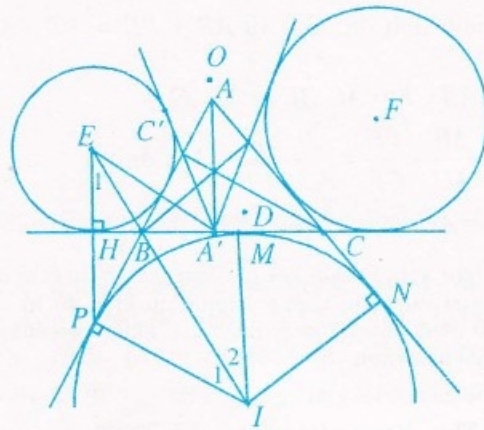
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ Bài T5/356. Cho tam giác ABC không vuông với các đường cao AA', BB', CC' . Gọi D, E, F lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp trong các góc $B'AC', C'A'B, B'A'C$ của các tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$ tương ứng.

Đường tròn bàng tiếp trong góc BAC của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là trực tâm của tam giác MNP .

Lời giải. Kí hiệu (X) là đường tròn tâm X . Gọi I là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của $\triangle ABC$, H là tiếp điểm của (E) trên BC . Do $AC'A'C$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{EA'H} = \frac{1}{2}\widehat{BA'C'}$

$$= \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{IAP}.$$



Suy ra $\triangle EA'H \sim \triangle IAP$ hay

$$\frac{HA'}{PA} = \frac{EH}{IP} = \frac{EH}{IM} = \frac{HB}{BM} = \frac{HB}{BP},$$

Suy ra $\frac{HB}{HA'} = \frac{PB}{PA}$ nên $HP \parallel AA'$ tức là E, H, P thẳng hàng và $EP \parallel IM$.

Do đó $\widehat{E_1} = \widehat{I_1} = \widehat{I_2}$, nên $EP = PI = IM$. Tức là tứ giác $EPIM$ là hình bình hành, cùng với $EP = PI$ nên $EPIM$ là hình thoi.

Tương tự, các tứ giác $PIND, FNIM$ là hình thoi. Do đó các cạnh EM, PI, DN song song và bằng nhau; FM, NI, DP song song và bằng nhau; nên các tứ giác $EMND, FMPD$ là hình bình hành hay $PM \parallel FD, NM \parallel DE$. Mặt khác, gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DEF$. Ta có $PE = PI = PD$. Suy ra $PO \perp DE$, mà $DE \parallel MN$ nên $PO \perp MN$.

Tương tự $NO \perp MP$ hay O là trực tâm $\triangle MNP$. $\square$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán khó nên có rất ít bạn giải được. Một số bạn không tham gia giải bài này có thể do không hiểu khái niệm đường tròn bàng tiếp hoặc do khó vẽ hình.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, THCS Lâm Thao; **Hà Tây:** Nguyễn Đình Tương, 9A, THCS Phú Lâm, Hà Đông; **Nghệ An:** Vũ Đình Long, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VŨ KIM THỦY

★ **Bài T6/356.** Trong một giải đấu bóng đá có 10 đội bóng thi đấu theo thể thức mỗi đội đều gặp đội khác một lần. Người ta nhận thấy một điều thú vị là với 3 đội A, B, C bất kì, nếu A thắng B và B thắng C thì A thắng C. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai điều sau phải xảy ra:

(i) Có 4 đội A, B, C, D mà A thắng B, B thắng C và C thắng D.

(ii) Có 4 đội mà các trận giữa họ đều hòa.

Lời giải. Ta nói rằng đội A thuộc lớp G_0 nếu A không thắng được trận nào. Với mỗi $k \geq 1$, ta nói A thuộc lớp G_k nếu tồn tại k đội $A_1, A_2, \dots, A_k$ sao cho A thắng A_1, A_1 thắng $A_2, \dots, A_{k-1}$ thắng A_k . Rõ ràng $G_{k+1} \subset G_k$ ($k \geq 1$) đặt $T_0 = G_0, T_k = G_k \setminus G_{k+1}$ ($k \geq 1$). Nhận thấy

i) Các tập T_k đôi một rời nhau.

ii) Nếu hai đội A, B cùng thuộc một tập T_k thì A hòa B. Thật vậy giả sử A thắng B. Vì $B \in G_k$ nên từ định nghĩa suy ra $A \in G_{k+1}$. Mâu thuẫn.

Ta thấy chỉ có hai trường hợp có thể xảy ra:

Trường hợp 1. Tồn tại $k \geq 3$ sao cho $T_k \neq \emptyset$. Lấy $A \in T_k$. Khi đó theo định nghĩa có 4 đội A, A_1, A_2, A_3 sao cho A thắng A_1, A_1 thắng A_2, A_2 thắng A_3 .

Trường hợp 2. Nếu $T_k = \emptyset$, với mọi $k \geq 3$ thì

$$|T_0| + |T_1| + |T_2| = 10.$$

Vậy tồn tại $k \in \{0; 1; 2\}$ sao cho $|T_k| \geq 4$. Khi đó với 4 đội trong T_k thì các trận giữa họ là hòa. □

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Võ Tiến Tú, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hoàng Đức Tâm**, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Hoàng Đức Ý, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Hữu Hồng Quán, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T7/356.** Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương và $abc \geq 1$ thì

$$a + b + c \geq \frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} & a+b+c - \frac{1+a}{1+b} - \frac{1+b}{1+c} - \frac{1+c}{1+a} \\ &= \left(1+a - \frac{1+a}{1+b}\right) + \left(1+b - \frac{1+b}{1+c}\right) + \left(1+c - \frac{1+c}{1+a}\right) - 3 \\ &= (1+a)\left(1 - \frac{1}{1+b}\right) + (1+b)\left(1 - \frac{1}{1+c}\right) + (1+c)\left(1 - \frac{1}{1+a}\right) - 3 \\ &= \frac{(1+a)b}{1+b} + \frac{(1+b)c}{1+c} + \frac{(1+c)a}{1+a} - 3 \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(1+a)b}{1+b} \cdot \frac{(1+b)c}{1+c} \cdot \frac{(1+c)a}{1+a}} - 3 \\ &= 3\sqrt[3]{abc} - 3 \geq 0 \quad (\text{do } abc \geq 1). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức (1) đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \frac{(1+a)b}{1+b} = \frac{(1+b)c}{1+c} = \frac{(1+c)a}{1+a} \quad \text{và } abc = 1 \quad (2) \\ (2) & \Leftrightarrow \frac{(1+a)b}{1+b} = \frac{(1+b)c}{1+c} = \frac{(1+c)a}{1+a} = 1 \\ & \Leftrightarrow ab = bc = ca = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1 \\ & (\text{vì } a, b, c \text{ là các số dương}). \quad \square \end{aligned}$$

◀ **Nhận xét.** Nhiều bạn học sinh đã lưu ý rằng bài toán này chính là bài 2.9 trong cuốn sách "Sáng tạo bất đẳng thức" của tác giả **Phạm Kim Hùng**, nhưng lời giải trên của các bạn học sinh đơn giản và hay hơn lời giải trong cuốn sách đó. Các bạn học sinh THCS sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Nguyễn Ngọc Long, 8A, THCS Thuận Thành; **Phú Thọ:** Nguyễn Quốc Hùng, 7E, THCS Văn Lang, Việt Trì, Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, THCS Lâm Thao, Bùi Nguyễn Tất Thành, 9A2, Nguyễn Nhật Anh, 9D, THCS Giây Phong Châu, Phù Ninh; **Hà Tây:** Nguyễn Thế Anh, 9C, THPT Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Nam Định:** Đinh Thị Ngọc, 9B, THCS Yên Tiến, Ý Yên; **Thanh Hóa:** Lê Trọng Cường, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; Nguyễn Huy Linh, 9B, THCS Yên Bái, Yên Định, Lê Thị Thương, 9E, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Hồ Hữu Quân, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** Võ Thị Thảo, 7C, Đặng Thị Bảo Ngọc, 9A, THCS Trung Lộc, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** Phạm Thị Hồng Vân, 8E, Phạm Thị Quỳnh Vy, 9D, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Đắk Lắk:** Trương Thành Công, 8A, THCS Nguyễn Khuyến, Eakar; **Bình Định:** Nguyễn Đồng Tiến, 8A3, THCS Lương Thế Vinh, Quy Nhơn; **TP. Cần Thơ:** Phạm Thị Tuyết Hạnh, 8A1, THCS Bình Thủy.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T8/356.** Cho dãy số (u_n) ; $n = 0, 1, 2, \dots$ được xác định như sau:

$u_0 = a$ và $u_{n+1} = \sin^2(u_n + 11) - 2007$ với mọi số tự nhiên n , trong đó a là số thực cho trước. Chứng minh rằng

a) Phương trình $\sin^2(x + 11) - x = 2007$ có nghiệm duy nhất. Ký hiệu nghiệm đó là b .

b) $\lim u_n = b$.

Lời giải. (Theo ý của Võ Tá Sơn, 12A1, THPT Trần Phú, Hà Tĩnh).

a) Từ giả thiết, ta thấy ngay $u_n \geq -2007$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét hàm số $f(x) := \sin^2(x + 11) - 2007$, $x \in \mathbb{R}$.

Ta thấy

$$f'(x) = 2\sin(x + 11)\cos(x + 11) = \sin 2(x + 11)$$

$$\text{và } u_{n+1} = f(u_n).$$

Vậy hàm số $g(x) := f(x) - x$ có

$$g'(x) = 2\sin(x + 11)\cos(x + 11) - 1$$

$$= \sin 2(x + 11) - 1 \leq 0,$$

$$g(-2007) = \sin^2(-1996) > 0$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến và có nghiệm duy nhất trong $[-2007; +\infty]$. Gọi nghiệm đó là b , thì phương trình

$$\sin^2(x + 11) - x = 2007$$

có nghiệm duy nhất là b .

b) Ký hiệu $\alpha = \max_{t \in [-2007; -2006]} |g'(t)|$. Khi đó $\alpha \in [0; 1]$.

Ta thấy $-2007 \leq u_n \leq -2006$ và phương trình $|\sin 2(x + 11)| = 1$ vô nghiệm trên $[-2007; -2006]$ nên $0 < \alpha < 1$. Theo định lý Lagrange, ứng với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $c_n \in [-2007; -2006]$ sao cho

$$|u_{n+1} - b| = |g(u_n) - g(b)| = |g'(c_n)| |u_n - b|$$

$$\leq \alpha |u_n - b|.$$

Từ đây, theo phương pháp quy nạp, ta thu được

$$|u_{n+1} - b| \leq \alpha^n |u_1 - b|.$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1} - b| = 0$, tức là $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = b$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là một bài toán chứa đựng kiến thức nâng cao về giải tích: Với hàm số $f(x)$ xác định trên miền D_f có tính chất $|f'(x)| \leq \alpha < 1$ và phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất $x = b$ trong D_f thì dãy số $\{x_n\}$ xác định theo công thức $x_{n+1} = f(x_n)$ có giới hạn b .

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Trịnh Ngọc Dương, 11A1T, ĐHKHTN HN; **Hải Dương:** Đỗ Đức Tài, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương; **Hải Phòng:** Đào Minh Hoàng, 10T, THPT NK Trần Phú; **Phú Yên:** Trần Minh Hoàng, 11A2, THPT DL Duy Tân; **Bến Tre:** Lê Minh Chánh, 12T, THPT chuyên Bến Tre; **An Giang:** Vương Quốc Vũ, 11T, THPT chuyên An Giang; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Dương Văn An, Đinh Ngọc Thái, 11A1, THPT chuyên Bà Rịa - Vũng Tàu.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T9/356.** Cho tam giác ABC không đều. Trên các cạnh BC, CA, AB thứ tự lấy các điểm

$$A_1, B_1, C_1 \text{ sao cho } \frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB}.$$

Chứng minh rằng nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ bằng nhau thì các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB .

Lời giải. Giả sử rằng $\widehat{ABC} \neq \widehat{ACB}$. Gọi R, R_0 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AB_1C_1 . Từ giả thiết bài toán, áp dụng định lý sin, ta được

$$\begin{aligned} \frac{B_1C_1}{BC} &= \frac{C_1A_1}{CA} \\ &= \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{R_0}{R}. \end{aligned}$$

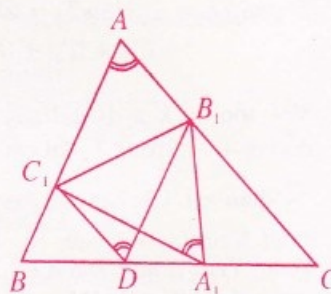
Suy ra $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$, dẫn đến

$$\widehat{B_1A_1C_1} = \widehat{BAC} \quad (1)$$

$$\widehat{B_1C_1A_1} = \widehat{BCA} \quad (2)$$

Dựng $C_1D \parallel AC$ (D thuộc BC). Theo định lý Thalès thì $\frac{CD}{CB} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{CB_1}{CA}$, suy ra $B_1D \parallel AB$.

Từ đó, tứ giác DB_1AC_1 là hình bình hành, nên $\widehat{B_1DC_1} = \widehat{BAC} \quad (3)$



Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{B_1A_1C_1} = \widehat{B_1DC_1}$. Giả sử A_1 không trùng với D , và D nằm giữa B , A_1 (D nằm giữa C , A_1 ta xét tương tự). Lúc đó do bốn điểm D , A_1 , B_1 , C_1 cùng nằm trên một đường tròn, nên

$$\widehat{B_1C_1A_1} = \widehat{B_1DA_1} = \widehat{ABC} \quad (4)$$

Từ (2) và (4) ta thấy $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (mâu thuẫn).

Vì vậy $A_1 \equiv D$, khi đó $\frac{CA_1}{CB} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{BA_1}{BC} \Rightarrow CA_1 = BA_1$. Nghĩa là A_1 là trung điểm của BC . Lúc này B_1 , C_1 tương ứng là trung điểm của AC và AB . $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Hoàng Hải, Trần Bá Trung, Văn Mạnh Tuấn, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Nguyễn Thị Thanh Hoa, 11A1 Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Tường Thế Nghĩa, Đỗ Đức Tài, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Vũ Thanh Tú, 10A1, THPT Kê Sặt, Bình Giang; **Hải Phòng:** Lý Trần Đức Anh, 11 Toán, THPT NK Trần Phú; **Thanh Hóa:** Nguyễn Cao Tuấn, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghe An:** Trần Bình An, 11CT, THPT chuyên ĐH Vinh, Đặng Tuấn Anh, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Luật, 10A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn; **Đắk Lắk:** Nguyễn Trọng Nghĩa, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột; **Phú Yên:** Phạm Quang Thịnh, 8H, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài L1/356.** Hai vật nhỏ cùng khối lượng m được luồn vào một thanh cứng nhẵn nằm ngang và được nối với nhau bằng sợi dây nhẹ không giãn chiều dài $2L$. Ở chính giữa đoạn dây có gắn một vật nhỏ khối lượng $2m$. Ban đầu người ta giữ cho ba vật có cùng độ cao, sợi dây căng rồi sau đó thả nhẹ. Hãy tìm vận tốc cực đại của mỗi vật. Bỏ qua sức cản của không khí.



Lời giải. Do tính đối xứng, vật $2m$ chỉ chuyển động theo phương thẳng đứng.

Xét thời điểm các vật m có vận tốc u , vật $2m$ có vận tốc v . Do dây không giãn nên hình

chiếu vận tốc của các vật m và $2m$ trên phương dây phải bằng nhau, tức là

$$v \cos \varphi = u \sin \varphi \Rightarrow u = v \cot \varphi \quad (1)$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta có

$$2mgh = 2m \cdot \frac{u^2}{2} + 2m \cdot \frac{v^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2gh = u^2 + v^2$$

$$\Leftrightarrow 2gh = v^2 + (1 + \cot^2 \varphi) \frac{v^2}{\sin^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gh \cdot \sin^2 \varphi \quad (2)$$

Mặt khác $h = L \cos \varphi$.

Do đó

$$v^2 = 2gL \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi = 4gL \sqrt{\cos^2 \varphi \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{2}}$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số không âm $\cos^2 \varphi$, $\frac{\sin^2 \varphi}{2}$, $\frac{\sin^2 \varphi}{2}$ ta được

$$v^2 \leq 4gL \sqrt{\left(\frac{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{2} + \frac{\sin^2 \varphi}{2} \right)^3}{3}}$$

$$\text{Suy ra } v^2 \leq \frac{4}{3\sqrt{3}} gL.$$

$$\text{Do vậy } v_{\max} = \sqrt{\frac{4gL}{3\sqrt{3}}}, \text{ xảy ra khi}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}} \text{ hay } \varphi \approx 54^\circ 44'.$$

Từ (1) và (2) ta có $u^2 = 2gL \cos^3 \varphi$.

Do đó $u_{\max} = \sqrt{2gL}$, xảy ra khi $\cos \varphi = 1$

hay $\varphi = 0^\circ$. $\square$

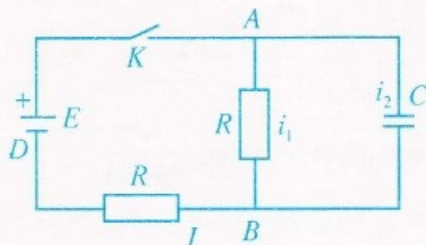
◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Thị Minh Thu, Nguyễn Kim Ngọc, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** Đặng Tiến Thuật, 12G, THPT Tam Nông; **Bắc Ninh:** Trịnh Văn Tâm, Trần Văn Long, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Dương:** Nguyễn Hữu Việt, 11A1, THPT Tứ Kỳ; **Hưng Yên:** Phạm Đức Linh, 11 Lí,

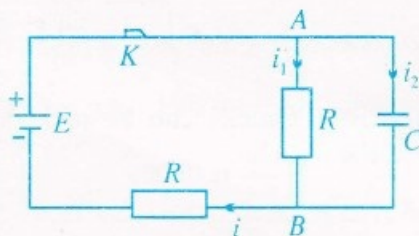
THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Sơn, Nguyễn Tất Nghĩa, Trần Văn Giai, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Tiền Giang:** Lê Mai Phương Thảo, 10 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Ngọc Duy, 10 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/356.** Ở sơ đồ dưới đây hãy tìm sự phụ thuộc của hiệu điện thế $U_{AB} = U_C$ của tụ điện C theo thời gian t nếu đóng khóa K lúc $t = 0$.



Lời giải. Kí hiệu chiều dòng điện như hình vẽ.



Từ định luật Ohm ta có

$$i_1 R + i_1 R = E$$

$$U_{AB} = U_C = i_1 R$$

Mặt khác
$$i_2 = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$$

Tại nút B thì
$$i = i_1 + i_2$$

Thay (4) vào (1) được
$$2i_1 R + i_2 R = E$$

Thay (2), (3) vào (5):
$$2U_C + RC \frac{dU_C}{dt} = E$$
 (6)

Qua vài phép biến đổi (6), ta được

$$\frac{d(E - 2U_C)}{E - 2U_C} = -\frac{2dt}{RC}$$

Lấy tích phân biểu thức trên:

$$\int \frac{d(E - 2U_C)}{E - 2U_C} = -\int \frac{2dt}{RC}$$

Ta được

$$\ln(E - 2U_C) = -\frac{2t}{RC} + C$$

Khi $t = 0$ thì $U_C = 0$ nên $C = \ln E$.

Vậy
$$U_C = \frac{E}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}} \right)$$
 □

◀ **Nhận xét:** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thanh Hóa: Nguyễn Duy Hùng, 11F, THPT chuyên Lam Sơn; **Nguyễn Văn Trinh**, 12A1, THPT Đông Sơn I; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Kim Huyền, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Hưng Yên:** Phạm Đức Linh, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Ninh Bình:** Mai Trọng Phúc, 11A9, THPT Yên Mô A; **Vĩnh Phúc:** Tạ Đức Mạnh, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Trần Anh Vũ, 11T, THPT Dân lập Đào Duy Từ; **Bắc Ninh:** Trần Việt Long, Trịnh Văn Tâm, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nghệ An:** Nguyễn Tất Nghĩa, Lê Đình Khiết, Nguyễn Đức Sơn, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu.

NGUYỄN VĂN THUẬN

ỨNG DỤNG... (Tiếp trang 9)

Bài 3. Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương n . Tìm số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ gồm $p-1$ số tự nhiên sao cho tổng

$x_1 + 2x_2 + \dots + (p-1)x_{p-1}$ chia hết cho p , trong đó mỗi số $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ đều không lớn hơn $n-1$.

Bài 4. Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương n lớn hơn $2p$. Tìm số tập con X của tập $\{1, 2, \dots, n\}$, biết rằng X chứa đúng $2p$ phần tử và tổng tất cả các phần tử của X chia hết cho p .

Bài 5. Cho hai số nguyên dương m và n trong đó $n+2$ chia hết cho m . Hãy tính số các bộ năm số nguyên dương (x, y, z, v, t) thỏa mãn điều kiện tổng $x + y + z + v + t$ chia hết cho m , trong đó mỗi số x, y, z, v, t đều không lớn hơn n .

Bài 6. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con X của tập $\{1, 2, \dots, 2p+1\}$, biết rằng X chứa đúng p phần tử và tổng tất cả các phần tử của X khi chia cho p có số dư bằng 1.



Sách giáo khoa (SGK) Toán lớp 11 theo chương trình chuẩn có nhiều điểm khác biệt so với SGK Toán 11 hiện đang lưu hành.

Về chương trình, nhằm phục vụ cho các môn Vật lý và Sinh học ngay từ đầu lớp 12 nên hai chương Đạo hàm và Tổ hợp - Xác suất đã được chuyển từ lớp 12 xuống lớp 11. Vì phải đưa thêm hai chương mới này nên các chương Hàm số mũ, Hàm số logarit được chuyển sang lớp 12. Ngoài ra, một số nội dung trước đây có trong chương trình nhưng xét thấy không thật cần thiết cho học sinh nên đã bỏ đi hoặc chuyển sang bài đọc thêm như Hệ phương trình lượng giác hoặc Bất phương trình lượng giác.

Trong SGK Hình học 11 ngoài những vấn đề truyền thống như đường thẳng và mặt phẳng, quan hệ song song và quan hệ vuông góc, chương đầu tiên giới thiệu các phép biến hình trong mặt phẳng nhằm chính xác hóa khái niệm hai hình bằng nhau và hai hình đồng dạng mà các em đã được làm quen khi học về tam giác ở cấp THCS.

Đồng thời việc giới thiệu phép tịnh tiến còn giúp cho việc trình bày đồ thị hàm số lượng giác trong Đại số và Giải tích 11: Đồ thị hàm số $y = \cos x$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \sin x$ bằng một phép tịnh tiến.

Về phương pháp, SGK Toán 11 theo chương trình chuẩn vẫn tiếp tục đường lối đã thực hiện

trong SGK Toán 10 là cố gắng dẫn dắt để hình thành các khái niệm một cách tự nhiên, tránh xu hướng áp đặt các định nghĩa một cách máy móc, đặc biệt đối với các khái niệm khó. Chẳng hạn khái niệm phương trình lượng giác, lâu nay trong các sách đã trình bày theo một dạng phương trình mở rộng, có cả đơn vị độ tham gia vào phương trình, như phương trình

$$\sin(x + 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Về nguyên tắc, không được đưa đơn vị đo vào trong phương trình, hơn nữa nghiệm của phương trình cũng là một số không có đơn vị. Thế mà đối với phương trình lượng giác ta lại có những nghiệm như $x = 25^\circ$ chẳng hạn. Để giải quyết mâu thuẫn này, một số nước đã quy định không đưa đơn vị độ vào phương trình lượng giác. Tuy nhiên trong Vật lý, do đặc sử dụng nhiều phương trình lượng giác để xác

định độ lớn về độ của các góc, vì vậy ta chấp nhận cách trình bày không thật chuẩn này. Do đó chúng tôi không đưa ra một định nghĩa chính thức về phương trình lượng giác mà chỉ

giới thiệu một số ví dụ để dẫn dắt tới khái niệm phương trình lượng giác.

Về mức độ, SGK Toán 11 không thiên về các kĩ năng giải toán phức tạp, đòi hỏi các công thức khó nhớ, hoặc các mẹo mực không cần thiết. Chẳng hạn, chương Phép biến hình chỉ yêu cầu giới thiệu một số phép cụ thể mà học sinh đã làm quen ở lớp dưới, qua đó dẫn tới phép dời hình và phép đồng dạng, chứ không rèn luyện kĩ năng sử dụng phép biến hình để giải toán. Đây không phải là yêu cầu đối với học sinh theo chương trình chuẩn, có chăng chỉ nên rèn luyện trong các lớp chuyên. Các chương Phương trình lượng giác, Giới hạn, Đạo hàm cũng vậy, chỉ giới thiệu những dạng đơn giản. Muốn tìm hiểu những bài toán phức tạp hơn, xin xem sách "Tài liệu tự chọn nâng cao" cũng phát hành cùng với bộ SGK.

Về sách giáo khoa Toán 11 THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

TRẦN VĂN HẠO
(Tổng chủ biên)

Kết quả cuộc thi **CHÀO IMO 2007**



Cuộc thi **CHÀO IMO 2007** trên tạp chí **THTT** được chia làm ba đợt (mỗi đợt gồm 5 bài toán), lần lượt đăng trên các số báo 355, 356, 357 nhằm mục đích chào mừng Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 48 năm 2007 được tổ chức tại Hà Nội từ ngày 19 đến ngày 31 tháng 7. Cuộc thi này được nhiều bạn ở khắp cả nước tham gia. Đặc biệt có một số bạn ở bậc **THCS** đã gửi lời giải tốt cho nhiều bài toán. Sau đây là danh sách các bạn đoạt giải của cuộc thi.

GIẢI NHẤT (2 giải) *****

- 1) Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, THCS Lâm Thao, Phú Thọ.
- 2) Hoàng Đức Hải, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nghệ An.

GIẢI NHÌ (3 giải) *****

- 1) Đỗ Văn Đức, 10A₂ Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội;
- 2) Nguyễn Quốc Đại, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định;
- 3) Đặng Tuấn Anh, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nghệ An.

GIẢI BA (10 giải) *****

- 1) Phạm Quang Thịnh, 8H, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa, Phú Yên;
- 2) Tăng Văn Bình, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An;
- 3) Mạc Thế Trường, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc;
- 4) Nguyễn Tiến Hưởng, 10A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, Thái Bình;
- 5) Trần Như Ngọc, 10A₄, THPT Nguyễn Bình Khiêm, Krông Păk, Đắk Lắk;

6) Võ Văn Tuấn, 10 Toán, PTNK ĐHKHTN - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh;

7) Nguyễn Lưu Bách, 11A₁ Toán, Khối THPT chuyên ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội;

8) Trịnh Ngọc Dương, 11A₁ Toán, Khối THPT chuyên ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội;

9) Từ Đức Phong, 11C3, THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai;

10) Lê Minh Triết, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh.



THTT



CÔNG TY CỔ PHẦN XNK BÌNH TÂY (BITECH)

Tp.HCM: 110 -112 Hậu Giang P6 Q6; Hà Nội: 128 Bạch Mai Q.Hai Bà Trưng
Nhà phân phối chính thức máy tính **CASIO** tại Việt Nam

HÂN HẠNH TÀI TRỢ CUỘC THI NÀY

English through math problems and solutions

UNIT 4

Problem

In normal weather conditions, an aircraft travelled 648 nautical miles between A and B at a average speed of x knots. In bad weather, the distance travelled was increased to 700 nautical miles and the average speed was reduced to $(x - 40)$ knots.

- (a) Write down expressions involving x for
- the normal weather flying time in hours;
 - the bad weather flying time in hours.
- (b) Given that the difference between the flying times is y minutes, write down, but do not simplify, an equation involving x and y .
- (c) Given that $x = 540$, calculate y .

PROBLEMS ... (Tiếp trang 17)

T6/360. Let M , N and P be three points outside a given triangle ABC such that $\angle CAN = \angle CBM = 30^\circ$, $\angle ACN = \angle BCM = 20^\circ$, $\angle PAB = \angle PBA = 40^\circ$. Show that MNP is an equilateral triangle.

T7/360. Let ABC be a right triangle with right angle at A and let AH be the altitude through A . Denote by I , I_1 , I_2 the incenters of the triangles ABC , AHB and AHC , respectively. Prove that the circumcircle of the triangle I_1I_2 is exactly the incircle of the triangle ABC .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/360. Find all functions $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ which satisfies the following identity

$$f(x)f(y) = f(x + yf(x)), \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

T9/360. Find the largest real number m such that there exists a number k in the interval $[1; 2]$ such that the following inequality

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^{2k} \geq (k+1)(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + m$$

is satisfied for all positive real numbers a, b, c .

T10/360. Let (u_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, be an increasing sequence and let A_n be the set of all positive numbers of

Vocabulary

normal	thông thường
condition	điều kiện
aircraft	máy bay
mile	dặm
nautical	(thuộc) biển, (thuộc) hàng hải
	(dặm đất liền $\approx 1,609$ km dặm biển $\approx 1,852$ km)

knot = one nautical mile per hour

một dặm trên giờ (đơn vị tốc độ của một chiếc tàu thủy hay máy bay)

speed tốc độ (đơn vị vô hướng, thường dùng với distance thành cặp tốc độ - quãng đường)

velocity vận tốc (đơn vị có hướng, thường dùng với displacement thành cặp vận tốc - sự dịch chuyển)

expression biểu thức

fly bay

simplify rút gọn, đơn giản hóa

equation phương trình

involve liên quan đến, bao gồm

calculate tính, hãy tính

Solution. (Chờ các bạn gửi về)

VŨ KIM THỦY

the form $u_i - u_j$ ($1 \leq j < i \leq n$). Prove that if A_n has fewer than n elements, then (u_k) , $k = 1, 2, \dots, n$ forms an arithmetic sequence.

T11/360. Let $ABCD$ be a quadrilateral with non-parallel opposite sides and let O denote the intersection of the diagonals AC and BD . The circumcircles of the triangles OAB and OCD meet at X and O . The circumcircles of the triangles OAB and OCB meet at Y and O . The circles with diameters AC and BD intersect at Z and T . Prove that either X, Y, Z, T are colinear or they lie in a circle.

T12/360. Consider a closed polygon $A_1A_2\dots A_n$ where each of its n sides is tangent to a sphere $\mathcal{C}$ at center O and radius R . Let G be the centroid of the system of points A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (that is, $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \dots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$) and denote $\angle A_i = \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (with the convention that $A_0 \equiv A_n$ and $A_{n+1} \equiv A_1$).

Prove the inequality

$$\sum_{i=1}^n \frac{GA_i}{\sin \frac{A_i}{2}} \geq \frac{1}{nR} \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2.$$

Người dịch

LÊ MINH HÀ

(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

TOÁN HỌC
& Tuổi trẻ

Số 360 (6-2007) 27

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu Toán

Trí thông minh là tổng hợp các năng lực trí tuệ của con người như: óc xem xét, trí nhớ, sức tưởng tượng và chủ yếu là năng lực suy nghĩ mà đặc trưng cơ bản nhất là *năng lực suy nghĩ độc lập và sáng tạo*.

Một học sinh học toán thông minh biểu hiện ở các điểm sau đây:

– Nắm kiến thức cơ bản một cách chính xác, có hệ thống, hiểu, nhớ và vận dụng được các kiến thức toán học;

– Có năng lực phân tích, tổng hợp, trừu tượng hóa, khái quát hóa, cụ thể hóa, quy nạp và suy diễn;

– Có năng lực suy nghĩ độc lập, tức là tự mình thấy được vấn đề, phát hiện và tìm ra cách giải quyết, có đầu óc phê phán;

– Có năng lực suy nghĩ linh hoạt, sáng tạo, tức là không theo con đường mòn.

Tuy nhiên không nên tuyệt đối hóa trí thông minh, vì trí thông minh của con người có nhiều mức độ.

Những khả năng trung bình của con người hoàn toàn đủ để nắm vững toán học ở trường phổ thông nếu có chỉ dẫn tốt và những cuốn sách tốt" (Viện sĩ Liên Xô Kôn-mô-gô-rôp).

1. Về số học, các bài toán vui sau đây góp phần rèn trí thông minh:

a) "Một giỏ đựng 5 quả cam, hãy chia cho 5 em sao cho em nào cũng được một quả, mà trong giỏ vẫn còn một quả".

Cách chia là: Chia cho 4 em mỗi em một quả, rồi đưa giỏ trong đó còn một quả cam cho em thứ năm.

b) "Một số người cùng ngồi ăn cơm, có họ hàng liên quan với nhau, trong đó có 2 cha, 2 con,

2 chú, 2 cháu, 1 ông, 1 anh, 1 em. Thế là có 12 người! Đúng hay sai? Quan hệ họ hàng của bốn người như thế nào?"

Thật ra, A là cha của B, C là cha của D và là cháu gọi A bằng chú (chú ruột).

2. Về đại số, sau khi học hằng đẳng thức $(x+y)^3$ thì có thể giải bài toán: "Chứng minh hệ thức $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ biết rằng $x + y + z = 0$ ".

Rõ ràng từ

$$x + y + z = 0 \text{ ta có } z = -(x + y).$$

Thay vào vế trái được

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y)^3 \\ &= x^3 + y^3 - x^3 \\ &\quad - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 \\ &= -3xy(x + y), \text{ mà } \\ &\quad -(x + y) = z \text{ nên } \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3xyz, \\ \text{vì} \\ -3xy(x + y) &= 3xyz. \end{aligned}$$



LÊ HẢI CHÂU
(Hà Nội)

Từ đó khi gặp bài toán sau:

"Phân tích đa thức $(y - z)^3 + (y - x)^3 + (x - y)^3$ ta thừa số", thì thấy ngay kết quả sẽ là

$3(y - z)(y - x)(x - y)$. Tương tự sẽ thấy

$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ luôn chia hết cho

$5(x - y)(y - z)(z - x)$ với x, y, z nguyên và từng đôi một không bằng nhau:

Một ví dụ khác

"Ta thấy rằng: $3^2 + 4^2 = 5^2$; $5^2 + 12^2 = 13^2$; $7^2 + 24^2 = 25^2$; $9^2 + 40^2 = 41^2$. Hãy tìm ra quy luật tổng quát dựa vào các ví dụ trên rồi chứng minh nó."

Quy luật tổng quát là

$$(2n + 1)^2 + [2n(n + 1)]^2 = [2n(n + 1) + 1]^2, \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

Tương tự với bài toán sau

"Ta thấy rằng:

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}; \quad 1^2 + 3^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{6}; \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6}.$$

Hãy tìm ra quy luật tổng quát dựa vào các ví dụ trên rồi chứng minh nó".

Ta sẽ tìm được quy luật tổng quát là

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

với $k = 1, 2, 3, \dots$

Từ đây ta lại tìm thêm được

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\ = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ta xét thêm bài toán sau (VMO 1996).

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y} \cdot \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Lời giải tóm tắt như sau:

Với điều kiện $x \neq 0, y \neq 0, x^2 + y^2 \neq 0$, ta được

hệ tương đương
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ 1 = \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}. \end{cases}$$

Nhân từng vế hai phương trình thu được

$$7y^2 - 38xy - 24x^2 = 0 \text{ hay } (y - 6x)(7y + 4) = 0$$

dẫn đến $y = 6x$ vì nếu $(x; y)$ là nghiệm của hệ thì $x, y > 0$.

$$\text{Từ đó } x = \frac{11+4\sqrt{7}}{21}; y = \frac{22+8\sqrt{7}}{7}.$$

Một cách giải khác như sau:

Đặt $\sqrt{x} = u, \sqrt{y} = v$, ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} u \left(1 + \frac{1}{u^2+v^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ v \left(1 - \frac{1}{u^2+v^2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

Nếu coi $u^2 + v^2$ là bình phương giá trị tuyệt đối của số phức $z = u + iv$, chúng ta nhận được

$$u + iv + \frac{u-iv}{u^2+v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} + i \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \quad (*)$$

$$\text{Phân thức } \frac{u-iv}{u^2+v^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \text{ nên } (*) \text{ trở}$$

$$\text{thành } z + \frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}} + i \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\text{hay } z^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + i \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)z + 1 = 0, \text{ mà nghiệm}$$

$$\text{là } \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}\right) + i \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right).$$

Vậy tất cả các số thực x và y thỏa mãn hệ phương trình đã cho là

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2, y = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right)^2.$$

Phong cách học tập mới về toán là: hăng say vượt khó, độc lập suy nghĩ, liên hệ thực tế, học đi đôi với hành; học tập có kế hoạch.

3. Về hình học khi học xong tứ giác hãy tự đặt câu hỏi để tự trả lời:

– Hình thoi và hình vuông có chu vi bằng nhau thì hình nào có diện tích lớn nhất?

– Khi nối trung điểm các cạnh liên tiếp của hình tứ giác bất kì, của hình bình hành, của hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông, hình thang cân thì sẽ tạo được theo thứ tự những hình gì?

– Đa giác nào có tổng các góc trong bằng tổng các góc ngoài?

Cuối cùng giữa trí nhớ và trí thông minh thì phải biết nhớ một cách thông minh, cụ thể:

a) Phải hiểu thì mới nhớ tốt được, chẳng hạn muốn khai triển $(x+y)^4$ thì phải viết nó là dưới dạng $(x+y)^3 \cdot (x+y)$.

b) Phải nắm được mối liên hệ giữa các khái niệm cùng loại, chẳng hạn với hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ thấy rằng nếu viết $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ là sai (!).

c) Phải nhớ bằng hình vẽ, chẳng hạn nắm vững đường tròn lượng giác sẽ nhớ được các công thức tính nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản.

TOÁN HỌC VUI

Hè này bạn có thể lên rừng hoặc xuống biển để nghỉ ngơi sau một năm học vất vả. Lúc rảnh rỗi bạn vẫn có thể đến với tạp chí bằng hai con đường Toán học và Tuổi trẻ. Bạn đã sẵn sàng chưa?

TOÁN HỌC ▶



◀ TUỔI TRÉ

Câu 1.

ĐƯỜNG ĐẾN TẠP CHÍ

Bạn hãy vẽ hai con đường xuất phát từ TOÁN HỌC và xuất phát từ TUỔI TRÉ để đến được chỗ tạp chí. (Nên vẽ đường đi màu đỏ còn mê lộ màu xanh cho dễ nhìn nhé).

BÍNH NAM HÀ

Câu 2. Cắt ghép hình

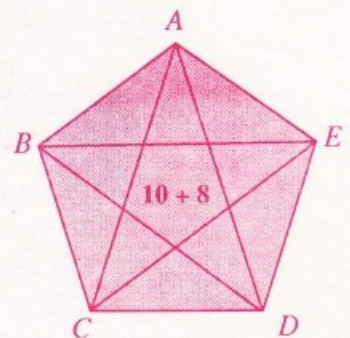
Bạn hãy chỉ ra cách cắt hai tấm bìa hình tròn bằng nhau thành nhiều mảnh rồi ghép tất cả các mảnh lại (không chòem nhau) để tạo thành số 2007 như hình bên. Đừng cắt thành quá nhiều mảnh nhé!

ĐAN QUỲNH

2007

Câu 3. Điền số

Ngũ giác $ABCDE$ (hình vẽ) được chia thành 11 phần rời nhau. Hãy đặt các số tự nhiên từ 1 đến 12 (trừ các số 8 và 10, đã ghi vào phần giữa) vào 10 phần còn trống (mỗi phần có một số) sao cho $T_{ACD} = T_{BDE} = T_{CEA} = T_{DAB} = T_{EBC} = 36$, trong đó kí hiệu T_{XYZ} là tổng các số trong tam giác XYZ .



LÊ BÍCH



**Giải
đáp**

Về hệ thống trường

**ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG,
TRUNG HỌC**

(Để đăng trên THPT số 358 tháng 4 năm 2007)

1. Năm nay, thi vào Đại học có những thay đổi so với năm học trước về quy chế như sau:

- Các môn Lí, Hóa, Sinh tổ chức thi trắc nghiệm (năm ngoái mới chỉ có môn Ngoại ngữ thi trắc nghiệm).

- Học sinh giỏi được giải Quốc gia vẫn phải dự thi Đại học và phải đủ điểm sàn. Việc tuyển thẳng các học sinh này được giao cho các trường đại học tự quyết định.

- Học sinh vi phạm quy chế khi thi tốt nghiệp THPT bị đình chỉ thi sẽ không được thi trong kỳ thi lần 2 tốt nghiệp THPT vào tháng 8 và cũng không được dự thi Đại học năm nay.

- Thí sinh có thể đăng kí nơi thi là nơi đang học chứ không bắt buộc về các điểm thi theo hộ khẩu.

Ngoài ra còn một số thay đổi nhỏ khác. Xem Quyết định 04/2007/QĐ-BGDĐT ngày 22/02/2007 trên trang web: www.edu.net.vn

2. Nước ta đến đầu năm 2007 có tổng cộng 311 trường đại học, đại học vùng, Đại học Quốc gia (không tính các trường trong đại học vùng, trong đại học Quốc gia và các trường riêng của quân đội, cảnh sát) và cao đẳng.

3. Các tỉnh, thành phố thuộc Trung ương có từ 3 trường đại học và đại học trở lên: Hà Nội (43), TP. Hồ Chí Minh (32), Hà Tây (6), Hải Phòng (4), Nam Định (3).

4. Các tỉnh, thành có từ 10 trường đại học, cao đẳng và trung học dạy nghề trở lên: Hà Nội, TP. Hồ Chí Minh, Hải Phòng, Đà Nẵng, Đồng Nai, Hà Tây, Khánh Hòa, Nam Định, Thái Nguyên, Thanh Hóa.

5. Số phần trăm học sinh tốt nghiệp lớp 12 được các trường quốc lập tiếp nhận dự kiến là 13%.

Không có bạn nào trả lời đúng các câu hỏi.

VŨ ĐÔ QUAN

CÙNG BẠN ĐỌC

1. Theo quy định mới của Chính phủ các cơ quan dùng địa chỉ trên mạng phải có các kí tự **.vn**, kể từ tháng 7.2007 tạp chí Toán học và Tuổi trẻ thay đổi địa chỉ email (điện thư) như sau:

tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

2. Bạn nào cần mua số 360 THPT bằng tiếng Anh cần đăng kí với Tòa soạn trước ngày 25.6.2007 (ĐT/Fax: 04.5144272; Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn).

3. Để tránh hiện tượng trùng lặp khi đăng bài, đề nghị các độc giả và cộng tác viên gửi bài đến Tòa soạn chỉ gửi một lần (nếu đã gửi bưu điện thì không gửi điện thư và ngược lại) trừ khi Tòa soạn yêu cầu sửa và gửi lại.

4. Bài L2/355 do bị trùng nên chúng tôi không đăng lại lời giải trong số 359. Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 360(6.2007)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.5121607, 04.5121606

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: 04.5144272

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Toà soạn : ThS. VŨ KIM THỦY

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HẢI, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Phước – Giải một số phương trình vô tỉ có dạng đặc biệt.
- 3 **Lời giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai, năm học 2006-2007.**
- 4 **Đề thi vào lớp 10, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, năm học 2006-2007.**
- 5 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Thử sức trước kì thi – Hướng dẫn giải đề số 4.
- 7 **Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contribution**
Nguyễn Minh Hà – Phép chứng minh khác của định lí Brianchon.
- 8 **Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Trần Việt Anh – Ứng dụng số phức để giải toán tổ hợp.
- 10 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Nguyễn Đăng Phát – Lời giải đại số của bài toán hình học T11/344 (tháng 2 năm 2006).
- 12 **Từ kho tàng toán học – From Math Treasure Trần Nam Dũng – Bất đẳng thức Cauchy–Bunyakovski–Schwarz.**
- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/356, ..., T12/369, L1/360, L2/360.
- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 356.
- 25 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Trần Văn Hạo – Về Sách giáo khoa lớp 11 theo chương trình chuẩn
- 26 **Kết quả cuộc thi Chào IMO2007**
- 27 **Tiếng Anh qua các bài toán và lời giải UNIT 4.**
- 28 **Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán**
Lê Hải Châu – Làm thế nào để học toán một cách thông minh?
- 30 **Toán học vui – Maths Fun**
- 31 **Câu lạc bộ – Math Club**

Biên tập : HỒ QUANG VINH. Mi thuật : MINH THO. Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330

CUỘC THI VIẾT SÁCH BÀI TẬP, SÁCH THAM KHẢO CẤP TIỂU HỌC, THCS VÀ THPT

Thực hiện chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Nhà xuất bản Giáo dục tiếp tục tổ chức cuộc thi Viết sách bài tập, sách tham khảo theo chương trình mới cấp Tiểu học, Trung học cơ sở và Trung học phổ thông. Kính mời các thầy, cô giáo, các chuyên gia giáo dục tham gia viết sách dự thi.



1. Đối với cấp Tiểu học và Trung học cơ sở:

- Viết sách bài tập, sách tham khảo cho học sinh theo cấp (không viết riêng cho từng lớp), đặc biệt lưu ý tới mảng đề tài về bài tập trắc nghiệm theo chủ đề.
- Viết sách tham khảo theo hướng đổi mới phương pháp dạy học dùng cho giáo viên và phụ huynh theo cấp học và từng lớp.

2. Đối với cấp Trung học phổ thông:

- Viết sách tham khảo theo hướng đổi mới phương

pháp dạy học các môn học của lớp 10, 11, 12 dành cho giáo viên và phụ huynh.

- Viết sách bài tập (đặc biệt là bài tập trắc nghiệm) theo các chủ đề của mỗi môn học trong chương trình cấp Trung học phổ thông.

Mời liên hệ : Ban tổ chức Cuộc thi Viết sách bài tập, sách tham khảo.

Địa chỉ: Số 25 Hàn Thuyên, Hà Nội

Điện thoại: 04.8266361. Fax: 04.9717061.

Email: bantkbt@gmail.com

Sách mới Tiếng Anh dành cho Tiểu học **LET'S LEARN ENGLISH**

Hãy học tiếng Anh cùng với các bạn Nam và Mai trong sách

Let's learn English

Đây là bộ sách giáo khoa Tiếng Anh cho Tiểu học, biên soạn theo chương trình mới được Bộ GD & ĐT ban hành.

NXB Giáo dục hợp tác với NXB Panpac Education-Singapore xuất bản bộ sách này. Sách đã được Hội đồng Anh thẩm định và thu bằng.

Sách được thiết kế theo phong cách hiện đại, kết hợp với tranh ảnh minh họa ngộ nghĩnh, tinh tế; đồng thời có bộ thiết bị hỗ trợ cho việc dạy - học gồm băng, đĩa CD, VCD, quần bài, con chữ... rất hấp dẫn với học sinh Tiểu học.



Các Sở Giáo dục và Đào tạo, các Công ty cổ phần Sách - Thiết bị có thể đặt mua tại :

Miền Bắc : Phòng phát hành SGK, NXBGD tại Hà Nội : 187 Giảng Võ, Hà Nội

ĐT : (04).8562011. Fax : (04) 8562493

Miền Trung : Phòng phát hành SGK, NXBGD tại TP. Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng

ĐT : (0511).894504. Fax : (0511).827368

Miền Nam : Phòng phát hành SGK, NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh : 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh

ĐT : (08).8358423. Fax : (08).8390727

TOÀ SOẠN ĐANG PHÁT HÀNH CÁC CUỐN SÁCH THAM KHẢO TÁI BẢN:

❁ Tuyển chọn theo chuyên đề **Toán học và Tuổi trẻ**

QUYỂN 1 Sách dày 300 trang, khổ 19 x 26,5 cm, giá bán lẻ 34.000 đồng

QUYỂN 2 Sách dày 252 trang, khổ 19 x 26,5 cm, giá bán lẻ 30.000 đồng

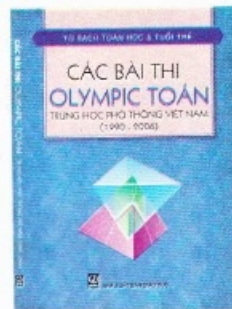
❁ Ấn sau định lý **Plôlê mê**

Sách dày 164 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bán lẻ 21.500 đồng

TỦ SÁCH THPT XIN TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU CÙNG BẠN ĐỌC CUỐN SÁCH:

❁ Các bài thi Olympic Toán THPT Việt nam (1990-2006)

Sách gồm các đề thi và hướng dẫn giải các bài toán thi tuyển chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia THPT (Bảng A và bảng B) từ 1990-2006. Sách cũng đăng các đề thi chọn đội tuyển Toán Quốc gia Việt Nam dự thi Toán Quốc tế từ 1990 đến 2006. Trong sách còn giới thiệu danh sách và thành tích của đoàn Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế từ lần đầu dự thi (năm 1974) đến nay. Sách dày 284 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bán lẻ 39.500 đồng



Địa chỉ liên hệ: **TAP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI**
ĐT/FAX: 04.5144272; Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Toán học rời rạc ứng dụng trong Tin học



Đây là cuốn sách thuộc dạng «best-seller» đã được tái bản 6 lần của Nhà xuất bản (NXB) McGraw-Hill - một trong những NXB Khoa học danh tiếng nhất nước Mỹ. Lần này sách được xuất bản theo hợp đồng chuyển nhượng tác quyền giữa NXB Giáo dục và NXB McGraw-Hill. Sách là cuốn cẩm nang đầy đủ nhất về các cơ sở toán trong tin học như: tập hợp, logic mệnh đề, hàm, thuật toán, ma trận, lí thuyết số, quan hệ, cây, đồ thị, đại số Boole... cùng với các ứng dụng của nó trong tin học. Với lượng kiến thức phong phú, rất nhiều ví dụ và bài tập kèm theo hướng dẫn giải, cuốn sách là một tài liệu tham khảo và tra cứu rất bổ ích cho nhiều đối tượng và được coi là một trong những tài liệu

tham khảo chính dùng để ôn tập trong các kì thi tuyển sinh cao học và nghiên cứu sinh ngành Toán và Công nghệ thông tin.

Sách dày 864 trang, khổ 20,5x29cm, bìa cứng, giá bán lẻ 166000 đồng.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ MUA SÁCH TẠI CÁC CỬA HÀNG SÁCH CỦA NXB GIÁO DỤC:

- Tại TP. Hà Nội: 187B Giảng Võ, 232 Tây Sơn. ĐT (04).7345556
- Tại TP. Đà Nẵng: 15 Nguyễn Chí Thanh, 62 Nguyễn Chí Thanh.
- Tại TP. Hồ Chí Minh: 104 Mai Thị Lựu, Quận 1; 451B - 453, Hai Bà Trưng, Quận 3; 240 Trần Bình Trọng, Quận 5.

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT62M7

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2007

Giá : 5000 đồng

Năm nghìn đồng