



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

9 2006
Số 351

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhocvt@yahoo.com Web: <http://www.nxbgd.com.vn/toanhocvuoitre>

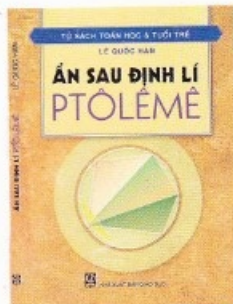
Chào Năm Học Mới

1010101010101010101010



SÁCH MỚI 2006

ẤN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ



Sách tập hợp các bài báo, bài toán đã đăng trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (1970 - 2005). Một nửa nội dung cuốn sách trình bày các vấn đề của toán sơ cấp, có ích cho các bạn trước các kì thi học sinh giỏi và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng. Có những phần kiến thức tác giả bổ sung một số vấn đề mà SGK chưa đề cập. Phần còn lại được viết ra nhằm giúp học sinh tập dượt tư duy sáng tạo, mở ra những triển vọng để độc giả có thể đi xa hơn trong việc sáng tạo toán học, tạo được nguồn hứng khởi trong việc làm toán.

Các bạn học sinh yêu toán, các sinh viên khoa Toán của các trường Đại học và Cao đẳng và các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh đều có thể tìm thấy ở đây những điều bổ ích.

Sách dày 164 trang, khổ 17x24, giá bán 21.500 đồng, có mặt trên thị trường vào đầu năm học mới 2006 - 2007.

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí đang phát hành Quyển 2 cuốn Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ thuộc Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ. Từ các bài đã in trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ những năm gần đây, sách tập hợp lại các bài viết theo ba chuyên đề nhằm phục vụ độc giả làm tài liệu tham khảo bổ ích.

Chuyên đề thứ nhất : **Toán THCS - Những tìm tòi sáng tạo**

Chuyên đề thứ hai : **Toán THCS - Những đề thi**

Chuyên đề thứ ba : **Những bài toán - Lời giải sao cho đúng?**

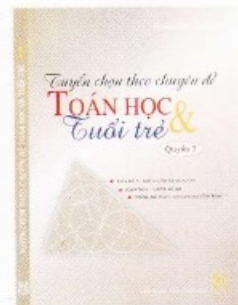
Sách dày 252 trang, khổ 19 x 26,5 cm, giá bán lẻ là 30000 đồng. Đề nghị các đơn vị mua nhiều gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về theo địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ : 187B Giảng Võ, Hà Nội

Địa chỉ liên hệ để biết các thông tin chi tiết:

ĐT/FAX: 04.5144272; Email: toanhoc@yaho.com

QUYỂN 2



Bạn muốn có cuốn đóng tập cả năm 2006?

Đây là cách lưu giữ và sử dụng tạp chí THPT có hiệu quả. Các thầy cô giáo sẽ có tài liệu tham khảo sử dụng cho nhiều năm, tránh thất lạc. Các thư viện sẽ có tài liệu giúp các bạn đọc tra cứu và đọc THPT có hệ thống.

Cuốn đóng tập bao gồm cả 12 số tạp chí của năm 2006 có bìa cứng, giá bán 65000 đồng sẽ có mặt trên thị trường vào 1.2007. Tòa soạn cần biết sơ bộ số lượng các độc giả có nhu cầu để chuẩn bị. Bạn nên đăng kí ngay với tòa soạn nếu muốn có cuốn sách này. Chi tiết xin liên hệ:

HOÀNG TRỌNG HẢO - TẠP CHÍ THPT - 187B Giảng Võ, Hà Nội - ĐT, FAX: (04)5144272

Trân trọng cảm ơn!

THPT

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÉ
KÍNH BIỂU

THƯ CỦA THỨ TRƯỞNG TRẦN VĂN NHUNG GỬI ĐỘC GIẢ TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÉ



Các bạn độc giả của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ thân mến!

Trước hết thay mặt GS. Nguyễn Thiện Nhân, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, tôi xin gửi lời chào đến các thầy, cô giáo, các em học sinh cùng các độc giả của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ yêu quý nhân dịp khai giảng năm học mới 2006 - 2007.

Trong 20 năm đổi mới vừa qua, ngành giáo dục chúng ta đã góp phần quan trọng đào tạo nên những con người có đạo đức và kiến thức toàn diện, góp phần vào những thành tựu đổi mới của đất nước. Tuy nhiên, vẫn còn không ít những yếu kém mà giáo dục nước nhà cần phải khắc phục để có thể đáp ứng được đòi hỏi của sự phát triển nhanh chóng của kinh tế, xã hội và hội nhập, cạnh tranh Quốc tế. Trong năm học mới này, toàn ngành giáo dục sẽ nỗ lực, cố gắng thực hiện cuộc vận động "Nói không với tiêu cực trong thi cử và bệnh thành tích trong giáo dục" để cho các hoạt động dạy, học và đánh giá chất lượng giáo dục được thực chất hơn. Mong rằng các thầy, cô giáo, các bậc phụ huynh, các em học sinh và toàn xã hội ủng hộ và hưởng ứng cuộc vận động này.

Trong năm học 2006-2007, một sự kiện quan trọng là việc Việt Nam đăng cai tổ chức cuộc thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO 2007) với khoảng 100 nước và vùng lãnh thổ tham gia. IMO 2007 sẽ đánh dấu sự hội nhập ngày càng sâu rộng của chúng ta trong các hoạt động Quốc tế. Đây cũng là cơ hội để chúng ta, lần đầu tiên kể từ khi tham gia IMO năm 1974 tại Berlin, được đón bạn bè năm châu, giới thiệu đất nước xinh đẹp và con người Việt Nam, nồng nhiệt, mến khách với hàng ngàn thầy, cô giáo và học sinh giỏi Toán các nước vốn rất ngưỡng mộ thành tích thi Toán Quốc tế của chúng ta. Trong thành tích ấy, có phần đóng góp của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, một tạp chí bền bỉ suốt hơn 40 năm phát hiện và khơi mào năng khiếu toán học cho nước nhà. Việc tổ chức thành công IMO 2007 là một nhiệm vụ rất nặng nề của ngành giáo dục và cộng đồng những người làm Toán Việt Nam. Mong các thầy, cô giáo, các em học sinh và các độc giả chung tay làm nên thành công của cuộc thi IMO 2007 và hy vọng Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ trong khả năng của mình sẽ góp phần vào cuộc thi đầy ý nghĩa này.

Xin được chúc các độc giả của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ bước vào năm học mới 2006-2007 với nhiều thành công.

Thân ái!

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG



Xây dựng CÁC BẤT ĐẲNG THỨC từ các hằng đẳng thức

MẠC ĐĂNG NGHỊ
(GV THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương)

Qua bài viết này chúng tôi muốn cung cấp cho bạn đọc một kĩ thuật "nho nhỏ" để thiết lập các bất đẳng thức từ các hằng đẳng thức.

✪ Bổ đề 1. Chứng minh rằng

$$(a+b)^4 + (a-b)^4 = 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2) \quad (I)$$

với a, b là hai số thực tùy ý.

Chứng minh. Thật vậy

$$\begin{aligned} & (a+b)^4 + (a-b)^4 \\ &= [(a+b)^2 + (a-b)^2]^2 - 2(a+b)^2(a-b)^2 \\ &= (2a^2 + 2b^2)^2 - 2(a^2 - b^2)^2 \\ &= 4(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 2(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) \\ &= 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2). \quad \square \end{aligned}$$

Áp dụng hằng đẳng thức (I) với ba số thực x, y, z tùy ý, ta có

$$(x+y+z)^4 + (x+y-z)^4 = 2[(x+y)^4 + z^4 + 6z^2(x+y)^2] \quad (1)$$

$$\text{và } (z+x-y)^4 + (z-x+y)^4 = 2[(x-y)^4 + z^4 + 6z^2(x-y)^2] \quad (2)$$

Cộng theo vế của (1) và (2)

$$(x+y+z)^4 + (y+z-x)^4 + (z+x-y)^4 + (x+y-z)^4 =$$

$$\begin{aligned} &= 2[(x+y)^4 + (x-y)^4 + 2z^4 + 6z^2(x+y)^2 \\ &\quad + 6z^2(x-y)^2] \\ &= 4(x^4 + y^4 + z^4 + 6x^2y^2 + 6y^2z^2 + 6z^2x^2). \end{aligned}$$

Mặt khác

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \leq x^4 + y^4 + z^4.$$

Suy ra

$$(x+y+z)^4 + (y+z-x)^4 + (z+x-y)^4 + (x+y-z)^4 \leq 28(x^4 + y^4 + z^4).$$

Từ đó ta có bài toán sau đây.

Bài toán 1. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & 28(x^4 + y^4 + z^4) \\ & \geq (x+y+z)^4 + (y+z-x)^4 \\ & \quad + (z+x-y)^4 + (x+y-z)^4. \end{aligned}$$

với x, y, z là ba số thực tùy ý.

Từ bài toán 1 và $(x+y+z)^4 \geq 0$ dẫn đến bài toán 2 sau đây.

Bài toán 2. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & 28(x^4 + y^4 + z^4) \\ & \geq (y+z-x)^4 + (z+x-y)^4 + (x+y-z)^4 \end{aligned}$$

với x, y, z là ba số thực tùy ý.

Trong bài toán 2, nếu ta đặt

$$a = \frac{y+z-x}{2}, \quad b = \frac{z+x-y}{2}, \quad c = \frac{x+y-z}{2}$$

thì ta có bài toán 3 sau đây.

Bài toán 3. Chứng minh rằng

$$(a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4).$$

với ba số thực a, b, c tùy ý.

✪ Bổ đề 2. Với hai số thực a, b tùy ý, chứng minh rằng

$$(a+b)^6 + (a-b)^6 = 2(a^6 + b^6 + 15a^4b^2 + 15a^2b^4) \quad (II)$$

Chứng minh. Thật vậy

$$\begin{aligned} & (a+b)^6 + (a-b)^6 \\ &= [(a+b)^4 + (a-b)^4] [(a+b)^2 + (a-b)^2] \\ &\quad - (a-b)^2(a+b)^4 - (a+b)^2(a-b)^4 \\ &= (2a^4 + 2b^4 + 12a^2b^2)(2a^2 + 2b^2) \\ &\quad - (a^2 - b^2)^2(2a^2 + 2b^2) \end{aligned}$$

$$= 2(a^2 + b^2)(a^4 + b^4 + 14a^2b^2) \\ = 2(a^6 + b^6 + 15a^4b^2 + 15a^2b^4). \quad \square$$

Áp dụng hằng đẳng thức (1) với ba số thực x, y, z tùy ý

$$(x + y + z)^6 + (x + y - z)^6 \\ = 2[(x + y)^6 + z^6 + 15(x + y)^4z^2 + 15(x + y)^2z^4] \quad (3)$$

và

$$(z + x - y)^6 + (z - x + y)^6 \\ = 2[(x - y)^6 + z^6 + 15(x - y)^4z^2 + 15(x - y)^2z^4] \quad (4)$$

Cộng theo vế của (3) và (4); đồng thời áp dụng các hằng đẳng thức (I) và (II) dẫn đến

$$(x + y + z)^6 + (y + z - x)^6 + (z + x - y)^6 \\ + (x + y - z)^6 = \\ = 2\{[(x + y)^6 + (x - y)^6] + 2z^6 + 15z^2[(x + y)^4 \\ + (x - y)^4] + 15z^4[(x + y)^2 + (x - y)^2]\} \\ = 2[2(x^6 + y^6 + 15x^4y^2 + 15x^2y^4) + 2z^6 \\ + 15z^2(2x^4 + 2y^4 + 12x^2y^2) + 15z^4(2x^2 + 2y^2)] \\ = 4(x^6 + y^6 + z^6) + 360x^2y^2z^2 \\ + 60(x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 + x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4).$$

Mặt khác

$$x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4 \leq x^6 + y^6 + z^6 \\ x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 \leq x^6 + y^6 + z^6 \\ 3x^2y^2z^2 \leq x^6 + y^6 + z^6.$$

Suy ra

$$(x + y + z)^6 + (y + z - x)^6 + (z + x - y)^6 \\ + (x + y - z)^6 \leq 244(x^6 + y^6 + z^6).$$

Từ đó ta có các bài toán sau đây.

Bài toán 4. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z , luôn có

$$(x + y + z)^6 + (y + z - x)^6 + (z + x - y)^6 \\ + (x + y - z)^6 \leq 244(x^6 + y^6 + z^6).$$

Bài toán 5. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z , luôn có

$$(y + z - x)^6 + (z + x - y)^6 + (x + y - z)^6 \\ \leq 244(x^6 + y^6 + z^6).$$

Bài toán 6. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c , luôn có

$$(a + b)^6 + (b + c)^6 + (c + a)^6 \geq \frac{16}{61}(a^6 + b^6 + c^6).$$

✪ **Bổ đề 3.** Chứng minh rằng

$$(a + b)^8 + (a - b)^8 \\ = 2(a^8 + b^8 + 28a^6b^2 + 28a^2b^6 + 70a^4b^4) \quad (III)$$

với hai số thực a, b tùy ý.

Chứng minh. Ta có

$$(a + b)^8 + (a - b)^8 \\ = [(a - b)^4 + (a + b)^4]^2 - 2(a + b)^4(a - b)^4 \\ = (2a^4 + 2b^4 + 12a^2b^2)^2 - 2(a^2 - b^2)^4 \\ = (2a^4 + 2b^4 + 12a^2b^2)^2 - 2(a^4 + b^4 - 2a^2b^2)^2 \\ = 2a^8 + 2b^8 + 140a^4b^4 + 56a^6b^2 + 56a^2b^6 \\ = 2(a^8 + b^8 + 28a^6b^2 + 28a^2b^6 + 70a^4b^4). \quad \square$$

Từ đó, tương tự như trên ta thiết lập được các bài toán sau đây.

Bài toán 7. Chứng minh rằng với mọi số $x, y, z \in \mathbb{R}$ thì

$$(x + y + z)^8 + (y + z - x)^8 + (z + x - y)^8 \\ + (x + y - z)^8 \leq 2188(x^8 + y^8 + z^8).$$

Bài toán 8. Chứng minh rằng với mọi số $x, y, z \in \mathbb{R}$ thì

$$(y + z - x)^8 + (z + x - y)^8 + (x + y - z)^8 \\ \leq 2188(x^8 + y^8 + z^8).$$

Bài toán 9. Chứng minh rằng với mọi số $a, b, c \in \mathbb{R}$ thì

$$(a + b)^8 + (b + c)^8 + (c + a)^8 \geq \frac{64}{547}(a^8 + b^8 + c^8).$$

Hoàn toàn tương tự ta thu được các bài toán bất đẳng thức sau đây.

Bài toán 10. Cho tam giác ABC với ba cạnh a, b, c và nửa chu vi p . Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{4}{7}[p^4 + (p - a)^4 + (p - b)^4 + (p - c)^4]$$

Bài toán 11. Chứng minh rằng với mọi số $a, b, c \in \mathbb{R}$ luôn có

$$\text{a) } (a + b)^{10} + (b + c)^{10} + (c + a)^{10} \\ \geq \frac{256}{4921}(a^{10} + b^{10} + c^{10}); \\ \text{b) } (a + b)^{12} + (b + c)^{12} + (c + a)^{12} \\ \geq \frac{1024}{44287}(a^{12} + b^{12} + c^{12}).$$

Các bạn hãy tự xét xem trong mỗi bài toán trên khi nào có đẳng thức?

Ngày 29.8.2006 Hội Toán học Singapore đã gửi kết quả cuộc thi SMO 2006 đến Hội Toán học Hà Nội. Đây là cuộc thi do Hội Toán học Singapore tổ chức với học sinh các nước Việt Nam, Hong Kong, Malaysia, India, Indonesia, Thailand, Singapore tham gia gồm hai độ tuổi: Junior Section sinh sau ngày 1.1.1992, Senior Section sinh sau ngày 1.1.1990. Không kể học sinh Singapore, đã có 659 học sinh 6 nước tham gia. Mỗi đề thi có 35 câu hỏi, mỗi câu 1 điểm. Ở độ tuổi Junior từ 20 điểm trở lên được Huy chương Vàng, từ 12 đến 19 điểm được Huy chương Bạc, từ 9 đến 11 điểm được Huy chương Đồng và đúng 8 câu được giải Khuyến khích. Ở độ tuổi Senior từ 32 điểm trở lên được Huy chương Vàng, từ 15 điểm đến 31 điểm được Huy chương Bạc, từ 11 đến 14 điểm được Huy chương Đồng và đúng 9 đến 10 câu được giải Khuyến khích. Lần này học sinh Việt Nam gồm 40 học sinh của các

Kết quả của học sinh Việt Nam thi Olympic Toán Singapore SMO 2006

VŨ KIM THỦY

trường THPT Hà Nội - Amsterdam, Chu Văn An, các trường THCS Trung Vương, Lê Quý Đôn, Giảng Võ, Hà Nội, các trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, THCS Yên Lạc, Vĩnh Tường, Tam Dương, Vĩnh Phúc, các trường THCS chuyên Hùng Vương, THCS Văn Lang, Phú Thọ, trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương đã dự thi. Cả 40 học sinh Việt Nam đều đoạt huy chương. Điểm bình quân của học sinh nước ngoài thi Junior là 6,9, của Việt Nam là 19,9. Điểm bình quân của học sinh nước ngoài thi Senior là 9,4, của Việt Nam là 19,4. Sau đây là kết quả cụ thể của học sinh Việt Nam.

I. JUNIOR SECTION

STT	Họ và tên	Trường	Điểm	Huy chương
1	Nguyễn Đăng Minh	Hà Nội - Amsterdam	29	Vàng
2	Trần Anh Sơn	Hà Nội - Amsterdam	29	Vàng
3	Trần Anh Đức	Hà Nội - Amsterdam	28	Vàng
4	Hoàng Kim Liên	Hà Nội - Amsterdam	25	Vàng
5	Vũ Ngọc Hưng	Hà Nội - Amsterdam	24	Vàng
6	Trần Hùng Quân	THCS Lê Quý Đôn	22	Vàng
7	Nguyễn Anh Tú	THCS Trung Vương	21	Vàng
8	Bùi Ngọc Nhân	THCS Văn Lang	20	Vàng
9	Lô Tùng Sơn	THCS Lê Quý Đôn	20	Vàng
10	Nguyễn Quốc Khánh	THCS Văn Lang	20	Vàng
11	Trương Việt Trung	THCS Giảng Võ	20	Vàng
12	Nguyễn Hà Anh	THCS Văn Lang	18	Bạc
13	Nguyễn Duy Ngọc	THCS Tam Dương	17	Bạc
14	Lê Quân	THCS Trung Vương	16	Bạc
15	Lê Sơn Hải	THCS Yên Lạc	16	Bạc
16	Nguyễn Xuân Tú	THCS Vĩnh Tường	16	Bạc
17	Bùi Đức Duy	THCS Văn Lang	15	Bạc
18	Nguyễn Thăng Long	THCS Trung Vương	15	Bạc
19	Trần Minh Anh	THCS Lê Quý Đôn	14	Bạc
20	Nguyễn Thị Ngọc Diệp	THCS Văn Lang	13	Bạc

II. SENIOR SECTION

STT	Họ và tên	Trường	Điểm	Huy chương
1	Nguyễn Hữu Thành	THPT chuyên Hùng Vương	27	Bạc
2	Đỗ Thị Thu Thảo	THPT Nguyễn Trãi	26	Bạc
3	Cao Thị Thanh Thủy	THPT chuyên Hùng Vương	24	Bạc
4	Nguyễn Tuấn Thành	THPT Nguyễn Trãi	24	Bạc
5	Đào Ánh Dương	Hà Nội - Amsterdam	23	Bạc
6	Nguyễn Ngọc Đại	THPT chuyên Vĩnh Phúc	23	Bạc
7	Hoàng Thị Thúy Hồng	THPT chuyên Vĩnh Phúc	22	Bạc
8	Lê Thị Như Quỳnh	THPT chuyên Hùng Vương	21	Bạc
9	Lê Tiến Thắng	THPT chuyên Vĩnh Phúc	21	Bạc
10	Nguyễn Anh Tuấn	THPT chuyên Hùng Vương	21	Bạc
11	Nguyễn Thế Minh	THPT Nguyễn Trãi	18	Bạc
12	Phạm Mai Luân	THPT chuyên Hùng Vương	18	Bạc
13	Nguyễn Thị Hải Linh	THPT Nguyễn Trãi	17	Bạc
14	Nguyễn Văn Quyền	THPT chuyên Vĩnh Phúc	17	Bạc
15	Nguyễn Thị Thúy	THPT Nguyễn Trãi	16	Bạc
16	Phan Doãn Phúc	THPT Chu Văn An	16	Bạc
17	Hoàng Thị Anh Sang	THPT chuyên Vĩnh Phúc	14	Đồng
18	Nguyễn Bá Chiến	THPT Chu Văn An	13	Đồng
19	Trần Anh Đức	THPT Chu Văn An	13	Đồng
20	Phạm Đức Sơn	Hà Nội - Amsterdam	12	Đồng

Nhà xuất bản Giáo dục tặng sách

cho học sinh nghèo vượt khó học tốt của TP. Hà Nội

Trong những năm qua, xuất phát từ tấm lòng nhân nghĩa bằng nhiều hành động thiết thực Nhà xuất bản Giáo dục đã đẩy mạnh hoạt động xã hội - từ thiện như xây dựng nhà tình nghĩa, nhận nuôi dưỡng các bà mẹ Việt Nam anh hùng, xây dựng trường học, tặng sách cho nhiều thư viện trường học... và đặc biệt là hoạt động tặng sách, giúp đỡ những học sinh có hoàn cảnh khó khăn có thêm điều kiện để học tập tốt hơn.

Ngày 3 tháng 8 năm 2006, tại Cung văn hoá Thiếu nhi Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục tại Hà Nội phối hợp với Ủy ban Dân số, gia đình và trẻ em thành phố Hà Nội đã tổ chức Lễ tặng sách giáo khoa cho học sinh nghèo vượt khó học tốt của thành phố Hà Nội. 300 em học sinh được NXBGD tặng sách là những học sinh nghèo đã đạt thành tích cao của 14 quận, huyện của Hà Nội. Mỗi phần quà là một bộ sách giáo khoa và 150.000đ. Tổng trị giá quà tặng gần 80 triệu đồng (45 triệu tiền mặt và gần 35 triệu tiền sách). Đây là một hoạt động thường niên của NXBGD nhằm động viên, khuyến khích các em học sinh cố gắng vươn lên, vượt qua mọi khó khăn trong cuộc sống và đạt kết quả cao trong học tập, giúp đỡ các em thêm điều kiện để học tập tốt hơn.

LÊ THỊ CHINH

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

THPT CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI

NĂM HỌC 2006-2007
Môn Toán

Ngày thứ nhất

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là ba số phân biệt khác không thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$.

Đơn giản biểu thức

$$P = \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right).$$

Câu 2. (1,5 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$T = (x+y)(x+z)$, trong đó x, y, z là ba số dương thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện $(x+y+z)xyz = 1$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xz = x+4 \\ 2y^2 = 7xz - 3x - 14 \\ x^2 + z^2 = 35 - y^2. \end{cases}$$

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (C) tâm O , đường kính AB . E là một điểm nằm trong đoạn OA ; CD là dây cung vuông góc với đường kính AB tại điểm E . Đường thẳng DM cắt (C) tại N (khác điểm D). Đường tròn (C_1) tâm O_1 , bán kính r , tiếp xúc trong với (C) tại điểm J thuộc cung nhỏ CN và tiếp xúc với các đoạn thẳng CM và MN tại các điểm I và K tương ứng. Biết $AM = a$, $ME = b$, $EB = c$.

1) Chứng minh rằng tam giác O_1KM đồng dạng với tam giác MEC .

2) Tính độ dài các đoạn OO_1 , KM và O_1M theo a, b, c và r .

3) Chứng minh rằng $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Câu 5. (1,5 điểm)

Tìm các chữ số x, y, z, t, u thỏa mãn điều kiện

$\overline{xy} + \overline{ztu} = \sqrt{xyztu}$, trong đó x, y là các chữ số hàng chục, đơn vị của số $\overline{xy}$; z, t, u là các chữ số hàng trăm, chục, đơn vị của số $\overline{ztu}$; x, y, z, t, u là chữ số hàng vạn, nghìn, trăm, chục, đơn vị của số $\overline{xyztu}$.

Ngày thứ hai

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 6. (2,5 điểm)

Giải phương trình

$$(3x+4)(x+1)(6x+7)^2 = 6.$$

Câu 7. (1,5 điểm)

Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm x, y thỏa mãn phương trình

$$(y+1)^4 + y^4 = (x+1)^2 + x^2.$$

Câu 8. (1,0 điểm)

Giả sử x_1 và x_2 là hai số nguyên dương đã cho; a và b theo thứ tự là trung bình cộng và trung bình nhân của x_1 và x_2 . Biết rằng tỉ số $\frac{a}{b}$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng $x_1 = x_2$.

Câu 9. (4,0 điểm)

Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm A, B . Biết rằng (C_1) có tâm O_1 , bán kính $r_1 = 1$ cm; (C_2) có tâm O_2 , bán kính $r_2 = 2$ cm; $AB = 1$ cm và hai điểm O_1, O_2 ở hai phía của đường thẳng AB . Xét đường thẳng (d) qua A , cắt (C_1) và (C_2) lần lượt tại các điểm M và N sao cho A nằm trong đoạn MN . Tiếp tuyến của (C_1) tại M và tiếp tuyến của (C_2) tại N cắt nhau tại điểm E .

(Xem tiếp trang 11)

Lời giải

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH năm học 2006-2007

(Đề thi đã đăng trên THPT số 350, tháng 8 năm 2006)

Bài 1. 1) Ta có

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = 1 \\ 2y^2 + xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2y^2 = 0 \\ 2y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y)(x+y) = 0 \\ 2y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là

$$(1; -1); (-1; 1); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

2) Ta có $\sqrt{3x-5x^2} \leq 5x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2 \geq 0 \\ 0 \leq 3x-5x^2 \leq (5x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{5} \\ 0 \leq x \leq \frac{3}{5} \\ 30x^2 - 23x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{5} \\ 0 \leq x \leq \frac{3}{5} \\ (2x-1)(15x-4) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{5}.$$

3) Từ giả thiết $x + y = 2$ ta có

$$xy(x^2 + y^2) = xy(4 - 2xy) = 4xy - 2x^2y^2$$

$$= -2(xy - 1)^2 + 2 \leq 2 \text{ (đpcm).}$$

Bài 2. 1) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m+3 \neq 0 \\ (m^2+3m)^2 - (m+3)(m^3+12) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ (m+3)(3m^2-12) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -3 < m < -2 \end{cases} (*)$$

Số nguyên m nhỏ nhất thỏa mãn (*) là 3.

2) Theo hệ thức Viète ta có

$$x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = \frac{m^3+12}{m+3}$$

$$(m \geq 2 \text{ hoặc } -3 < m \leq -2).$$

$$\text{Khi đó } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$= 4m^2 - \frac{2(m^3+12)}{m+3} = 2m^2 + 6m - 18 + \frac{30}{m+3}.$$

Từ đây ta thấy số nguyên m nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{Z}$ là 27.

Bài 3. 1) Giả sử a là độ dài cạnh của tam giác

$$\text{đều } ABC. \text{ Ta có } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Từ $S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PAC} + S_{PAB}$ (1), ta thấy

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2}.$$

Do $x = 1, y = 2, z = 3$, nên $a = 4\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy } S_{ABC} = 12\sqrt{3} \text{ (đvdt).}$$

2) Gọi h là độ dài đường cao của tam giác đều ABC . Từ hệ thức (1) ta có $h = x + y + z$, mà

$$x + y = z, \text{ suy ra } z = \frac{h}{2}.$$

Từ đó tập hợp các điểm P thỏa mãn $x + y = z$ là đoạn DE (D, E tương ứng là trung điểm của BC và AC).

Từ kết quả trên ta thấy tập hợp các điểm P thỏa mãn điều kiện $x + y < z; y + z < x$ và $z + x < y$ là miền trong, không kể biên của tam giác DEF (F là trung điểm của AB).

Bài 4. Ta thấy $\triangle API \sim \triangle AIQ$, suy ra

$$\frac{AP}{AI} = \frac{AI}{AQ} \Rightarrow AP \cdot AQ = AI^2 \text{ (không đổi).}$$

(Xem tiếp trang 11)



NGUYỄN VĂN MẬU - NGUYỄN MINH TUẤN

Trong ba ngày cuối tháng 7 năm 2006 tại Trường THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ đã diễn ra đợt sinh hoạt chuyên môn và ngoại khóa các môn Toán học và Sinh học. Đây là trại hè Hùng Vương lần thứ hai cho các tỉnh khu vực miền núi phía Bắc. Có các đội

tuyển của 11 tỉnh tham dự: Lào Cai, Yên Bái, Cao Bằng, Hà Giang, Tuyên Quang, Hòa Bình, Quảng Ninh, Bắc Giang, Vĩnh Phúc, Thái Nguyên, Phú Thọ. Đội tuyển của các tỉnh gồm những học sinh lớp 10 tham gia các hoạt động ngoại khóa và dự kì thi Olympic Hùng Vương môn Toán học và Sinh học. Trường ĐHKHTN Hà Nội phối hợp với Hội Toán học Hà Nội nhận trách nhiệm cố vấn chuyên môn cho trại hè. Các thầy giáo, cô giáo tham dự các semina và tổ chức thi Olympic. Đặc biệt trong trại hè lần này, các giáo viên được hướng dẫn chương trình đào tạo trực tuyến các chuyên đề đặc biệt bồi dưỡng học sinh giỏi môn Toán học.

Xin giới thiệu với bạn đọc tạp chí THPT nội dung đề thi Olympic Hùng Vương lần thứ hai. (Thời gian làm bài 180 phút).

Câu 1. Số đo các góc trong của một ngũ giác lồi có tỉ lệ $2 : 3 : 3 : 5 : 5$. Số đo của góc nhỏ nhất bằng

- (A) 20° , (B) 40° , (C) 60° ,
(D) 80° , (E) 90° .

Câu 2. Cho $a \neq 0$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = a^{2005} \\ x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = a^{2006} \\ x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = a^{2006} \end{cases}$$

Câu 3. Xác định bộ số dương a, b, c sao cho

$$ax^9y^{12} + by^9z^9 + cz^{11}x^8 \geq 15x^4y^8z^7,$$

với mọi $x > 0, y > 0, z > 0$.

Câu 4. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc BC . Xét hình bình hành $APMN$, trong đó P thuộc AB và N thuộc AC và hình bình hành $ABDC$ với đường chéo AD và BC . O là giao điểm của BN và CP . Chứng minh rằng $\widehat{PMO} = \widehat{NMO}$ khi và chỉ khi $\widehat{BDM} = \widehat{CDM}$.

Câu 5. Cho số dương M . Xét các tam thức bậc hai $g(x) = x^2 + ax + b$ có nghiệm thực x_1, x_2 và các hệ số thỏa mãn điều kiện

$$\max\{|a|, |b|, 1\} = M.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|).$$

ĐẶT MUA TẠP CHÍ THPT DÀI HẠN TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC



Trong kì thi chọn HSG Quốc gia môn Toán, bảng A, năm học 1996 – 1997 có một bài toán hình học phẳng (Bài 1) mà đề bài và đáp án đã được giới thiệu trên tạp chí THPT số 248 tháng 2 năm 1998. Bài viết này giới thiệu với bạn đọc những bài toán mới khác đồng thời trao đổi với bạn đọc những suy nghĩ và kinh nghiệm xung quanh việc giải một bài toán, đặc biệt là những bài toán có ý tưởng hay và đẹp.

Tiếp cận và khai thác MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC từ những phương cách khác nhau

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
(Hà Nội)

Trước hết, xin nhắc lại nội dung đề toán.

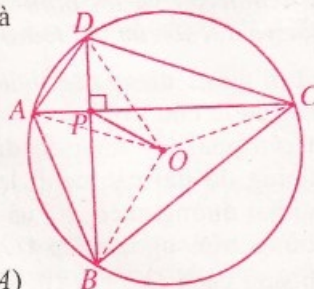
Bài 1. Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính a và một điểm P nằm trong đường tròn ($OP = d < a$). Trong các tứ giác nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P , hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các chu vi đó theo a và d .

I. Giới thiệu hai lời giải (từ hai cách tiếp cận khác nhau) của bài toán

A. Lời giải 1. (Lời giải hình học).

a) (h. 1). Kí hiệu p là chu vi của tứ giác $ABCD$, ta có

$$\begin{aligned} p^2 &= [(AB + CD) + (BC + DA)]^2 \\ &= (AB^2 + CD^2) + (BC^2 + DA^2) \\ &\quad + 2(AB \cdot CD + BC \cdot DA) \\ &\quad + 2(AB \cdot AD + CB \cdot CD + BA \cdot BC + DA \cdot DC). \end{aligned}$$



Hình 1

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O ; a) nên :

$$AP \cdot PC = BP \cdot PD = \mathcal{P}P(O) = a^2 - d^2 = b^2 \quad (1)$$

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD \quad (\text{định lí Ptolémée}) \quad (2)$$

Lại vì $AC \perp BD$ nên:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2 = 4a^2 \quad (3)$$

$$\frac{AB \cdot AD}{AP} = \frac{CB \cdot CD}{PC} = \frac{BA \cdot BC}{BP} = \frac{DA \cdot DC}{PD} = 2a \quad (4)$$

$$AC^2 + BC^2 = 4(2a^2 - d^2) = 4(a^2 + b^2) \quad (5)$$

Từ (1), (2), (3), (4), (5) và

$$2AC \cdot BD = (AC + BD)^2 - (AC^2 + BD^2) \text{ ta được}$$

$$p^2 = (AC + BD)^2 + 4a(AC + BD) + 4(a^2 - b^2) \quad (*)$$

b) Từ (*) ta thấy p đạt giá trị lớn nhất p_M hay giá trị nhỏ nhất p_m khi và chỉ khi tổng $AC + BD$ đạt giá trị max hay min. Từ (5) và hệ thức:

$$(AC + BD)^2 + (AC - BD)^2 = 2(AC^2 + BD^2) \quad (6)$$

suy ra $AC + BD$ đạt giá trị max(min)

$$\Leftrightarrow |AC - BD| \text{ đạt min(max).}$$

1) Từ (6) ta được:

$$\max(AC + BD)^2 = 8(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow AC = BD = \sqrt{2(a^2 + b^2)} \quad (7)$$

$$\text{Do đó } p_M = 2(a\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

$$\Leftrightarrow AC = BD = \sqrt{2(a^2 + b^2)}, (b^2 = a^2 - d^2).$$

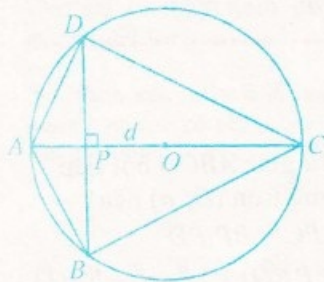
khi đó tứ giác $ABCD$ là một hình thang cân nhận OP làm trục đối xứng và cũng là trung trực chung của hai đáy BC, AD .

2) Cũng từ (6) suy ra

$$\min(AC + BD)^2 = 8(a^2 + b^2) - 4(a - b)^2 = 4(a + b)^2, \text{ hay } \min(AC + BD) = 2(a + b)$$

$$\Leftrightarrow \max|AC - BD| = 2(a - b)$$

$$\Leftrightarrow \text{Hoặc } AC = 2a, BD = 2b \text{ hoặc } BD = 2a, AC = 2b.$$



Hình 2

Vậy p đạt giá trị nhỏ nhất

$$p_m = 4\sqrt{a(a+b)}$$

khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ nhận đường chéo $AC = 2a$ làm trục đối xứng, trùng với đường kính đi qua P của đường tròn $(O; a)$ (h. 2).

B. Lời giải 2. (Lời giải đại số)

1) Đặt $b = \sqrt{a^2 - d^2}$; $PA = x$; $PC = x'$; $PB = y$; $PD = y'$. Ta có

$$p = p(x, x', y, y') = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + x'^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} + \sqrt{y'^2 + x^2} \quad (**)$$

Các biến số x, x', y, y' ràng buộc với nhau bởi các điều kiện:

$$\begin{cases} a - \sqrt{a^2 - b^2} \leq x, x', y, y' \leq a + \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot x' = y \cdot y' = b^2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^2 + x'^2 + y^2 + y'^2 = 4a^2 \end{cases} \quad (3)$$

Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất p_M và giá trị nhỏ nhất p_m của biểu thức đại số $p(x, x', y, y')$ của các biến x, x', y, y' thỏa mãn các điều kiện (1), (2) và (3).

Từ điều kiện (2) ta đưa được $p(x, x', y, y')$ về dạng sau

$$p(x, x', y, y') = \sqrt{(x+y')^2 + (x'+y)^2} + \sqrt{(x+y)^2 + (x'+y')^2} \quad (4)$$

Bình phương hai vế của (4) rồi sử dụng (2) và (3) ta được

$$p^2 = (x + x' + y + y')^2 + 4a(x + x' + y + y') + 4(a^2 - b^2) \quad (5)$$

Đặt $x + x' = X$; $y + y' = Y$ thì p^2 có dạng một tam thức bậc hai đối với $X + Y$:

$$p^2 = (X + Y)^2 + 4a(X + Y) + 4(a^2 - b^2) \quad (6)$$

đồng thời từ (2) và (3) dễ dàng suy ra hệ thức sau giữa X và Y

$$X^2 + Y^2 = 4(a^2 + b^2) \quad (7)$$

2) Vì $X > 0, Y > 0$ nên biểu thức (6) của p^2 cho ta biết p đạt giá trị lớn nhất p_M hay giá trị nhỏ nhất p_m khi và chỉ khi $X + Y$ đạt max hay min. Mặt khác, từ (7) và đồng nhất thức

$$(X + Y)^2 + (X - Y)^2 = 2(X^2 + Y^2) \quad (8)$$

suy ra $X + Y$ đạt max(min) $\Leftrightarrow |X - Y|$ đạt min(max).

a) Ta có $\max(X + Y)^2 = 8(a^2 + b^2) \Leftrightarrow X = Y$.

Từ đó giá trị lớn nhất của $X + Y$ là

$$2\sqrt{2(a^2 + b^2)} \Leftrightarrow X = Y = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Sau đó thay giá trị lớn nhất của $X + Y$ vừa tìm được vào (6) ta thu được giá trị lớn nhất p_M .

b) Từ ý nghĩa hình học của các kí hiệu x, x', y, y' và $X = x + x'$; $Y = y + y'$ ta thấy ngay rằng $\min(X, Y) = 2b \leq X, Y \leq 2a = \max(X, Y)$.

Suy ra giá trị lớn nhất của $(X - Y)^2$ là

$$|\max(X, Y) - \min(X, Y)|^2 = (2a - 2b)^2 = 4(a - b)^2.$$

Do đó

$$\min(X + Y)^2 = 8(a^2 + b^2) - 4(a - b)^2 = 4(a + b)^2$$

$$\Leftrightarrow X = 2a, Y = 2b \text{ hoặc } X = 2b, Y = 2a.$$

Từ đó $\min(X + Y) = 2(a + b)$.

Cuối cùng ta cũng thu được biểu thức p_m . Ý nghĩa hình học của đẳng thức điều kiện $X = Y = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ khi p đạt giá trị lớn nhất p_M và $X = 2a, Y = 2b$ (hoặc $X = 2b, Y = 2a$) khi p đạt giá trị nhỏ nhất p_m được chỉ ra ở lời giải 1.

C. Nhận xét và lời bình (về hai lời giải hình học và đại số của bài toán)

• Lời giải 1 mang sắc thái hình học rõ rệt. Để tính được chu vi p của tứ giác nội tiếp $ABCD$ ta cần phải lấy tổng độ dài các cạnh của nó. Nhưng độ dài các cạnh lại liên quan đến độ dài hai đường chéo AC và BD , bán kính a của đường tròn ngoại tiếp $(O; a)$ cũng như đến khoảng cách $OP = d$ ($0 \leq d < a$). Mỗi liên hệ này tất cả đều được thể hiện dưới dạng bình phương của độ dài đoạn thẳng và tính độ dài

Nhiều cách giải cho một bài toán

Tìm nhiều cách chứng minh một hệ thức nhờ biến đổi tương đương

NGUYỄN VIỆT HẢI
(Hà Nội)

Cho tam giác ABC với $AB = c, BC = a, CA = b$, $a + b + c = 2p$. Gọi S, R, r theo thứ tự là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA . Đặt $\widehat{CAB} = 2\alpha, \widehat{ABC} = 2\beta, \widehat{BCA} = 2\gamma$.

Trong bài này sẽ sử dụng một số hệ thức quen biết sau.

$$S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (I)$$

$$\text{Từ đó có } pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c) \quad (II)$$

Khai triển về phải của (II) rồi thay $abc = 4Rpr$ vào và rút gọn được

$$ab + bc + ca - p^2 = 4Rr + r^2 \quad (III)$$

Ta cũng biết:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p}, \operatorname{tg} \beta = \frac{r}{p-b} = \frac{r_b}{p},$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{r}{p-c} = \frac{r_c}{p} \quad (IV)$$

★ **Bài toán.** Chứng minh rằng trong tam giác ABC có hệ thức

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{4R+r}{pr} \quad (1)$$

Từ một hệ thức nếu khéo sử dụng các phép biến đổi ta có thể nhận được nhiều hệ thức tương đương, mà mỗi hệ thức đó có một dạng riêng sẽ gợi cho ta tìm ra cách chứng minh tương ứng. Nếu ta chứng minh được một trong các hệ thức này thì suy ra được tất cả các hệ thức tương đương với nó. Như vậy, không những ta tìm được nhiều cách chứng minh hệ thức ban đầu mà còn có cách nhìn toàn diện hơn, hệ thống hơn về các hệ thức khác nhau về hình thức nhưng thống nhất với nhau về mối quan hệ toán học. Điều này được minh họa qua việc xét cách chứng minh một số hệ thức trong tam giác dưới đây.

Chứng minh. (Cách 1)

$$\text{Đặt } T = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}.$$

Ta có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} = \frac{2p-a-b}{(p-a)(p-b)} = \frac{c}{(p-a)(p-b)}.$$

Tương tự có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} = \frac{b}{(p-a)(p-c)};$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{a}{(p-b)(p-c)}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} 2T &= \frac{c}{(p-a)(p-b)} + \frac{b}{(p-a)(p-c)} + \frac{a}{(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{c(p-c) + b(p-b) + a(p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{pr^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2p^2 - (a+b+c)^2 + 2(ab+bc+ca)}{pr^2}$$

$$= \frac{2(ab+bc+ca) - 2p^2}{pr^2}$$

Thay hệ thức (III) vào phân thức cuối cùng nêu trên ta có điều phải chứng minh. $\square$

Biến đổi tương đương hệ thức (1) được,

$$\frac{pr}{p-a} + \frac{pr}{p-b} + \frac{pr}{p-c} = 4R + r.$$

Áp dụng hệ thức (IV) ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) đến chứng minh hệ thức sau:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r \quad (2)$$

Chứng minh. (Cách 2)

Sử dụng hệ thức (I) và (IV) có

$$r_a = \frac{pr}{p-a} = \frac{S^2}{S(p-a)} = \frac{p(p-b)(p-c)}{S}$$

$$\text{Tương tự } r_b = \frac{p(p-a)(p-c)}{S},$$

$$r_c = \frac{p(p-a)(p-b)}{S}, \quad r = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{S}.$$

Từ đó

$$S((r_a + r_b) + (r_c - r))$$

$$= p(p-c)(p-a+p-b) + (p-a)(p-b)(p-(p-c))$$

$$= c(p(p-c) + (p-a)(p-b))$$

$$= c(2p^2 - p(a+b+c) + ab) = cab = 4RS.$$

Giản ước S ở vế đầu và vế cuối của dãy đẳng thức ta được (2). $\square$

Lại biến đổi tương đương hệ thức (1) theo cách khác được

$$\frac{4R+r}{r} = \frac{p}{p-a} + \frac{p}{p-b} + \frac{p}{p-c}$$

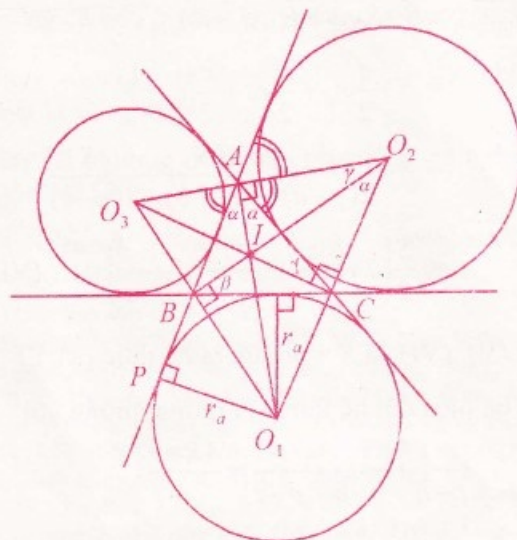
$$= \left(\frac{a}{p-a} + 1 \right) + \left(\frac{b}{p-b} + 1 \right) + \left(\frac{c}{p-c} + 1 \right).$$

Từ đó ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) về chứng minh hệ thức

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} = \frac{4R}{r} + 2 \quad (3)$$

Chứng minh. (Cách 3)

Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA (xem hình vẽ).



Từ (I) và (IV) có

$$\frac{aS}{p-a} = \frac{apr}{p-a} = ar_a = 2S_{O_1BC}.$$

Tương tự có

$$\frac{bS}{p-b} = 2S_{O_2AC}, \quad \frac{cS}{p-c} = 2S_{O_3AB}.$$

Để thấy $\widehat{O_1AC} + \widehat{O_2AC} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ nên

$O_1A \perp O_2A$. Tương tự có $O_1A \perp O_3A$ và $O_1A \perp O_2O_3, O_2B \perp O_1O_3, O_3C \perp O_1O_2$.

Ta cũng có

$$\widehat{CO_2A} = \widehat{CIO_1} = \widehat{CAI} + \widehat{ACI} = \alpha + \gamma = \widehat{CBO_1}.$$

Từ đó có

$$\Delta O_1O_2O_3 \sim \Delta O_1BC \text{ nên } \frac{O_2O_3}{a} = \frac{AO_1}{r_a}.$$

Ta có

$$2S_{O_1O_2O_3} = O_2O_3 \cdot AO_1 = \frac{O_2O_3}{AO_1} \cdot AO_1^2 = \frac{a}{r_a} \cdot AO_1^2$$

Chú ý rằng $AO_1 = \frac{AP}{\cos \alpha} = \frac{p}{\cos \alpha}$ và $r_a = ptg\alpha$ (theo (IV)) nên

$$2S_{O_1O_2O_3} = \frac{ap^2}{p.tg\alpha.\cos^2 \alpha} = \frac{p.2R.\sin 2\alpha}{\sin \alpha.\cos \alpha} = 4Rp \quad (V)$$

Mặt khác sử dụng (I), (IV) có

$$\begin{aligned} 2S_{O_1O_2O_3} &= S + S_{O_1BC} + S_{O_2AC} + S_{O_3AB} \\ &= S + \frac{a}{2}.r_a + \frac{b}{2}.r_b + \frac{c}{2}.r_c \\ &= S + \frac{aS}{2(p-a)} + \frac{bS}{2(p-b)} + \frac{cS}{2(p-c)} \\ &= \frac{S}{2} \left(2 + \frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \right) \quad (VI) \end{aligned}$$

Từ (V), (VI) và $S = pr$ suy ra hệ thức (3). $\square$

Ta lại biến đổi hệ thức (1) tương đương với

$$\frac{r}{p-a} + \frac{r}{p-b} + \frac{r}{p-c} = \frac{4R+r}{p}.$$

Sử dụng (IV) ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) về chứng minh hệ thức

$$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = \frac{4R+r}{p} \quad (4)$$

Chứng minh. (Cách 4)

Sử dụng (IV) ta có

$$p = (p-a) + a = \frac{r}{tg\alpha} + 2R\sin 2\alpha.$$

Áp dụng công thức lượng giác của góc chia đôi với $tg\alpha = t$ ta có $p = \frac{r}{t} + \frac{4Rt}{1+t^2}$.

Quy đồng mẫu số rồi viết trong dạng phương trình đối với t ta được

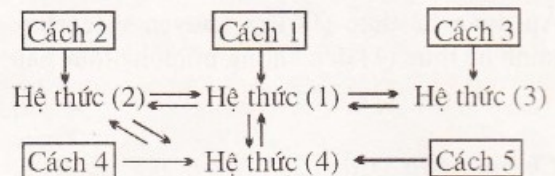
$$pt^3 - (4R+r)t^2 + pt - r = 0 \quad (VII)$$

Như vậy $t = tg\alpha$ là nghiệm của phương trình bậc ba (VII). Tương tự như thế $tg\beta$, $tg\gamma$ cũng là nghiệm của phương trình bậc ba (VII). Áp dụng định lí Viète cho tổng ba nghiệm của phương trình bậc ba (VII) ta có hệ thức (4). $\square$

Trong bài tập 1 dưới đây hướng dẫn cách chứng minh hệ thức (4) (coi là cách (5)) bằng

các phép biến đổi lượng giác. Với mỗi hệ thức (1), (2), (3), (4) ta có cách chứng minh tương ứng nhưng vì các hệ thức này tương đương với nhau nên nếu xuất phát từ một trong năm cách chứng minh đã nêu thì đi theo mũi tên trong sơ đồ dưới ta chứng minh được hệ thức (1) và cả các hệ thức (2), (3), (4). Cũng dễ dàng thấy nếu sử dụng (IV) có thể biến đổi hệ thức (2) tương đương với hệ thức (4).

Sơ đồ liên hệ giữa các hệ thức và cách chứng minh



Mời các bạn làm các bài tập sau có liên quan đến các hệ thức trên và cách chứng minh chúng.

Bài 1. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để chứng minh các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{4R}{p} &= \frac{8R}{2R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)} \\ &= \frac{1}{\cos \alpha.\cos \beta.\cos \gamma}; \end{aligned}$$

$$b) \quad \frac{r}{p} = tg\alpha.tg\beta.tg\gamma.$$

Từ đó suy ra hệ thức (4) (cách (5)).

Bài 2. Chứng minh rằng $\frac{1}{p-a}$, $\frac{1}{p-b}$, $\frac{1}{p-c}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$pr^2x^3 - (4R+r)rx^2 + px - 1 = 0.$$

Từ đó suy ra hệ thức (1).

$$\begin{aligned} \text{Hướng dẫn.} \quad \frac{4R}{p-(p-a)} &= \frac{4R}{a} = \frac{4R}{2R\sin 2\alpha} \\ &= tg\alpha + cotg\alpha = \frac{r}{p-a} + \frac{p-a}{r}, \end{aligned}$$

đặt $x = \frac{1}{p-a}$ rồi quy đồng mẫu số.

(Xem tiếp trang 31)

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu Toán

Tiếp tục câu chuyện HỌC TOÁN Ở NGOÀI TOÁN



NGUYỄN CẢNH TOÀN

(Xem từ số 348, tháng 6/2006)

Hai tuần lễ sau, B và C lại gặp nhau.

B. Cậu vẫn chưa giới thiệu tớ với anh cậu.

C. Ông ấy đi công tác xa, mới về hôm kia, hôm qua lại được mời đi nói chuyện về "cách học".

B. Hoài của! Sao không nháy máy cho biết đề tớ đi nghe.

C. Dễ dễ. Câu lạc bộ này gọi là câu lạc bộ "Sinh viên với giáo dục" do một số sinh viên mở ra. Họ phải thu học phí để trang trải các tiền thuê hội trường, trả thù lao cho báo cáo viên. Cậu chưa phải là sinh viên, lại chưa có thẻ câu lạc bộ mà thẻ không cấp miễn phí thì cậu đến sao được. Hôm qua tớ cũng xin đi vì, tuy anh em ruột trong nhà nhưng tớ đã có bao giờ được nghe ông ấy nói một cách hệ thống đâu.

B. Thế rồi cậu có đi được không?

C. Tớ phải nói mãi, ông ấy mới cho làm chân thư kí tháp tùng thủ trưởng để đi mà ghi chép.

B. Thế cậu nghe được những điều gì thú vị?

C. À, hôm đó khi ông ấy vừa nói đến "học mọi lúc" thì có sinh viên đứng phát dậy hỏi: "Thưa thầy, ngay lúc này đây, thầy học được điều gì ạ?". Câu hỏi cũng hơi ác, nó buộc anh tớ phải trả lời ngay lập tức vì "lúc" chỉ là một "khoảnh khắc", có thì giờ đâu mà suy nghĩ. Tớ đương lo hộ ông anh, khéo mà trả lời lúng túng thì mất uy tín, thì ông ấy đã nói: "tôi học được cách đặt câu hỏi của anh, khá thẳng thắn và thông minh

vì cái đối phương vào thế phải trả lời ngay lập tức".

B. Hay nhỉ. Tớ lại nhớ đến những chuyện các Trạng nguyên nhà ta ngày xưa đi sứ bên Tàu, nhiều khi không nhanh trí thì mất thể diện không chỉ của cá nhân, mà cả thể diện đất nước. Tớ nhớ không biết có phải Trạng Mạc Đĩnh Chi đã nhanh trí thò mười ngón tay vào nghiền mực để vẽ mười con giun vì người ta đổ vẽ được mười con vật chỉ sau một tiếng trống.

C. Khi ông ấy nói đến "học mọi nơi", lại có người hỏi: "Thưa thầy, ở nơi này, thầy học được gì ạ?". Ông ấy trả lời: Trong việc "trợ học" thì tác phong công nghiệp thể hiện ra ở tính kế hoạch trong tổ chức việc học và ở tính hệ thống trong tư duy. Ví dụ, một quyển sách toán dày 600 trang, trông dễ ớn, nhưng nếu giữ vững kế hoạch, ngày nào cũng đọc cho được rất cẩn thận 2 trang thì 300 ngày là xong, còn nếu đọc bữa đực, bữa cái thì có khi chả bao giờ đọc hết. Đi vào nội dung thì "hệ thống" là một thứ trật tự có tác dụng nâng hiệu suất lên rất cao vì nắm được hệ thống thì đúng là "học một biết mười". Phải cố mà tự mình thấy rõ hệ thống chứ ý lại ngồi chờ thầy hệ thống hóa hộ, chỉ nghe lớt phớt, cho thế là xong.

B. Nghe cậu nói, mình có ý định sẽ xin thay cậu làm chân thư kí để tháp tùng anh cậu trong các buổi nói chuyện của ông ấy sau này.

C. Cậu đi mà thương lượng với ông ấy. Hôm nay tớ còn bận có việc phải đi ngay bây giờ.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/351. (Lớp 6) Xét tích gồm 11 thừa số
 $T = (5a + 2006b)(6a + 2005b)(7a + 2004b) \dots$
 $(15a + 1996b)$

với a, b là các số nguyên.

Chứng minh rằng nếu T chia hết cho 2011 thì T cũng chia hết cho 2011¹¹.

NGUYỄN VĂN TUẤN

(GV THCS Yên Bình, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Bài T2/351. (Lớp 7) Tính tổng gồm 2006 số hạng

$$S = \frac{3^3 + 1^3}{2^3 - 1^3} + \frac{5^3 + 2^3}{3^3 - 2^3} + \frac{7^3 + 3^3}{4^3 - 3^3} + \dots + \frac{4013^3 + 2006^3}{2007^3 - 2006^3}.$$

HUỖNH QUANG LÂU

(GV THCS Ngô Mây, Phù Cát, Bình Định)

Bài T3/351. Tìm số nguyên tố p sao cho $2005^{2005} - p^{2006}$ chia hết cho $2005 + p$.

TRẦN VĂN THÍNH

(GV THCS Tiên Cường, Tiên Lãng, Hải Phòng)

Bài T4/351. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 252 \\ x^2t^2 + y^2z^2 = 2xyzt. \end{cases}$$

NGUYỄN QUANG HUNG

(GV THPT-BC Trần Hưng Đạo, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/351. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a+b+c)^3}{abc}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

BÙI TUẤN ANH

(GV THPT Yên Thủy A, Hòa Bình)

Bài T6/351. Cho tam giác ABC không tù có các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 và trực tâm H . Chứng minh rằng

$$HA^2 + HA_1^2 + HB^2 + HB_1^2 + HC^2 + HC_1^2 \geq \frac{5}{2} (HA \cdot HA_1 + HB \cdot HB_1 + HC \cdot HC_1).$$

PHẠM BẮC PHÚ

(SV CLC K52, khoa Toán, ĐHSP Hà Nội)

Bài T7/351. Cho năm điểm A, B, C, D và E cùng nằm trên một đường tròn. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của E xuống các đường thẳng AB, BC, CD và DA . Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của E xuống các đường thẳng MN, NP, PQ và QM cùng nằm trên một đường thẳng.

TRẦN VIỆT HÙNG

(Sở GD-ĐT Sóc Trăng)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/351. Chứng minh rằng

$(2n + 1)^{n+1} \leq (2n+1)!! \pi^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, trong đó $(2n + 1)!!$ là tích các số nguyên dương lẻ từ 1 đến $2n + 1$.

TRẦN VIỆT ANH

(SV CLC K51, khoa Toán, ĐHSP Hà Nội)

Bài T9/351. Giải phương trình

$$x^3 - 3x = \sqrt{x+2}.$$

PHẠM VĂN THUẬN

(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/351. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn

$$f(0) = 0; f(1) = 1; 6f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = 5f(x) + f(y)$$

với $\forall x \geq y; x, y \in [0; 1]$.

Hãy tính $f\left(\frac{8}{23}\right)$.

VŨ THÁI LUÂN

(Học viên Cao học khóa 05-07, khoa Toán-Cơ-Tin, ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/351. Tính các góc của tam giác ABC , biết rằng $\frac{h_a}{m_b} + \frac{h_b}{m_a} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, trong đó m_a, m_b theo thứ tự là độ dài các đường trung tuyến; h_a, h_b theo thứ tự là độ dài các đường cao thuộc các đỉnh A, B của tam giác ABC .

PHẠM VĂN HOÀNG
(SV KTNL2, K49, ĐHBK Hà Nội)

Bài T12/351. Cho tứ diện gài đều $ABCD$ ($AB = CD, AC = BD, BC = AD$). Gọi V, R, r theo thứ tự là thể tích, bán kính mặt cầu ngoại tiếp, bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện đó. Chứng minh rằng

$$\frac{243V^2}{512R^6} \leq \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{9}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

trong đó A, B, C là ba góc trong của tam giác ABC .

Dấu bằng ở các bất đẳng thức trên xảy ra khi nào?

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ



Bài L1/351. Hai vật I và II có khối lượng lần lượt m_1 và m_2 được buộc vào hai sợi dây dài bằng nhau và được treo sát bên nhau như hình vẽ. Người ta kéo vật I sang một bên tới độ cao so với vật II là $0,2\text{m}$ rồi thả không vận tốc ban đầu. Sau đó vật I va chạm đàn hồi với vật II.

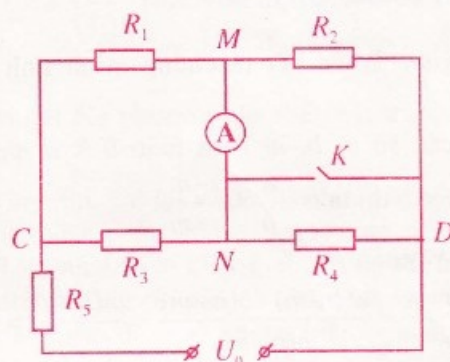
a) Hỏi sau khi va chạm lần thứ nhất, cả hai vật cùng lên đến độ cao bao nhiêu mét?

b) Hai vật lại chuyển động đi xuống và va chạm vào nhau lần thứ hai. Hãy mô tả điều gì xảy ra sau đó.

(Coi rằng hai sợi dây có khối lượng không đáng kể).

TÔ GIANG (Hà Nội)
(Sưu tầm từ Olympic Mỹ (vòng loại) - 1999)

Bài L2/351. Cho mạch điện như hình vẽ:



$R_1 = R; R_2 = 2R; R_3 = 3R; R_4 = 4R; R_5 = 5R; R_A = R$. Hiệu điện thế U_0 không đổi. Biết rằng khi khóa K ngắt thì số chỉ của ampe kế là I ; khi khóa K đóng thì số chỉ của ampe kế là I' .

Xác định tỉ số $\frac{I}{I'}$.

NGUYỄN MẠNH THẮNG
(GV THCS Yên Khánh, Yên Mô, Ninh Bình)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/351. (for 6th grade)

Consider the product of 11 factors

$$T = (5a + 2006b)(6a + 2005b)(7a + 2004b) \dots (15a + 1996b)$$

where a, b are given integers.

Prove that if T is divisible by 2011 then T is divisible by 2011^{11} .

T2/351. (for 7th grade)

Calculate the sum of 2006 terms

$$S = \frac{3^3 + 1^3}{2^3 - 1^3} + \frac{5^3 + 2^3}{3^3 - 2^3} + \frac{7^3 + 3^3}{4^3 - 3^3} + \dots + \frac{4013^3 + 2006^3}{2007^3 - 2006^3}.$$

T3/351. Find the prime number p such that $2005^{2005} - p^{2006}$ is divisible by $2005 + p$.

T4/351. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 252 \\ x^2 t^2 + y^2 z^2 = 2xyzt. \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 31)



★ Bài T1/347. So sánh $\frac{5}{8}$ và $\left(\frac{389}{401}\right)^{10}$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh tính chất sau:

Với các số a, b, m thỏa mãn $0 < a < b$ và $0 < m < b$ thì ta có $\frac{a}{b} > \frac{a-m}{b-m}$.

Thực vậy,

$$\frac{a}{b} - \frac{a-m}{b-m} = \frac{a(b-m) - b(a-m)}{b(b-m)} = \frac{m(b-a)}{b(b-m)} > 0.$$

Với $m = 1$ ta có $\frac{389}{401} > \frac{388}{400} = \frac{97}{100}$.

Chọn $m = 3$ và áp dụng liên tiếp tính chất trên ta được

$$\begin{aligned} \left(\frac{389}{401}\right)^{10} &> \left(\frac{97}{100}\right)^{10} \\ &> \frac{97}{100} \cdot \frac{94}{97} \cdot \frac{91}{94} \cdot \frac{88}{91} \cdot \frac{85}{88} \cdot \frac{82}{85} \cdot \frac{79}{82} \cdot \frac{76}{79} \cdot \frac{73}{76} \cdot \frac{70}{73} \\ \text{nên } \left(\frac{389}{401}\right)^{10} &> \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

Vì $7.8 > 10.5$ nên $\left(\frac{389}{401}\right)^{10} > \frac{7}{10} > \frac{5}{8}$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Lời giải trên cho ta kết quả tốt hơn

ở đề bài, tuy nhiên nếu so sánh $\left(\frac{389}{401}\right)^{10}$ với $\frac{7}{10}$ thì

bài trở nên khó hơn nhiều nếu không biết cách làm trên. Một số bạn lấy $m = 12 = 401 - 389$; hoặc lấy

$m = 5$ để có $\frac{389}{401} > \frac{384}{396} = \frac{32}{33}$ rồi lấy $m = 1$; sau đó áp

dụng liên tiếp tính chất trên cũng dẫn đến điều phải chứng minh với các phép tính toán đơn giản.

2) Các bạn có lời giải tương đối đơn giản là:

Phú Thọ: Phùng Quang Anh, Kim Huyền Trang, 6A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Ngọc Thọ, 6A, Đỗ Công Huân, 6A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** Trịnh Quân, 6A, THCS Diễn Thắng, Diễn Châu.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/347. Cho tam giác ABC . Các điểm E, F theo thứ tự nằm trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABE} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$, $\widehat{ACF} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. Gọi O là giao điểm của BE và CF . Giả sử $OE = OF$. Chứng minh rằng $AB = AC$ hoặc $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $OB \geq OC$.

• Trường hợp 1. (h. 1).

Nếu $OB = OC$ thì tam giác BOC cân tại O .

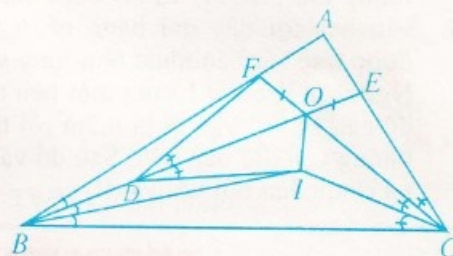
Suy ra $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\widehat{ABC} = \frac{2}{3}\widehat{ACB}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}.$$

Vậy tam giác ABC cân tại A , do đó $AB = AC$.

• Trường hợp 2. (h.2).



Nếu $OB > OC$ thì lấy điểm D trên OB sao cho $OD = OC$ (D thuộc đoạn OB). Gọi I là giao điểm của các đường phân giác trong tam giác OBC . Nối D với I , D với F .

$$\text{Ta có } \widehat{ECO} = \widehat{OCI} = \widehat{ICB} = \frac{\widehat{ACB}}{3} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \widehat{FBO} = \widehat{OBI} = \widehat{IBC} &= \frac{\widehat{ABC}}{3} \\ \widehat{IOB} &= \widehat{IOC} \end{aligned} \quad (2)$$

Dễ thấy $\triangle OFD = \triangle OEC$ và $\triangle OIC = \triangle OID$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{FDO} = \widehat{ECO}$ (3) và $\widehat{OCI} = \widehat{ODI}$ (4)

Từ (1), (3) và (4) suy ra $\widehat{FDO} = \widehat{ODI}$ do đó $\widehat{IDB} = \widehat{FDB}$.

Khi đó $\triangle IDB = \triangle FDB$ (g.c.g) nên $ID = FD$; suy ra $\triangle ODI = \triangle ODF$ (c.g.c), do đó $\widehat{FOD} = \widehat{IOD}$ (5)

Từ (2) và (5) suy ra $\widehat{IOC} = \widehat{IOD} = \widehat{FOD} = 60^\circ$.

Từ đó ta có $\widehat{BOC} = \widehat{IOD} + \widehat{IOC} = 120^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$\Rightarrow \frac{2}{3}(\widehat{ACB} + \widehat{ABC}) = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$.

Vậy, nếu $OE = OF$ thì $AB = AC$ hoặc $\widehat{BAC} = 90^\circ$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải trên (của đa số các bạn), một số bạn đã chứng minh được bằng cách vẽ hai tia Ox, Oy theo thứ tự cắt tia phân giác của các góc $\widehat{OBC}, \widehat{OCB}$ tại K, I sao cho $\widehat{BOx} = \widehat{DOy} = \widehat{BOF} = \widehat{COE}$ rồi xét hai trường hợp: OI trùng với OK , hoặc tam giác OIK cân tại O . Tuy nhiên, có bạn còn nhầm khi coi $AB = AC$ hoặc $\widehat{BAC} = 90^\circ$ là giả thiết rồi đi chứng minh $OE = OF$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Thị Ngọc, Phùng Ngọc Quý, Nguyễn Thị Giang A, Nguyễn Thị Tuyết Mai, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghe An:** Đậu Thế Vũ, 7B1, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Vũ Đình Long, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** Phạm Đức Minh Anh, 7H1, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm; **Hà Tây:** Nguyễn Khắc Quý, 7A1, THCS Tế Tiều, Mỹ Đức.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T3/347.** Tìm nghiệm nguyên của hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} 4x^3 + y^2 = 16 \\ z^2 + yz = 3. \end{cases}$$

Lời giải. Phương trình thứ nhất có thể viết thành

$$x^3 = \frac{16 - y^2}{4} \quad (1)$$

Phương trình thứ hai có thể viết thành

$$z(z + y) = 3 \quad (2)$$

Vì z và $(z + y)$ là các số nguyên nên từ (2), suy ra chúng đều là ước của 3.

Do đó giá trị của z chỉ có thể là: $-1, 1, -3, 3$.

Ta được bốn trường hợp sau:

$$z = -1: (2) \Rightarrow z + y = -3 \Rightarrow y = -2.$$

$$z = 1: (2) \Rightarrow z + y = 3 \Rightarrow y = 2.$$

$$z = -3: (2) \Rightarrow z + y = -1 \Rightarrow y = 2.$$

$$z = 3: (2) \Rightarrow z + y = 1 \Rightarrow y = -2.$$

Trong cả bốn trường hợp trên, ta đều có $y^2 = 4$.

Thay vào (1), ta được $x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$ không phải là số nguyên.

Vậy hệ phương trình đã cho không có nghiệm nguyên. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán có rất nhiều bạn tham gia giải, hầu hết đều làm đúng và theo cách trên.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Đặng Thuỳ Linh, 9G, THCS Hữu Nghị Việt Nam - Angieri, Q. Thanh Xuân, Lê Hồng Dung, 6A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Lê Quang Huy, 8H1, THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm; **Đào Huy Thành,** 7A11, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Phú Thọ:** Nguyễn Trường Giang, 7A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Tạ Đức Trung, 6A3, THCS Lâm Thao; **Thái Nguyên:** Ngô Trần Việt Hà, 7A4, THCS Chu Văn An, TP Thái Nguyên; **Lào Cai:** Lê Đức Thọ, 8C, THCS Lê Quý Đôn, TP Lào Cai; **Nghe An:** Hoàng Thị Lệ Quyên, 8B, Phạm Việt Hùng, 8C, Võ Thị Thương, 7B, Đinh Việt Tú, 7A, Nguyễn Xuân Hùng, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** Tạ Thị Việt Chinh, Nguyễn Thị Huân, Nguyễn Thị Phương Liên, Bùi Thị Ngọc Bích, Nguyễn Ngọc Khánh, Hoàng Quỳnh Liên, Tạ Thanh Xuân, Nguyễn Thị Hà Anh, Phạm Mỹ Linh, Nguyễn Thị Lệ Thu, Nguyễn Văn Hoàng, Nguyễn Hữu Bách, Nguyễn Thế Bảo, Nguyễn Kiều Anh, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Khánh Hòa:** Phan Đức Hạnh, 8/2, THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hoà; **Trần Thị Ánh Nguyên,** 7/1 THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa; **Lâm Đồng:** Đinh Thành Nhân, 9A7, THCS Quang Trung, TP Đà Lạt; **Quảng Trị:** Trần Văn Thành, 7A, THCS Cam Hiếu, Cam Lộ; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Như Mai Hương, 6A, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức; **Quảng Bình:** Hoàng Thị Trường Giang, THCS Quảng Minh, Quảng Trạch; **Nguyễn Phi Hùng,** 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Tây Ninh:** Nguyễn Quốc Trung, 9A7, THCS Nguyễn Tri Phương, TX Tây Ninh; **Hà Tây:** Nguyễn Văn Phong, 9E, THCS Vạn Thái, Ứng Hoà; **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 9A3, Lê Hồng Thiện, 9E, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Đắk Nông:** Nguyễn Thành Ân, 9A1, THCS Phan Chu Trinh, H Đắk Mil.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T4/347.** Xét các phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 2]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac}$$

Lời giải. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lý Viète ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Khi đó

$$P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac} = \frac{8 - 6 \cdot \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{4 - 2 \cdot \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} \quad (\text{vì } a \neq 0)$$

$$= \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2}$$

Giả sử $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$. Ta có $x_1^2 \leq x_1 x_2$ và $x_2^2 \leq 4 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 x_2 + 4$
 $\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \leq 3x_1 x_2 + 4$.

$$\text{Do đó } P \leq \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 + 4}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2} = 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = 2$ hoặc $x_1 = 0$ và $x_2 = 2$. Tức là

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = 4 \\ \frac{c}{a} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b = 4a \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} -\frac{b}{a} = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = 0. \end{cases}$$

◀ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán khá hay, tuy không khó nhưng cần sự biến đổi linh hoạt và lập luận chặt chẽ. Nhiều bạn tìm được $\max P = 3$ nhưng dừng lại ở điều kiện $x_1 = x_2 = 2$ hoặc không nêu ra được điều kiện $x_1 = 0$ và $x_2 = 2$ ở điều kiện xảy ra dấu đẳng thức.

2) Bạn Lê Trọng Cường, 8B, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn, Thanh Hóa còn chỉ ra được $\min P = 2$, đạt được khi $b = c = 0$, bằng cách viết

$$P = 2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2}$$

Bạn Cường cũng đề xuất bài toán tổng quát sau từ bài toán đã cho.

Xét các phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0; m]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2m^2 a^2 - 3mab + b^2}{2ma^2 - mab + ac}$$

3) Các bạn sau đây có lời giải đúng và lập luận ngắn gọn hơn cả:

Phú Thọ: Tạ Đức Thành, 8A3, THCS Lâm Thao;
Vinh Phúc: Mạc Thế Trường, 9A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, Nguyễn Huy Hoàng, 9C, THCS Vinh Tường;
Nam Định: Trần Thị Hồng Vân, 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực;
Thái Bình: Nguyễn Quốc Trường, 8A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải, Phạm Mạnh Cường, 9C, THCS TTr. Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ;
Hưng Yên: Lê Thị Nguyệt, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang;
Hà Tây: Đỗ Văn Đức, 9A1, THCS Tế Tiều, Mỹ Đức;
Thanh Hóa: Hoàng Anh Tuấn, 9A, THCS Trần Mai Ninh, Trịnh Quang Thanh, 9B, THCS Hàm Rồng, TP Thanh Hóa;
Nghệ An: Nguyễn Văn Tuấn, 8A, Hoàng Thị Lệ Quỳnh, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương;
Quảng Ngãi: Võ Thị Hồng Huyền, 8C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành;
Quảng Trị: Lê Văn Minh, 9A, THCS Triệu Phước, Triệu Phong;
Tây Ninh: Nguyễn Quốc Trung, 9A7, THCS Nguyễn Tri Phương, TX. Tây Ninh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T5/347.** Xét các tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c sao cho thỏa mãn hệ thức $15bc + 10ca + 1964ab = 2006abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{1974}{p-a} + \frac{1979}{p-b} + \frac{25}{p-c}$$

trong đó p là nửa chu vi của tam giác ABC. (15.10.1964 là sinh nhật của THPT).

Lời giải. Nhận xét. Với mọi $x > 0, y > 0$ thì

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \quad (1)$$

Thật vậy: $(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$, luôn luôn đúng.

Đẳng thức trong (1) xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Trở lại bài toán. Biến đổi M và sử dụng (1) cùng giả thiết, ta có

$$M = 1964 \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \right) + 10 \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} \right) + 15 \left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right)$$

$$\geq 1964 \cdot \frac{4}{p-a+p-b} + 10 \cdot \frac{4}{p-a+p-c} + 15 \cdot \frac{4}{p-b+p-c}$$

$$= 4 \left(\frac{1964}{c} + \frac{10}{b} + \frac{15}{a} \right) = 4 \cdot \frac{1964ab + 15bc + 10ac}{abc}$$

$$= 4 \cdot \frac{2006abc}{abc} = 8024.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} p-a = p-b = p-c \\ 1964ab + 15bc + 10ca = 2006abc \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1989}{2006} = \frac{117}{118}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 8024, đạt được

$$\text{khi } a = b = c = \frac{117}{118}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn đều giải theo cách trên. Nhiều bạn đã đưa ra bài toán tổng quát của bài toán trên như sau:

"Xét các tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c thỏa mãn hệ thức

$$x.ab + y.bc + z.ca = t.abc \quad (x, y, z, t \text{ là các số dương cho trước}).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{x+z}{p-a} + \frac{x+y}{p-b} + \frac{y+z}{p-c},$$

trong đó p là nửa chu vi tam giác ABC ."

Bằng cách giải tương tự như trên, ta tìm được

$$\min M = 4t, \text{ đạt được khi } a = b = c = \frac{x+y+z}{t}.$$

2) Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

Bắc Ninh: Nguyễn Văn Luận, 7A1, THCS TTtr. Chờ, Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Huy Hoàng, 9C, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường; **Hà Nội:** Nguyễn Thị Quỳnh Trang, 7C, THCS Mai Lâm, Đông Anh, Trần Hoàng Linh, 8A2, THCS Lương Thế Vinh; **Nam Định:** Trần Mạnh Linh, 9A, THCS Lộc Vượng, TP. Nam Định; **Phạm Thị Diệp,** 7A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Hà Tây:** Trần Đức Minh, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Nghệ An:** Phan Sỹ Quang, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Tăng Văn Bình, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Luật, 9B, THCS Sơn Hồng, Hương Sơn; **Quảng Bình:** Đinh Thanh Hà, 9A, THCS Nguyễn Hàm Ninh, Quảng Trạch; **Kiên Giang:** Võ Đức Huy, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, TP. Rạch Giá.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T6/347.** Cho tứ giác $ABCD$. Lấy các điểm M, P theo thứ tự trên các cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD}$. Tìm tập hợp trung điểm I của MP khi M, P di động trên AB, AC .

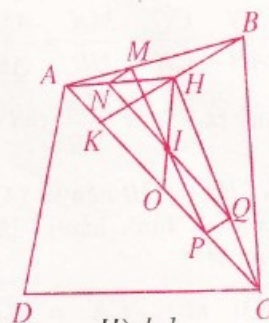
Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Đức Công, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An).

• **Phần thuận:**

Trên tia CA lấy điểm K sao cho $CK = CD$. Từ giả thiết ta có

$$\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CK} \quad (1)$$

Gọi H, O lần lượt là trung điểm của BK và AC , lúc đó $HB = HK$ (2)



Hình 1

Qua M, P kẻ các

đường thẳng song song với BK , chúng cắt AH, CH theo thứ tự tại N và Q . Theo định lý Thalès

$$\frac{MN}{HB} = \frac{AM}{AB}; \quad \frac{PQ}{HK} = \frac{CP}{CK}.$$

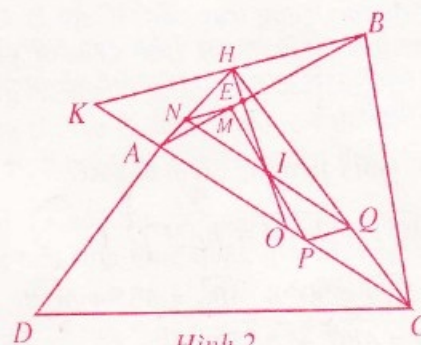
Kết hợp với (1), (2) ta được $MN = PQ$, dẫn đến $MNPQ$ là hình bình hành. Do đó trung điểm I của MP cũng chính là trung điểm của NQ . Lại có

$$\frac{AN}{AH} = \frac{AM}{AB}; \quad \frac{CQ}{CH} = \frac{CP}{CK} \quad (3)$$

Từ (1), (3) suy ra $NQ \parallel AC$. Theo bổ đề hình thang suy ra H, I, O thẳng hàng, hay I thuộc đoạn HO .

Lưu ý: Nếu $CA \geq CD$ thì I thuộc đoạn HO (h. 1).

Nếu $CA < CD$. Gọi E là giao điểm của HO với AB , thế thì I thuộc đoạn EO (h. 2).



Hình 2

• **Phần đảo.** Xét trường hợp $CA \geq CD$ ($CA < CD$ chúng ta làm tương tự). Lấy I bất kỳ trên đoạn HO . Qua I kẻ đường thẳng song song với AC cắt AH, CH theo thứ tự tại N, Q . Qua N, Q

kẻ các đường thẳng song song với BK , chúng cắt AB , AC lần lượt tại M và P . Do $NQ \parallel AC$, mà O là trung điểm của AC nên I là trung điểm của NQ . Ta có

$$\frac{AN}{AH} = \frac{CQ}{CH} = \frac{MN}{HB} = \frac{AM}{AB}; \quad \frac{CP}{CK} = \frac{PQ}{HK} = \frac{CQ}{CH},$$

suy ra $\frac{PQ}{HK} = \frac{MN}{HB}$ (4) và $\frac{CP}{CK} = \frac{AM}{AB}$ (5).

Vì $HK = HB$ nên từ (4) ta thấy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành, dẫn đến I là trung điểm của MP .

Mặt khác $CK = CD$ nên từ (5) ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD}$ (dpcm).

• **Kết luận:** Nếu $CA \geq CD$ thì tập hợp các điểm I là đoạn HO .

Nếu $CA < CD$ thì tập hợp các điểm I là đoạn EO . □

◀ **Nhận xét.** Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Ngoài bạn Công các bạn sau cũng có lời giải đúng:

Yên Bái: Nguyễn Thu Thủy, 9I, THCS Lê Hồng Phong, TP Yên Bái; **Nguyễn Duy Cương,** 9A, THCS Tô Hiệu, TX. Nghĩa Lộ; **Hà Tĩnh:** Hoàng Trung Hiếu, 9E, THCS Nam Hồng, TX. Hồng Lĩnh; **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Lâm Đồng:** Đinh Thành Nhân, 9A7, THCS Quang Trung, TP. Đà Lạt.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T7/347.** Tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135^\circ$. AM và BN là các đường cao. Đường thẳng MN cắt đường trung trực của AC tại P . Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của NP và BC . Chứng minh rằng tam giác ADE là tam giác vuông cân.

Lời giải. Gọi I là trung điểm của AC .

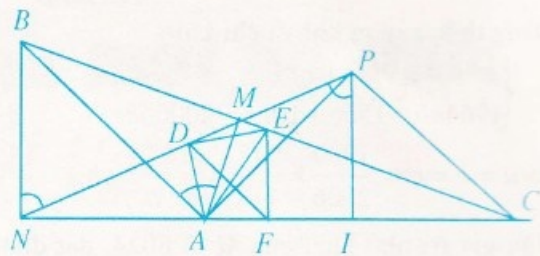
Ta có $\widehat{MPI} = \widehat{BNM} = \widehat{BAM}$.

Suy ra $\widehat{MPI} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 45^\circ + \widehat{ACB}$
(vì $\widehat{BAN} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$).

Nên $2\widehat{MPI} = 90^\circ + 2\widehat{ACB}$.

Mặt khác $\widehat{MIP} = 90^\circ - \widehat{MIA} = 90^\circ - 2\widehat{ACB}$.
Do đó $2\widehat{MPI} + \widehat{MIP} = 180^\circ$. Từ đó tam giác

MIP cân tại I hay $IP = IM$. Suy ra $IP = IA = IC$ hay tam giác APC vuông cân tại P . Gọi F là trung điểm của NC . Khi đó tứ giác $AMEF$ nội tiếp được. (1)



Lại có $\widehat{DME} = 135^\circ$ (vì $\widehat{CBA} = \widehat{CNM}$) và $\widehat{DFE} = \widehat{IPC} = 45^\circ$ (do $DF \parallel PC$) nên tứ giác $DMEF$ nội tiếp được. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ADME$ nội tiếp được. Do đó $\widehat{ADE} = 90^\circ$ và $\widehat{DEA} = \widehat{DMA} = 45^\circ$. Vậy tam giác ADE vuông cân tại D . □

◀ **Nhận xét.** Giải tốt bài này có các bạn:

Yên Bái: Nguyễn Duy Cương, 9A, THCS Tô Hiệu, TX Nghĩa Lộ; **Phú Thọ:** Tạ Đức Thành, 8A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Thị Thủy, 9A, THCS Lập Thạch; **Hải Dương:** Nguyễn Huy Hoàng, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Bắc Giang:** Hà Khương Duy, 9B, THCS TTr Bó Hạ, Yên Thế; **Hà Nam:** Nguyễn Văn Hùng, 9B, THCS Trần Phú, Phú Lý; **Nam Định:** Trần Thị Hồng Vân, 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực; **Thanh Hóa:** Đinh Quang Lộc, 9B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** Dương Dạ Thảo, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, TTr Cầu Giát, Quỳnh Lưu; **Hoàng Thị Lệ Quyên,** 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk, Nguyễn Hoàng Phương, 9E, THCS Chu Văn An, Eakar; **Lâm Đồng:** Đinh Thành Nhân, 9A7, THCS Quang Trung, Đà Lạt; **Đồng Nai:** Võ Mạnh Chư, 9A1, THCS Lê Thánh Tông, TTr. Định Quán.

BÍNH NAM HÀ

★ **Bài T8/347.** Cho 167 tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_{167}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$(1) \sum_{i=1}^{167} |A_i| = 2004;$$

$$(2) |A_j| = |A_i| \cdot |A_i \cap A_j| \text{ với mọi } i, j \in \{1, 2, \dots, 167\} \text{ và } i \neq j.$$

Tính $\left| \bigcup_{i=1}^{167} A_i \right|$, trong đó $|A|$ là kí hiệu số phần tử của tập hợp A .

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Minh Hằng, 10A₀, THPT Yên Phong I, Bắc Ninh).

• Ta có $|A_j| = |A_i| \cdot |A_j \cap A_i|$

$$|A_i| = |A_j| \cdot |A_i \cap A_j|$$

Suy ra $|A_i| = |A_j| \cdot |A_i \cap A_j|^2$

Nếu $|A_i| = 0$ thì từ (2) suy ra $|A_i| = 0, \forall j \neq i$.

Điều này mâu thuẫn với (1). Vậy $|A_i| \neq 0$.

Do đó $|A_i \cap A_j| = 1 (i \neq j)$ và $|A_i| = |A_j|$.

Do đó $|A_i| = 12, \forall i$.

• Xét tập A_1 . Mỗi tập $A_2, \dots, A_{167}$ đều chứa và chỉ chứa 1 phần tử của A_1 . Theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất 14 tập cùng chứa một phần tử của A_1 . Không giảm tổng quát giả sử 14 tập $A_2, \dots, A_{15}$ cùng chứa phần tử $a \in A_1$. Ta sẽ chứng minh $a \in A_i, \forall i$.

Thật vậy, giả sử tồn tại $i > 15, a \notin A_i$.

Đặt $B_i = A_i \setminus \{a\}$.

Khi đó với mỗi $A_j (j = 2, \dots, 15)$ ta có $|A_j \cap A_i| = 1$ do đó $|A_j \cap B_i| = 1$. Giả sử $A_j \cap B_i = \{b_j\}$.

Ta có $b_{j_1} \neq b_{j_2}$, vì nếu $b_{j_1} = b_{j_2}$ thì hai tập A_{j_1} và A_{j_2} có hai phần tử chung là a và b_{j_1} trái với $|A_i \cap A_j| = 1$. Như vậy $b_2, \dots, b_{15}$ là 14 phần tử thuộc A_i . Điều này không xảy ra vì $|A_i| = 12$.

Vậy với mọi $i \neq j$ ta có $A_i \cap A_j = \{a\}$.

• Đặt $B_i = A_i \setminus \{a\}$ với mọi i thì $B_i \cap B_j = \emptyset$ với mọi i, j mà $i \neq j$. Do vậy

$$\left| \bigcup_{i=1}^{167} A_i \right| = \left| \bigcup_{i=1}^{167} B_i \cap \{a\} \right| = \sum_{i=1}^{167} |B_i| + |\{a\}|$$

$$= 167 \cdot 11 + 1 = 1838. \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Mặc dù mấu chốt của bài toán là chứng minh $|A_i \cap A_j| = 1$ nhưng một số bạn sau khi đã chứng minh được điều này lại tính $\left| \bigcup_{i=1}^{167} A_i \right|$ không đúng.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Tây: Nguyễn Văn Trung, 10A2, THPT Hoài Đức, Hoài Đức; **Hà Nội:** Đặng Anh Tuấn, 11A₂, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Thái Bình:** Vũ Hữu Tiếp, 11 Toán, THPT chuyên; **Thanh Hóa:** Trịnh Hùng Linh, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa; **Hải Phòng:** Phan Tuấn Hiệp, 10, THPT NK Trần Phú; **Khánh Hòa:** Nguyễn Thị Hoàng Oanh, 11T, THPT Lê Quý

Đôn; **Bạc Liêu:** Trần Mỹ Linh, 10T, THPT chuyên; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Dương Văn An, 10A1, THPT Châu Thành, TX Bà Rịa.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T9/347.** Tìm tất cả những hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, thoả mãn điều kiện $f_3(x) + f(x) = 2x$, với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, trong đó $f_3(x) = f(f(f(x)))$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Trước hết ta chứng minh f là một đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì hiển nhiên $f_3(x_1) = f_3(x_2)$. Do đó

$$f_3(x_1) + f(x_1) = f_3(x_2) + f(x_2)$$

nên suy ra $2x_1 = 2x_2$ hay $x_1 = x_2$.

Tiếp theo, ta chứng minh mọi nghiệm của bài toán (nếu tồn tại) là một hàm số đơn điệu thực sự (hoặc đồng biến hoặc nghịch biến trên $\mathbb{R}$).

Cách 1. (Theo bạn Phan Tiến Dũng, 11T, THPT chuyên Hưng Yên và một số bạn khác).

Với cặp số $\alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha < \beta)$ tùy ý cho trước và mọi cặp $x, y \in (\alpha; \beta) (x < y)$, ta xét hàm số $g(t) = f((1-t)\beta + ty) - f((1-t)\alpha + tx), t \in [0; 1]$.

Khi đó, $g(t)$ là một hàm liên tục trên $[0; 1]$ và do $f(x)$ là đơn ánh nên

$$g(0) = f(\beta) - f(\alpha) \neq 0, g(1) = f(y) - f(x) \neq 0.$$

Nếu xảy ra $g(0) \cdot g(1) < 0$ thì do $g(t)$ liên tục nên tồn tại $\gamma \in (0; 1)$ để $g(\gamma) = 0$. Suy ra

$$f((1-\gamma)\beta + \gamma y) = f((1-\gamma)\alpha + \gamma x)$$

kéo theo $(1-\gamma)\beta + \gamma y = (1-\gamma)\alpha + \gamma x$.

Điều này không xảy ra, vì

$$(1-\gamma)\beta + \gamma y > (1-\gamma)\alpha + \gamma x.$$

Suy ra $g(0)g(1) > 0$, tức là

$$(f(\beta) - f(\alpha))(f(y) - f(x)) > 0.$$

Vậy $f(x)$ hoặc luôn luôn đồng biến hoặc luôn luôn nghịch biến.

Cách 2. (Theo đa số các bạn).

Giả sử $f(x)$ không đơn điệu, tức tồn tại x_1, x_2, x_3 với $x_1 < x_2 < x_3$ sao cho $f(x_1) < f(x_2), f(x_2) > f(x_3)$ (hoặc $f(x_1) > f(x_2), f(x_2) < f(x_3)$, dễ dàng đưa về trường hợp trên). Giả sử $a \in (f(x_1); f(x_2)) \cap (f(x_3); f(x_2))$. Do f liên tục nên tồn tại $y_1 \in (x_1; x_2)$ và $y_2 \in (x_2; x_3)$ sao cho $f(y_1) = f(y_2) = a$,

mâu thuẫn. Vậy $f(x)$ luôn luôn đồng biến hoặc luôn luôn nghịch biến.

Từ kết luận của cách 1 hoặc cách 2, giả sử $f(x)$ đồng biến (trường hợp nghịch biến được xét tương tự).

Nếu xảy ra $f(x_0) > x_0$ thì hiển nhiên $f_3(x_0) > x_0$ nên $f_3(x_0) + f(x_0) > 2x_0$.

Tương tự, nếu xảy ra $f(x_0) < x_0$ thì hiển nhiên $f_3(x_0) < x_0$ và $f_3(x_0) + f(x_0) < 2x_0$. Vậy $f(x) \equiv x$.

Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện đề bài. $\square$

◀ **Nhận xét.** Đây là đề toán quen biết và thuộc loại trung bình nên có nhiều bạn giải được và đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T10/347.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y},$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} = 2006.$$

Lời giải. Đặt $a = \sqrt{y^2+z^2}$, $b = \sqrt{z^2+x^2}$, $c = \sqrt{x^2+y^2}$ thì a, b, c là các số dương và $a+b+c = 2006$.

Ta có $a^2 = y^2 + z^2$, $b^2 = z^2 + x^2$, $c^2 = x^2 + y^2$.

Cộng theo vế ba đẳng thức trên, ta nhận được

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} = x^2+y^2+z^2 \quad (1)$$

$$\text{Do đó } x^2 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}, y^2 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}, z^2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Lại chú ý $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2 \Rightarrow \sqrt{2}c \geq x+y$.

$$\text{Tương tự } \sqrt{2}a \geq y+z, \sqrt{2}b \geq z+x \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} H &\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a} + \frac{c^2+a^2-b^2}{b} + \frac{a^2+b^2-c^2}{c} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 2(a+b+c) \right) \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 2(a+b+c) \right)$$

$$\text{vì } 3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

$$H \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \cdot \frac{9}{a+b+c} - 2(a+b+c) \right)$$

$$\text{vì } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)(a+b+c) =$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + 3 \geq 9.$$

$$\text{Đến đây } H \geq \frac{a+b+c}{2\sqrt{2}} = \frac{2006}{2\sqrt{2}} = \frac{1003\sqrt{2}}{2}.$$

$$H = \frac{1003\sqrt{2}}{2} \text{ khi và chỉ khi } x = y = z = \frac{1003\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của H là $\frac{1003\sqrt{2}}{2}$. $\square$

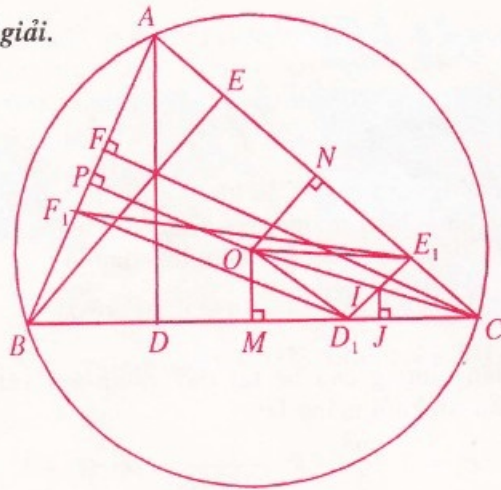
◀ **Nhận xét.** Đây là bài toán bất đẳng thức cơ bản, hay. Cách giải trên là đổi tham số và dùng bất đẳng thức cổ điển. Rất nhiều bạn giải theo cách: không đổi tham số và dùng bất đẳng thức Chebyshev. Cách giải trên tự nhiên và hợp với học sinh THCS hơn. Các bạn THCS sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Nguyễn Văn Luận, 7A1, THCS TTtr. Chờ, Yên Phong; **Phú Thọ:** Nguyễn Ngọc Trung, 8A1, THCS Lâm Thao; **Hà Tây:** Bùi Thị Hiền, 9A1, THCS Nguyễn Trục, Thanh Oai; **Trần Đức Minh,** 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Nguyễn Trung Nghĩa,** 9C, THCS Thạch Thất; **Vinh Phúc:** Đỗ Thị Thúy, 9A, THCS Lập Thạch; **Hải Dương:** Phạm Ngọc Dương, 8B, THCS Liên Hòa, Kim Thành; **Hải Phòng:** Nguyễn Ngọc Huy, 7A, THCS Trần Văn Ôn, Hồng Bàng; **Nam Định:** Phạm Thị Diệp, 7A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Trần Mạnh Linh,** 9A, THCS Lộc Vượng, TP Nam Định; **Thái Bình:** Nguyễn Quốc Trường, 8A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải; **Thanh Hóa:** Nguyễn Minh Anh, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Giang, 9A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T11/347.** Tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB . Gọi điểm đối xứng của D qua M là D_1 , của E qua N là E_1 , của F qua P là F_1 . Chứng minh rằng điểm O nằm trong tam giác $D_1E_1F_1$.

Lời giải.



Do tam giác ABC nhọn nên điểm O nằm trong tam giác ABC .

Gọi I là giao điểm của đoạn D_1E_1 và tia CO . Vì tam giác ABC nhọn nên $CD_1 = BD = AB \cos B$, $CE_1 = AE = AC \cos A$.

$$\Rightarrow \frac{CD_1}{CE_1} = \frac{\cos B}{\cos A} = \frac{OC \cos B}{OC \cos A} = \frac{ON}{OM}$$

$$\Rightarrow CD_1 \cdot OM = CE_1 \cdot ON$$

$$\Rightarrow S_{COD_1} = S_{COE_1} \Rightarrow I \text{ là trung điểm của } D_1E_1.$$

$$\text{Suy ra } 4CI^2 = (\overline{CD_1} + \overline{CE_1})^2 = (\overline{DB} + \overline{EA})^2$$

$$= AB^2 \cos^2 B + AC^2 \cos^2 A + 2AB \cos B \cos A \cos C$$

$$= AB^2 (1 - \cos^2 C) = AB^2 \sin^2 C$$

$$(\text{vì } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C)$$

$$\text{Từ đó } 2CI = AB \sin C = 2CO \sin C < 2CO$$

$$\Rightarrow CI < CO.$$

Suy ra O nằm ngoài tam giác CD_1E_1 .

Chứng minh tương tự O nằm ngoài hai tam giác BD_1F_1 , AE_1F_1 . Mà O nằm trong tam giác ABC nên O nằm trong tam giác $D_1E_1F_1$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể suy ra O nằm ngoài tam giác CD_1E_1 bằng cách chứng minh I là trung điểm D_1E_1 rồi suy ra $IJ < OM$ ($IJ \perp BC$, J thuộc BC) hoặc chứng minh $S_{COD_1} + S_{COE_1} > S_{CD_1E_1}$.

2) Một số bạn chứng minh hệ thức

$$\sin 2A \cdot \overline{OD_1} + \sin 2B \cdot \overline{OE_1} + \sin 2C \cdot \overline{OF_1} = 0$$

cũng suy ra được O nằm trong tam giác $D_1E_1F_1$.

3) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn:

Bác Ninh: Nguyễn Minh Hằng, 10A0, THPT Yên Phong I; **Vĩnh Phúc:** Phùng Đình Phúc, Lê Tiến Đức,

Trần Trung Dũng, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Vũ Quang Dũng, 10A2, Đặng Anh Tuấn, 11A2, THPT chuyên ĐHS Hà Nội; **Hải Dương:** Bùi Phương Ngân, Đỗ Đức Tài, 10T2, Phan Tiến Thành, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** Phan Tuấn Hiệp, 10T, THPT NK Trần Phú; **Hưng Yên:** Hoàng Đức Tâm, 10T, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Nguyễn Quốc Đại, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Nguyễn Hải, 11A1, THPT Đông Sơn I, Trần Hoàng Đại, 11B3, THPT Triệu Sơn I; **Quảng Ngãi:** Đỗ Tiến Vũ, 11B1, THPT Bình Sơn; **Đắk Lắk:** Lê Đức Quang, 10T, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột; **TP Hồ Chí Minh:** Lê Minh Triết, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HOÀNG TRỌNG HẢO

★ **Bài T12/347.** Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 theo thứ tự là trọng tâm các mặt BCD, CDA, DAB, ABC của tứ diện $ABCD$. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự là giao điểm của AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh rằng

$$\frac{AG_1}{AA_1} + \frac{BG_2}{BB_1} + \frac{CG_3}{CC_1} + \frac{DG_4}{DD_1} \leq \frac{8}{3}.$$

Lời giải. Rất nhiều bạn đã phát hiện ra rằng: Bài toán này chính là bài T12/337 và đã có lời giải trên THPT số 341 (tháng 11/2005). Chính vì vậy, THPT xin giới thiệu với bạn đọc bài toán mới (mở rộng của T12/347 và T12/337).

Bài toán mới: Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và điểm M nằm trong tứ diện. Các đường thẳng A_1M, A_2M, A_3M, A_4M theo thứ tự cắt các mặt đối diện với các đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4 của tứ diện tại M_1, M_2, M_3, M_4 và theo thứ tự cắt mặt cầu tâm O , bán kính R ngoại tiếp tứ diện một lần nữa tại A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 .

$$\text{Giả sử } \sum_{i=1}^4 \alpha_i \overline{MA_i} = \vec{0} \text{ với } \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1.$$

$$\text{Chứng minh rằng: } \sum_{i=1}^4 \alpha_i (1 - \alpha_i) \frac{A_i M_i}{A_i A'_i} \leq \frac{1}{2} \quad (*)$$

Lời giải bài toán mới:

Những nhận xét sau đây được chứng minh dễ dàng (bạn đọc tự kiểm tra).

$$0 < \alpha_i < 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

$$(1 - \alpha_i) A_i M_i = A_i M \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

$$R^2 - OM^2 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i M^2 \quad (3)$$

$$A_i M \cdot A'_i M = R^2 - OM^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \frac{1}{x+y} \quad \forall x, y > 0, \quad (5)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Trở lại việc giải bài toán mới.

Ta có:

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i (1 - \alpha_i) \frac{A_i M_i}{A_i A'_i} = \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i A_i M}{A_i A'_i} \quad (\text{theo (2)})$$

$$= \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i A_i M^2}{A_i M (A_i M + A'_i M)} \\ = \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i A_i M^2}{A_i M^2 + R^2 - OM^2} \quad (\text{theo (4)})$$

$$\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i M^2 \left(\frac{1}{A_i M^2} + \frac{1}{R^2 - OM^2} \right) \quad (\text{theo (1), (5)})$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \alpha_i + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i M^2}{R^2 - OM^2} \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{R^2 - OM^2}{R^2 - OM^2} \quad (\text{theo (3)}) \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A_i M^2 = R^2 - OM^2$

($i = 1, 2, 3, 4$) $\Leftrightarrow M$ trùng O .

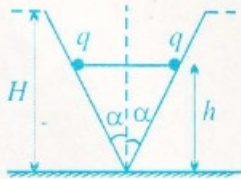
Vậy: Nếu O nằm trong tứ diện $A_1 A_2 A_3 A_4$ thì (*) đúng và đẳng thức xảy ra khi M trùng O .

Nếu O không nằm trong tứ diện $A_1 A_2 A_3 A_4$ thì (*) đúng và đẳng thức không xảy ra. $\square$

◀ **Nhận xét.** Khi $\alpha_i = \frac{1}{4}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), ta nhận được các bài toán T12/347 và T12/337.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/347.** Một máng hình nón với góc ở đỉnh là 2α chứa hai vật nhỏ tích điện như nhau cùng khối lượng m và nối với nhau bằng một sợi dây ở cùng độ cao h (hình vẽ). Ban đầu hai vật nằm trong mặt phẳng thẳng đứng chứa đỉnh hình nón. Sau khi đốt dây, hai vật bắt đầu chuyển động lên trên dọc theo bề mặt của máng trong mặt phẳng thẳng đứng



và khi tới độ cao H phía trên đỉnh hình nón thì hai vật bay ra ngoài với vận tốc v . Hệ số ma sát của vật với bề mặt máng là $\mu = a \tan \alpha$ ($a < 1$). Tính điện tích q của mỗi vật.

Hướng dẫn giải. Cần lưu ý rằng điện tích q có thể là điện tích âm hoặc điện tích dương. Năng lượng của hệ tại thời điểm ban đầu là

$$E_1 = k \cdot \frac{q^2}{2h \tan \alpha} \quad (\text{với } k = 9 \cdot 10^9 \text{ đvSI}).$$

Năng lượng của hệ tại thời điểm hai vật bắt đầu rời khỏi máng là:

$$E_2 = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} + k \cdot \frac{q^2}{2H \tan \alpha} + 2mg(H - h).$$

Gọi F_{ms} và F_d tương ứng là lực ma sát và lực tĩnh điện tác dụng lên mỗi vật ta có:

$F_{ms} = \mu N = \mu (F_d \cos \alpha + mg \sin \alpha)$. Công nguyên tố của lực ma sát thực hiện lên mỗi vật trong dịch chuyển Δs dọc theo máng là:

$$\Delta A = -F_{ms} \cdot \Delta s \\ = -[\mu \cot \alpha (F_d \cdot \Delta x) + \mu \tan \alpha (mg \Delta h)],$$

với Δx và Δh tương ứng là độ dời theo phương ngang và theo phương thẳng đứng. Tổng công ma sát đã thực hiện là

$$A_{ms} = 2 \sum \Delta A \\ = -[2\mu \cot \alpha (\sum F_d \cdot \Delta x) + 2\mu \tan \alpha (\sum mg \Delta h)].$$

Mặt khác ta lại có

$$2 \sum mg \Delta h = 2mg(H - h) \quad \text{và} \quad 2 \sum F_d \cdot \Delta x = -\Delta w_i,$$

với Δw_i là độ biến thiên thế năng tĩnh điện của vật.

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có $E_2 - E_1 = A$. Từ đó tìm được

$$q = \pm \sqrt{\frac{2mHh \tan \alpha [v^2 + 2g(H - h)(1 + a \tan^2 \alpha)]}{k(H - h)(1 - a)}}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải và đáp số đúng:

Hưng Yên: Trần Anh Vũ, 10 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Trần Văn Thắng, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh; **Khánh Hòa:** Lê Thế Huy, 11 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **TP. Hồ Chí Minh:** Ngô Minh Nhật, 12A1, THPT Gia Định.

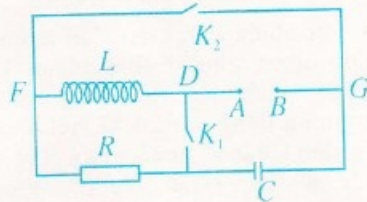
MAI ANH

★ **Bài L2/347.** Một mạch điện như sơ đồ dưới, trong đó $u_{AB} = 200\sqrt{2} \sin 100\pi t$ (V);

$$R = 75 (\Omega); C = \frac{10^{-4}}{\pi} (F); L = \frac{2}{\pi} (H).$$

Viết biểu thức cường độ dòng điện tức thời qua mạch chính trong mỗi trường hợp sau :

- 1) K_1 mở, K_2 đóng ; 2) K_1 đóng, K_2 mở ;
3) K_1 và K_2 cùng mở ; 4) K_1 và K_2 cùng đóng.



Lời giải. Gọi φ là độ lệch pha giữa dòng điện và hiệu điện thế. Theo bài ra ta có

$$Z_L = L\omega = 200 (\Omega), Z_C = \frac{1}{C\omega} = 100 (\Omega).$$

- 1) K_1 mở, K_2 đóng. Mạch điện chỉ có một cuộn cảm L .

$$\text{Cường độ hiệu dụng } I_L = \frac{U_{AB}}{Z_L} = \frac{200}{200} = 1 (A)$$

Dòng điện i_L qua cuộn cảm trễ pha so với u_{AB} một góc $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Vậy } i_L = \sqrt{2} \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) (A).$$

- 2) K_1 đóng, K_2 mở. Mạch điện chỉ có một tụ điện C .

$$\text{Cường độ hiệu dụng } I_C = \frac{U_{AB}}{Z_C} = \frac{200}{100} = 2 (A).$$

Dòng điện i_C qua tụ điện sớm pha so với u_{AB} một góc $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Vậy } i_C = 2\sqrt{2} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) (A)$$

- 3) K_1 và K_2 cùng mở. Mạch điện gồm L, R, C mắc nối tiếp. Tổng trở

$$Z_{AB} = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{75^2 + (200 - 100)^2} = 125 (\Omega).$$

$$I = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{200}{125} = 1,6 (A);$$

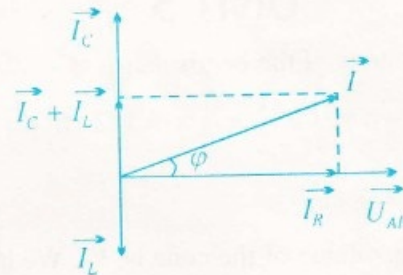
$$\tan \varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{200 - 100}{75} = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi \approx 0,9273 (\text{rad})$$

$$\text{Vậy } i \approx 1,6\sqrt{2} \sin(100\pi t - 0,9273) (A).$$

- 4) K_1 và K_2 cùng đóng. Mạch điện gồm L, R, C mắc song song với nhau.

$$I_L = \frac{U_{AB}}{Z_L} = \frac{200}{200} = 1 (A); I_C = \frac{U_{AB}}{Z_C} = \frac{200}{100} = 2 (A);$$

$$I_R = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{200}{75} = \frac{8}{3} (A).$$



Theo giản đồ vectơ (hình vẽ) thì

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \approx 2,848 (A);$$

$$\tan \varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = 0,375 \Rightarrow \varphi \approx 0,359 (\text{rad});$$

$$\text{Vậy } i \approx 2,848\sqrt{2} \sin(100\pi t + 0,359) (A). \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghệ An: Võ Văn Hoà, 10A1 K6, THPT Nghi Lộc IV, Vũ Ngọc Sỹ, K5A1, THPT Diễn Châu IV; **Nam Định:** Phạm Cao Kỳ, 12C5, THPT A Hải Hậu; **Thái Bình:** Nguyễn Văn Thành, 11A1, THPT Nam Tiền Hải; **Hà Tĩnh:** Trần Văn Thơ, 12A2, THPT Trần Phú, Đức Thọ; **Phú Thọ:** Thế Anh, 11A1, THPT Phong Châu, Phạm Đăng Hải, 12C, THPT Hùng Vương; **Khánh Hoà:** Lê Thế Huy, 11 Lí, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Kim Khuyên, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Hưng Yên:** Nguyễn Đức Anh, 11A1, THPT Yên Mỹ, Nguyễn Thành Lâm, 12A1, THPT Kim Động; **Vĩnh Phúc:** Vũ Ngọc Quang, 12A3, Nguyễn Minh Khuông, 11A3, Văn Đăng Sơn, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hoá:** Tống Duy Anh, 11B4, THPT Bim Sơn, Trần Hoàng Đại, 11B3, THPT Triệu Sơn I, Nguyễn Hữu Chiến, 11A1, THPT Lương Đắc Bằng, Trịnh Văn Vương, 11T, THPT Lam Sơn, Nguyễn Thị Hằng, Liên Sơn, Hải Thịnh, Tĩnh Gia; **Bắc Ninh:** Trần Việt Long, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** Phạm Hồng Sơn, 11A1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội.

NGUYỄN VĂN THUẬN

English through math problems and solutions

Solutions of previous issue UNIT 3

a) The volume of the hemisphere

$$V_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 3.142 \times 6^3 = 452.448 \text{ cm}^3$$

b) Let the volume of the cone be V_2 . We have the height of the cone

$$h = \frac{3V_2}{\pi r^2} = \frac{3 \times 408}{3.142 \times 6^2} = 10.821 \text{ cm.}$$

c) The total mass of the toy

$$452.448 \times 1.1 + 408 \times 0.8 = 824.0928 \text{ g.}$$

d) The volume of the solid cylinder

$$V = \pi R^2 h = 3.142 \times 8^2 \times 24 = 4826.112 \text{ cm}^3.$$

The number of complete hemispheres that can be made from the cylinder

$$\left[\frac{4826.112}{452.448} \right] = 10.$$

Therefore the number of complete hemispheres that can be made from the cylinder is 10.

Nhận xét

1) Vẫn còn nhiều bạn viết dấu nhân bằng dấu chấm giống như số thập phân(!) ví dụ 3.142.6 gây khó hiểu và không đúng quy tắc trong toán tiếng Anh. Khi viết dấu nhân bạn nên dùng dấu $\times$ hoặc dùng dấu ngoặc đơn. Các số thập phân dấu (.) ngăn giữa phần nguyên và phần thập phân nhiều bạn còn dùng sai thành dấu phẩy(.).

2) Các bạn có lời giải tốt được nhận quà tặng:

Sơn La: Lê Vũ Hải, 10 Lí, THPT chuyên Sơn La; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Hậu, 11A2 THPT Gia Bình 1; **Hà Nội:** Nguyễn Ngọc Lâm, 10B, chuyên Lí, ĐHKHTN- ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** Nguyễn Tuấn Toàn, 12 C5, THPT Hải Hậu A, **Quảng Nam:** Trần Văn Ngọc Tân, 11/1, THPT Hoàng Diệu, Điện Bàn.

Các bạn sau cũng có lời giải tương đối tốt:

Yên Bái: Nguyễn Thu Thủy, 9 I, THCS Lê Hồng Phong; **Phú Thọ:** Nguyễn Hữu Thành, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Hòa Bình:** Nguyễn Thị Thanh Hà, 12A7, THPT Lương Sơn; **Hải Phòng:** Phạm Văn Dương, 12C4, THPT Lý Thường Kiệt, Thủy Nguyên; **Nghệ An:** Đậu Lệ Thủy, 11A, THPT Quỳnh Lưu 4; **Hà Tĩnh:** Võ Hữu Đức, 11A2, THPT Trần Phú, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** Vũ Nguyễn Hoàng Yến, 9A, THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa; **Bình Định:** Nguyễn Tấn Công, 10A4, THPT An Nhơn; **Bến Tre:** Phạm Đình Bảo, 9⁴, THCS TX Bến Tre.

VŨ KIM THỦY

CÙNG BẠN ĐỌC

Các bạn được giải các cuộc thi vui, Giải trí, Câu lạc bộ của năm học trước, giải địa chỉ mới về để tòa soạn gửi quà tặng.

Các bạn gửi bài về nhớ đề rõ ngoài phong bì bài gửi cho chuyên mục nào, trong bài nhớ ghi rõ địa chỉ liên hệ. Không viết nhiều bài trên một tờ giấy.

Cảm ơn các bạn.

THTT

Toán học và Tuổi trẻ với IMO

Bạn có biết **DANH SÁCH CÁC HỘI TOÁN HỌC ?** THEO NĂM THÀNH LẬP

*Nhân dịp Việt Nam sắp đăng cai thi Olympic Toán Quốc tế, THTT mở chuyên mục **TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ VỚI IMO**. Lần này xin giới thiệu danh sách các hội Toán học trên thế giới xếp theo năm thành lập.*

Trước năm 1800

- 387BC Plato's Academy
- 1603 Accademia dei Lincei
- 1652 German Academy of Scientists Leopoldina
- 1660 Royal Society (London)
- 1666 Academy of Sciences (Paris)
- 1690 Hamburg Mathematical Society
- 1700 Berlin Academy of Science
- 1717 Spitalfields Mathematical Society (London)
- 1724 Russian/St Petersburg Academy of Sciences
- 1739 Royal Swedish Academy of Sciences
- 1742 Danish Academy of Sciences
- 1746 Scientific Research Society of Zurich
- 1751 Göttingen Academy of Sciences
- 1757 Turin Mathematical Society
- 1778 Dutch Mathematical Society
- 1780 American Academy of Arts & Sciences
- 1782 National Academy of Sciences of Italy
- 1783 Royal Society of Edinburgh
- 1785 Royal Irish Academy
- 1799 Belgian Academy of Sciences

Từ năm 1800 đến trước năm 1900

- 1815 Swiss Academy of Natural Science
- 1817 New York Academy of Sciences

- 1820 Royal Astronomical Society (London)
- 1825 Hungarian Academy of Sciences
- 1834 Royal Statistical Society
- 1839 American Statistical Society
- 1846 Austrian Academy of Sciences
- 1847 Spanish Academy of Sciences
- 1857 Norwegian Academy of Science & Letters
- 1862 Union of Czech Mathematicians & Physicists
- 1863 National Academy of Sciences (United States)
- 1864 Moscow Mathematical Society
- 1865 London Mathematical Society
- 1868 Finnish Mathematical Society
- 1869 Bulgarian Academy of Sciences
- 1872 French Mathematical Society
- 1873 Danish Mathematical Society
- 1877 Tokyo Mathematical Society
- 1879 Kharkov Mathematical Society
- 1882 Royal Society of Canada
- 1883 Edinburgh Mathematical Society
- 1884 Mathematical Circle of Palermo
- 1886 Serbian Academy of Sciences
- 1887 Mathematical Association of Tokyo
- 1888 New York Mathematical Society
- 1890 St Petersburg Mathematical Society
- 1890 German Mathematical Society
- 1890 Kazan Physico-mathematical Society
- 1890 Czech Academy of Sciences
- 1891 János Bolyai Mathematical Society

- 1892 Göttingen Mathematical Society
1893 Jagiellonian University Mathematics Society
1894 American Mathematical Society
1895 Romanian Mathematical Society
1898 Union of Bulgarian Mathematicians

Từ năm 1900 đến năm 1950

- 1903 Austrian Mathematical Society
1903 Warsaw Scientific Society
1907 Indian Mathematical Society
1908 Finnish Academy of Sciences
1910 Swiss Mathematical Society
1911 Kaiser Wilhelm Society (Munich)
1911 German Statistical Society
1916 Mathematical Association of America
1917 Polish Mathematical Society
1918 Hellenic Mathematical Society
1918 Norwegian Mathematical Society
1918 Ukrainian Academy of Sciences
1920 International Mathematical Union
1920 Finnish Statistical Society
1921 Petrograd Physico-Mathematical Society
1921 Belgium Mathematical Society
1922 Italian Mathematical Union
1922 German Society for Applied Mathematics & Mechanics
1923 Trinity College Dublin Mathematical Society
1926 Estonian Mathematical Society
1934 Indian Academy of Sciences
1935 Chinese Mathematical Society
1936 Argentina Mathematical Union
1939 Latvian Society of Physicists & Mathematicians
1940 Portuguese Mathematical Society
1942 Slovak Academy of Sciences
1943 Mexican Mathematical Society
1945 Canadian Mathematical Society
1946 Korean Mathematical Society
1946 Latvian Academy of Sciences
1947 Icelandic Mathematical Society
1948 Japanese Association of Mathematical Sciences
1948 Turkish Mathematical Society
1948 Society of Mathematicians & Physicists of Serbia
1948 Max Planck Society for the Advancement of Science

- 1949 Society of Mathematicians, Physicists & Astronomers of Slovenia
1950 Swedish Mathematical Society

Sau năm 1950

- 1952 Polish Academy of Sciences
1955 Columbian Mathematical Society
1954 Australian Academy of Sciences
1956 Australian Mathematical Society
1957 South African Mathematical Society
1958 Allahabad Mathematical Society
1958 Mathematical Association of Quebec
1962 Australian Statistical Society
1965 **Vietnamese Mathematical Society**
1969 Brazilian Mathematical Society
1969 Union of Slovak Mathematicians & Physicists
1970 Luxembourg Mathematical Society
1970 Malaysian Mathematical Society
1971 Korean Statistical Society
1972 Mathematical Society of the Philippines
1972 Canadian Statistical Society
1974 New Zealand Mathematical Society
1976 African Mathematical Union
1976 Irish Mathematical Society
1979 Hong Kong Mathematical Society
1982 Mathematical Society of Chile
1983 French Applied & Industrial Mathematical Society
1985 Ramanujan Mathematical Society
1986 Catalan Mathematical Society
1988 Swiss Statistical Society
1989 Lithuanian Mathematical Society
1990 European Mathematical Society
1991 Bulgarian Statistical Society
1992 Estonian Statistical Society
1993 Latvian Mathematical Society

Chú thích:

Mathematical Society	Hội Toán học
Academy	Viện hàn lâm
Academy of Science	Viện Hàn lâm khoa học
Royal Society	Hội Hoàng gia
Astronomical Society	Hội Thiên văn
Statistical Society	Hội Thống kê
Association	Hiệp hội

TRƯƠNG CÔNG THÀNH
(Hà Tây) sưu tầm.

PROBLEMS ... (Tiếp trang 17)

T5/351. Find the least value of the expression

$$P = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a+b+c)^3}{abc},$$

where a, b, c are positive real numbers.

T6/351. Let be given a not obtuse triangle ABC with its three altitudes AA_1, BB_1, CC_1 and its orthocenter H . Prove that

$$HA^2 + HA_1^2 + HB^2 + HB_1^2 + HC^2 + HC_1^2 \geq \frac{5}{2} (HA \cdot HA_1 + HB \cdot HB_1 + HC \cdot HC_1).$$

T7/351. Let be given five concyclic points A, B, C, D, E and let M, N, P, Q be the orthogonal projections of E respectively on the lines AB, BC, CD, DA . Prove that the orthogonal projections of E on the lines MN, NP, PQ, QM are collinear.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/351. Prove that $(2n+1)^{n+1} \leq (2n+1)!! \pi^n$ for every natural number n , where $(2n+1)!!$ denotes the product of the first $n+1$ positive odd integers.

T9/351. Solve the equation $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$.

T10/351. Let $f(x)$ be a continuous function defined on $[0; 1]$ satisfying the conditions:

$$f(0) = 0; f(1) = 1; 6f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = 5f(x) + f(y)$$

for all $x \geq y; x, y \in [0; 1]$.

Calculate $f\left(\frac{8}{23}\right)$.

T11/351. Calculate the measures of the angles of a triangle ABC satisfying the condition:

$\frac{h_a}{m_b} + \frac{h_b}{m_a} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ where m_a, m_b are the measures of its two medians and h_a, h_b are the measures of its two altitudes issued respectively from the vertices A, B .

T12/351. Let be given an equifaced tetrahedron $ABCD$ ($AB = CD, AC = BD, BC = AD$) and let V, R, r be respectively its volume, its circumradius, its inradius. Prove that

$$\frac{243V^2}{512R^6} \leq \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{9}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

where A, B, C are the angles of triangle ABC .

When do equalities occur?

TÌM NHIỀU CÁCH CHỨNG MINH ... (Tiếp trang 14)

Bài 3. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $p \operatorname{tg} \alpha = \frac{(p-b)(p-c)}{r};$

b) $p(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = 4R \cos^2 \gamma;$

c) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 1 + 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$
 $= 1 + \frac{r}{R};$

d) $2p(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) =$
 $= 6R + 2R(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma).$

Từ đó suy ra hệ thức (4).

Bài 4. Gọi O_1, O_2, O_3 theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA . Hãy dựa vào bài

tập 3b và $S_{AO_2O_3} = S_{CO_1O_3} + S_{BO_2O_3}$ để chứng minh $S_{O_1O_2O_3} = 2Rp$ (V). Từ đó suy ra hệ thức (3).

Bài 5. a) Chứng minh rằng hệ thức (3) tương đương với mỗi hệ thức (5), (6) sau:

$$\frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c} = 4p \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \quad (5)$$

$$a^2 \operatorname{tg} \alpha + b^2 \operatorname{tg} \beta + c^2 \operatorname{tg} \gamma = 4p(R-r) \quad (6)$$

b) Hãy chứng minh hệ thức (5) bằng cách quy đồng mẫu số và dựa vào khai triển công thức Heron theo a, b, c thành

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

Hướng dẫn: a) Đặt $\frac{a^2}{p-a} + a = \frac{pa}{p-a}.$

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 351 (9-2006)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. VŨ KIM THỦY

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,
TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,
PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,
TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH,
PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG,
ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

1 Thư của Thứ trưởng Trần Văn Nhung
gửi độc giả tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

2 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower
Secondary Schools

Mạc Đăng Nghị – Xây dựng các bất đẳng
thức từ các hằng đẳng thức.

4 Vũ Kim Thủy – Kết quả của học sinh
Việt Nam thi Olympic Toán Singapore
SMO 2006.

6 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên
ĐHSP Hà Nội, năm học 2006-2007.

7 Lời giải Đề thi tuyển sinh lớp 10 trường
Phổ thông Năng khiếu, Đại học Quốc gia
TP. Hồ Chí Minh năm học 2006-2007.

8 Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Minh Tuấn –
Trại hè Hùng Vương lần thứ hai – 2006

9 Phương pháp giải toán - Math Problem
Solving

Nguyễn Đăng Phát – Tiếp cận và khai
thác một bài toán cực trị hình học từ
những phương cách khác nhau.

12 Nhiều cách giải cho một bài toán –
Many Solutions to a Problem

Nguyễn Việt Hải – Tìm nhiều cách chứng
minh một hệ thức nhờ biến đổi tương
đương.

15 Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

Nguyễn Cảnh Toàn – Tiếp tục câu
chuyện Học toán ở ngoài Toán.

16 Đề ra kì này – Problems in This Issue

T1/351, ..., T12/351, L1/351, L2/351.

18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous
Problems

Giải các bài của số 347.

28 English through Math Problems and
Solutions

Solutions of Previous Issue – Unit 3

29 Toán học và Tuổi trẻ với IMO

Trương Công Thành – Bạn có biết danh
sách các Hội Toán học theo năm thành lập?

Bìa 3: Câu lạc bộ - Math Club

Bìa 4: Toán học muôn màu –
Multifarious Mathematics

Biên tập : HỒ QUANG VINH. Mĩ thuật : MINH THO. Trĩ sự, Chế bản : VŨ ANH THỦY, NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330



Trò chơi

Ngày Khai giảng

Nhân ngày khai giảng, cô giáo chủ nhiệm vốn là cô giáo Toán đưa cho 5 bạn tổ trưởng năm miếng bìa có ghi các số như sau:

2	11	22	31
3	14	23	
6	15	26	
7	18	27	
10	19	30	

TỜ 2

4	13	22	31
5	14	23	
6	15	28	
7	20	29	
12	21	30	

TỜ 3

8	13	26	31
9	14	27	
10	15	28	
11	24	29	
12	25	30	

TỜ 4

1	11	21	31
3	13	23	
5	15	25	
7	17	27	
9	19	29	

TỜ 1

16	21	26	31
17	22	27	
18	23	28	
19	24	29	
20	25	30	

TỜ 5

Mỗi bạn học sinh đều xem xem ngày sinh của mình có mặt tại những tấm bìa nào thì thông báo cho tổ trưởng. Tổ trưởng sẽ suy ra ngày sinh của bạn trong tổ mình (Tương tự làm với các tháng sinh). Tổ nào xong trước, nộp danh sách ngày sinh các bạn cho cô chủ nhiệm sớm là thắng cuộc (Cho rằng tất cả lớp sinh cùng một năm và số bạn trong mỗi tổ đều bằng nhau). Bạn có thể giải thích bản chất trò chơi này là gì không nhỉ?

BÍNH NAM HÀ

Ghép được dòng chữ gì ?

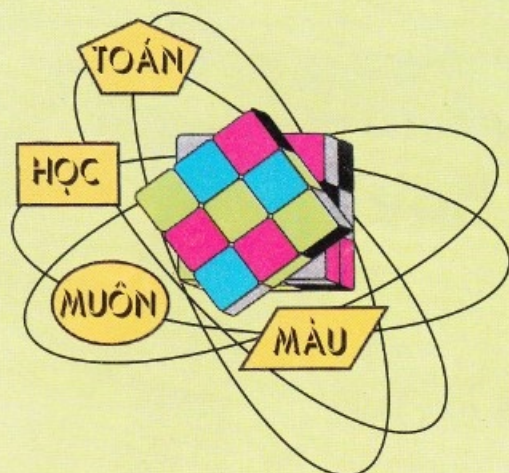
Chào năm học mới

là khẩu hiệu ghép được từ các chữ cái đã cho. Các bạn thường đoán chắc khẩu hiệu sẽ bắt đầu bằng từ *chào* hoặc từ *chúc* và trong đó có từ *mới*. Còn lại chữ *năm học* thì dễ dàng đoán ra vì sắp đến tháng 9.

Ba bạn sau có hình vẽ đẹp được tặng quà: **Quảng Bình:** Trần Đức Hòa, lớp 6, THCS Quách Xuân Kỳ, Hoàn Lão, Bố Trạch; **Quảng Ninh:** Nguyễn Thị Minh Hằng, 10A1, THCS Hải Vân, Vân Đồn; **Thanh Hoá:** Lê Thị Mai Phương, số 01 đường 30.4, Ttr Hà Trung.

Các bạn **Trần Đức Trung**, 12B, THPT số 1 Bố Trạch, Quảng Bình; **Trần Hoài Phương**, Đội 1, thôn Long Thắng, Ttr. La Hai, Đồng Xuân, Phú Yên; **Lê Minh An**, 11A2, THPT Thái Nguyên; **Mai Hiến Cường**, 11A5THPT C Bình Lục, Hà Nam cũng có đáp án đúng, đẹp.

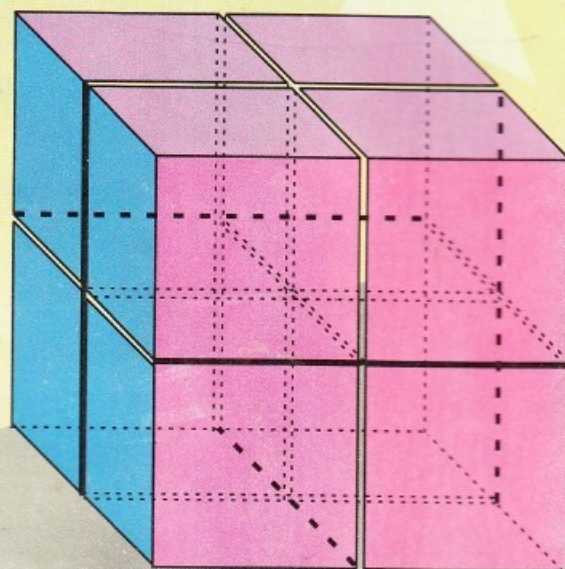
VŨ NAM TRỰC



KHỐI HỘP BIẾN ĐỔI MÀU

Bạn hãy lấy 8 khối lập phương (KLP) nhỏ xếp thành hai tầng, mỗi tầng gồm 4 KLP để tạo thành một KLP lớn, rồi lấy băng dính dán hai mặt kề nhau của một số cặp KLP nhỏ, sao cho hai KLP này có thể quay xung quanh cạnh chung của chúng (như một bản lề). Các cạnh chung đã dán được vẽ bởi đường nét đậm (xem hình vẽ). Giả sử ba mặt của KLP lớn đã được tô màu Đỏ, Lam, Tím, mỗi mặt một màu như trên hình.

Bạn có thể mở ra, gập vào các KLP nhỏ để biến KLP lớn ban đầu thành khối hộp chữ nhật một tầng, rồi thành KLP lớn mới mà các mặt bên ngoài chưa tô màu.

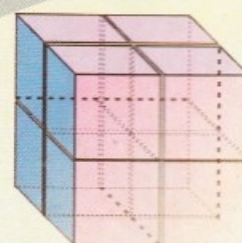
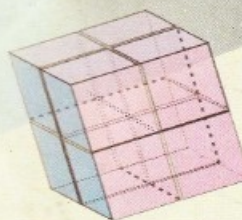


Dành cho bạn đọc

1 Hãy chỉ ra cách tô màu (với số màu ít nhất) tất cả các mặt bên ngoài còn lại của KLP lớn trên hình vẽ sao cho mỗi mặt của KLP lớn có cùng một màu và hai mặt chung cạnh thì có màu khác nhau.

2 Hãy chỉ ra cách tô màu (với số màu ít nhất) tất cả các mặt của 8 KLP nhỏ ở bên trong KLP lớn sao cho sau khi biến đổi KLP lớn thành KLP mới thì mỗi mặt ngoài của KLP mới có cùng một màu, khác với các màu đã có của KLP lớn cũ và hai mặt chung cạnh thì có màu khác nhau.

PHI PHI



ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT53M6

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2006

Giá : 5000 đồng

Năm nghìn đồng