



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

1 2007
Số 355

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 44

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (84) 5144272

Email: toanhocvt@yahoo.com Web: <http://www.nxbgd.com.vn/toanhocvuoitre>

**CHÚC
MỪNG
NĂM
MỚI**

Định Hối
2007



HỘI NGHỊ HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP VÀ CÔNG TÁC VIÊN TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2006

VÕ THANH THÀNH

Tại Trung tâm Thực nghiệm Giáo dục Sinh thái và Môi trường Ba Vì, Hà Tây, cách Hà Nội 70 km về phía Tây, sáng 08.12.2006 đã diễn ra Hội nghị Hội đồng Biên tập và Công tác viên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ các tỉnh phía Bắc năm 2006. Tham dự Hội nghị có GS. TSKH. Nguyễn Cảnh Toàn, GS. TSKH. Hà Huy Khoái, Viện trưởng Viện Toán học Việt Nam, Phó ban tổ chức cuộc thi IMO tại Việt Nam năm 2007; ông Nguyễn Minh Khang, Phó Tổng Giám đốc NXB Giáo dục, PGS.TS. Phan Doãn Thoại, Tổng Biên tập tạp chí THPT, TS. Trần Đình Châu, Phó Vụ trưởng Giám đốc dự án THCS, các ủy viên HĐBT, các cán bộ NXB Giáo dục, lãnh đạo các Sở Giáo dục - Đào tạo, các Công ty Sách - Thiết bị Giáo dục các tỉnh Thanh Hóa, Hải Dương, các công tác viên thân thiết từ Nghệ An, Hà Tĩnh trở ra và các biên tập viên, cán bộ toà soạn.

Tổng Biên tập THPT Phan Doãn Thoại đã báo cáo những phương hướng chính trong hoạt động của Tạp chí trong thời gian tới trong bối cảnh mới của đất nước ngày càng hội nhập quốc tế sâu rộng. Phó Tổng Biên tập THPT Phạm Thị Bạch Ngọc báo cáo các hoạt động cụ thể của Tạp chí đã làm trong năm qua và các số liệu cụ thể. Các hoạt động mới là thử nghiệm website, tổ chức thi vui giữa ba tạp chí, mời họa sĩ trình bày, đổi mới mục Tiếng Anh qua các bài toán và lời giải. Thư kí Toà soạn Vũ Kim Thủy báo cáo kế hoạch chuẩn bị ấn phẩm bằng tiếng Anh nhân dịp nước ta tổ chức kì thi IMO 2007.

Phó Tổng Giám đốc NXBGD Nguyễn Minh Khang đã nhấn mạnh: Tạp chí THPT đã phục vụ tốt cho học sinh khá và giỏi Toán cả nước;



là nơi nhận được nhiều ý kiến đóng góp của độc giả và thông tin nhanh nhất về sách Giáo khoa mới góp phần vào nhiệm vụ thay sách mà Bộ Giáo dục và Đào tạo đã giao cho NXBGD. Các ý kiến khác phát biểu cho rằng Tạp chí đã có nhiều cải tiến tốt, có thêm website, trình bày cải tiến, nên có mục Toán học và Phi toán, nêu các vấn đề gắn với cuộc sống, các bài về Lịch sử toán học Việt Nam cần có nhiều hơn. Có mục cho học sinh đăng đề tự sáng tác hoặc thi đề hay, góc đọc báo từ mạng và báo chí nước ngoài, bài viết về sách phân ban, các chuyên đề, các bài viết giao lưu, có cuộc thi giải toán đặc biệt nhân IMO 2007.

Cuối hội nghị ThS. Vũ Kim Thủy báo cáo kết quả cuộc thi thường niên Giải Toán và Vật lí của năm 2006. GS. Nguyễn Cảnh Toàn và PGS. Phan Doãn Thoại đã trao thưởng cho hai học sinh Nguyễn Hoàng Hải (Phú Thọ), Trần Thị Anh Nguyễn (Khánh Hòa) đại diện các học sinh được giải về dự.

Buổi chiều cùng ngày, các đại biểu đã có chuyến tham quan khu di tích lịch sử K9. Năm 2004 THPT đã tổ chức hội nghị công tác viên các tỉnh miền Nam tại TP. Hồ Chí Minh, năm 2005 đã tổ chức hội nghị công tác viên các tỉnh miền Trung tại Đà Nẵng.





Dùng ẩn phụ

ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

VŨ VĂN DŨNG

(GV THCS Nam Sơn, Nam Trực, Nam Định)

Giải phương trình vô tỉ là dạng toán khó thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi cấp THCS và thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT. Với dạng toán này đòi hỏi người giải phải có khả năng tư duy cao và khả năng sử dụng linh hoạt các kiến thức đã học. Việc sử dụng ẩn phụ là công cụ hữu hiệu để giải phương trình vô tỉ. Bài viết này xin đưa ra 5 dạng cơ bản sử dụng ẩn phụ để giải phương trình vô tỉ.

⊛ Dạng 1. Sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$3x^2 + 21x + 18 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 2 \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{x^2 + 7x + 7} = y$, điều kiện (ĐK): $y \geq 0$.

PT (1) có dạng $3y^2 + 2y - 5 = 0$. Từ đó tìm được $y = 1$ (thỏa mãn) và $y = -\frac{5}{3}$ (loại).

Suy ra $\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0$,

PT này có hai nghiệm $x = -1$ và $x = -6$.

Vậy tập nghiệm của PT (1) là $\{-6; -1\}$. □

⊛ Dạng 2. Sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình tích

a) Sử dụng một ẩn phụ

Thí dụ 2. Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x+1} = 1$ (2)

Lời giải. Đặt $\sqrt{x+1} = t$, ĐK: $t \geq 0$.

PT (2) có dạng $(t^2 - 1)^2 + t = 1$

$\Leftrightarrow t(t-1)(t^2 + t - 1) = 0$. Từ đó tìm được

$$t = 0; t = 1; t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ và } t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

Vì $t \geq 0$ nên loại giá trị $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

* Với $t = 0$ thì $x = -1$.

* Với $t = 1$ thì $\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

* Với $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $\sqrt{x+1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\Leftrightarrow x+1 = \frac{(-1+\sqrt{5})^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của PT (2) là

$$\left\{0; -1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}. \quad \square$$

b) Sử dụng hai ẩn phụ

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1} \quad (3)$$

Lời giải. Đặt $u = \sqrt{x+1}$; $v = \sqrt{x^2 - x + 1}$, ĐK: $x \geq -1$, $u \geq 0$, $v > 0$.

Khi đó $u^2 = x+1$, $v^2 = x^2 - x + 1$, $u^2 v^2 = x^3 + 1$, $x^2 + 2 = u^2 + v^2$. PT (3) có dạng

$$2(u^2 + v^2) = 5uv \Leftrightarrow (2u - v)(u - 2v) = 0.$$

Suy ra $u = 2v$ hoặc $v = 2u$.

* Với $u = 2v$ thì $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1}$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0. \text{ PT này vô nghiệm.}$$

* Với $v = 2u$ thì $\sqrt{x^2 - x + 1} = 2\sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0, \text{ PT này có hai nghiệm}$$

$$x = \frac{5+\sqrt{37}}{2} \text{ và } x = \frac{5-\sqrt{37}}{2} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy PT (3) có hai nghiệm

$$x = \frac{5+\sqrt{37}}{2}; \quad x = \frac{5-\sqrt{37}}{2}. \quad \square$$

✪ Dạng 3. Sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp

Thí dụ 4. Giải phương trình

$$2x^2 - 3x + 2 = x\sqrt{3x-2} \quad (4)$$

Lời giải. ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$.

$$\text{PT (4)} \Leftrightarrow 2x^2 - (3x-2) = x\sqrt{3x-2}.$$

Đặt $y = \sqrt{3x-2}$, ĐK: $y \geq 0$. Ta có

$$2x^2 - y^2 = xy \quad (5)$$

PT (5) là phương trình đẳng cấp đối với x và y .
Đặt $y = tx$ thì

$$\begin{aligned} (5) &\Leftrightarrow 2x^2 - t^2x^2 = tx^2 \Leftrightarrow x^2(2 - t^2 - t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 - t^2 - t = 0 \quad (\text{do } x \geq \frac{2}{3}). \end{aligned}$$

Tìm được $t = 1$ và $t = 2$.

* Với $t = 1$ thì $y = x$ do đó $\sqrt{3x-2} = x \Leftrightarrow 3x - 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$, PT này có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$ (thỏa mãn ĐK).

* Với $t = 2$ thì $y = -2x$. Do $x \geq \frac{2}{3}$ nên $y < 0$ (loại).

Vậy tập nghiệm của PT (4) là $\{1; 2\}$. $\square$

✪ Dạng 4. Sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình của ẩn phụ đó, còn ẩn ban đầu coi là tham số

Thí dụ 5. Giải phương trình

$$6x^2 - 10x + 5 - (4x-1)\sqrt{6x^2-6x+5} = 0 \quad (6)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{6x^2-6x+5} = t$, ĐK: $t \geq 0$,
PT (6) có dạng $t^2 - (4x-1)t - 4x = 0$. Coi đây là PT bậc hai ẩn t (x là tham số)

$$\Delta = (4x-1)^2 + 16x = (4x+1)^2.$$

Tìm được $t = -1$ (loại vì $t \geq 0$) và $t = 4x$.

Với $t = 4x$ thì $\sqrt{6x^2-6x+5} = 4x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x + 5 = 16x^2 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Tìm được } x = \frac{-3+\sqrt{59}}{6}.$$

$$\text{Vậy PT (6) có nghiệm } x = \frac{-3+\sqrt{59}}{6}. \quad \square$$

✪ Dạng 5. Sử dụng ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Thí dụ 6. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5 \quad (7)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt[4]{97-x} = a$, $\sqrt[4]{x} = b$, ĐK: $a \geq 0$, $b \geq 0$.

PT (7) có dạng $a + b = 5$.

$$\text{Lại có } a^4 + b^4 = (\sqrt[4]{97-x})^4 + (\sqrt[4]{x})^4 = 97.$$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} a+b=5 \\ a^4+b^4=97. \end{cases}$$

Giải hệ tìm được $a = 3$, $b = 2$ và $a = 2$, $b = 3$ (thỏa mãn ĐK).

Từ đó suy ra $x = 81$ và $x = 16$. $\square$

Nhận xét. Qua 6 thí dụ trên chắc hẳn các bạn đã thấy sự linh hoạt, đa dạng và hữu hiệu của việc sử dụng ẩn phụ vào giải phương trình vô tỉ. Tuy với mỗi bài toán khác nhau có các hướng giải khác nhau, song nếu khéo léo sử dụng ẩn phụ đưa về các dạng cơ bản trên thì việc giải phương trình vô tỉ sẽ ngắn gọn và đơn giản hơn.

Mời các bạn hãy sử dụng ẩn phụ để giải một số phương trình vô tỉ sau đây.

a) $\sqrt{x} + \sqrt{8-x} = 4$;

b) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2$;

c) $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 2$;

d) $\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x$;

e) $(x-1)(x+3) + 2(x-1) \cdot \sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = 8$.



Chào IMO 2007 Việt Nam

(Cuộc thi giải Toán đặc biệt trên Tạp chí THPT)

Hướng tới Olympic Toán học Quốc tế (IMO) lần thứ 48 năm 2007 tổ chức tại Việt Nam, Ban Tổ chức IMO 2007 và tạp chí Toán học & Tuổi trẻ đã quyết định phối hợp mở cuộc thi giải toán đặc biệt trên tạp chí THPT song song với cuộc thi thường niên. Cuộc thi dành cho tất cả học sinh từ lớp 6 đến lớp 12. Khi xét giải sẽ theo từng bậc học. Để các bài toán thi sẽ được đăng thành 3 đợt trên các số 355, 356, 357 (các tháng 1, 2, 3 năm 2007) của Tạp chí mỗi số 5 bài. Đáp án của các bài toán thi sẽ được công bố trên các số 357, 358, 359 (các tháng 3, 4, 5 năm 2007). Danh sách các bạn học sinh được giải sẽ đăng trong số 360 (tháng 6 năm 2007).

Ngoài bằng chứng nhận, các bạn được nhận giải thưởng

Giải Nhất : 300 000 đồng
Giải Nhì : 200 000 đồng
Giải Ba : 100 000 đồng
Giải Khuyến khích : Quển đóng tập một năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ

Các bài giải cần ghi rõ : Họ và tên, Ngày sinh, Giới tính, Lớp, Trường, Địa chỉ gia đình, Số điện thoại (nếu có).

Ngoài phong bì đề : **Bài thi Chào IMO 2007 Việt Nam**. Chỉ gửi về một địa chỉ :

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÉ
187B Giảng Võ, Hà Nội

Thời hạn nhận bài giải là một tháng kể từ ngày ra báo (theo dấu bưu điện). Mong các bạn tích cực hưởng ứng. Chúc các bạn thành công.

BAN TỔ CHỨC CUỘC THI

Đề Chào IMO 2007 - Đợt 1

Bài I-1. Hãy tìm số tự nhiên nhỏ nhất không chia hết cho 11 và có tính chất: Khi thay bất kì chữ số nào bởi một chữ số sai khác với chữ số đó 1 đơn vị ta sẽ nhận được một số chia hết cho 11.

NGÔ VIỆT NGÀ
(Hà Nội)

Bài I-2. Xét tam giác nhọn không cân ABC . Gọi H , I và O tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng hoặc không có đỉnh nào hoặc có đúng hai đỉnh của tam giác ABC nằm trên đường tròn đi qua H , I , O .

EMIL KOLEV
(Bungaria)

Bài I-3. Cho x , y , z là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z).$$

Hồi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

TRẦN NAM DŨNG
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài I-4. Cho bảng ô vuông kích thước 5×5 . Hỏi có thể tô màu 16 ô vuông con của bảng sao cho trong bất kì bảng con 2×2 nào cũng chỉ có không quá 2 ô vuông con được tô màu hay không?

NGUYỄN LÂM CHI
(Khánh Hòa)

Bài I-5. Trên mặt phẳng, cho một số điểm màu đỏ và một số điểm màu xanh. Người ta nối các điểm khác màu với nhau sao cho hai điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:



CÔNG TY CỔ PHẦN XNK BÌNH TÂY (BITEC)

Tp.HCM: 110 -112 Hậu Giang P6 Q6; Hà Nội: 128 Bạch Mai Q.Hai Bà Trưng

Nhà phân phối chính thức máy tính **CASIO** tại Việt Nam

HÂN HẠNH TÀI TRỢ CUỘC THI NÀY

Thông báo về SỐ TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRÉ

bằng tiếng Anh

Hội nghị Hội đồng Biên tập và Cộng tác viên tạp chí THPT ngày 8.12.2006 đã dự định sẽ xuất bản số tạp chí 360 (6.2007) bằng tiếng Anh song song với bản tiếng Việt. Nội dung và hình thức của bản tiếng Anh và tiếng Việt giống nhau. Dự kiến các bài viết sẽ thuộc về các chuyên mục:

- Dành cho các bạn Trung học Cơ sở
- Bước đầu làm quen với toán học hiện đại
- Lịch sử toán học
- Toán học và Đời sống
- Phương pháp giải toán
- Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp
- Tính toán cách nào
- Các đề thi Olympic
- Giải bài kì trước
- Đề ra kì này
- Câu lạc bộ
- Giải trí toán học...

Ấn phẩm này sẽ được dùng làm quà tặng cho các đại biểu, lãnh đạo và học sinh, quan sát viên các đoàn tham dự IMO 2007.

Tòa soạn mong nhận được đề ra và bài viết gửi đăng ở số đặc biệt này. Bản thảo cần được gửi 2 bản (1 bản bằng tiếng Việt, 1 bản bằng tiếng Anh). Bài viết dài không quá 2000 từ, in trên giấy một mặt, hình vẽ rõ ràng, ghi đầy đủ họ và tên, địa chỉ, số điện thoại; gửi trước ngày 2.2.2007 nếu là đề ra, trước ngày 30.3.2007 nếu là bài viết (căn cứ theo dấu bưu điện). Tác giả có file dữ liệu soạn thảo bằng máy vi tính nên gửi kèm theo đĩa hoặc qua Email với font chữ Unicode trong phần mềm Microsoft Word hoặc La Text, PC Text. Bài viết, nếu được đăng, tác giả được hưởng nhuận bút theo chế độ quy định. Bài không đăng không trả lại bản thảo. Ngoài phong bì đề:

Bài gửi cho số Tạp chí bằng tiếng Anh.

Chỉ gửi về một địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÉ
187B Giảng Võ, Hà Nội

Cảm ơn các bạn.

THTT

- 1) Mỗi điểm màu đỏ được nối với ít nhất một điểm màu xanh;
 - 2) Mỗi điểm màu xanh được nối với 1 hoặc 2 điểm màu đỏ.
- Chứng minh rằng có thể xóa đi không quá

một nửa số điểm (trong số các điểm đã cho) sao cho với các điểm còn lại, mỗi điểm màu xanh được nối với đúng một điểm màu đỏ.

NGUYỄN KHẮC HUY
(Hà Nội)

PROBLEMS FOR THE HELLO, IMO 2007

I-1. Find the least natural number not divisible by 11 satisfying the condition: by replacing an arbitrary digit a of it by the digit b (b equals to $a+1$ or $a-1$), the obtaining number is divisible by 11.

I-2. Consider an acute, scalene triangle ABC . Let H , I , O be respectively its orthocenter, incenter and circumcenter. Prove that there is no vertex or there are exactly two vertices of triangle ABC lying on the circle passing through H , I , O .

I-3. Prove that

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z).$$

for arbitrary positive real numbers x , y , z .

I-4. Consider a board of size 5×5 . Can we color 16 small squares of this board so that in each subboard of size 2×2 there are at most two small squares which are colored?

I-5. On the plane, let be given some points colored red and some points colored blue; points with distinct colors are joined so that:

- 1) each red point is joined with at least one blue point,
- 2) each blue point is joined with one or two red points.

Prove that one can erase less than one half of the given points so that for the remaining points, each blue point is joined with exactly one red point.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa

Năm học 2006-2007

Ngày thứ nhất

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1 (2 điểm)

Cho biểu thức

$$A = \frac{4a^2}{(a+1)(a+2)} + \frac{10a+2}{(a+1)(a+3)} + \frac{2a+20}{(a+2)(a+3)}$$

1) Tìm điều kiện của a để A có nghĩa.

2) Rút gọn biểu thức A .

Bài 2 (2 điểm)

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 4x + m = 0$.

1) Giải phương trình khi $m = -60$.

2) Xác định các giá trị của m sao cho phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn điều kiện $x_2^2 - x_1^2 = 8$.

Bài 3 (2 điểm)

Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x+m^2y=3 \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

2) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ sao cho $y_0 = 1$.

Bài 4 (3 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn; AD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H ; O là điểm cách đều ba đỉnh tam giác ABC . Gọi M là điểm đối xứng của B qua O ; I là giao điểm của BM và DE ; K là giao điểm của AC và HM .

1) Chứng minh rằng các tứ giác $AEDC$ và $CMID$ là các tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn.

2) Chứng minh rằng OK vuông góc với AC .

3) Cho số đo góc AOK bằng 60° . Chứng minh rằng tam giác HBO cân.

Bài 5 (1 điểm)

Cho ba số x, y, z khác 0 và thỏa mãn

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0.$$

Hãy tính $A = \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2}$.

Ngày thứ hai

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 6 (1,5 điểm)

Tìm ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$\frac{16}{\sqrt{x-6}} + \frac{4}{\sqrt{y-2}} + \frac{256}{\sqrt{z-1750}} + \sqrt{x-6} + \sqrt{y-2} + \sqrt{z-1750} = 44.$$

Bài 7 (1,5 điểm)

Cho biểu thức $A = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 2009$. Với giá trị nào của x, y thì A đạt giá trị bé nhất, hãy tìm giá trị bé nhất đó.

Bài 8 (1,5 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz-zx=7 \\ x^2+y^2+z^2=14. \end{cases}$$

Bài 9 (2 điểm)

Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện $(x - 2006)^2 = y(y + 1)(y + 2)(y + 3)$.

Bài 10 (2,5 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB lấy hai điểm E và F (E gần A hơn); P là giao điểm của CE và DF . Hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác APE và BPF cắt nhau ở điểm thứ hai Q . Chứng minh rằng $PQ \parallel AD$.

Bài 11 (1 điểm)

Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD = BC$, $AC = BD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng EF vuông góc với AB và CD .



Bàn về CỰC TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC

PHẠM THỊNH

(Xí nghiệp sửa chữa các công trình Dầu khí
Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Trong bài báo này chúng tôi xin được trình bày một cách đánh giá biểu thức

$$P = \frac{ab+bc+ca}{(a^k b^k + b^k c^k + c^k a^k)(a^k + b^k + c^k)}$$

mà bạn Phạm Kim Hùng đã nêu ra trong bài "Khai thác sâu thêm một bài toán bất đẳng thức" (Bài toán 6 THPT số 350).

Vấn đề 1. Cực trị của biểu thức

$$Q = a^{k-1}b^{k-1}(a^k + b^k); (a, b \text{ dương}, a + b = 1).$$

Đặt $a = x$ với $0 < x < 1$, khi đó $b = 1 - x$.

$$\text{Đặt } Q(x) = x^{k-1}(1-x)^{k-1}[x^k + (1-x)^k].$$

Khảo sát hàm $Q(x)$ thấy với $0 < k < 1$ thì

$$Q(x) \geq 2^{3(1-k)} \quad (1)$$

$$\text{với } 1 \leq k \leq 2 \text{ ta có } Q(x) \leq 2^{3(1-k)} \quad (2)$$

Vấn đề 2. Cực trị của biểu thức P

(với a, b, c không âm và $a + b + c = 1$).

Bổ đề 1. Hàm $F(x) = \frac{U(x)}{T(x)}$ xác định trên

$[\alpha; \beta]$ và tồn tại các đạo hàm $U^{(1)}(x);$

$U^{(2)}(x); U^{(3)}(x); T^{(1)}(x); T^{(2)}(x); T^{(3)}(x)$ thỏa

mãn $U(x) > 0; U^{(1)}(x) > 0; U^{(2)}(x) < 0; U^{(3)}(x) \geq 0;$
 $T(x) > 0; T^{(1)}(x) > 0; T^{(3)}(x) < 0; F^{(1)}(\alpha) > 0;$

$U^{(1)}(\beta) = T^{(1)}(\beta) = 0$. Khi đó trên $[\alpha; \beta]$ hàm $F(x)$ luôn đồng biến hoặc $F(x)$ chỉ biến thiên từ một khoảng đồng biến sang một khoảng nghịch biến duy nhất và $F(x) \geq \min\{F(\alpha); F(\beta)\}$ (kí hiệu $F^{(n)}(x)$ là đạo hàm bậc n của hàm $F(x)$).

(Bạn đọc hãy tự chứng minh bổ đề này).

Với mỗi giá trị của $b \neq 0$ đã chọn, không mất tính chất tổng quát ta xét $a \geq c$ và xem P như là hàm biến c với

$$0 \leq c \leq \frac{1-b}{2}; \text{ lưu ý } c = \frac{1-b}{2} \text{ khi}$$

và chỉ khi $a = c$.

$$\text{Đặt } U_b(c) = ab + bc + ca; T_b(c) = a^k b^k + b^k c^k + c^k a^k;$$

$$S_b(c) = a^k + b^k + c^k; \text{ ở đây } a = 1 - b - c \text{ cũng là}$$

một hàm của c và $(1 - b - c)^{(1)} = -1$. Lấy đạo hàm

các hàm $U_b(c); T_b(c); S_b(c)$ với $c \neq 0$ ta có

$$U_b^{(1)}(c) = 1 - b - 2c = a - c \geq 0; U_b^{(2)}(c) = -2.$$

$$S_b^{(1)}(c) = k(c^{k-1} - a^{k-1});$$

$$T_b^{(1)}(c) = [kb^k(c^{k-1} - a^{k-1}) + kc^{k-1}a^{k-1}(a - c)];$$

$$T_b^{(2)}(c) = k(k-1)b^k(c^{k-2} + a^{k-2})$$

$$+ 2k(k-1)c^{k-2}a^{k-2}(a - c)^2 - 2kc^{k-1}a^{k-1};$$

$$T_b^{(3)}(c) = k(k-1)(k-2)b^k(c^{k-3} - a^{k-3}).$$

$$+ k(k-1)(k-2)c^{k-3}a^{k-3}(a - c)^3 - 4k(k-1)c^{k-2}a^{k-2}(a - c).$$

Với $1 < k < 2$ đặt $F_b(c) = \frac{U_b(c)}{T_b(c)}$. Trước hết ta

có hàm $G_b(c) = \frac{1}{S_b(c)}$ luôn đồng biến.

$T_b^{(3)}(c) \leq 0$ nên $T_b^{(2)}(c)$ nghịch biến, khi $c \rightarrow 0$ thì $T_b^{(2)}(c) \rightarrow +\infty$, còn khi $c = 0$ thì $T_b^{(1)}(c) < 0$.

• Nếu $T_b^{(2)}(c) \geq 0, \forall c \in \left(0; \frac{1-b}{2}\right]$ thì hàm $F_b(c)$

luôn đồng biến, khi đó $P_b(c) \geq P_b(0) = \frac{1}{Q} \geq 2^{3(k-1)}.$

• Nếu $T_b^{(2)}(c)$ biến thiên từ dương sang âm, thì $T_b^{(1)}(c)$ biến thiên từ âm sang dương. Khi $T_b^{(1)}(c) > 0$ ta có hàm $F_b(c) = \frac{U_b(c)}{T_b(c)}$ thỏa mãn bổ đề 1 (ở đây $\beta = \frac{1-b}{2}$).

• Khi $F_b(c)$ biến thiên từ đồng biến sang một khoảng nghịch biến duy nhất thì:

Với $0 < b \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow b \leq \frac{1-b}{2}$ ta có $F_b(b) - F_b(0) > 0$.

Từ sự biến thiên của $F_b(c)$ và $F_b(b) > F_b(0)$ suy ra với $b \neq 0; c \leq b \leq \frac{1}{3}$ ta có $P_b(c) \geq G_b(0); F_b(0) \geq 2^{3(k-1)}$ (*)

Với ba số không âm x, y, z mà $x + y + z = 1$ và $x \geq y > \frac{1}{3} > z$.

Đặt $P_1(x; y; z) = F_y(z); P_2(x; y; z) = G_y(z)$.

Hoán vị các giá trị x, y, z sao cho $x \geq z$, sử dụng kết quả (*) và bổ đề 1 ta có

$$F_y(z) \geq \min \left\{ F_y(0); F_y\left(\frac{1-z}{2}\right) \right\}.$$

• Nếu $F_y(0) \leq F_y\left(\frac{1-z}{2}\right)$ thì $P(x; y; z) = F_y(z)G_y(z) \geq F_y(0)G_y(0) = \frac{1}{Q} \geq 2^{3(k-1)}$.

• Nếu $F_y(0) > F_y\left(\frac{1-z}{2}\right) = P_1\left(\frac{x+z}{2}; y; \frac{x+z}{2}\right)$ thì vì $x \geq y > \frac{1}{3} > z \Rightarrow y > \frac{1}{3} > \frac{x+z}{2}$.

Dẫn đến

$$P_1(x; y; z) \geq P_1\left(\frac{x+z}{2}; y; \frac{x+z}{2}\right) = P_1\left(y; \frac{x+z}{2}; \frac{x+z}{2}\right) \geq P_1\left(y + \frac{x+z}{2}; \frac{x+z}{2}; 0\right) = F_{\frac{x+z}{2}}(0).$$

$$\text{Mặt khác } P_2(x; y; z) = P_2(x; z; y) \geq P_2\left(\frac{2-x-3z}{2}; z; \frac{x+z}{2}\right) = P_2\left(\frac{2-x-3z}{2}; \frac{x+z}{2}; z\right) \geq P_2\left(y + \frac{x+z}{2}; \frac{x+z}{2}; 0\right) = G_{\frac{x+z}{2}}(0).$$

$$\text{Suy ra } P(x; y; z) \geq P\left(y + \frac{x+z}{2}; \frac{x+z}{2}; 0\right) = \frac{1}{Q} \geq 2^{3(k-1)}.$$

Bổ đề 2. Hàm $F(x) = \frac{U(x)}{T(x)}$ xác định trên $[\alpha; \beta]$ và tồn tại các đạo hàm $U^{(1)}(x); U^{(2)}(x); U^{(3)}(x); T^{(1)}(x); T^{(2)}(x); T^{(3)}(x)$ thỏa mãn $U(x) > 0; U^{(1)}(x) > 0; U^{(2)}(x) < 0; U^{(3)}(x) \geq 0; T(x) > 0; T^{(1)}(x) > 0; T^{(3)}(x) > 0; F^{(1)}(\alpha) < 0; U^{(1)}(\beta) = T^{(1)}(\beta) = 0$. Khi đó trên $[\alpha; \beta]$ hoặc $F(x)$ luôn nghịch biến hoặc $F(x)$ chỉ biến thiên từ một khoảng nghịch biến sang một khoảng đồng biến duy nhất và $F(x) \leq \max\{F(\alpha); F(\beta)\}$ (kí hiệu $F^{(n)}(x)$ là đạo hàm bậc n của hàm $F(x)$).

(Bạn đọc tự chứng minh bổ đề này).

• Với $0 < k < 1$ có $S_b^{(1)}(c) \geq 0$, nên hàm $G_b(c) = \frac{1}{S_b(c)}$ nghịch biến.

Mặt khác $F_b(c) = \frac{U_b(c)}{T_b(c)}$ thỏa mãn bổ đề 2 ($0 < c \leq \frac{1-b}{2}$) nên $F_b(c) \leq \max \left\{ F_b(0); F_b\left(\frac{1-b}{2}\right) \right\}$.

• Nếu $F_b(0) \geq F_b\left(\frac{1-b}{2}\right)$ với $0 < b \leq \frac{1}{3}$ thì tương tự như trên có $F_b(b) - F_b(0) < 0$ và với mỗi $b \neq 0; c \leq b \leq \frac{1}{3}$ ta đều có $F_b(c) \leq F_b(0)$ suy ra $P_b(c) \leq G_b(0), F_b(0) \leq 2^{3(k-1)}$.

Nếu $F_b(0) < F_b\left(\frac{1-b}{2}\right)$ thì với bộ ba số không âm x, y, z mà $x + y + z = 1$ và $x \geq y > \frac{1}{3} > z \Rightarrow \frac{x+z}{2} < \frac{1}{3}$.

biến đổi tương tự trên có $P(x,y,z) \leq 2^{3(k-1)}$.

• Với $b = 0$ ta đưa về vấn đề 1. Với $k = 1$; $k = 2$ ta xét trực tiếp để tránh dấu đẳng thức xảy ra do $k = 1$ chẳng hạn. Từ các kết quả trên thì với $0 < k < 1$ ta có $P \leq 2^{3(k-1)}$; với $1 \leq k \leq 2$ ta có $P \geq 2^{3(k-1)}$. Bài toán 6 được giải quyết.

• Một trong các mẫu chốt khi sử dụng hai bổ đề trên là việc khảo sát sự biến thiên của hàm $\frac{U^{(2)}(x)}{T^{(2)}(x)}$, nên chúng ta có thể nêu thêm một số mở rộng khác (xin dành cho bạn đọc).

• Ta có thể tìm thêm một số bổ đề tương tự. Hi vọng từ các bổ đề loại này sẽ giúp chúng ta giải quyết được một lớp các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất có hiệu quả. Trước khi tạm dừng vấn đề này xin nêu thêm một bổ đề nữa sau đây.

Bổ đề 3. Hàm $F(x) = \frac{U(x)}{T(x)}$ xác định trên $[\alpha; \beta]$

và tồn tại các đạo hàm $U^{(1)}(x)$; $U^{(2)}(x)$; $U^{(3)}(x)$; $T^{(1)}(x)$; $T^{(2)}(x)$; $T^{(3)}(x)$ thỏa mãn $U(x) > 0$; $U^{(1)}(x) > 0$; $U^{(2)}(x) = 0$; $T(x) > 0$; $T^{(1)}(x) > 0$; $T^{(2)}(x) > 0$; $F^{(1)}(\alpha) > 0$. Khi đó trên $[\alpha; \beta]$ hoặc $F(x)$ luôn đồng biến hoặc $F(x)$ chỉ biến thiên từ một khoảng đồng biến sang một khoảng nghịch biến duy nhất khi đó

$$F(x) \geq \min\{F(\alpha); F(\beta)\}.$$

Vấn đề 3. Ở "Bài toán 3" trong bài "Khai thác sâu một bài toán bất đẳng thức", từ hàm

$$f(y) = 16y^2 - 4y(x-1)(x+2) + x(1-x)^2$$

trong trường hợp $1 \leq x \leq \frac{4}{3}$, tác giả xét dấu

$f^{(1)}(y) = 32y - 4(x-1)(x+2)$ rồi đi đến kết luận hàm $f(y)$ đồng biến theo y là chưa thỏa đáng. Ở đây x và y có sự phụ thuộc lẫn nhau ($x = 4(ab + bc + ca)$; $y = 8abc$; $a+b+c = 1$). Chẳng hạn với x, y dương và $x + y = 5$, hàm $g(x, y) = xy^2$ nếu ta xét đạo hàm chỉ theo x độc lập thì $g^{(1)}(x, y) = y^2 > 0$ nhưng $g(2; 3) = 18 > g(3; 2) = 12$.

Việc chứng minh

$$16y^2 - 4y(x-1)(x+2) + x(1-x)^2 \geq 0$$

nên giải theo cách áp dụng tam thức bậc hai

$$f(y) = 16 \left(y - \frac{2(x-1)(x+2) - \sqrt{\Delta}}{16} \right) \times \\ \times \left(y - \frac{2(x-1)(x+2) + \sqrt{\Delta}}{16} \right)$$

với $1 \leq x \leq \frac{4}{3}$ và do trước đó tác giả đã chứng minh được $8(x-1) \leq 9y$ nên ta sẽ chứng minh

$$\frac{8(x-1)}{9} \geq \frac{2(x-1)(x+2) + 2(x-1)\sqrt{x^2+4}}{16}$$

$$\Leftrightarrow 64 \geq 9(x+2) + 9\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow (46-9x)^2 \geq 81(x^2+4)$$

$$\Leftrightarrow 1792 - 828x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{448}{207}, \text{ do } 1 \leq x \leq \frac{4}{3} < \frac{448}{207}$$

suy ra điều phải chứng minh.

SỬA LẠI CHO ĐÚNG

- 1) Trong THPT số 349 (7.2006) bài Vật lý L1/349 là của tác giả Nguyễn Trọng Quân, SV 44 C4, ĐH Thủy Lợi, Hà Nội. Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.
- 2) Trong Kết quả Cuộc thi Giải Toán và Vật lý năm học 2005 - 2006 đã in trên THPT số 353 (11.2006) đã in nhầm 2 chỗ. Xin được đính chính Giải khuyến khích trang 12 như sau:

10. Lê Thị Tuyết Mai, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc.

14. Võ Quang Viễn, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành, Quảng Ngãi.

Thành thật xin lỗi hai bạn Mai, Viễn cùng bạn đọc.

Tiện đây xin lưu ý các bạn, trong các số báo từ nay có phát hiện tên, địa chỉ in sai thì nên phản hồi ngay để cuối năm học không bị nhầm khi tổng kết. Cảm ơn các bạn.

THTT



Hai cách chứng minh cho định lí BRIANCHON

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
(Hà Nội)

Lời tòa soạn. Định lí Brianchon (Briāngsông) là một định lí hình học nổi tiếng. Định lí này đã được giới thiệu ở một số cuốn sách chuyên khảo về hình học xạ ảnh. Tuy nhiên phép chứng minh nó không được "sơ cấp" cho lắm! Thế theo nguyện vọng của một số giáo viên và học sinh, chúng tôi xin giới thiệu bài viết về hai cách chứng minh "sơ cấp" định lí Brianchon trong trường hợp đường conic là đường tròn.

Như chúng ta đều biết trong hình học phẳng có một định lí nổi tiếng (tuy không đưa vào sách giáo khoa hình học ở trường phổ thông) đã được nhà triết học và nhà toán học người Pháp Blaise Pascal (1623 - 1662) tìm ra ở tuổi 16. Đó là định lí có nội dung sau, gọi là định lí Pascal:

Nếu tất cả sáu đỉnh của một lục giác nằm trên một đường tròn và ba cặp cạnh đối diện giao nhau thì ba điểm đó thẳng hàng.

Gần hai thế kỉ sau, C.J. Brianchon (1760-1854) đã phát hiện một định lí rất thú vị mà chúng ta gọi là định lí Brianchon (có mối liên hệ phẳng phát với định lí Pascal), trong đó đòi hỏi một lục giác phải ngoại tiếp một conic. Chứng minh của Brianchon sử dụng "nguyên tắc đối ngẫu" của điểm và đường thẳng mà kiến thức này thuộc vào bộ môn Hình học xạ ảnh. Tuy nhiên, trong trường hợp khi conic là một đường tròn thì việc nghiên cứu để có một phép chứng minh "sơ cấp" lại trở thành một vấn đề thách thức. Sự thách thức này đã được một nhà toán học Nga là A.S. Smogorzhevski đề tâm và trả lời hết sức có kết quả trong cuốn sách của ông đã được dịch ra ở Mỹ có nhan đề tiếng Anh là "The Ruler in Geometrical Construction" của Nhà xuất bản Blaisdell, 1961, New York.

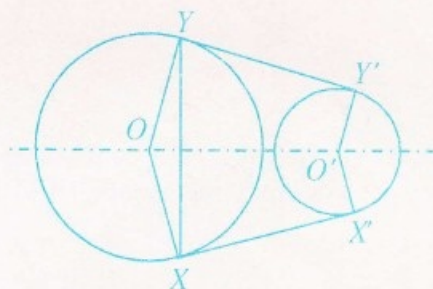
Sau đây chúng tôi sẽ giới thiệu hai cách chứng minh "sơ cấp" định lí Brianchon trong trường hợp conic là một đường tròn. Nhắc lại:

Định lí. Nếu tất cả sáu cạnh của một lục giác tiếp xúc với một đường tròn thì ba đường chéo chính⁽¹⁾ của lục giác đó đồng quy (hoặc có thể song song).

1. Cách chứng minh thứ nhất của A.S. Smogorzhevski (Phương pháp tổng hợp)

Trước khi đi vào chi tiết, chúng ta hãy chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề 1. Giả sử X' và Y' là hai điểm trên các tiếp tuyến tại X và Y với một đường tròn (X' , Y' nằm về cùng một phía đối với đường tròn, và nằm về cùng một phía so với đường thẳng XY) sao cho $XX' = YY'$. Thế thì có một đường tròn thứ hai tiếp xúc với XX' và YY' theo thứ tự ở X' và Y' .



Hình 1

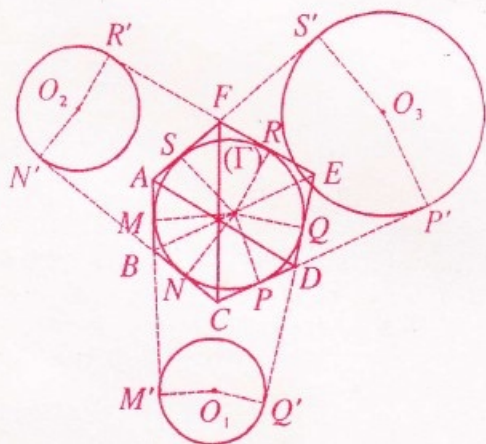
Chứng minh. Thật vậy, toàn bộ hình vẽ (h. 1) có một trục đối xứng là đường trung trực của đoạn thẳng XY , đồng thời cũng là đường trung trực của đoạn $X'Y'$ và là một đường kính của đường tròn đã cho. Cả hai đường vuông góc với XX' và YY' ở X' và Y' đều gặp trục đối xứng này ở cùng

(1) Đường chéo chính của một lục giác là đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện mà nếu đánh số thì đó là cặp đỉnh A_i, A_{i+3} khi lục giác được kí hiệu là $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ với quy ước $A_7 = A_1$.

một điểm, vì vậy điểm này phải là tâm của đường tròn tiếp xúc với XX' và YY' tương ứng ở X' và Y' . $\square$

Bây giờ chúng ta đi vào phép chứng minh của Smogorzhevski cho định lý Brianchon (đối với trường hợp conic là đường tròn).

Gọi M, N, P, Q, R và S lần lượt là các tiếp điểm của sáu tiếp tuyến AB, BC, CD, DE, EF và FA là các cạnh của lục giác $ABCDEF$ ngoại tiếp một đường tròn (Γ) nào đó (h. 2). Để cho đơn giản (trong việc theo dõi hình vẽ và trong lập luận) chúng ta giả sử rằng $ABCDEF$ là một lục giác "lồi" sao cho cả ba đường chéo chính AD, BE và CF đều cắt đường tròn nội tiếp lục giác. Trên các tia đối của các tia BA, BC, DC, DE, FE và FA ta lần lượt lấy các điểm M', N', P', Q', R' và S' sao cho $MM' = NN' = PP' = QQ' = RR' = SS' (= l)$ (trong đó l là một độ dài thích hợp nào đó), rồi dựng các đường tròn (O_1) (tiếp xúc với MM' và QQ' tương ứng ở M' và Q'), (O_2) (tiếp xúc với NN' và RR' tương ứng ở N' và R') và (O_3) (tiếp xúc với PP' và SS' tương ứng ở P' và S') phù hợp với bổ đề nói trên.



Hình 2

Do $AM = AS$ và $MM' = SS'$ nên $AM' = AS'$. Lại do $DQ = DP$ và $QQ' = PP'$ nên $DQ' = DP'$. Từ đó suy ra cả hai điểm A và D đều có cùng phương tích đối với hai đường tròn (O_1) và (O_3) . Vì vậy đường thẳng AD là trục đẳng phương của hai đường tròn này. Một cách tương tự, BE là trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1) và (O_2) và CF là trục đẳng

phương của hai đường tròn (O_2) và (O_3) . Vì các trục đẳng phương của ba đường tròn (O_i) ($i = 1, 2, 3$) đôi một phân biệt nên chúng đồng quy hoặc song song. Như chúng ta đã chỉ ra ở trên các đường chéo chính của lục giác ngoại tiếp $ABCDEF$ là các trục đẳng phương của ba đường tròn. Vì các đường chéo này hiển nhiên là không thể trùng nhau nên các đường tròn không có cùng một trục đẳng phương, vậy việc chứng minh đã hoàn tất. $\square$

Chú thích: Định lý đảo của định lý này thuộc vào lĩnh vực của bộ môn Hình học xạ ảnh.

2. Cách chứng minh thứ hai của tác giả bài viết này (Phương pháp vector)

Chứng minh này đòi hỏi sử dụng định lý Pascal, ngoài ra cần đến bổ đề sau đây.

Bổ đề 2. Giả sử O và A là hai điểm cố định phân biệt trong mặt phẳng. Thế thì tập hợp những điểm U trong mặt phẳng sao cho

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OU} = p$, ($p \neq 0$ là một số thực cho trước) là một đường thẳng a , vuông góc với OA ở điểm H được xác định bởi $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = p$.

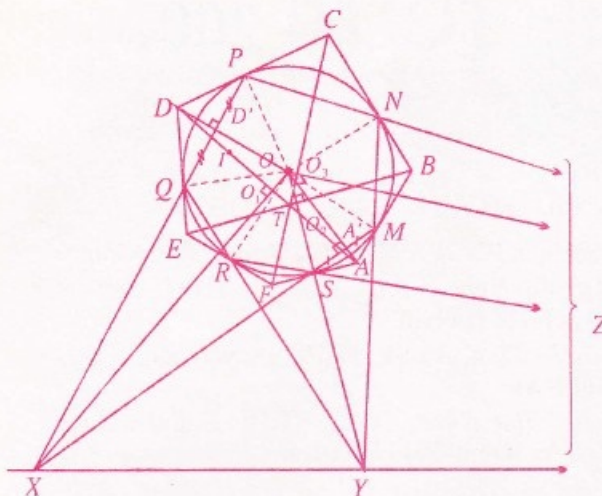
Chứng minh. Thật vậy, gọi H là hình chiếu của U trên OA , ta có $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$.

Suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OU} = p \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = p \Leftrightarrow$

$UH \perp OA$ tại H cố định. Suy ra tập hợp những điểm U là đường thẳng a . $\square$

Bây giờ ta sử dụng Bổ đề 2 để chứng minh định lý Brianchon. Giả sử lục giác (lồi) $ABCDEF$ ngoại tiếp đường tròn $(O; r)$ và các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA tiếp xúc với $(O; r)$ lần lượt ở các điểm M, N, P, Q, R, S (h. 3).

Ta thấy $MNPQRS$ là một lục giác (lồi) nội tiếp $(O; r)$. Giả sử lục giác (lồi) $ABCDEF$ ngoại tiếp đường tròn $(O; r)$. Theo định lý Pascal, các cặp cạnh đối diện $SM, PQ; MN, QR$ và NP, RS giao nhau theo ba điểm X, Y, Z thẳng hàng. Gọi A' và D' tương ứng là trung điểm của SM và PQ , thế thì dễ thấy rằng $OA \perp SM = A'$ và $OD \perp PQ = D'$. Theo bổ đề 2 thì đường thẳng SM và đường thẳng PQ lần lượt là quỹ tích những điểm U và V sao cho $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OU} = r^2 = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OV}$. Từ X là



Hình 3

giao điểm của hai đường thẳng SM và PQ nên ta có $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = r^2 = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OX}$.

Suy ra $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OX} = 0$, do đó OX vuông góc với AD ở hình chiếu O_1 của O trên AD . Vì vậy, nếu I là một điểm bất kỳ trên đường thẳng AD thì $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OO_1} = r^2$. Theo bổ đề 2, đường thẳng AD là quỹ tích những điểm I sao cho $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OI} = r^2$. Chứng minh tương tự, ta đi đến kết luận: Các đường thẳng AD , BE và CF theo thứ tự là quỹ tích những điểm I , J và K trong mặt phẳng sao cho:

$$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OO_1} = r^2 = \overrightarrow{OY} \cdot \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OY} \cdot \overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OZ} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OZ} \cdot \overrightarrow{OO_3} \text{ trong đó, } O_1, O_2 \text{ và } O_3$$

là hình chiếu (vuông góc) của O lần lượt trên AD , BE và CF .

Vì $ABCDEF$ là một lục giác lồi nên các cặp điểm B, C và E, F nằm khác phía nhau đối với AD và do đó AD không song song với BE . Gọi T là giao điểm của AD và BE , ta có $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OT} = r^2 = \overrightarrow{OY} \cdot \overrightarrow{OT}$. Từ đó suy ra: $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{OT} = 0$, nên đường thẳng XY vuông góc với OT ở điểm T' xác định bởi $\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OT'} = r^2$.

Mặt khác, theo định lý Pascal thì X, Y, Z thẳng hàng nên $\overrightarrow{OZ} \cdot \overrightarrow{OT} = r^2$.

Vậy điểm T nằm trên đường thẳng CF , hay ba đường thẳng AD , BE và CF đồng quy ở một điểm T nào đó, ta được đpcm. $\square$

3. Nhận xét. Phương pháp tổng hợp mà Smogorzhevski đã sử dụng để chứng minh định lý Brianchon rõ ràng là một lời giải độc đáo, khá ngắn gọn. Tuy nhiên, lời giải này đòi hỏi sự sáng tạo khá bất ngờ để dựng ra được hình phụ gồm ba đường tròn. Phân tích kỹ hơn nữa, chúng ta thấy rằng trong chứng minh này Smogorzhevski đã sử dụng *phương pháp quỹ tích* (liên quan đến trục đẳng phương). Cách chứng minh thứ hai của tác giả bài viết này đòi hỏi sử dụng vector và định lý Pascal, tuy dài hơn nhưng không phải dựng thêm nhiều hình phụ (ngoài lục giác được xét chỉ xét thêm một lục giác nội tiếp $MNPQRS$ đã có sẵn trong hình vẽ). Ngoài ra, chúng ta dễ nhận thấy hơn là *phương pháp quỹ tích* đã được quán triệt từ đầu đến cuối nhưng thông qua công cụ vector mà thôi.

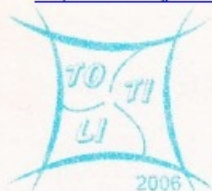
Đã phát hành cuốn ĐÓNG TẬP CẢ NĂM 2006 THPT

Khi tờ THPT này đến tay bạn thì cũng là lúc cuốn Đóng tập cả năm 2006 Toán học và Tuổi trẻ hàng bìa cũng bắt đầu phát hành. Đây là cách để lưu giữ tập chí tốt nhất, có hệ thống đối với các thư viện, các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán. Bạn cần mua xin liên hệ ngay với Tòa soạn vì số lượng có hạn. Giá bán 65000 đồng.

Để biết thông tin chi tiết xin liên hệ:

ĐT/FAX: 04.5144272; Email: toanhoc@yaho.com

THPT



Kết quả cuộc thi TOLITI 2006 của 3 tạp chí

Cuộc thi do 3 tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Vật lý và Tuổi trẻ, Tin học và Nhà trường tổ chức từ tháng 1 đến tháng 12 năm 2006. Cuộc thi gồm các bài vui về Toán, Lí, Tin mà nhiều người có thể giải được. Đề thi đăng làm 4 đợt vào các tháng 1, 4, 7, 10; đáp án đăng 4 đợt vào các tháng 4, 7, 10 và tháng 1 năm nay. Cuộc thi được bạn đọc hưởng ứng sôi nổi. Ngay từ tháng 2 năm 2006 bài giải đã gửi về rất nhiều. Các bạn ở Nghệ An, Bắc Ninh, Hà Nội, Thái Bình, Nam Định, Thái Nguyên, Yên Bái, Hòa Bình, Hà Tĩnh, Lâm Đồng, Khánh Hòa, Đắk Lắk, Cần Thơ... tham gia gửi bài nhiều. Thành phần tham dự rất đa dạng. Chúng tôi đã sơ kết 6 tháng đầu năm của cuộc thi.

Sau đây là danh sách các bạn đoạt giải cả năm.

Giải Nhất. (1 giải)

Nguyễn Bình, 12A1, THPT Nam Tiền Hải, Thái Bình.

Giải Nhì. (4 giải)

1. Trần Dịch Phong, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh.
2. Nguyễn Ngọc Lâm, 11B Lí, THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội.
3. Võ Hà Tĩnh, 45A4, THPT chuyên ĐH Vinh, Nghệ An.
4. Trần Như Ngọc, 10A3, THPT Nguyễn Bình Khiêm, Krông Pắc, Đắk Lắk.

Giải Ba. (6 giải)

1. Hoàng Tuấn Linh, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái.
2. Nguyễn Quang Tiến, 11/12, THPT Tiểu La, Thăng Bình, Quảng Nam.
3. Nguyễn Mạnh Tuấn, 12A1, THPT Trần Phú, Đức Thọ, Hà Tĩnh.
4. Vũ Anh Tuấn, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định.
5. Võ Thái Thông, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa.
6. Lê Tuấn Tú, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ.

Chúc mừng các bạn.

BAN TỔ CHỨC CUỘC THI

Đáp án các bài TOLITI đợt 4 tháng 10/2006

TOLITI-10. Ba cục đồng

Điều này có thể được làm như sau. Cho A và B tiếp xúc với nhau cho tới khi cả hai có nhiệt độ như nhau. Kết quả A , B và C có nhiệt độ như sau:

A	B	C
100°C	100°C	0°C

Sau đó làm hết như vậy đối với A và C , ta được:

A	B	C
50°C	100°C	50°C

Cuối cùng, cho B và C tiếp xúc với nhau, ta được:

A	B	C
50°C	75°C	75°C

TOLITI-11. Tám cầu bốn đảo

a) Lộ trình thỏa mãn là

$B \rightarrow 3 \rightarrow Y \rightarrow 5 \rightarrow C \rightarrow 6 \rightarrow Y \rightarrow 8 \rightarrow D \rightarrow 7 \rightarrow C \rightarrow 4 \rightarrow B \rightarrow 2 \rightarrow A \rightarrow 1 \rightarrow Y$

b) Không thể bắt đầu từ C và kết thúc ở đất liền Y mà không lặp lại đoạn đường nào.

TOLITI-12. Ném bi

Đáp án: An phải thử tối thiểu 6 lần.

Ta suy luận từ bài toán ngược sau: Giả sử An được phép ném thử K lần các hòn bi ve (2 viên). Khi đó An có thể trả lời câu hỏi trên với tòa nhà cao nhất là bao nhiêu tầng.

– Ở lần thử đầu tiên, An chỉ có thể thử ở tầng cao nhất là K . Thật vậy vì nếu lần ném này viên bi bị vỡ thì An sẽ còn lại đúng 1 viên bi và chỉ còn $K-1$ lần ném thử, và do đó An bắt buộc phải thử lần lượt từ tầng 1 đến tầng $K-1$.

– Nếu lần đầu tiên bi không vỡ, An còn lại $K-1$ lần thử và do đó được quyền ném thử ở tầng tiếp theo là $K + (K-1)$.

– Lý luận tương tự ta sẽ thấy rằng An có thể thử ở tầng nhà cao nhất là

$$K + (K-1) + (K-2) + \dots + 1 = \frac{K(K+1)}{2}.$$

Trở lại bài toán của chúng ta, An cần phải ném tối thiểu K lần sao cho $\frac{K(K+1)}{2} \geq 20$ từ đó suy ra $K = 6$.

NHẬN XÉT. Các bạn có lời giải tốt đợt 4 là:

Bắc Ninh: Trần Dịch Phong, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh; Dương Đức Thanh, 12A3, THPT Lý Thái Tổ, TP. Bắc Ninh; **Hà Nam:** Nguyễn Thị Thùy Linh, 9B, THCS Trần Phú, TX. Phú Lý; **Hải Dương:** Trần Văn Hạnh, 10A5, THPT Ninh Giang; **Ninh Bình:** Nguyễn Duy Đăng, 11B1, THPT Kim Sơn A; **Thái Bình:** Nguyễn Bình, 12A1, THPT Nam Tiền Hải; **Thái Nguyên:** Nguyễn Thanh Bình B, 10T, K18, THPT chuyên Thái Nguyên; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mạnh Tuấn, 12A1, THPT Trần Phú, Đức Thọ; **Đắk Lắk:** Trần Như Ngọc, 10A3, THPT Nguyễn Bình Khiêm, Krông Pắc.

VŨ KIM – HOÀNG TRỌNG

PROBLEM... (Tiếp trang 17)**FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS**

Bài T6/355. Let S be a set consisting of 43 distinct positive integers not exceeding 100. For each subset X of S let t_X be the product of its elements. Prove that there exist two disjoint subsets A and B of S such that $t_A t_B^2$ is the cube of a natural numbers.

T7/355. Find the greatest value of the expression

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} - \frac{abcd}{(ab+cd)^2}$$

where a, b, c, d are distinct real numbers satisfying the conditions $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4$ and $ac = bd$.

T8/345. 1) Let $f(x)$ be a polynomial of degree n , with leading coefficient a . Suppose that $f(x)$ has

n distinct roots $x_1, x_2, \dots, x_n$ all not equal to zero. Prove that

$$\frac{(-1)^{n-1}}{ax_1x_2\dots x_n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2 f'(x_k)}.$$

2) Does there exist a polynomial $f(x)$ of degree n , with leading coefficient $a = 1$, such that $f(x)$ has n distinct roots $x_1, x_2, \dots, x_n$, all not equal to zero, satisfying the condition

$$\frac{1}{x_1 f'(x_1)} + \frac{1}{x_2 f'(x_2)} + \dots + \frac{1}{x_n f'(x_n)} + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} = 0?$$

T9/345. Let AD, BE, CF be the altitudes and H be the orthocenter of an acute triangle ABC . Let M, N be respectively the points of intersection of DE and CF and of DE and BE . Prove that the line passing through A perpendicular to the line MN passes through the circumcenter of triangle BHC .

**ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ DÀI HẠN
TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC**



Nhà nữ toán học HOÀNG XUÂN SÍNH

HÀM CHÂU

Nhà toán học Hoàng Xuân Sính không chỉ là nhà khoa học xuất sắc mà còn là một trí thức yêu nước, đam mê nghề nghiệp nồng nhiệt. Bà là người phụ nữ nước ngoài đầu tiên đến Paris bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ Quốc gia về toán học.

Gần một nghìn năm khoa cử Nho giáo ở nước ta, đã có 2.874 người đỗ Tiến sĩ. Song tất cả đều là... nam giới! Nguyễn Thị Duệ là người phụ nữ duy nhất phải cải nam trang để đi thi và đỗ Tiến sĩ, nhưng sau khi bị phát hiện là nữ, bà liền bị xóa sạch mọi danh vọng.

Cách mạng tháng Tám năm 1945 đã thay đổi "phận đàn bà" ở nước ta. Nữ giáo sư, tiến sĩ toán học Hoàng Xuân Sính là một trường hợp tiêu biểu.

Bà đã sống qua thời sinh viên tại Pháp, thi lấy bằng Cử nhân Khoa học và bằng Thạc sĩ Toán học tại đây. Cũng chính tại đây, bà bí mật tham gia phong trào Việt kiều yêu nước với sự dìu dắt của những nhà trí thức tiên phong như Nguyễn Khắc Viện, Phạm Huy Thông, v.v... Theo gương họ, bà rời bỏ cuộc sống thanh bình, đầy đủ tiện nghi ở phương Tây để trở về nước ngay trong những năm tháng

cuộc chiến tranh chống Mỹ đang diễn ra ác liệt.

Về nước, được phân công dạy Toán tại trường Đại học Sư phạm Hà Nội, bà cũng như bao nhà toán học Việt Nam khác phải sơ tán khỏi thành phố, đến làm việc ở chốn làng quê, sống biệt lập với thế giới khoa học bên ngoài. Lúc bấy giờ làm gì đã có máy tính cá nhân, internet. Số tạp chí toán học nước ngoài đến Việt Nam rất ít, và thường là quá muộn. Bà rất khó tìm đọc các công trình toán học mới của đồng nghiệp quốc tế để nắm bắt được những ý tưởng mới nào đó có triển vọng mà lại phù hợp với sở trường nghiên cứu của mình...

Bất chấp việc các Tổng thống Mỹ Johnson, rồi Nixon tiếp tục "leo thang" ném bom dữ dội miền Bắc Việt Nam, một số nhà toán học nổi tiếng trên thế giới, trong đó có những người từng được tặng Huy chương Fields - được coi như Giải Nobel trong toán học - vẫn dũng cảm tỏ rõ mối cảm tình nồng nhiệt của mình đối với cuộc chiến đấu của Việt Nam bằng cách đến Hà Nội đọc bài giảng về toán học hiện đại tại các seminar mở giữa vùng rừng núi Đại Từ, Thái

Nguyên, nơi nhiều trường đại học lớn sơ tán đến.

Trong số các nhà toán học ấy, GS. Hoàng Xuân Sính đặc biệt mến phục GS. Alexander Grothendieck, một chuyên gia về Hình học đại số (algebraic geometry) người Pháp gốc Do Thái, được tặng Huy chương Fields năm 1966. Những bài giảng của vị giáo sư kiệt xuất mới 39 tuổi ấy cung cấp một cái nhìn tổng quan về các mũi nhọn của toán học hiện đại, gợi ý cho bà hướng nghiên cứu mới.

Nhiều người ở nước ngoài cũng như ở Việt Nam thường cho rằng toán học là một ngành khoa học "vừa khó, vừa khổ, lại vừa khô"! Nhận xét đó có phần đúng. Nhưng không đúng hoàn toàn. "Khó" và "khô" thì đương nhiên rồi? Nhưng có "khô" hay không? Điều này còn tùy người. Đối với GS. Hoàng Xuân Sính, một định lý toán học đẹp cũng làm say lòng người chẳng khác nào một bài thơ của nhà thi sĩ lãng mạn William Wordsworth viết về những đóa hoa thủy tiên màu vàng sáng (golden daffodils) mọc khắp thung lũng và núi đồi nước Anh. Thế thì tại sao lại có thể coi là ... "khô" được nhỉ?

Bản luận án Tiến sĩ Quốc gia hình thành dần dưới ánh đèn dầu trong gian nhà trống trải ở một làng trung du bên bờ con sông Đáy nước chảy lặng lờ. Mưa dầm dề dai dẳng. Gió mùa đông bắc rét thấu xương. Vách liếp đan thưa, lấm kẽ hở. Ngọn đèn dầu lung lay trước gió.

GS. Hoàng Xuân Sính được Nhà nước ta cho phép mang bản luận án ấy sang Paris bảo vệ đề lấy bằng Tiến sĩ Quốc gia.

Cuộc bảo vệ luận án diễn ra tại Đại học Paris 7 (Université Paris 7), thuộc hệ thống các trường đại học Sorbonne. Hội đồng chấm luận án gồm những nhà toán học nổi tiếng như GS Henri Cartan Huy chương Fields, Viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Pháp; GS. Alexander Grothendieck Huy chương Fields, v.v...

Bà bảo vệ bản luận án thứ nhất "Gr. Phạm trù", trong hai tiếng rưỡi đồng hồ, bản luận án bà đã viết trong nhiều năm sơ tán tại một làng quê bên bờ sông Đáy. Chưa xong! Ngay sau đó bà bảo vệ tiếp bản luận

án thứ hai "Cái nhúng của một phút một thứ nguyên vào một đa tạp vi phân hai thứ nguyên", bản luận án bà phải thực hiện tại Paris, chỉ trong vòng hai tháng, theo đề tài do Hội đồng Toán học nơi bà dự thi ra cho bà đề "thử tài"! Cả hai bản luận án ấy đều nhằm giải quyết những vấn đề toán học hiện đại với nội dung phong phú.

Tờ tạp chí hàng tháng Phụ nữ Liên Xô xuất bản tại Moscow, số tháng 8-1975, trong chuyên đề về phụ nữ Việt Nam, đã dành nửa trang để giới thiệu về nhà nữ toán học Việt Nam Hoàng Xuân Sính. Trả lời phỏng vấn của một nhà báo Liên Xô, bà nói lên niềm ước mơ của mình: "Tôi muốn góp phần đào tạo một lớp các nhà toán học trẻ ở đất nước tôi. Hiện nay, nhiều nghiên cứu sinh Việt Nam cần phải ra nước ngoài hoàn thành và bảo vệ luận án Tiến sĩ. Chúng tôi đang muốn xây dựng nhiều chuyên ngành toán học ở trình độ cao, ngay trên đất nước mình".

Nhà xuất bản Springer Verlag, một nhà xuất bản sách khoa học nổi tiếng thế giới có chi nhánh ở Đức, Anh, Mỹ, đề nghị bà chỉnh lí bản luận án thành một cuốn sách chuyên khảo để đưa in.

Trước khi sang Paris bảo vệ luận án, GS. Hoàng Xuân Sính đã thông báo các kết quả nghiên cứu mới của bà tại Đại hội Toán học Việt Nam năm 1971 ở Hà Nội và Đại hội Toán học thế giới năm 1974 ở Vancouver (Canada).

GS. Hoàng Xuân Sính là thành viên Hội đồng xét tặng Giải thưởng khoa học Kovalevskaya ở Việt Nam (giải thưởng này còn được trao tặng ở một vài nước đang phát triển khác). Nhiều lần bà được cử làm Trưởng Đoàn học sinh Việt Nam đi dự Olympic Toán Quốc tế. Giáo sư cũng dành thời gian tham gia nhiều hoạt động xã hội đa dạng. Ai đã từng có dịp tiếp xúc với bà đều cảm thấy đó là một người phụ nữ sắc sảo và ý nhị.

(Nguồn: Nông thôn ngày nay)

CHẶNG ĐƯỜNG ... (Tiếp trang 28)

Năm đó báo chí, đài phát thanh truyền hình Anh đã ca ngợi với những dòng tít: "Sáng nay 7-7-1979 đoàn học sinh Việt Nam đã làm náo động Luân Đôn", "Những bộ óc Việt Nam tuyệt vời", "Những bộ óc siêu thông minh", "Hãy coi chừng một dân tộc nhiều tiềm năng chất xám",...

Trí tuệ của học sinh ta đã được bạn bè năm châu khâm phục. Học sinh giỏi không phải tự nhiên mà có, phải phát hiện, chăm lo bồi dưỡng, để bên cạnh kiến thức được nâng cao thì niềm say mê của học sinh giỏi cũng được phát triển. Người thầy đóng vai trò quyết định, với phương pháp sáng tạo, phát huy cao độ trí thông minh của học sinh giỏi. Do đó nếu có chính sách đãi ngộ thỏa đáng đối với thầy giáo,

đối với học sinh giỏi thì chắc chắn chúng ta sẽ còn tiến xa trong việc chiếm những đỉnh cao của khoa học thế giới.

Hè năm 2007 tới, lần đầu tiên nước ta sẽ đăng cai tổ chức kì thi Toán Quốc tế tại Hà Nội.

Việc đăng cai tổ chức kì thi này là một cơ hội tốt để chúng ta:

- Khẳng định trình độ chuyên môn và khả năng tổ chức.
- Giới thiệu đất nước, thủ đô Hà Nội với những danh lam, thắng cảnh hấp dẫn với bạn bè các nước.
- Tích lũy thêm kinh nghiệm hội nhập Quốc tế (sau khi đã vào WTO và đã tổ chức rất thành công hội nghị APEC 2006).



CÁC LỚP THCS

Bài T1/355. (Lớp 6) Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn $2006a^2 + a = 2007b^2 + b$. Chứng minh rằng $a - b$ là một số chính phương.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/355. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $AB + BM = AC + CM$. Tính độ lớn góc $\widehat{CAM}$.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV khối THPT chuyên, ĐHSPT Hà Nội)

Bài T3/355. Tìm tất cả các số x, y nguyên dương lớn hơn 1 sao cho $2xy - 1$ chia hết cho $(x - 1)(y - 1)$.

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T4/355. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4b}{2a+b} + \frac{b^4c}{2b+c} + \frac{c^4a}{2c+a} \geq 1,$$

trong đó a, b, c là ba số dương thỏa mãn

$$ab + bc + ca \leq 3abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

NGÔ TRUNG KIÊN
(SV lớp Tin 2, K47, khoa CNTT, ĐHBK Hà Nội)

Bài T5/355. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ không bằng nhau và tiếp xúc ngoài với nhau tại T . Kẻ O_1A tiếp xúc với (O_2) tại A ; O_2B tiếp xúc với (O_1) tại B sao cho các điểm A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ O_1O_2 . Lấy điểm

H thuộc O_1A và điểm K thuộc O_2B sao cho BH, AK cùng vuông góc với O_1O_2 . TH cắt (O_1) lần nữa tại E , TK cắt (O_2) lần nữa tại F . EF cắt AB tại S . Chứng minh rằng ba đường thẳng O_1A, O_2B và TS đồng quy.

PHAN LÊ NHẬT DUY
(GV THCS Lâm Mộng Quang, Vĩnh Mỹ, Phú Lộc, Thừa Thiên - Huế)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/355. Cho S là tập hợp gồm 43 phần tử là các số nguyên dương không vượt quá 100. Với mỗi tập con X của S , đặt t_X là tích các phần tử của X . Chứng minh rằng tồn tại hai tập con A, B không giao nhau của S sao cho $t_A t_B^2$ là lập phương của một số tự nhiên.

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai)

Bài T7/355. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} - \frac{abcd}{(ab+cd)^2},$$

trong đó a, b, c, d là các số thực phân biệt thỏa mãn các điều kiện $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4$ và $ac = bd$.

PHẠM VĂN THUẬN
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/345.

1) Cho đa thức $f(x)$ có bậc n với các hệ số thực và hệ số bậc cao nhất bằng a . Giả sử $f(x)$ có n nghiệm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$ khác 0. Chứng minh rằng

$$\frac{(-1)^{n-1}}{ax_1x_2\dots x_n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2 f'(x_k)}.$$

2) Có tồn tại hay không một đa thức $f(x)$ bậc n lẻ với hệ số bậc cao nhất $a = 1$ mà $f(x)$ có n nghiệm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$ khác 0 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1 f'(x_1)} + \frac{1}{x_2 f'(x_2)} + \dots + \frac{1}{x_n f'(x_n)} + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} = 0?$$

PHẠM BẮC PHÚ
(SV lớp CLC, K52, khoa Toán, ĐHSPT Hà Nội)

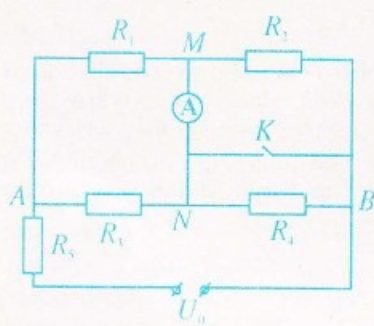
Bài T9/355. Giả sử AD, BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác nhọn ABC . Gọi M, N lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (DE, CF) và (DF, BE) . Chứng minh rằng đường thẳng qua A , vuông góc với đường thẳng MN đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC .

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/355. Cho mạch điện như hình vẽ:

$R_1 = R; R_2 = 2R; R_3 = 3R; R_4 = 4R; R_5 = 5R;$



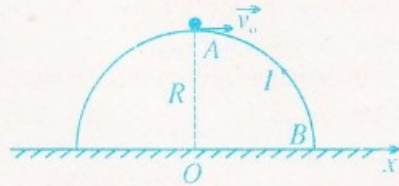
$R_A = R$.
Hiệu điện thế U_0 không đổi. Cho biết khi K ngắt thì số chỉ của ampe kế là I và khi K đóng thì số

chỉ của ampe kế là I' . Hãy xác định tỉ số $\frac{I}{I'}$.

NGUYỄN MẠNH THẮNG

(GV THCS Khánh Dương, Yên Mô, Ninh Bình)

Bài L2/355. Một bán cầu bán kính R trượt đều theo phương ngang với vận tốc $\vec{v}$. Quả cầu nhỏ đặt cách mặt phẳng ngang đoạn bằng R và ngay khi đỉnh bán cầu A đi ngang qua thì nó được ném đi theo phương ngang với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$. Hãy tìm v để quả cầu rơi chạm vào bán cầu trên cung AB (với I là điểm chính giữa của cung AB như hình vẽ).



Bỏ qua lực cản của không khí đối với quả cầu. Áp dụng số: $R = 80\text{cm}; v_0 = 150\text{cm/s}; g = 10\text{m/s}^2$. Xét hai trường hợp:

- $\vec{v}_0$ cùng phương, ngược chiều với $\vec{v}$.
- $\vec{v}_0$ cùng phương, cùng chiều với $\vec{v}$.

NGUYỄN MINH TUẤN

(GV THPT Yên Thành 2, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/355. (for 6th grade)

Let a, b be two natural numbers satisfying $2006a^2 + a = 2007b^2 + b$.

Prove that $a - b$ is a perfect square.

T2/355. (for 7th grade)

Let ABC be a triangle with $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Take the point M on the side BC such that $AB + BM = AC + CM$. Calculate the measure of $\widehat{CAM}$.

T3/355. Find all positive integers x, y greater than 1 so that $2xy - 1$ divisible by $(x - 1)(y - 1)$.

T4/355. Prove that $\frac{a^4b}{2a+b} + \frac{b^4c}{2b+c} + \frac{c^4}{2c+a} \geq 1$

where a, b, c are positive numbers satisfying the condition $ab + bc + ca \leq 3abc$.

When does equality occur?

T5/355. Let be given two circles $(O_1), (O_2)$ with centers O_1, O_2 , with distinct radii, externally touching each other at a point T . Let O_1A be a tangent to (O_2) at a point A , let O_2B be a tangent to (O_1) at a point B so that the points A, B are on the same side with respect to the line O_1O_2 . Let H be the point on O_1A , K be the point on O_2B so that the lines BH, AK are perpendicular to O_1O_2 .

The line TH cuts (O_1) again at E , the line TK cuts (O_2) again at F . The line EF cuts AB at S .

Prove that the lines O_1A, O_2B and TS are concurrent.

(Xem tiếp trang 13)



★ **Bài T1/351. (Lớp 6).** Xét tích gồm 11 thừa số

$$T = (5a + 2006b)(6a + 2005b)(7a + 2004b) \dots (15a + 1996b)$$

với a, b là các số nguyên.

Chứng minh rằng nếu T chia hết cho 2011 thì T cũng chia hết cho 2011¹¹.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Bảo Trang, 6C, THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc). Các thừa số của T đều có dạng

$$na + (2011 - n)b = 2011b + n(a - b) \text{ với } n = 5, 6, \dots, 15 (*)$$

Nếu T chia hết cho số nguyên tố 2011 thì tồn tại ít nhất một thừa số của T chia hết cho 2011, đó là $ma + (2011 - m)b = 2011b + m(a - b)$ với m thỏa mãn $5 \leq m \leq 15$.

Từ đó suy ra $m(a - b)$ chia hết cho 2011 mà $5 \leq m \leq 15$ nên $a - b$ chia hết cho 2011. Suy ra các số $n(a - b)$, ứng với $n = 5, 6, \dots, 15$ đều chia hết cho 2011, do đó theo (*) tất cả 11 thừa số của T đều chia hết cho 2011.

Vậy nếu T chia hết cho 2011 thì T cũng chia hết cho 2011¹¹. □

◀ **Nhận xét.** 1) Từ khẳng định "tồn tại một thừa số của T chia hết cho 2011" không thể "giả sử đó là một số cụ thể" được, nhiều bạn cho $m = 5$ là sai.

2) Ngoài bạn Trang, các bạn sau có lời giải đúng:

Hà Nội: Đỗ Trường Sơn, 6E, THCS Phan Chu Trinh, Ba Đình; **Thanh Hóa:** Lê Thị Thanh Hà, 6A, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Nghệ An:** Hồ Thị Minh Châu, Lê Trung Hiếu, Phạm Chí Công, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Kim Oanh, 6C, THCS Bắc Hồng, TX. Hồng Lĩnh, Võ Nguyên An, 6B, THCS TT. Kỳ Anh; **Khánh Hòa:** Nguyễn Bảo Nhi, 6/5, THPT Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/351. (Lớp 7).** Tính tổng gồm 2006 số hạng

$$S = \frac{3^3 + 1^3}{2^3 - 1^3} + \frac{5^3 + 2^3}{3^3 - 2^3} + \frac{7^3 + 3^3}{4^3 - 3^3} + \dots + \frac{4013^3 + 2006^3}{2007^3 - 2006^3}$$

Lời giải. Trước hết ta tính biểu thức dạng tổng quát với $a \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(2a+1)^3 + a^3}{(a+1)^3 - a^3} = \frac{(3a+1)(3a^2+3a+1)}{3a^2+3a+1} = 3a+1$$

Lần lượt thay a từ 1 đến 2006 ta được

$$\begin{aligned} S &= 3(1 + 2 + \dots + 2006) + 2006 \\ &= 3.2007.1003 + 2006 \\ &= 6041069. \square \end{aligned}$$

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn tham gia giải bài và đều cho đáp số đúng. Tuy nhiên, các lời giải trình bày còn dài dòng. Nhiều bạn không tính biểu thức dạng tổng quát.

Bạn Nguyễn Bảo Nhi (lớp 6/5, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**) nêu được kết quả tổng quát

$$T = \frac{3^3 + 1^3}{2^3 - 1^3} + \frac{5^3 + 2^3}{3^3 - 2^3} + \dots + \frac{(2n+1)^3 + n^3}{(n+1)^3 - n^3} = \frac{n(3n+5)}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Yên Bái: Hoàng Công Hiếu, 6A, THCS Cát Thịnh, Văn Chấn; **Vĩnh Phúc:** Kiều Thị Thủy Nguyên, 6/11, THCS Thạch Đà, Mê Linh; **Đỗ Công Huân**, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Mạc Thị Thu Huệ**, 6A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch; **Phú Thọ:** Tạ Đức Trung, 7A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** Lê Duy Quý, 7D, THCS Tam Giang, Yên Phong; **Hà Nội:** Đỗ Trường Sơn, 6E, THCS Phan Chu Trinh, quận Ba Đình; **Nam Định:** Phạm Văn Kim, 6A, THCS Hải Minh, Hải Hậu; **Thanh Hóa:** La Thị Sáng, 7C, THCS Tiến Lộc, Hậu Lộc; **Nghệ An:** Hoàng Văn Đông, 7D, Nguyễn Thị Ngọc Thủy, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Đặng Trung Anh**, Lê Ngọc Nguyễn, Nguyễn Văn Huy, Nguyễn Phú Nam, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** Võ Nguyên An, 6B, THCS TT. Kỳ Anh, Nguyễn Việt Hà B, 6/2, THCS Lê Văn Thiêm, TX. Hà Tĩnh; **Lai Thị Huyền**, Bùi Thị Liên, 7B, THCS Bình An, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Bảo Trâm, 7D, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn; **Quảng Bình:** Trần Nhật Nam, 6A, THCS Quảng Tiến, Quảng Trạch.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/351.** Tìm số nguyên tố p sao cho $2005^{2005} - p^{2006}$ chia hết cho $2005 + p$.

Lời giải. Ta có $2005^{2005} - p^{2006}$

$$= (2005^{2005} + p^{2005}) - (p^{2005} + p^{2006}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \text{Vì } 2005^{2005} + p^{2005} = (2005 + p) \times \\ & (2005^{2004} - p \cdot 2005^{2003} + p^2 \cdot 2005^{2002} - \dots + p^{2004}) \\ & \text{chia hết cho } 2005 + p \text{ nên từ (1), ta có} \\ & (2005^{2005} - p^{2006}) : (2005 + p) \\ & \Leftrightarrow (p^{2005} + p^{2006}) : (2005 + p) \\ & \Leftrightarrow p^{2005} (1 + p) : (2005 + p) \end{aligned} \quad (2)$$

Ta xét hai trường hợp:

1) p là ước nguyên tố của 2005 hay $\begin{cases} p=5 \\ p=401 \end{cases}$.

Nếu $p = 5$ thì $p^{2005}(1 + p) = 6.5^{2005}$ không chia hết cho 4 và do đó không chia hết cho $2005 + p = 3000$.

Nếu $p = 401$ thì $p^{2005}(1 + p) = 402.401^{2005}$ chia hết cho $2005 + p = 2406 = 6.401$. Do đó $p = 401$ thỏa mãn bài toán.

2) Nếu $\begin{cases} p \neq 5 \\ p \neq 401 \end{cases}$ thì $\begin{cases} (p, 5) = 1 \\ (p, 401) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (p^{2005}, 2005 + p) = 1$ và $1 + p < 2005 + p$ nên (2) không thể thỏa mãn.

Vậy chỉ có một số nguyên tố thỏa mãn bài toán là $p = 401$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Từ (2) có thể lí luận theo cách khác để bỏ qua trường hợp 2 như sau:

$$\begin{aligned} & p^{2005} (1 + p) = p^{2005} (2005 + p - 2004) : (2005 + p) \\ & \Leftrightarrow 2004 \cdot p^{2005} : (2005 + p). \end{aligned}$$

Vì $2004 < 2005 + p$ nên p^{2005} và $(2005 + p)$ phải có ước chung khác 1. Do đó p là ước của 2005.

2) Nhiều bạn đã mắc sai lầm khi cho rằng, từ (2) suy ra $\begin{cases} p^{2005} : (2005 + p) \\ (p + 1) : (2005 + p) \end{cases}$ và từ đó kết luận không có số nguyên tố p nào thỏa mãn bài toán!

Lưu ý, $2005 + p$ không phải là một số nguyên tố và nó có thể chia hết cho p hoặc có ước chung với $p + 1$.

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Phùng Quang Anh, 7A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; Nguyễn Trường Giang, 8A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Duy Anh, 7A, Nguyễn Thế Bảo, Phạm Mỹ Linh, 7A1; Phùng Ngọc Quý, Lê Thị Tuyết Mai, 8A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; Mạc Thị Thu Huệ, 7A, THCS Đồng

Quế; **Khổng Hoàng Trang**, 7D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Nguyễn Mạnh Quân**, 8C, THCS Vĩnh Tường; **Nguyễn Hoàng Thanh**, 8A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh; **Hà Nội:** Lê Quang Huy, 8H1, THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm; **Nguyễn Tuấn Phong**, 7A1, THCS Chu Văn An; **Hải Phòng:** Đỗ Kim Anh, 7A, THCS Thanh Lương, Vĩnh Bảo; **Thanh Hóa:** La Hồng Quân, 8B, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Bùi Bắc Nam, Phạm Thị Phương Anh, Nguyễn Nhật Quang, Phạm Bá Tuấn, Hoàng Xuân Tuấn Anh, Nguyễn Linh Phương Thảo, Võ Hoàng Nam, Hồ Thị Hà, Nguyễn Thị Thuý An, Trần Thị Thảo, 8B; **Hồ Thị Quỳnh Trang**, 8C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Nguyễn Danh Dũng**, 8C, Vũ Đình Long, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Đậu Thế Vũ**, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T4/351. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 252 \\ x^2t^2 + y^2z^2 = 2xyzt. \end{cases}$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Viết lại hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} x + t + y + z = 12 \\ (x + t)^2 + (y + z)^2 - 2xt - 2yz = 50 \\ (x + t)[(x + t)^2 - 3xt] + (y + z)[(y + z)^2 - 3yz] = 252 \\ (xt - yz)^2 = 0 (*) \end{cases}$$

Từ (*) có $xt = yz$. Đặt $x + t = a$, $y + z = b$, $xt = yz = c$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a + b = 12 \\ a^2 + b^2 - 4c = 50 \\ a(a^2 - 3c) + b(b^2 - 3c) = 252 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 12 \\ (a + b)^2 - 2ab - 4c = 50 \\ a^3 + b^3 - 3c(a + b) = 252 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 12 \\ ab + 2c = 47 \\ (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] - 36c = 252 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 12 \\ ab + 2c = 47 \\ ab + c = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \\ c = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 7 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy ta có các hệ:

$$\begin{cases} x+t=5 \\ y+z=7 \\ xt=yz=6 \end{cases}, \begin{cases} x+t=7 \\ y+z=5 \\ xt=yz=6 \end{cases}$$

Giải hai hệ trên ta được các nghiệm của hệ đã cho là: (2, 1, 6, 3), (2, 6, 1, 3), (3, 1, 6, 2), (3, 6, 1, 2), (1, 2, 3, 6), (1, 3, 2, 6), (6, 2, 3, 1), (6, 3, 2, 1). $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải trên, sử dụng tính chất của các tỉ số bằng nhau, một số bạn cũng cho kết quả tương tự.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: Vũ Thị Kim Oanh, 9A, THCS Yên Lạc;
Thái Bình: Nguyễn Quốc Trường, 9A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải; **Hà Nội:** Phạm Duy Long, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Nghệ An:** Hồ Chí Dũng, Hồ Vũ Hoàng, Phan Lê Phương, Bùi Bắc Nam, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nguyễn Danh Dũng, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Phạm Thị Tú Uyên, 7D, THCS TTr. Tây Sơn, Hương Sơn, Nguyễn Thị Quỳnh, 7E, THCS Bình Thịnh, Thái Yên, Đức Thọ.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T5/351.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a+b+c)^3}{abc}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

Lời giải. • Nhận thấy với x, y, z là các số thực dương, ta có

$$i) (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} ii) & \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) (x+y+z) \\ &= 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \geq 9. \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii) & (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad (3) \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra ở (1), (2), (3) khi và chỉ khi $x = y = z$.

• Áp dụng các BDT (1), (2), (3) vào bài toán, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + (a+b+c)^2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \\ &\geq \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + (a^2+b^2+c^2) \cdot \frac{9}{ab+bc+ca} + 18 \\ &= \left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \right) + \frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} + 18 \\ &\geq 2 + 8 + 18 = 28. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P = 28 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \\ ab=bc=ca \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = c. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 28 đạt được khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn đưa ra nhận xét sai: Từ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ dẫn đến $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 1$ (!).

Một số bạn đã sử dụng BDT Bunhiacovski cho các bộ ba số, BDT Cauchy cho nhiều hơn hai số dương để giải bài này.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Phạm Duy Long, 9H, THCS Lê Quý Đôn;
Hà Tây: Nguyễn Bảo Khánh, 9K4, THCS Lê Lợi, Hà Đông; **Vĩnh Phúc:** Võ Thị Kiểm, 6A, THCS Tráng Việt, Mê Linh, Nguyễn Mạnh Quân, 8C, THCS Vĩnh Tường; **Nam Định:** Trần Thu Thủy, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh; **Thanh Hóa:** Hoàng Kiên An, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn, Nguyễn Huy Linh, 9B, THCS Yên Bái, Yên Định; **Nghệ An:** Nguyễn Mạnh Tuấn, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Võ Hồng Đức, 8A1, THCS Quân Hành, Nghi Lộc; **Kiên Giang:** Trần Minh Hảo, 8A6, THCS Bùi Tân Định, Giồng Riềng.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T6/351.** Cho tam giác ABC không tù có các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 và trực tâm H . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & HA^2 + HA_1^2 + HB^2 + HB_1^2 + HC^2 + HC_1^2 \\ &\geq \frac{5}{2} (HA \cdot HA_1 + HB \cdot HB_1 + HC \cdot HC_1) \quad (1) \end{aligned}$$

Lời giải. Các bạn tự vẽ hình.

1) Nếu tam giác ABC vuông, chẳng hạn tại A , ta có $A \equiv H \equiv B_1 \equiv C_1$ và (1) trở thành $AA_1^2 + AB^2 + AC^2 \geq 0$, điều này luôn đúng.

2) Trường hợp tam giác ABC nhọn.

$$\begin{aligned} &\text{Ta có } 2(HA - 2HA_1)^2 \geq 0 \text{ nên} \\ &2(HA^2 + 4HA_1^2) \geq 8HA \cdot HA_1 \quad (2) \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\Delta BA_1H \sim \Delta AA_1C \text{ nên } HA_1.AA_1 = A_1B.A_1C.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } HB^2 + HC^2 &= (A_1B^2 + A_1C^2) + 2HA_1^2 \\ &\geq 2A_1B.A_1C + 2HA_1^2 \\ &= 2HA_1.AA_1 + 2HA_1^2 = 4HA_1^2 + 2HA.HA_1 \\ \text{Vậy } HB^2 + HC^2 &\geq 4HA_1^2 + 2HA.HA_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (2) và (3) thu được

$$2HA^2 + HB^2 + HC^2 + 4HA_1^2 \geq 10HA.HA_1 \quad (4)$$

Tương tự

$$2HB^2 + HC^2 + HA^2 + 4HB_1^2 \geq 10HB.HB_1 \quad (5)$$

$$2HC^2 + HA^2 + HB^2 + 4HC_1^2 \geq 10HC.HC_1 \quad (6)$$

Bây giờ cộng từng vế của (4), (5) và (6) ta được

$$\begin{aligned} 4(HA^2 + HB^2 + HC^2 + HA_1^2 + HB_1^2 + HC_1^2) \\ \geq 10(HA.HA_1 + HB.HB_1 + HC.HC_1). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra BĐT (1).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H vừa là trực tâm vừa là trọng tâm của tam giác ABC tức là tam giác ABC đều. $\square$

◀ Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt:

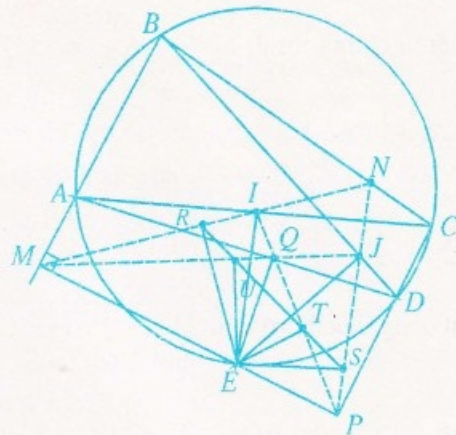
Phú Thọ: Nguyễn Ngọc Trung, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Hà Ngọc Thủy, 9A, THCS Thái Hòa, Lập Thạch; **Nam Định:** Trần Thu Hiền, 9A3, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định; **TP. Hồ Chí Minh:** Bùi Trần Long, 9A5, THCS Chu Văn An, Quận 1.

VŨ KIM THỦY

★ **Bài T7/351.** Cho năm điểm A, B, C, D và E cùng nằm trên một đường tròn. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của E xuống các đường thẳng AB, BC, CD và DA . Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của E xuống các đường thẳng MN, NP, PQ và QM cũng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải. Trước tiên chúng ta nêu một kết quả quen thuộc sau: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và E là một điểm bất kỳ trên đường tròn đó. Khi đó chân các đường vuông góc kẻ từ E lên ba đường thẳng BC, CA, AB thẳng hàng (đường thẳng Simson ứng với điểm E của tam giác ABC).

Trở lại bài toán: Gọi I, J, R, S, T và U lần lượt là hình chiếu vuông góc của E xuống các đường thẳng AC, BD, MN, NP, PQ và QM .



Theo kết quả trên ta thấy M, N, I thẳng hàng (đường thẳng Simson ứng với điểm E của tam giác ABC); do đó R thuộc đường thẳng MI ; N, P, J thẳng hàng (đường thẳng Simson ứng với điểm E của tam giác BCD), do đó S thuộc đường thẳng NP .

Mặt khác ta thấy M, I, Q, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AE , nên từ kết quả trên ta có R, U, T thẳng hàng (đường thẳng Simson ứng với điểm E của tam giác MIQ) (1)

Lại có I, N, P, E cùng nằm trên đường tròn đường kính CE , nên R, S, T thẳng hàng (đường thẳng Simson ứng với điểm E của tam giác NPI) (2)

Từ (1), (2) suy ra R, S, T, U thẳng hàng. $\square$

◀ Nhận xét. 1) Bài toán có thể mở rộng cho n điểm cùng nằm trên một đường tròn.

2) Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Hà Nội: Nguyễn Lâm Phúc, 9D, Trường Hà Nội - Amsterdam; **Hung Yên:** Hoàng Văn Công, 8B, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Nghe An:** Nguyễn Thái Hùng, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Phú Yên:** Phan Long Trí Yên, 8H, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa; **Cần Thơ:** Phạm Thị Tuyết Hạnh, 8A1, THCS Bình Thủy, TP. Cần Thơ.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/351. Chứng minh rằng

$$(2n+1)^{n+1} \leq (2n+1)!! \pi^n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, \text{ trong đó } (2n+1)!! \text{ là tích các số nguyên dương lẻ từ } 1 \text{ đến } 2n+1.$$

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn Bùi Trần Minh Thành, 10T, THPT chuyên Rạch Giá, Kiên Giang).

Trước hết ta chứng minh $\left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{n+1} < \pi$ (1)

Xét dãy $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Ta có $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ (2)

Theo bất đẳng thức Bernoulli $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}$ (3)

Do đó từ (2) và (3) suy ra $\frac{b_n}{b_{n-1}} < \left(1 - \frac{1}{n^4}\right)^n < 1$.

Vậy (b_n) là dãy giảm.

Do đó $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq b_4 = \frac{5^5}{4^5} < 3,06 < \pi$, với $n \geq 4$.

Vậy $\left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \pi$, $\forall n \geq 4$.

Với $n = 1, 2, 3$, thử trực tiếp có (1) thỏa mãn.

Trở lại bài toán. Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với $n = 1$ ta có $3^3 < 3!! \pi^3$ luôn đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với n tức là

$$(2n+1)^{n+1} \leq (2n+1)!! \pi^n \quad (4)$$

Theo (1) ta có $\pi > \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

hay $\pi(2n+1)^{n+1} > (2n+3)^{n+1}$ (5)

Vậy áp dụng giả thiết quy nạp và (5) ta có

$$(2n+3)!! \pi^{n+1} = (2n+1)!! \pi^n \cdot (2n+3)\pi$$

$$\geq (2n+1)^{n+1} \pi(2n+3) > (2n+3)^{n+2}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n+1$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bất đẳng thức (1) (bước then chốt để chứng minh bài toán) có thể giải bằng nhiều cách. Đa số các bạn sử dụng phương pháp đạo hàm.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Kiên Giang: Vũ Đại Nghĩa, lớp 10 chuyên, THPT Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá; **Vinh Phúc:** Mạc Thế Trường, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** Trần Thị Quỳnh Mai, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Đắc Lắc:** Trần Anh Quang, 11CT, THPT

chuyên Nguyễn Du, Đắc Lắc; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Hạnh Dung, 12 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hòa Bình:** Vũ Việt Dũng, 12 Toán, THPT Hoàng Văn Thụ; **Nghệ An:** Hoàng Minh Thắng, 11A1, THPT Phan Bội Châu.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T9/351.** Giải phương trình

$$x^3 - 3x = \sqrt{x+2}. \quad (1)$$

Lời giải. Nếu $x < -2$ thì PT (1) không xác định. Để ý với $x > 2$ ta có

$$x^3 - 3x = x + x(x^2 - 4) > x > \sqrt{2x} > \sqrt{x+2}.$$

Vậy để giải PT (1) ta chỉ cần xét với $-2 \leq x \leq 2$.

Đặt $x = 2\cos\alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Khi đó $x^3 - 3x = 2(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) = 2\cos 3\alpha$,

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2\cos\alpha+2} = \sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Do đó phương trình (1) tương đương với

$$\cos 3\alpha = \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = \pm \frac{\alpha}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$1) \quad 3\alpha = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{4k\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp với $0 \leq \alpha \leq \pi$, ta suy ra $k \in \{0; 1\}$,

$$2) \quad 3\alpha = -\frac{\alpha}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{4k\pi}{7} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp với $0 < \alpha \leq \pi$ ($\alpha = 0$ đã được tính ở trên), ta suy ra $k = 1$.

Vậy phương trình (1) có ba nghiệm $x = 2$,

$$x = 2\cos\frac{4\pi}{5}, x = 2\cos\frac{4\pi}{7}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Đây là bài toán đại số giải bằng phương pháp lượng giác, bài toán này không khó. Hơn một nửa trong số lời giải tới tòa soạn cho lời giải sai (lí luận sai và thiếu nghiệm). Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Thị Thu Hiền, 11A1, PTCT, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Nguyễn Quang Thắng, 12A1, THPT Phả Lại, Chí Linh; **Hải Phòng:** Lý Trần Đức Anh, Trần Hoàng Bá, 11T, THPT năng khiếu Trần Phú; **Thanh Hóa:** Trần Hữu Anh, 11A3, THPT Quảng Xương III; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Cẩm Hằng, 11T, THPT năng khiếu Hà Tĩnh, Vũ Tá Sơn, 12A1, THPT Trần Phú, Đức Thọ;

Quảng Trị: Nguyễn Thúc Vũ Hoàng, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Đông Hà; **Đắk Lắk:** Nguyễn Đình Quốc Bảo, 11T, THPT Nguyễn Du; **Đồng Tháp:** Trần Trung Kiên, 11A1, THPT Tam Nông; **Bình Định:** Dương Tú, 10T, Đào Lê Văn, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Kiên Giang:** Vũ Đại Nghĩa, 10T, THPT Huỳnh Mẫn Đạt; **An Giang:** Đặng Minh Tâm, 12A6, THPT Nguyễn Bình Khiêm.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/351.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn

$$f(0) = 0; f(1) = 1; 6f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = 5f(x) + f(y)$$

với $x \geq y; x, y \in [0; 1]$.

Hãy tính $f\left(\frac{8}{23}\right)$.

Lời giải. (Theo bạn Trần Văn Thăng, 11A1, THPT Lý Thái Tổ, Từ Sơn, Bắc Ninh và đa số các bạn).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 6f\left(\frac{8}{23}\right) &= 6f\left[\frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{12}{23} + 0\right)\right] \\ &= 5f\left(\frac{12}{23}\right) + f(0) = 5f\left(\frac{12}{23}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{và } 6f\left(\frac{12}{23}\right) &= 6f\left[\frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{18}{23} + 0\right)\right] \\ &= 5f\left(\frac{18}{23}\right) + f(0) = 5f\left(\frac{18}{23}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Mặt khác, từ giả thiết ta lại có

$$\begin{aligned} 6f\left(\frac{18}{23}\right) &= 6f\left[\frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{23}{23} + \frac{8}{23}\right)\right] \\ &= 5f(1) + f\left(\frac{8}{23}\right) = 5 + f\left(\frac{8}{23}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta thu được

$$6f\left(\frac{8}{23}\right) = \frac{25}{36} \left[5 + f\left(\frac{8}{23}\right) \right]$$

Từ đây suy ra $f\left(\frac{8}{23}\right) = \frac{125}{191} \quad \square$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là đề toán tính toán có tính kỹ thuật nên có không nhiều bạn giải được và đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên. Ta thấy giả thiết về tính liên tục trong bài ra không được sử dụng đến.

Bài toán trên là trường hợp riêng của bài toán tính toán giá trị của hàm số sau:

Cho m, n là các số tự nhiên, $\alpha \in [0; 1]$ và cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[0; 1]$ thỏa mãn điều kiện

$$f(0) = 0; f(1) = 1; f\left(\frac{mx+ny}{m+n}\right) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

với $x \geq y; x, y \in [0; 1]$. Chứng minh đẳng thức

$$f\left(\frac{m^3}{(m+n)^3 - nm^2}\right) = \frac{\alpha^3}{1-\alpha^2+\alpha^3}$$

2) Ngoài bạn Thăng, các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Đào Anh Tú, 10A2 Toán, ĐHKHTN;

Thanh Hóa: Nguyễn Cao Tuấn, Nguyễn Minh Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Hoàng Minh Thăng, 11A1, THPT Phan Bội Châu; **Bình Định:** Đào Lê Văn, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Kiên Giang:** Vũ Đại Nghĩa, 10T, THPT Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/351. Tính các góc của tam giác ABC ,

biết rằng $\frac{h_a}{m_b} + \frac{h_b}{m_a} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, trong đó m_a, m_b

theo thứ tự là độ dài các đường trung tuyến; h_a, h_b theo thứ tự là độ dài các đường cao thuộc các đỉnh A, B của tam giác ABC .

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Thị Cẩm Hằng, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh).

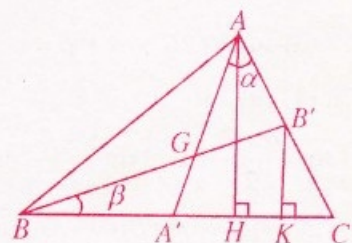
Gọi AA', BB' theo thứ tự là trung tuyến xuất phát từ A, B của $\triangle ABC$; G là trọng tâm $\triangle ABC$. Đặt α

$= \widehat{A'AC}$; $\beta =$

$\widehat{B'BC}$. Gọi H, K thứ tự là hình chiếu của A, B' trên BC .

$$\text{Ta có } \frac{h_a}{m_b} = \frac{AH}{BB'} = \frac{2 \cdot B'K}{BB'} = 2\sin\beta.$$

$$\text{Tương tự } \frac{h_b}{m_a} = 2\sin\alpha.$$



Từ đó và giả thiết $\frac{h_a}{m_b} + \frac{h_b}{m_a} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, ta có

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lý sin cho các tam giác AGB' , BGA' , ta có

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta+C)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha+C)} &= \frac{GB'}{GA} \cdot \frac{GA'}{GB} \\ &= \frac{GA'}{GA} \cdot \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 8 \sin \alpha \cdot \sin \beta = 2 \sin(\alpha+C) \sin(\beta+C)$$

$$\Rightarrow 4(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$= \cos(\alpha-\beta) - \cos(2C+\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow 3 \cos(\alpha-\beta) - 4 \cos(\alpha+\beta) \leq 1$$

$$\Rightarrow 3 \left(2 \cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} - 1 \right) - 4 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \leq 1$$

$$\Rightarrow 4 \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + 3 \cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} \leq 4$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{3} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \leq 4 \text{ (BĐT Cauchy)}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \sin \beta \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra ở (2) (do (1)) nên

$$\begin{cases} \cos(2C+\alpha+\beta) = -1 \\ 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{3} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \cos(2C+\alpha+\beta) = -1 \\ 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{3} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) suy ra } 2C + \alpha + \beta = \pi \quad (5)$$

Từ (4) suy ra

$$4 \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sqrt{3} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\Rightarrow 2(1 - \cos(\alpha+\beta)) = \sqrt{3}(\sin \alpha + \sin \beta)$$

$$\Rightarrow 2(1 - \cos(\alpha+\beta)) = 2 \text{ (theo (1))}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\pi}{4} \text{ (theo (5)).}$$

$$\begin{aligned} \text{Chú ý rằng } \widehat{AB'G} + \widehat{BA'G} &= \beta + C + \alpha + C \\ &= 2C + \alpha + \beta = \pi \text{ (theo (5)),} \end{aligned}$$

nên tứ giác $A'GB'C$ nội tiếp

$$\Rightarrow AG \cdot AA' = AB' \cdot AC \Rightarrow \frac{2}{3} m_a^2 = \frac{1}{2} b^2$$

$$\Rightarrow 4m_a^2 = 3b^2 \Rightarrow 2(b^2 + c^2) - a^2 = 3b^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2c^2 \Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B = 2 \sin^2 C$$

$$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B = 1 \text{ (vì } C = \frac{\pi}{4} \text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \cos 2A + \cos 2B = 0$$

$$\Rightarrow \cos(A+B) \cos(A-B) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(A-B) = 0 \text{ (vì } A+B = \frac{3\pi}{4} \text{)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A-B = \frac{\pi}{2} \\ A-B = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } A+B = \frac{3\pi}{4} \text{ nên } A = \frac{5\pi}{8}, B = \frac{\pi}{8}, C = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{hoặc } A = \frac{\pi}{8}, B = \frac{3\pi}{8}, C = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán khó, chỉ có ít bạn tham gia giải và 5 bạn có kết quả đúng, 1 bạn có hướng giải đúng nhưng không tính được cụ thể số đo của các góc A, B, C .

2) Ngoài lời giải trên, một số bạn đưa ra lời giải hình học tuy khá phức tạp nhưng cũng cho kết quả đúng.

3) Xin nêu tên tất cả các bạn có lời giải đúng:

Hà Tĩnh: Phạm Quốc Duẩn, Toán K14, THPT năng khiếu, Võ Tá Sơn, 12A1, THPT Trần Phú, Đức Thọ;

Nam Định: Bùi Đức Bình, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nội:** Trịnh Ngọc Dương, 11T1, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài T12/351.** Cho tứ diện gần đều $ABCD$ ($AB = CD, AC = BD, BC = AD$). Gọi V, R, r theo thứ tự là thể tích, bán kính mặt cầu ngoại tiếp, bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện đó. Chứng minh rằng

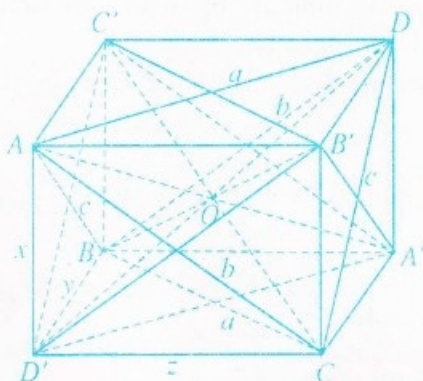
$$\frac{243V^2}{512R^6} \leq \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{9}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad (*)$$

trong đó A, B, C là ba góc trong của tam giác ABC .

Dấu bằng ở các bất đẳng thức trên xảy ra khi nào?

Lời giải. Đặt $BC = DA = a$, $CA = DB = b$, $AB = DC = c$.

Dựng hình hộp $AB'CD'.C'DA'B$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ (hình vẽ).



Dễ thấy rằng nó là một hình hộp chữ nhật có các kích thước $D'A = x$, $D'B = y$, $D'C = z$ được tính theo a, b và c bởi các phương trình:
 $y^2 + z^2 = a^2$, $z^2 + x^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = c^2$.

Từ đó suy ra

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

Sau đó, áp dụng định lí cosin vào tam giác ABC thì được

$$V = \frac{1}{3} abc \sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} \quad (1)$$

Ngoài ra, vì mặt cầu $(O; R)$ ngoại tiếp tứ diện gần đều $ABCD$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật nói trên (có các đường kính là các đường chéo AA' , BB' , CC' và DD' của hình hộp này) nên cũng dễ dàng suy ra

$$8R^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad (2)$$

• Bây giờ, từ (2) và áp dụng BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân của ba số dương a^2, b^2, c^2 ta thu được BĐT sau

$$512R^6 = (a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 27a^2b^2c^2,$$

$$\text{hay là } a^2b^2c^2 \leq \frac{512}{27} R^6 \quad (3)$$

Lại từ (1) ta được

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \frac{9V^2}{a^2b^2c^2} \quad (4)$$

Đến đây, từ (3) và (4) ta thu được BĐT cần tìm ở bên trái của BĐT kép (*):

$$\frac{243V^2}{512R^6} \leq \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \quad (5)$$

Dấu "=" xảy ra ở (5) khi và chỉ khi dấu "=" xảy ra ở (3), tức là khi và chỉ khi $a = b = c$.

• Sau cùng, ta chứng minh BĐT ở bên phải của BĐT kép (*).

Gọi ρ, s, h và S theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt diện tích mỗi mặt, chiều cao và diện tích toàn phần của hình tứ diện gần đều $ABCD$, thế thì ta có

$$\rho^2 = R^2 - r^2 \quad (6)$$

$$\rho = \frac{abc}{4s} = \frac{abc}{S}, \text{ hay } S = \frac{abc}{\rho} \quad (7)$$

$$V = \frac{1}{3} S r = \frac{1}{3} s h \quad (8)$$

Từ (8) có $h = 4r$, hơn nữa $R + r \geq h$,

$$\text{suy ra } R \geq 3r \quad (9)$$

Đến đây, từ các đẳng thức (4), (6), (7), (8) và BĐT (9) ta dễ dàng thu được BĐT ở bên phải của BĐT kép (*):

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{9}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad (10)$$

(Vì từ $R \geq 3r$ ta được $R^2 \geq 9r^2$,

do đó $9R^2 \geq 8R^2 + 9r^2$).

Và từ đó ta được $9(R^2 - r^2)r^2 \geq 8R^2r^2$, rồi sau đó suy ra

$$\begin{aligned} \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C &= \frac{9V^2}{a^2b^2c^2} = \frac{r^2}{\rho^2} = \frac{r^2}{R^2 - r^2} \leq \frac{9}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^2. \square \end{aligned}$$

◀ **Nhận xét.** 1) BĐT (*) cần thiết lập là một BĐT kép, liên hệ giữa thể tích V , các bán kính r, R của các mặt cầu nội, ngoại tiếp một tứ diện gần đều với cosin các góc của một mặt (nào đó) của tứ diện đó. Bởi vậy, nhất thiết ta phải thiết lập được công thức tính V theo độ dài các cạnh và độ lớn các góc của mỗi mặt của tứ diện gần đều $ABCD$ được xét. Sử dụng hình hộp ngoại tiếp tứ diện ta thiết lập được dễ dàng và nhanh chóng hệ thức (1). Ngoài ra, trên hình hộp này ta cũng dễ dàng chỉ ra được hệ thức (2), cùng các hệ thức (6),

(7), (8) và BĐT (9). Cố nhiên, để thiết lập BĐT kép (*) ngoài các hệ thức (1), (2), (6), (7), (8), (9) biểu thị các tính chất hình học ta chỉ cần đến BĐT đại số cơ bản giữa trung bình cộng và trung bình nhân của ba số dương mà thôi.

Lời giải của bài toán đưa ra ở trên là lời giải ngắn gọn nhất, đặc biệt mang sắc thái hình học rõ nét, mà cũng nêu được đầy đủ các chứng minh cần thiết.

2) Trong số các bạn gửi lời giải bài toán trên đây về Tòa soạn, với tiêu chí đã chỉ ra ở phần 1) thì bạn **Lý Trần Đức Anh**, 11 Toán, THPT năng khiếu Trần Phú, **Hải Phòng** có lời giải tốt hơn cả, thể hiện vừa chặt chẽ, vừa ngắn gọn đồng thời mang đậm sắc thái hình học. Ngoài ra, hai bạn sau đây cũng có lời giải tương đối gọn gàng: **Tạ Hải Yến**, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc** và **Cao Trường Quân**, 12A4, THPT Lương Khắc Bảng, Hoàng Hóa, **Thanh Hóa**.

3) Số các bạn tham gia giải bài toán trên đây không nhiều, tất cả đều giải đúng. Tuy nhiên, hầu hết các bạn đều giải không gọn, nhất là sử dụng quá nhiều hệ thức (đẳng thức và BĐT) lượng giác không phải là cơ bản mà nguyên do là các bạn không chú trọng quan tâm đến việc thiết lập những hệ thức hình học cần thiết (mặc dầu rất đơn giản).

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT



★ **Bài L1/351.** Hai vật I và II có khối lượng lần lượt m_1 và m_2 được buộc vào hai sợi dây dài bằng nhau và được treo sát bên nhau như hình vẽ. Người ta kéo vật I sang một bên tới độ cao so với vật II là 0,2m rồi thả không vận tốc ban đầu. Sau đó vật I va chạm đàn hồi với vật II.

a) Hỏi sau khi va chạm lần thứ nhất, cả hai vật cùng lên đến độ cao bao nhiêu mét?

b) Hai vật lại chuyển động đi xuống và va chạm vào nhau lần thứ hai. Hãy mô tả điều gì xảy ra sau đó.

(Coi rằng hai sợi dây có khối lượng không đáng kể).

Lời giải. a) Sau va chạm lần thứ nhất, hai vật chuyển động ngược chiều (nếu cùng chiều thì thành va chạm mềm!). Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn cơ năng ta có

$$m_1 v_1 = m_2 v - m_1 v, \text{ với } v_1 = \sqrt{2gh_1}, v = \sqrt{2gh}$$

$$\text{hay } m_1 \sqrt{h_1} = (m_2 - m_1) \sqrt{h} \quad (1)$$

$$\text{và } (m_1 + m_2)gh = m_1 gh_1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) tìm được :

$$m_2 = 3m_1 \text{ và } h = \frac{h_1}{4} = 0,05(\text{m}).$$

b) Chọn chiều dương là chiều chuyển động của vật II. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng:

$$3mv_2 - mv_1 = 3mv - mv$$

$$(\text{đặt } m_1 = m \text{ thì } m_2 = 3m)$$

$$\Rightarrow 3v_2 - v_1 = 2v \quad (3)$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

$$\frac{1}{2} \cdot 3mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(3m + m)v^2$$

$$\Rightarrow 3v_2^2 + v_1^2 = 4v^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) rút ra $v_2(v_2 - v_1) = 0$.

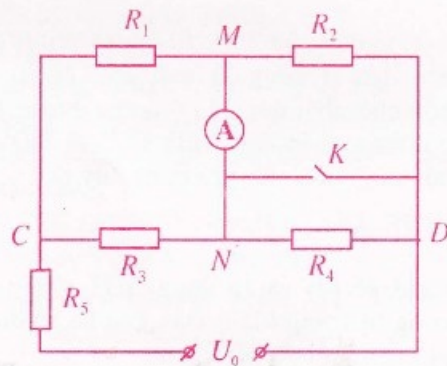
Có hai trường hợp : $v_2 = v_1$ (vô lí) hay $v_2 = 0$: Vật II đứng yên, và do đó vật I lại lên đến độ cao ban đầu ($h = 0,2\text{m}$). □

◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt là :

Sơn La: Lê Vũ Hải, 11 Lí, THPT chuyên Sơn La; **Bắc Giang:** Nhữ Văn Vinh, 11A1, THPT Tân Yên II; **Hà Nội:** Nguyễn Thế Năng, 12A1, THPT Nguyễn Tất Thành; **Bình Định:** Trần Tiên Tin, 10Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

MAI ANH

★ **Bài L2/351.** Cho mạch điện như hình vẽ:

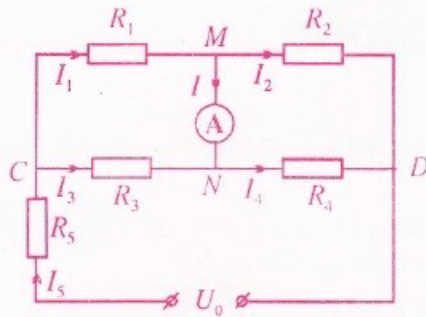


$R_1 = R; R_2 = 2R; R_3 = 3R; R_4 = 4R; R_5 = 5R; R_A = R$. Hiệu điện thế U_0 không đổi. Biết rằng khi khóa K ngắt thì số chỉ của ampe kế là I ; khi khóa K đóng thì số chỉ của ampe kế là I' .

Xác định tỉ số $\frac{I}{I'}$.

Lời giải. • Khi khoá K ngắt:

Giả sử dòng điện có chiều như hình 1.



Hình 1

Chọn điện thế tại nút D bằng 0 (V). Ta có

$$I = I_1 - I_2 \Rightarrow \frac{V_M - V_N}{R_A} = \frac{V_C - V_M}{R_1} - \frac{V_M}{R_2}$$

$$5V_M - 2V_N = 2V_C \quad (1)$$

$$I = I_4 - I_3 \Rightarrow \frac{V_M - V_N}{R_A} = \frac{V_N}{R_4} - \frac{V_C - V_N}{R_3}$$

$$-12V_M + 19V_N = 4V_C \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $V_M = \frac{46}{71}V_C$; $V_N = \frac{44}{71}V_C$.

Để dàng tìm được $I = \frac{2V_C}{71R} \quad (3)$

$$I_1 = \frac{25V_C}{71R}; I_3 = \frac{9V_C}{71R}$$

Mặt khác $U_0 = I_5 R_5 + V_C = (I_1 + I_3)R_5 + V_C$

Suy ra $U_0 = \frac{241}{71}V_C \quad (4)$

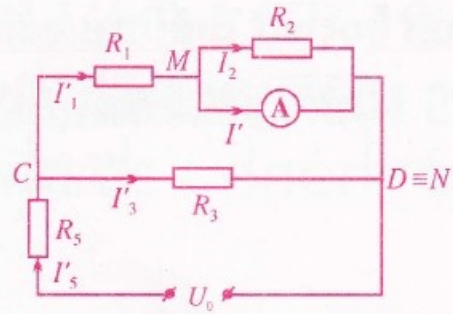
Từ (3) và (4) ta có $I = \frac{2U_0}{241R} \quad (5)$

• Khi khoá K đóng, mạch điện có dạng như hình 2.

Ta có $I'R_A = I'_2 R_2 \Rightarrow I'_2 = \frac{I'}{2} \quad (6)$

$$I'R_A + (I' + I'_2)R_1 = I'_3 R_3$$

Suy ra $I'R_A + \frac{3}{2}I'R_1 = I'_3 R_3$ hay $I'_3 = \frac{5}{6}I' \quad (7)$



Hình 2

Mặt khác $I'_5 R_5 + I'_3 R_3 = U_0$,

hay $(I' + I'_2 + I'_3)R_5 + I'_3 R_3 = U_0 \quad (8)$

Thay (6), (7) vào (8) ta có $I' = \frac{6U_0}{85R} \quad (9)$

Từ (5) và (9) suy ra $\frac{I}{I'} = \frac{85}{723} \quad \square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Yên Bái: Hoàng Tuấn Anh, 10K, THPT Nguyễn Tất Thành, TP. Yên Bái; **Thanh Hoá:** Lê Bá Sơn, 11F, THPT Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mạnh Tuấn, 12A1, THPT Trần Phú, Đức Thọ, Nguyễn Hữu Thọ, 11A, THPT Lý Tự Trọng, Thạch Hà; **Hà Nội:** Nguyễn Thế Năng, 12A, THPT Nguyễn Tất Thành; **Thái Bình:** Vũ Thị Xuân, 12A6, THPT Bắc Duyên Hà, Hưng Hà, Vũ Quang Diệu, 11A4, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Tiền Giang:** Trương Mai Thanh Tâm, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Hà Nam:** Nguyễn Thị Hồng Tươi, 11A5, THPT chuyên Hà Nam; **Hung Yên:** Đinh Ngọc Vương, 12A1, THPT Kim Động; **Hải Phòng:** Trần Hoàng Bá, 11 Toán, Lí Trần Đức Anh, 11 Toán, THPT nâng cao khiêu Trần Phú; **Hà Tây:** Nguyễn Ngọc Đăng, 11A1, THPT Phú Xuyên A; **Nghe An:** Đậu Lệ Thuỷ, 12A, THPT Quỳnh Lưu IV, Nguyễn Nghệ Hà, 11G, Lê Trung Sơn, 11G, THPT Nghĩa Đàn, Lê Đình Khiết, 11A3 K34, Nguyễn Hồ Như Ý, 11A3 K34, THPT Phan Bội Châu, Trần Thị Dương, 11A4, THPT chuyên Đại học Vinh; **Vĩnh Phúc:** Đặng Đức Xuân, 11A3, Văn Đăng Sơn, 11A3, Đỗ Đại Dương, 11A3, Nguyễn Tiến Dũng, 11A10, Lỗ Tát Thắng, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN THUẬN

CÙNG BẠN ĐỌC

Đề ra kì này các số tạp chí 355, 356, 357 (1, 2, 3 năm 2007) có 9 bài toán.

THTT

Toán học và Tuổi trẻ với IMO

30 NĂM VIỆT NAM THI IMO

và thành tích những năm gần đây

LÊ HẢI CHÂU

(Trưởng đoàn đầu tiên của đoàn học sinh Việt Nam thi Toán Quốc tế 1974)

Kể từ khi nước ta tham gia kì thi Toán Quốc tế IMO (International Mathematical Olympiad) lần đầu tiên hè 1974 tại CHDC Đức đến năm 2006 vừa tròn 30 kì thi chúng ta tham gia (ba năm không dự thi là: năm 1977 tại Nam Tư, năm 1980 thế giới không tổ chức và năm 1981 tại Mỹ).

Chúng ta hãy nhìn lại chặng đường 30 năm để thấy rõ thành tích và khó khăn trong việc tham dự kì thi IMO.

Về thành tích, năm đầu tiên đoàn học sinh giỏi Toán của nước ta dự thi (hè 1974) đã đạt kết quả rất đáng tự hào: 1 Huy chương Vàng (Hoàng Lê Minh), 1 Huy chương Bạc (Vũ Đình Hòa), 2 Huy chương Đồng (Đặng Hoàng Trung và Tạ Hồng Quảng), riêng Nguyễn Quốc Thắng chỉ thiếu 1 điểm nữa là đoạt Huy chương Đồng.

Trong khi cuộc kháng chiến chống Mỹ của nhân dân ta đang vào thời kì ác liệt, khi các học sinh của đoàn ta phải học ở nơi sơ tán thì kết quả thi Toán Quốc tế của Việt Nam đã gây được tiếng vang trong và ngoài nước. Chúng ta tự hào khi đọc bài báo sau đây của tờ "Bưu điện hàng tuần" số ra ngày 28-8-1974 của nước CHDC Đức:

"Người ta vỗ tay lâu nhất để hoan nghênh đoàn học sinh Việt Nam lần đầu dự thi đã chiếm bốn giải với năm em thi. Làm thế nào mà giải thích nổi tại sao những học sinh của một đất nước đang trải qua một cuộc chiến tranh tàn khốc lại có được một vốn kiến thức toán học lớn như thế?"

Đúng là khó tưởng tượng nổi, từ một đất nước bị B52 tàn phá, từ những mái trường sơ tán, học hành bên cạnh những chiếc hầm chữ A, ban đêm dưới ánh đèn dầu leo lét, ban ngày giữa

những trận bom, thiếu thốn đủ điều mà đoàn học sinh ta vẫn lập nên kì tích.

Từ năm đầu tiên 1974 đến 2006, trong 30 năm dự thi, chiến công nối tiếp chiến công. Chúng ta đã dần dần khẳng định trí thông minh, óc sáng tạo và khả năng to lớn của học sinh Việt Nam, của tuổi trẻ Việt Nam đối với thế giới.

Hãy nhìn lại thành tích 13 năm gần đây của đoàn Việt Nam từ năm 1995 ở Canada đến năm 2006 tại Slôvênia

Năm	Nước đăng cai	HC Vàng	HC Bạc	HC Đồng
1995	Canada	2	4	
1996	Ấn Độ	3	1	1
1997	Achentina	1	5	
1998	Đài Loan	1	3	2
1999	Rumani	3	3	
2000	Hàn Quốc	3	2	1
2001	Hoa Kỳ	1	4	
2002	Anh	3	1	2
2003	Nhật	2	3	1
2004	Hy Lạp	4	2	
2005	Mêhicô		3	3
2006	Slôvênia	2	2	2

Trong các giải mà đoàn học sinh ta đoạt được trong 30 năm dự thi phải kể đến giải Đặc biệt dành cho "Lời giải đẹp và độc đáo" tại kì thi năm 1979 ở Luân Đôn, Vương quốc Anh. Lê Bá Khánh Trình đã đoạt hai giải: giải Nhất tuyệt đối 40/40 và giải Đặc biệt duy nhất nói trên.

(Xem tiếp trang 15)



Dễ dò tìm những sự gian lận, nhất là về thuế, người ta có thể đếm sự xuất hiện chữ số 1 như là chữ số có ý nghĩa đầu tiên của một mục lục các số "chuẩn thống kê" này, lâu nay đã được sử dụng, vừa được làm cho chính xác hơn. Robert Azencott giáo sư trường Cao đẳng Sư phạm giải thích vấn đề này.

Ai đã nêu ý tưởng nghiên cứu sự phân bố thống kê của chữ số 1 của một mục lục các số?

Cuối thế kỉ XIX, nhà thiên văn học Simon Newcomb

nhận thấy rằng những trang đầu của những bảng logarit được sử dụng nhiều hơn những trang khác. Các bảng này, ở thời kì đó, cho phép thực hiện những phân tích về các số. Newcomb suy ra từ đó rằng, nói chung, người ta cần dùng đến những số có chữ số đầu tiên là 1 nhiều hơn những số có chữ số đầu tiên là 9. Năm 1938, nhà vật lí học Franck Benford đã khám phá lại tính chất này, ngày nay tính chất này mang tên ông.

Các chữ số 1 xuất hiện nhiều hơn chữ số 9 như thế nào?

Sự giải thích chính, về lí thuyết, đã công bố là một lí lẽ về tính bất biến tỉ lệ: Một mật độ xác suất tự nhiên cho một mục lục những giá phải phụ thuộc vào đồng tiền mà theo đó các giá được biểu thị. Khi thay đổi đồng tiền, mật độ đó phải nhân với một hằng số phụ thuộc tỉ giá hối đoái. Xuất phát từ giả thiết này, người ta có thể

xác lập những xác suất của một giá bắt đầu từ một chữ số 1 là khoảng 30%, tức hơn nhiều so với 11% tương ứng với một sự phân bố đều các chữ số từ 1 đến 9.

Ít ra cũng là một sự bất ngờ!

Chính điều đó làm cho quy luật của Benford có thể trợ giúp thuế vụ để xác định những gian lận. Nếu lãnh đạo một hiệp hội giả mạo những bảng tổng kết tài sản thì họ đã thay những chữ số đúng bằng những chữ số sai. Vì sự trực giác không cho phép những kẻ gian lận biết rằng chữ số đầu tiên phải tuân theo quy luật Benford, nên người ta có thể, bằng những sự thử nghiệm thống kê đơn giản, xác định một sự quanh co và do vậy gọi ra những sự nghi ngờ. Tuy vậy, lĩnh vực áp dụng quy luật Benford vẫn chưa thật rõ. Không phải bao giờ cũng dễ chứng minh rằng loại số liệu này hay loại khác về mặt lí thuyết, phải có một sự phân bố thống kê như thế, chứ

không phải một sự phân bố khác.

Phải chăng quy luật Benford đã được sử dụng để vạch mặt những kẻ gian lận?

Trong những năm 90 của thế kỉ trước, người Mỹ Mark Nigrini đã ủng hộ một luận điểm về

vấn đề trên, có cộng tác với cơ quan Thuế vụ Mỹ. Cơ quan này tỏ ra rất bằng lòng với những kết quả thu được, cho đến ngày nay, người ta bằng lòng với sự đếm số lần chữ số 1 xuất hiện ở trước. Người ta biết rằng chữ số 2 cũng thường xuất hiện nhiều hơn so với một sự phân bố đều. Rồi chữ số càng cao thì càng ít xuất hiện. Với sự nghiên cứu này, người ta quan tâm đến những chữ số khác để cho sự nghiên cứu thống kê tinh vi hơn, nhằm xác định được những sự gian lận. Tuy vậy, trong mọi trường hợp, phải hiểu rằng sự phân tích thống kê không có thể giải quyết vấn đề. Mục đích duy nhất của nó là định hướng các nghiên cứu, để rồi các tổ chức có thẩm quyền mới đi đến quyết định cuối cùng lập những chứng cứ.

NGUYỄN VĂN THIÊM
(Theo *La Recherche*)

Thống kê TRỢ GIÚP THUẾ VỤ CHỐNG GIAN LẬN THUẾ



Giải đáp bài

Xếp số vào bảng

(Đề đăng trong THPT số 352 tháng 10.2006)

Gọi S là tổng các số ở mỗi hàng, s là tổng các số trên mỗi cột, còn T là tổng của tất các số của bảng sau khi đã sắp xếp xong.

1	A	B	C
D	9	E	5
F	G	14	H

Nhận thấy $T = 3S$, nên T chia hết cho 3; $T = 4s$, nên T chia hết cho 4. Do đó T chia hết cho 12. Vì tổng tất cả các số (4 số trong bảng và 9 số đã cho) là 106.

Mà $106 \equiv 10 \pmod{12}$, vì thế trong 9 số đã cho ở đầu bài phải bỏ đi số 10 (96 chia hết cho 12).

Từ đó $S = 32$, $s = 24$.

Từ $D + E = 18$ ta thấy D, E có thể là 11 và 7 hoặc 15 và 3 (1)

Do $D + F = 23$ nên D, F có thể là 11 và 12 (2).

Từ (1), (2) suy ra $D = 11, E = 7, F = 12$.

Từ cột 3 có $B = 3$. Lại vì

$G + H = 6$ nên G và H chỉ có thể là 2 và 4 (3)

$A + G = 15$ nên A và G chỉ có thể là 13 và 2 (4).

Từ (3) và (4) có $A = 13, G = 2, H = 4$.

Từ cột 4 có $C = 15$.

Ta có bảng kết quả ở bảng bên

1	13	3	15
11	9	7	5
12	2	14	4

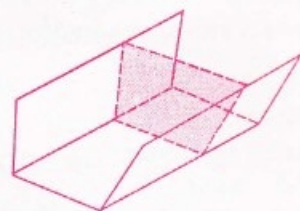
Nhận xét. Tòa soạn nhận được rất nhiều lời giải cho bài toán này, tất cả đều có đáp án đúng. Sau đây là những bạn có bài giải tốt hơn cả:

Bắc Ninh: Vũ Thị Thêu, 11A₀, THPT Yên Phong I, Yên Phong; **Thanh Hóa:** Nguyễn Tiến Liên, 7A, THCS Yên Trường, Yên Định, Nguyễn Minh Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Anh Minh, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Phú Yên:** Lê Trung Hiếu, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa.

NGUYỄN PHÚC

Tạo chiếc máng nước

Người ta muốn làm một cái máng dẫn nước từ một tấm tôn hình chữ nhật với một cắt của nó là một hình thang cân (hình vẽ). Hỏi rằng chiều rộng của thành máng và góc tạo bởi thành máng và đáy máng phải là bao nhiêu để mặt cắt của máng có diện tích lớn nhất?



NGUYỄN VĂN THIÊM
(Hà Nội)

TIN MỚI NHẬN

HÀ NỘI CÓ ĐƯỜNG LÊ VĂN THIÊM

Hội đồng Nhân dân Thành phố Hà Nội vừa quyết định đặt tên mới 32 đường, phố ở các quận nội thành và các huyện Đông Anh, Sóc Sơn, Thanh Trì... Trong các đường đó có đường Lê Văn Thiêm nối từ đường Lê Văn Lương đến đường Nguyễn Huy Tưởng. Một đường mang tên Ngụy Như Kon Tum cũng được đặt trong dịp này. Trước đó đã có đường Tạ Quang Bửu. Các Giáo sư Tạ Quang Bửu, Ngụy Như Kon Tum, Lê Văn Thiêm là các nhà khoa học tự nhiên hàng đầu của nước ta sau 1945. GS. Lê Văn Thiêm là nhà toán học Việt Nam đương đại đầu tiên được đặt tên đường. Trước đây đã có hai đường mang tên Lương Thế Vinh và Vũ Hữu là hai nhà toán học từ thế kỉ XV ở nước ta được đặt ở Hà Nội.

VŨ THANH THÀNH



VUI XUÂN CÙNG BẢO TOÁN

Thơ

Đình Hội sắp sang, những ước mơ
Chào một năm mới, lòng ngóng chờ
Hoà nhịp đón Xuân cùng bảo Toán
Trong lòng khe khẽ "này" vẫn thơ.

Năm cũ bảo ta thật là hay
"Toán học Tuổi trẻ" đọc mê say
Tung bài toán vui, tung đỉnh lí
gắn bó cùng tôi những tháng ngày.

Đầu xuân xin được chúc bảo ta
Mọi người yêu mến khắp gần xa
Thêm mới, thêm hay, thêm bổ ích
Đem tri thức đến với muôn nhà

TRẦN VIỆT MINH
(Lớp 11A1, THPT Quỳnh Côi,
Quỳnh Phụ, Thái Bình)

CHÚC BẢO - MỪNG XUÂN

Góp bài cho bảo mãi thanh tân
Tuổi trẻ tài cao chớ ngại ngần
Cách giải trăm bài, trăm nét đẹp
Lời bình trợn ý, trợn tình thân
Yêu toán trò chăm tìm hướng lạ
Say nghề thầy giỏi viết bài hay
Đất nước chuyển mình vui hội nhập
Chúc mừng bảo toán mãi thanh xuân

PHẠM THỊNH
(Xí nghiệp sửa chữa các công trình
dầu khí Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu)

MÙA XUÂN TƯƠI ĐẸP

Khi mùa đông đã qua
Mùa Xuân lại trở về
Thêm lộc non vừa hé
Cây vườn như thêm xanh

Những hạt sương long lanh
Còn đọng trên ngọn cỏ
Như viên pha lê nhỏ
Lấp lánh cả khu vườn.

Ngoài trời ến thao lược
Mang không khí mùa xuân
Bạn đưa trong nắng sớm
Nụ cười như xinh hơn.

NGUYỄN THANH HẰNG
(Lớp 7A1, THCS Trung Vương,
Mê Linh, Vĩnh Phúc)

CÂU ĐỐI MỪNG XUÂN ĐÌNH HỘI

Gia nhập WTO dân tộc ta dong buồm trên bốn biển
Tổ chức IMO thầy trò mình chào đón cả năm châu

BÍNH NAM HÀ

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 355 (1-2007)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocft@yahoo.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. VŨ KIM THỦY

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHÁC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**

Vũ Văn Dũng – Dùng ẩn phụ để giải phương trình vô tỉ

- 3 **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2006-2007**

- 4 **Chào IMO 2007 Việt Nam**

- 5 **Thông báo về số Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ bằng tiếng Anh**

- 6 **Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contribution**
Phạm Thịnh - Bàn về cực trị của một biểu thức

- 9 **Từ kho tàng toán học – From Math Treasure**

Nguyễn Đăng Phát – Hai cách chứng minh cho định lý Brianchon

- 12 **Kết quả cuộc thi TOLITI 2006 của 3 tạp chí**

- 14 **Lịch sử toán học - History of Math**
Hàm Châu – Nhà nữ toán học Hoàng Xuân Sính

- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/355, ..., T12/355, L1/355, L2/355

- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 351

- 28 **Toán học và Tuổi trẻ với IMO**
Lê Hải Châu - 30 năm Việt Nam thi IMO và thành tích những năm gần đây

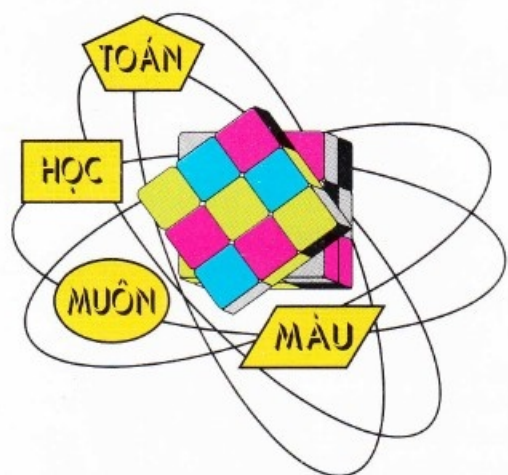
- 29 **Toán học và đời sống – Math and Life**
Nguyễn Văn Thiêm - Thống kê trợ giúp thuế vụ chống gian lận thuế

- 30 **Giải trí toán học - Math Recreation**

- 31 **Câu lạc bộ - Math Club**

Bìa 3 - Toán học muôn màu - Multifarious Mathematics

Biên tập : HỒ QUANG VINH. Mĩ thuật : MINH THO. Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330



THIỆT DIỆN CỦA HÌNH LẬP PHƯƠNG

Một mặt phẳng (P) cắt một hình lập phương tại ít nhất ba điểm không thẳng hàng thì tạo thành một thiết diện; thiết diện đó có thể là tam giác, tứ giác, ngũ giác, lục giác.

Dành cho bạn đọc

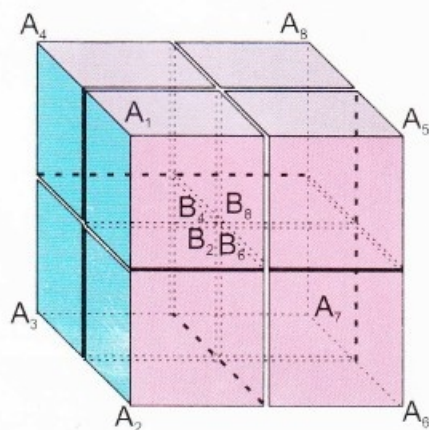
1) Hãy chỉ ra vị trí của mặt phẳng (P) để thiết diện là tam giác đều, tứ giác đều, lục giác đều.

2) Thiết diện có thể là ngũ giác đều không? Hãy giải thích.

Giải đáp:

Khối hộp biến đổi màu

(Đề đăng trong THPT số 351 tháng 9.2006).

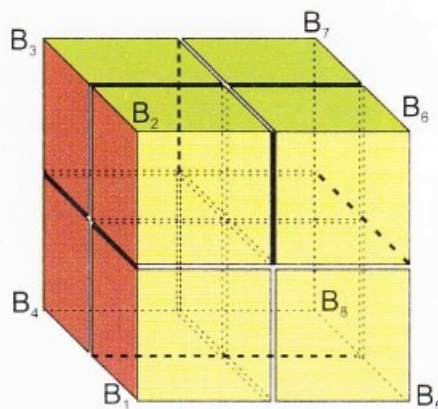


Hình 1

1) Giả sử khối lập phương (KLP) lớn (hình 1) $A_1A_2A_3A_4.A_5A_6A_7A_8$ có mặt $A_1A_2A_3A_4$ tô màu Lam, mặt $A_1A_2A_6A_5$ tô màu Đỏ, mặt $A_1A_5A_8A_4$ tô màu Tím. Ta thấy mặt $A_5A_6A_7A_8$ phải có màu khác Tím, Đỏ nên tô màu Lam để số màu ít nhất. Tương tự mặt $A_3A_4A_8A_7$ tô màu Đỏ, mặt $A_7A_3A_7A_6$ tô màu Tím. Vậy chỉ cần ba màu để tô sáu mặt KLP lớn.

2) Gọi các đỉnh đối xứng với $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ qua tâm của mỗi KLP nhỏ theo thứ tự là $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$ và chúng trùng với tâm của KLP lớn (h. 1). Sau khi biến đổi KLP lớn ta được KLP lớn mới $B_2B_1B_4B_3.B_6B_5B_8B_7$ và các đỉnh $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ trùng với tâm của KLP lớn mới (h. 2). Lập luận về tô màu tương tự như trên thì các mặt của KLP lớn mới được tô bằng ba màu khác.

Chẳng hạn Nâu, Vàng, Xanh lá cây như ở hình 2.



Hình 2

Các bạn có lời giải đúng là:

Lê Minh An, 11A2, THPT Thái Nguyên, TP. Thái Nguyên
Nguyễn Thu Thủy, 10 Toán, THPT Nguyễn Tất Thành, TP Yên Bái.

TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG THĂNG LONG, HÀ NỘI



Hiệu trưởng
PHẠM TRUNG DŨNG

Địa điểm phường Bạch Mai, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội.

Năm học 2006-2007 trường có 44 lớp với 2300 học sinh, gần 90 cán bộ giáo viên, trong đó 9 giáo viên có trình độ Thạc sĩ.

Chỉ tính trong giai đoạn 1995-2006 trường có 12 học

Trường THPT Thăng Long được thành lập năm 1965. Năm học đầu tiên, trường chỉ có 4 lớp với 16 giáo viên, 166 học sinh do thầy Ngô Thiện Thoán làm hiệu trưởng.

Những năm đầu, thầy và trò phải dạy và học trong hoàn cảnh chiến tranh phá hoại, cơ sở vật chất thiếu thốn, phải chuyển địa điểm sơ tán nhiều lần. Từ năm 1970 trường chuyển về

sinh đoạt giải học sinh giỏi Quốc gia, 771 học sinh đoạt giải học sinh giỏi cấp Thành phố. Số học sinh đỗ vào các trường Đại học, Cao đẳng tăng từ 75% đến 85%. Riêng năm 2006 trường có 3 học sinh đoạt Thủ khoa. Nhiều giáo viên đạt danh hiệu Chiến sĩ thi đua, Giáo viên dạy giỏi cấp Thành phố, 2 giáo viên được phong tặng danh hiệu Nhà giáo ưu tú. Tổ Toán của trường được nhận Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Trường được Chủ tịch nước tặng thưởng Huân chương Lao động hạng Ba năm 1995.

Hơn 40 năm xây dựng và phát triển, nhà trường đã đào tạo được 30000 học sinh, trong đó: có khoảng 80% sau này có trình độ đại học và trên đại học; nhiều học sinh đang giữ các cương vị lãnh đạo trong các cơ quan Đảng, Nhà nước, Quân đội và Thành phố; 300 học sinh tham gia quân đội, có nhiều sĩ quan cao cấp, 15 học sinh là liệt sĩ, hàng chục ngàn học sinh trở thành cán bộ khoa học kỹ thuật trong các cơ quan trung ương và địa phương, các nhà quản lý, các đơn vị kinh tế, doanh nghiệp.

Trường THPT Thăng Long ý thức được sứ mệnh của mình đang không ngừng vươn lên để luôn xứng đáng với niềm tin yêu của học sinh và phụ huynh Thủ đô.



Tập thể giáo viên và công nhân viên Trường THPT Thăng Long, Hà Nội

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT57M7

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2007

Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng