



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

5 2006
Số 347

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272

Email: toanhocft@yahoo.com Web: <http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc tuổi trẻ>

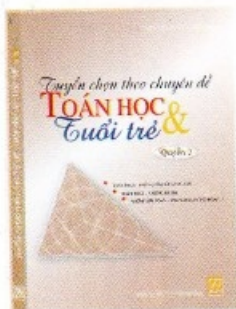
Kì thi
Pre - SMO
2006

KẾT QUẢ THI
HỌC SINH
GIỎI
QUỐC GIA 2005-2006

NĂM
lời giải
hay
cho
MỘT
bài toán
đẹp

ĐỂ THI VÀO
lớp 10 Lương Văn Chánh,
PHÚ YÊN





SÁCH MỚI 2006 SẮP PHÁT HÀNH !

QUYỂN 2

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí chuẩn bị phát hành **Quyển 2** cuốn **Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ** thuộc **Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ**. Từ các bài đã in trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ những năm gần đây, sách tập hợp lại các bài viết theo ba chuyên đề nhằm phục vụ độc giả làm tài liệu tham khảo bổ ích.

Chuyên đề thứ nhất : **Toán THCS - Những tìm tòi sáng tạo** tuyển những bài tìm tòi, khám phá và nâng cao các kiến thức được trình bày trong SGK toán THCS. Nó giúp độc giả đi xa hơn, hiểu sâu hơn những gì cô đọng trong SGK. Cả thầy và trò THCS đều tìm thấy những điều lí thú, hấp dẫn cho mình khi đọc chương này.

Chuyên đề thứ hai : **Toán THCS - Những đề thi**, đúng như tên gọi, nó sẽ bao gồm các đề thi vào THPT và các đề thi học sinh giỏi THCS. Đề thi bao giờ cũng là mối quan tâm của người dạy và người học. Các đề thi có khối lượng kiến thức vừa tinh chất vừa phong phú, cung cấp cho các thầy, cô nguồn tư liệu giảng, luyện đa chiều và các bạn học sinh được thêm cơ hội thử sức mình trước kì thi. Chương này xếp thành hai phần, phần đầu là các đề thi và phần sau là hướng dẫn giải.

Chuyên đề thứ ba : **Những bài toán - Lời giải sao cho đúng?** là những bài toán nhỏ, những câu chuyện bàn về đúng, sai và muốn vắn cái bẫy cùng những vấp vấp đi cùng người giải toán. Tưởng đúng mà không phải là đúng. Những bài đó giúp ta có cách nhìn tỉnh táo và khúc chiết ở mỗi bước lập luận, trong từng trường hợp của mỗi bài toán. Điều này cũng giúp các bạn có được phẩm chất đáng quý là cẩn trọng và chuẩn xác trước các vấn đề đặt ra.

Sách dày 250 trang, khổ $19 \times 26,5$ cm, giá bán lẻ là 30000 đồng, sẽ có mặt trên thị trường vào cuối tháng 5 này. Đề nghị các đơn vị mua nhiều gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về theo địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ : 187B Giảng Võ, Hà Nội

Địa chỉ liên hệ để biết các thông tin chi tiết:

ĐT/FAX: 04.5144272; Email: toanhocvt@yahoo.com

Trân trọng cảm ơn.

GIỚI THIỆU SÁCH



CÁC PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẶNG VÀ ỨNG DỤNG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

Tác giả : Nguyễn Đăng Phát.

Nhà xuất bản Giáo dục ấn hành.

116 trang. Khổ 17×24 cm. Giá 11.300 đồng.

Cuốn sách này dùng cho các lớp chuyên toán THPT, đồng thời cũng là tài liệu tham khảo có tính chất chuyên đề (bên cạnh SGK) bồi dưỡng học sinh giỏi ở các trường chuyên. Có thể xem nó như một tài liệu giáo khoa tự chọn cho lớp 11 ở các trường THPT ban KHTN. Trọng sách trình bày về các phép dời hình phẳng và các phép đồng dạng phẳng, sau đó có bài tập vận dụng và hướng dẫn giải. Các bạn có thể tìm mua tại các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục.

Trân trọng giới thiệu với bạn đọc.

NHẮN TIN

Các bạn được giải trong cuộc thi giải Toán - Vật lí trên THPT năm học 2004-2005 chưa nhận được Bằng khen và tặng phẩm hãy mau gửi địa chỉ gia đình tới Tòa soạn.

THPT



ỨNG DỤNG CỦA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ĐƠN GIẢN

VŨ TIẾN VIỆT

(GV Toán - Tin học, Học viện An ninh Hà Nội)

Chứng minh các bất đẳng thức (BĐT) luôn là những bài toán hấp dẫn. Với bài viết này chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn một số bất đẳng thức (thậm chí có bài toán thi vô địch Quốc tế) được chứng minh nhờ một bất đẳng thức đơn giản của kiến thức bậc Trung học cơ sở.

Bài toán xuất phát. Cho a, b là hai số bất kì và x, y là hai số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (*)$$

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} a^2y(x+y) + b^2x(x+y) &\geq (a+b)^2xy \\ \Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 &\geq 2abxy \\ \Leftrightarrow (ay - bx)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

BĐT sau cùng hiển nhiên đúng. Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Sử dụng BĐT (*) hai lần ta nhận được

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (**)$$

với ba số bất kì a, b, c và ba số dương x, y, z .

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Bài toán 1. Cho hai số a, b bất kì. Chứng minh

$$\text{rằng } a^4 + b^4 \geq \frac{(a+b)^4}{8}.$$

Chứng minh. Sử dụng BĐT (*) hai lần ta có

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= \frac{a^4}{1} + \frac{b^4}{1} \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{(a+b)^2}{2} \right)^2 = \frac{(a+b)^4}{8}. \end{aligned}$$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài toán 2. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

(Câu V trong đề thi khối A vào Đại học năm 2005).

Chứng minh. Sử dụng BĐT (*) hai lần ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+y+z} &= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2}{2x+y+z} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{x+y} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{x+z} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}{x+y} + \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}{x+z} \\ &\leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{x} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{y} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{x} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{z} = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2y+z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right), \\ \frac{1}{x+y+2z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right). \end{aligned}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên và chú ý tới giả thiết dẫn đến

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1.$$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

Bài toán 3. Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Bất đẳng thức Nasobit)

Chứng minh. Sử dụng BĐT (**) ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}. \end{aligned}$$

Vì thế ta chỉ cần chứng minh BĐT

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}.$$

Nhưng BĐT này tương đương với

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Từ đó suy ra BĐT cần chứng minh. Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài toán 4. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

(Vô địch Quốc tế năm 1995 tổ chức tại Canada).

Chứng minh. Sử dụng BĐT (**) với lưu ý rằng $a^2b^2c^2 = 1$ ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \\ &= \frac{b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{c^2a^2}{b(c+a)} + \frac{a^2b^2}{c(a+b)} \\ &\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{1}{2}(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Vì thế ta cần chứng minh $ab + bc + ca \geq 3$, nhưng BĐT này được suy ra từ BĐT Cauchy và lưu ý rằng $abc = 1$.

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 5. Cho các số dương a, b, c, p, q . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} \geq \frac{3}{p+q}.$$

(Với $p = q = 1$ ta trở về bài toán 3).

Chứng minh. Sử dụng BĐT (**) ta có

$$\begin{aligned} &\frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} \\ &= \frac{a^2}{pba+qca} + \frac{b^2}{pcb+qab} + \frac{c^2}{pac+qbc} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{(p+q)(ab+bc+ca)}. \end{aligned}$$

Vì thế ta chỉ cần chứng minh $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq 3$

và BĐT này đã được chứng minh trong lời giải bài toán 3.

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài toán 6. Cho ba số dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Chứng minh. Sử dụng BĐT (**) ta có

$$\begin{aligned} &\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} = \frac{(\sqrt{2})^2}{x+y} + \frac{(\sqrt{2})^2}{y+z} + \frac{(\sqrt{2})^2}{z+x} \\ &\geq \frac{(3\sqrt{2})^2}{2(x+y+z)} = \frac{9}{x+y+z}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Để kết thúc, xin mời các bạn tự giải các bài toán sau đây.

1. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c.$$

2. Cho các số dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$a) \frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} \geq \frac{1}{2};$$

$$b) \frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

3. Cho các số dương a, b, c, d, e . Chứng minh

$$\text{rằng } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

4. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn

$$3(ab + bc + ca) = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2-bc+1} + \frac{b}{b^2-ca+1} + \frac{c}{c^2-ab+1} \geq \frac{1}{a+b+c}.$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH, PHÚ YÊN

NĂM HỌC 2005 – 2006

NGÀY THỨ NHẤT. MÔN TOÁN HỆ SỐ 1

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1. (2,5 điểm)

1) Cho biểu thức

$$A = 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right).$$

- Với điều kiện nào của x thì A xác định.
- Rút gọn biểu thức A .
- Chứng minh rằng $A > 1$ với mọi $x > 0$ và $x \neq 1$.

Bài 2. (2,5 điểm)

Cho hàm số $y = -3x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x - 5$.

- Vẽ đồ thị (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .
- Xác định tọa độ giao điểm A và B của đồ thị (P) và đường thẳng (d) .
- Tìm tọa độ của điểm M trên cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

Bài 3. (2,5 điểm)

Giải toán bằng cách lập phương trình:

Hai người đi xe đạp khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A và B trên một đường thẳng. Người này đi tới điểm xuất phát của người kia rồi trở về điểm xuất phát của mình. Lần gặp nhau thứ nhất cách A 8 km và lần gặp nhau thứ hai cách B 5 km. Tính quãng đường AB , biết rằng vận tốc của hai người không đổi trong suốt thời gian đi và về.

Bài 4. (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC có góc C tù, nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Đường phân giác trong và ngoài của góc A cắt BC tại D và E . Tia AD cắt đường tròn (O) tại M .

- Chứng minh OM vuông góc với BC .
- Giả sử $AD = AE$. Hãy tính $AB^2 + AC^2$ theo bán kính R của đường tròn (O) .

NGÀY THỨ HAI. MÔN TOÁN HỆ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 5. (2,5 điểm)

1) Cho phương trình

$x^2 + 2(m+3)x - m - 1 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

- Xác định m để phương trình có hai nghiệm dương.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m .
- Không giải phương trình, hãy tính biểu thức $P = x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1}$ theo m .

Bài 6. (1,5 điểm)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - xy - 3x + 4y + 1 = 0.$$

Bài 7. (2 điểm)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} xy + 2x + y = 1 \\ yz + 3y + 2z = -2 \\ zx + z + 3x = 9. \end{cases}$$

Bài 8. (1,5 điểm)

- Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k , ta có

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right).$$

- Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2,$$

với mọi số nguyên dương n .

Bài 9. (2,5 điểm)

Cho một điểm A cố định ở ngoài đường tròn tâm O bán kính R . Đường tròn tâm I đi động qua A cắt (O) tại B và C .

- Đường thẳng AB cắt đường tròn (O) tại E . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (I) và tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) cắt nhau tại F . Chứng minh A, C, E, F nằm trên một đường tròn.

- Gọi M là giao điểm của đường thẳng BC và tiếp tuyến tại A của đường tròn (I) . Chứng minh rằng điểm M luôn ở trên một đường thẳng cố định.

KÌ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN

LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2005 - 2006

NGUYỄN KHẮC MINH
(Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm học 2005 - 2006 được tiến hành trong hai ngày 23 và 24-02-2006. Tham dự kì thi này có 252 học sinh dự thi ở Bảng A và 303 học sinh dự thi ở Bảng B. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh phải làm 3 bài toán trong thời gian 180 phút. Điểm tối đa của mỗi ngày thi là 20 điểm.

I. ĐỀ THI - BIỂU ĐIỂM

BẢNG A

Ngày thi thứ nhất (23-02-2006)

Bài 1 (6 điểm). Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 6} \cdot \log_3(6 - y) = x \\ \sqrt{y^2 - 2y + 6} \cdot \log_3(6 - z) = y \\ \sqrt{z^2 - 2z + 6} \cdot \log_3(6 - x) = z. \end{cases}$$

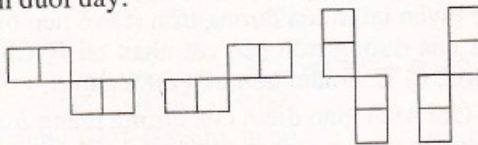
Bài 2 (7 điểm). Cho tứ giác lồi ABCD. Xét một điểm M di động trên đường thẳng AB sao cho M không trùng với A và với B. Gọi N là giao điểm thứ hai khác M của đường tròn (MAC) và đường tròn (MBD). Chứng minh rằng

1/ Điểm N di động trên một đường tròn cố định;

2/ Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

((XYZ) kí hiệu đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z).

Bài 3 (7 điểm). Cho m và n là các số nguyên lớn hơn 3. Cho bảng ô vuông kích thước $m \times n$ (bảng gồm m hàng và n cột). Cho phép đặt bi vào các ô vuông con của bảng theo cách sau: Mỗi lần, đặt 4 viên bi vào 4 ô vuông con (mỗi ô đặt 1 viên) mà 4 ô đó tạo thành một trong các hình dưới đây:



Hỏi bằng cách thực hiện một số hữu hạn lần phép đặt bi nói trên, ta có thể đặt bi vào tất cả các ô vuông con của bảng sao cho số bi trong mỗi ô vuông con đều bằng nhau hay không, nếu:

1/ $m = 2004$ và $n = 2006$?

2/ $m = 2005$ và $n = 2006$?

(Lưu ý: Ở mỗi lần đặt bi, 4 ô vuông con được chọn để đặt bi không nhất thiết phải là 4 ô chưa có bi).

Ngày thi thứ hai (24-02-2006)

Bài 4 (6 điểm). Cho hàm số

$$f(x) = -x + \sqrt{(x+a)(x+b)},$$

trong đó a và b là hai số thực dương khác nhau cho trước.

Chứng minh rằng với mỗi số thực s thuộc khoảng (0; 1) đều tồn tại duy nhất số thực dương α sao cho

$$f(\alpha) = \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Bài 5 (7 điểm). Hãy xác định tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thỏa mãn hệ thức sau

$$P(x^2) + x(3P(x) + P(-x)) = (P(x))^2 + 2x^2$$

với mọi số thực x.

Bài 6 (7 điểm). Xét tập hợp số S có 2006 phần tử. Ta gọi một tập con T của S là tập con "bướng bỉnh" nếu với hai số u, v tùy ý (có thể $u = v$) thuộc T luôn có $u + v$ không thuộc T. Chứng minh rằng

1/ Nếu S là tập hợp gồm 2006 số nguyên dương đầu tiên thì mỗi tập con "bướng bỉnh" của S đều có không quá 1003 phần tử.

2/ Nếu S là tập hợp gồm 2006 số nguyên dương tùy ý thì tồn tại một tập con "bướng bỉnh" của S có 669 phần tử.

BẢNG B

Ngày thi thứ nhất (23-02-2006)

Bài 1 (6 điểm). Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x. \end{cases}$$

Bài 2 (7 điểm). Cho hình thang cân $ABCD$ có CD là đáy lớn. Xét một điểm M di động trên đường thẳng CD sao cho M không trùng với C và với D . Gọi N là giao điểm thứ hai khác M của đường tròn (BCM) và đường tròn (DAM) .

Chứng minh rằng

1/ Điểm N di động trên một đường tròn cố định;

2/ Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

(XYZ) kí hiệu đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z .

Bài 3 (7 điểm). Một đơn vị kiểm lâm muốn lập lịch đi tuần tra rừng cho cả năm 2006 với các yêu cầu sau:

i) Số ngày đi tuần tra trong năm nhiều hơn một nửa tổng số ngày của năm;

ii) Không có hai ngày đi tuần tra nào cách nhau đúng một tuần lễ.

1/ Chứng minh rằng có thể lập được lịch đi tuần tra rừng thỏa mãn các yêu cầu nêu trên, biết rằng năm 2006 có 365 ngày;

2/ Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu lịch đi tuần tra rừng như vậy?

Ngày thi thứ hai (24-02-2006)

Bài 4 (6 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O và có $BC > AB > AC$. Đường thẳng OA cắt đường thẳng BC tại điểm A_1 ; đường thẳng OB cắt đường thẳng CA tại điểm B_2 . Gọi B_1, C_1, C_2 và A_2 tương ứng là tâm của các đường tròn (AA_1B) , (AA_1C) , (BB_2C) và (BB_2A) .

Chứng minh rằng

1/ Tam giác $A_1B_1C_1$ đồng dạng với tam giác $A_2B_2C_2$;

2/ Tam giác $A_1B_1C_1$ bằng tam giác $A_2B_2C_2$ khi và chỉ khi góc C của tam giác ABC bằng 60° .

(XYZ) kí hiệu đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z .

Bài 5 (7 điểm). Hãy tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x-y).f(y-z).f(z-x) + 8 = 0$$

với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{R}$.

Bài 6 (7 điểm). Hãy tìm số thực k lớn nhất sao cho với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$, ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3k \geq (k+1)(a+b+c).$$

II. MỘT SỐ NHẬN XÉT VÀ ĐÁNH GIÁ

• Về đề thi

1. Cũng như năm trước, nhìn chung đề thi năm nay đã đáp ứng được các tiêu chí sau:

- Đáp ứng các yêu cầu được quy định trong Quy chế thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT (đảm bảo tính chính xác khoa học, có nội dung bám sát Chương trình môn Toán THPT hiện hành và Hướng dẫn nội dung bồi dưỡng học sinh khá, giỏi Toán cấp THPT của Bộ, phân loại được trình độ học sinh dự thi, ...);

- Góp phần định hướng việc dạy và học môn Toán trong các lớp chuyên Toán nói riêng và trong việc bồi dưỡng học sinh khá, giỏi Toán nói chung, theo tư tưởng chỉ đạo của Bộ GD&ĐT.

2. Khác với năm trước, trong đề thi năm nay có sự chênh lệch khá lớn về mức độ khó, dễ giữa đề thi ở Bảng A và đề thi ở Bảng B.

• Về bài làm của các thí sinh

1. Không ít thí sinh, đặc biệt ở Bảng B, tỏ ra chưa nắm vững các kiến thức và phương pháp, kĩ năng giải Toán cơ bản theo yêu cầu của Chương trình môn Toán bậc phổ thông hiện hành.

2. Các nhận xét và đánh giá cụ thể về bài làm của các thí sinh sẽ được trình bày trong các bài viết về Lời giải của các bài toán thi nêu trên.

III. KẾT QUẢ

Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT và điểm thi của các thí sinh, Bộ GD&ĐT đã quyết định trao giải cho 125 học sinh dự thi ở Bảng A (chiếm 49,6% tổng số học sinh dự thi) và 98 học sinh dự thi ở Bảng B (chiếm 32,4% tổng số học sinh dự thi), với mức điểm cho các loại giải như sau:

Bảng A

Giải Nhất: Từ 36,0 điểm đến 40,0 điểm; Giải Nhì: Từ 32,0 điểm đến 35,5 điểm; Giải Ba: Từ 27,5 điểm đến 31,5 điểm; Giải Khuyến khích: Từ 23,5 điểm đến 27,0 điểm.

Bảng B

Giải Nhất: Từ 35,0 điểm đến 40,0 điểm; Giải Nhì: Từ 30,0 điểm đến 34,5 điểm; Giải Ba: Từ 25,0 điểm đến 29,5 điểm; Giải Khuyến khích: Từ 20,0 điểm đến 24,5 điểm.

Kết quả cụ thể như sau:

BẢNG A

• Giải Nhất: 04 học sinh.

Lê Hồng Quý, lớp 12 Khối THPT Chuyên ĐH Vinh (40 điểm); Hoàng Mạnh Hùng, lớp 12 Khối

THPT Chuyên Toán - Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội (36,5 điểm); Vũ Văn Quang, lớp 12 THPT Chuyên Vĩnh Phúc (36,0 điểm); Lê Nam Trường, lớp 12 THPT Chuyên Hà Tĩnh (36,0 điểm).

• **Giải Nhì:** 29 học sinh.

Lê Phi Hùng (11 THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); Nguyễn Nhật Linh (11 THPT Chuyên, Hà Tĩnh); Nguyễn Duy Mạnh, Nguyễn Hải Nam (THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương); Đinh Khang, Nguyễn Vũ Lân (PTNK Trần Phú, Hải Phòng); Vũ Hoàng, Nguyễn Hữu Thiện, Vũ Mạnh Tuấn (THPT Chuyên Hưng Yên); Nguyễn Tiến Lộc, Vũ Hải Ninh, Phan Anh Tuấn, Đinh Xuân Tuyền (THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); Trần Hải Đăng (11), Phạm Quang Khang, Nguyễn Việt Khôi, Trần Anh Minh, Nguyễn Chiến Thắng (THPT Phan Bội Châu, Nghệ An); Đinh Ngọc An (THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình); Nguyễn Thị Linh, Nguyễn Thị Hà Trang (11 THPT Chuyên Thái Bình); Vũ Văn Tân (11), Bùi Tiến Quân (THPT Lam Sơn, Thanh Hóa); Nguyễn Xuân Thọ (11 THPT Chuyên Vĩnh Phúc); Nguyễn Việt Anh, Nguyễn Hữu Quân (Khối THPT Chuyên Toán - Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội); Đỗ Tuấn Hoàng Anh (11 PTK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh); Đặng Văn Thủy (11 Khối THPT Chuyên ĐHS Hà Nội); Nguyễn Văn Thìn (Khối THPT Chuyên ĐH Vinh).

• **Giải Ba:** 42 học sinh.

Lê Trung Kiên (11), Nguyễn Thị Liên (THPT Chuyên, Bắc Giang); Nguyễn Thùy Linh (THPT chuyên Hàn Thuyên, Bắc Ninh); Trần Sơn Hà, Nguyễn Tường Huân (THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); Nguyễn Chí Hiếu (THPT Chuyên, Hà Nam); Nguyễn Hùng Tiến (11 THPT Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội); Lê Vĩnh Hòa (11), Nguyễn Lê Trang, Trịnh Ngọc Tú (11) (THPT Nguyễn Huệ, Hà Tây); Đinh Vương Long, Phạm Thành Thái (11), Phạm Ngọc Thành, Vũ Minh Thuận, Nguyễn Văn Thưởng, Nguyễn Anh Tuấn (THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương); Đặng Ngọc Chiến, Bùi Ngọc Khôi (THPTNK Trần Phú, Hải Phòng); Lê Đỗ Hoàng Long, Phạm Ngọc Tuấn (THPT Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh); Bùi Quang Huy, Lương Thái Hưng, Vũ Thị Thanh Xuân (THPT Chuyên Hưng Yên); Phạm Văn Hà, Đoàn Đức Thành (THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); Tô Hồng Sơn, Lê Ngọc Thạch (11 THPT Phan Bội Châu, Nghệ An); Nguyễn Đình Chương (11), Vũ Hữu Tiếp (11), Vũ Việt Triển (THPT Chuyên, Thái Bình); Hoàng Vũ Hạnh (11), Nguyễn Chí Linh, Nguyễn Hoàng Sơn, Lê Ngọc Tuấn (11) (THPT Lam Sơn, Thanh Hóa); Lê Trường Sơn, Lê Đức Trung (THPT Chuyên, Vĩnh Phúc); Đỗ Xuân Bách (11), Đặng Bảo Đức, Trần Như Hải, Đỗ Ngọc Tuấn (11) (Khối THPT Chuyên Toán - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội); Bùi Nam Nghĩa (Khối THPT Chuyên ĐHS Hà Nội); Lê Minh Ngọc (Khối THPT Chuyên ĐH Vinh).

• **Giải Khuyến khích:** 50 học sinh.

Nguyễn Thanh Hiền (11), Phạm Văn Trường (THPT Chuyên, THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang); Nguyễn Trọng Công, Mẫn Đức Thắng (THPT Chuyên Hàn Thuyên, Bắc Ninh); Nguyễn Mạnh An (11), Đào Việt Đức, Phạm Trường Giang (11), Nguyễn Tiến Khánh, Vũ Thị Bích Tuyền (THPT Chuyên, Hà Nam); Nguyễn Thu Hằng, Phùng Đức Thiện, Nguyễn Thái Minh Tuấn (THPT Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội); Dương Minh Hùng (11), Phạm Văn Trường (11), Nguyễn Xuân Việt (THPT Nguyễn Huệ, Hà Tây); Võ Xuân Chúc, Phạm Quốc Duẩn (11) (THPT Chuyên, Hà Tĩnh); Phạm Quỳnh Anh, Nguyễn Tiến Cường, Phạm Huy Hoàng (THPT Năng khiếu Trần Phú, Hải Phòng); Trịnh Trung Cương, Phan Tiến Dũng (11 THPT Chuyên, Hưng Yên); Nguyễn Minh Hải (THPT Lê Quý Đôn, Khánh Hòa); Phạm Văn Cường, Đinh Quang Huy (11) (THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); Đinh Thị Minh Nguyệt, Lê Đình Toàn (11 THPT Phan Bội Châu, Nghệ An); Nguyễn Xuân Tường, Vũ Đức Việt (THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình); Nguyễn Quang Huy, Lê Bá Long, Trần Duy Thành, Đinh Thành Tuấn (11) (THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); Nguyễn Thị Cẩm Tú (11 THPT Chuyên Quảng Bình); Nguyễn Thanh Huyền, (THPT Chuyên Thái Bình); Võ Quang Huy (THPT Chuyên Thái Nguyên); Trần Ngọc Hải (Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế); Hoàng Đình Phương, Hà Minh Tuấn, Nguyễn Trọng Tùng (11 Khối THPT Chuyên Toán - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội); Vương Tấn Đạt, Vũ An Hòa, Hoàng Phúc Hưng (11 PT Năng khiếu ĐHQG TP. Hồ Chí Minh); Nguyễn Công Anh (11), Trần Thanh Hải (11), Phạm Huy (11), Nguyễn Hữu Kiên (11), Nguyễn Trung Kiên, Vũ Minh Long (Khối THPT Chuyên ĐHS Hà Nội); Nguyễn Hoài Thu (11 Khối THPT Chuyên ĐH Vinh).

BẢNG B

• **Giải Nhất:** 01 học sinh.

Trần Bình Ngọc, lớp 11 THPT Cao Lãnh, Đồng Tháp (37,0 điểm).

• **Giải Nhì:** 15 học sinh.

Nguyễn Trường Giang (11) (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu); Võ Hoàng Hải (11 THPT Bến Tre, Bến Tre); Nguyễn Phạm Luân, Lê Trần Tiểu My (11), Huỳnh Tấn Sang, Nguyễn Yên Vũ (THPT Lê Quý Đôn, Bình Định); Nguyễn Lê Chí Quyết (THPT Nguyễn Du, Đắk Lắk); Trần Ngọc Quang Trường (THPT Hùng Vương, Gia Lai); Nguyễn Mạnh Hà, Nguyễn Tuấn Khương, Nguyễn Quốc Tuấn (11) (THPT Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình); Phan Lê Quang Chính (11), Ngô Trần Thành, Đinh Quang Trường (11) (Quảng Nam); Trần Minh Quảng (Tuyên Quang).

• **Giải Ba:** 28 học sinh.

Nguyễn Trọng Hiếu (THPT Thoại Ngọc Hầu, An Giang); Lê Quang Huy (11) (THPT Chuyên...

(Xem tiếp trang 29)



THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1. (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ (C)

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0; -\frac{3}{2})$ và cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C thỏa mãn: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Câu 2. (2 điểm) a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3xy + y = 1 + 4\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$$

b) Giải bất phương trình

$$\frac{2^{4-x} - x + 1}{(\log_2 |x| - 2)(x^2 - 25)} \geq 0.$$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Gọi I, J, K, lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' , CD , $A'D'$.

- a) Tính thể tích khối tứ diện $BIJK$.
b) Biết BK vuông góc với mặt phẳng $(A'C'D)$. Tính độ dài các cạnh của hình hộp.
c) Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa hai đường thẳng CI và $A'J$.

Câu 4. (2 điểm)

- a) Tính các góc của tam giác ABC , biết $2A = 3B$ và $a = b\sqrt{2}$.
b) Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x \, dx}{\cos^4 x - 3\cos^2 x + 3}$.

Câu 5. (1,5 điểm)

Trong một trường học có 5 em khối 12; 3 em khối 11 và 2 em khối 10 là các học sinh xuất sắc. Hỏi có bao nhiêu cách cử 5 em học sinh xuất sắc của trường đó tham gia một đoàn đại biểu sao cho mỗi khối có ít nhất 1 em?

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

(Đề đăng trên THPT số 346, tháng 4 năm 2006)

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-x^2 + 2x - 2k + 5}{(x-1)^2}$.

Hàm số (1) có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, hay PT

$$g(x) = -x^2 + 2x - 2k + 5 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt khác 1, khi đó $k < 3$.

Giả sử $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số.

Đặt $u(x) = -x^2 + 2kx - 5$; $v(x) = x - 1$.

Ta có $y'_1 = y'_2 = 0$ nên

$$y_1 = \frac{u(x_1)}{v(x_1)} = \frac{u'(x_1)}{v'(x_1)} = -2x_1 + 2k,$$

$$y_2 = \frac{u(x_2)}{v(x_2)} = \frac{u'(x_2)}{v'(x_2)} = -2x_2 + 2k.$$

Suy ra PT đường thẳng qua A, B là

(d): $y = -2x + 2k$. Gọi H là giao điểm của (d) và (l). PT hoành độ giao điểm của (d) và (l) có dạng $2x = -2x + 2k$, do đó hoành độ của H là $x_H = \frac{k}{2}$. Vậy A, B nằm về hai phía của đường

thẳng (l): $y = 2x$ khi H nằm trong đoạn AB. Lúc

$$\text{đó } x_H \in (x_1, x_2) \Leftrightarrow (-1)g\left(\frac{k}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$-2 - 2\sqrt{6} < k < -2 + 2\sqrt{6} \text{ (thỏa mãn } k < 3).$$

Câu 2. 1) PT đã cho tương đương với

$$6\cos x + \cos^2 x = 8 + 6\sin x \cos x - 9\sin x + \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 6\cos x(1 - \sin x) = 2\sin^2 x - 9\sin x + 7$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(6\cos x + 2\sin x - 7) = 0.$$

Do $6\cos x + 2\sin x - 7 \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

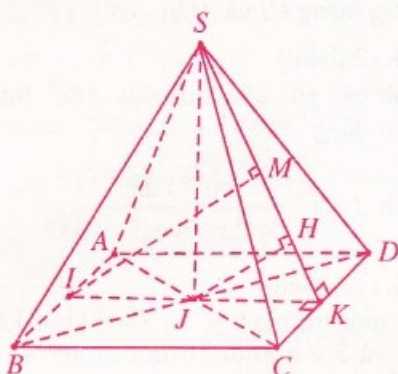
nghiệm của PT đã cho là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2) Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $-3 < \frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} < 3 \quad (\forall x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (k+3)x + 2 > 0 \\ 4x^2 + (3-k)x + 4 > 0 \end{cases} \quad (\forall x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k+3)^2 - 16 < 0 \\ (3-k)^2 - 64 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < k < 1.$$

Câu 3. 1) Khoảng cách giữa AB và SC bằng khoảng cách giữa AB và $mp(SCD)$. Ta có $d(AB, mp(SCD)) = IM = 2JH$.



Từ hệ thức lượng trong tam giác vuông SJK :

$$\frac{1}{JH^2} = \frac{1}{JS^2} + \frac{1}{JK^2}, \text{ tìm được } JH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Do đó khoảng cách giữa AB và SC bằng

$$\frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

2) Ta thấy PT $mp(Q)$ có dạng

$$2x - y - 2z + 1 = 0.$$

PT tham số của (Δ) :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Giả sử $A(1 + 2t; 2 - t; 3t) \in (\Delta)$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Khi đó

$$\frac{|2(1+2t) - (2-t) - 6t + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2. \end{cases}$$

Đáp số: Có hai điểm thỏa mãn bài ra là $A_1(9; -2; 12)$ và $A_2(-3; 4; -6)$.

Câu 4. 1) Ba số hạng đầu tiên trong khai triển

nhị thức Newton $\left(a^2 - \frac{2}{a}\right)^n$ là $T_1 = C_n^0 \cdot (a^2)^n$;

$$T_2 = C_n^1 \cdot (a^2)^{n-1} \cdot \left(-\frac{2}{a}\right); T_3 = C_n^2 \cdot (a^2)^{n-2} \cdot \left(-\frac{2}{a}\right)^2.$$

Theo giả thiết, ta có $C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 97$.

Giải ra tìm được $n = 8$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(a^2 - \frac{2}{a}\right)^8$

$$\text{có dạng } C_8^k (a^2)^{8-k} \cdot \left(-\frac{2}{a}\right)^k = (-2)^k \cdot C_8^k \cdot a^{16-3k}.$$

Hệ số của số hạng chứa a^4 trong khai triển nói trên là

$$C_8^4 \cdot (-2)^4 = 1120 \text{ (ứng với } k = 4).$$

$$2) \text{ Ta có } I = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx + \int_1^e \ln^2 x \cdot dx.$$

$$\text{Để tính } I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx, \text{ ta dùng PP đổi}$$

$$\text{biến số } t = \sqrt{1+\ln x}. \text{ Lúc đó } I_1 = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{t^2-1}{t}\right) 2t dt$$

$$= \frac{2}{3}(2-\sqrt{2}). \text{ Để tính } I_2 = \int_1^e \ln^2 x dx \text{ ta dùng PP}$$

tích phân từng phần:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{x} \ln x dx \\ v = x. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I_2 = x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx =$$

$$x \ln^2 x \Big|_1^e - 2(x \ln x - x) \Big|_1^e = e - 2.$$

$$\text{Do đó } I = -\frac{2}{3}(1+\sqrt{2}) + e.$$

Câu 5. Với $m = 0$. BĐT đã nêu là đúng (chú ý giả thiết có $n \neq p$). Với $m \neq 0$, ta có

$$f(0) = m + n + p; \quad f(-1) = 2(m + p).$$

$$\text{Nhận thấy } f(0) \cdot f(-1) = 2(m+n+p)(m+p) < 0.$$

Do đó tam thức bậc hai $f(x)$ có biệt thức $\Delta > 0$ hay $(n-p)^2 - 4m(m+n+p) > 0$

$$\Leftrightarrow n^2 + p^2 > 2[2m(m+n+p) + np].$$

HUỖNH DUY THỦY

(GV THPT Tăng Bạt Hổ,
Hoài Nhơn, Bình Định)

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ VÀ TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

NGUYỄN ANH DŨNG

(Hà Nội)

Trong các đề thi tốt nghiệp Trung học phổ thông và tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng thường có câu về tích phân. *Phương pháp đổi biến số và tích phân từng phần* thường được sử dụng để tính tích phân đó. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu (có tính hướng dẫn) một số cách đổi biến số phù hợp với các hàm số dưới dấu tích phân và phương pháp tích phân từng phần để lấy tích phân một số dạng hàm số thường gặp trong các kì thi nói trên. Lưu ý rằng chúng tôi dành cho bạn đọc thực hiện các phép biến đổi hoặc tính ra đáp số khi phép toán chỉ còn đơn giản.

1. Phương pháp đổi biến số

• Nếu hàm số dưới dấu tích phân có chứa $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$, ta có thể tìm cách giải theo một trong hai hướng sau

Hướng thứ nhất. Đặt $x = \frac{a}{b} \sin t$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

lúc đó $dx = \frac{a}{b} \cos t dt$; $\sqrt{a^2 - b^2 x^2} = a \cos t$.

Hướng thứ hai. Đặt $t = \sqrt{a^2 - b^2 x^2}$.

Thí dụ 1. (Đổi biến số theo $\sin t$).

Tính $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{4 - 3x^2} dx$

Lời giải. Đặt $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t dt$; $\sqrt{4 - 3x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2 \cos t$;

$x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$. Lúc đó

$$I = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 2t dt$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

• Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $f(x) = \frac{1}{(a^2 + b^2 x^2)^n}$; $n = 1, 2, \dots$ thì để lấy tích phân hàm $f(x)$ ta đặt $x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t$; $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Thí dụ 2. (Đổi biến số theo $\operatorname{tg} t$).

$$\text{Tính } I = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + 3x^2)^2}$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì

$$dx = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt; \quad 1 + 3x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 t.$$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

• Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $\sqrt{ae^x + b}$, ta có thể tìm cách giải theo hướng:

Đặt $t = \sqrt{ae^x + b}$.

Thí dụ 3. Tính $I = \int_{\ln 4}^{\ln 12} \sqrt{e^x - 3} dx$

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{e^x - 3} \Rightarrow e^x = t^2 + 3$;

$$e^x dx = 2t dt \Rightarrow dx = \frac{2t dt}{e^x} = \frac{2t dt}{t^2 + 3};$$

$x = \ln 4 \Rightarrow t = 1$; $x = \ln 12 \Rightarrow t = 3$.

$$I = \int_1^3 \frac{2t^2 dt}{t^2 + 3} = 2 \int_1^3 dt - 6 \int_1^3 \frac{1}{t^2 + 3} dt = 4 - 6I_1$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{t^2 + 3}$$

Hướng dẫn. Đặt $t = \sqrt{3} \operatorname{tg} u$, $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

• Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $p(x)f(x)$ trong đó $p(x)$ là một đa thức, $f(x)$ là một hàm lượng giác thì cách giải chung là đặt

$$\begin{cases} u = p(x), \\ dv = f(x). dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = p'(x) dx \\ v = \int f(x). dx \end{cases}$$

Thí dụ 4. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos 2x \cdot dx$

Lời giải. $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\sin 3x - \sin x) \cdot dx$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{x}{2} \\ dv = (\sin 3x - \sin x) \cdot dx \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{2} \\ v = -\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x \end{cases}$

$$I = \frac{x}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x \right) dx$$

$$I = 0 + \left(\frac{1}{18} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{5}{9}.$$

• Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $p(x) \cdot f(e^x)$ trong đó $p(x)$ là một đa thức thì cách giải chung là đặt

$$\begin{cases} u = p(x), \\ dv = f(e^x) \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = p'(x) dx \\ v = \int f(e^x) \cdot dx \end{cases}$$

Thí dụ 5. Tính $I = \int_0^1 (2x-1) \cdot e^x \cdot dx$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = (2x-1) \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2 \cdot e^x \cdot dx$$

$$= e + 1 - 2e^x \Big|_0^1 = -e + 3.$$

• Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $p(x) \cdot \ln(f(x))$ trong đó $p(x)$ là một đa thức hoặc là hàm số lượng giác, thì cách giải chung là

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(f(x)), \\ dv = p(x) \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\ v = \int p(x) \cdot dx. \end{cases}$$

Thí dụ 6. Tính $I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1) dx}{(x+2)^2}$

$$\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = \frac{dx}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = \frac{-1}{x+2} \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{x+2} \cdot \ln(x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$

$$= -\frac{1}{3} \ln 2 + I_1$$

Với

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln \frac{x+1}{x+2} \Big|_0^1$$

$$= \ln \frac{4}{3}.$$

Để kết thúc bài báo mời các bạn thử sử dụng hai phương pháp trên để giải các bài tập sau đây.

Tính các tích phân :

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cdot dx}{1 + \sin 2x}; \quad 2) \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{x \cdot e^x}{\sqrt{e^x + 1}} \cdot dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}; \quad 4) \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}.$$

SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ COTANG...

(Tiếp trang 13)

Tương tự

$$\cot \widehat{CBP} = 2(\cot B + \cot C) + \cot A$$

nên tam giác BIC là tam giác cân.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC và $AB = AM$. Chứng minh:

$$1) 3\cot B = \cot C;$$

$$2) \sin A = 2\sin(B - C).$$

Bài 2. Chứng minh rằng hai trung tuyến BM và CN của tam giác ABC vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\cot A = 2(\cot B + \cot C).$$

Bài 3. Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A và B cắt nhau tại D , đường thẳng DC cắt cạnh AB ở E , gọi I là trung điểm của CE . Xác định dạng của tam giác ABC để góc IBC lớn nhất.

KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC PRE-SMO 2006

DO HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI TỔ CHỨC

NGUYỄN VĂN MẬU - VŨ KIM THỦY

Các đội tuyển Toán nước ta đã tham gia nhiều kì thi Quốc tế và Khu vực và đã thu được nhiều thành tích ấn tượng. Gần đây, ngoài các kì thi Olympic Toán Quốc tế, Olympic Toán Khu vực châu Á - Thái Bình Dương, chúng ta còn tham dự các kì thi Olympic Singapore (SMO), bài thi viết trực tiếp bằng tiếng Anh. Đã qua hai kì Olympic Singapore mở rộng học sinh Thủ đô Hà Nội và năm 2005 có thêm học sinh Vĩnh Phúc (chủ yếu là lớp 8 và lớp 10) đã thể hiện sự cố gắng cao và đạt thành tích xuất sắc (xem thông báo kết quả trên Tạp chí TH&TT). Năm nay, chúng ta đang tập trung cao độ chuẩn bị gấp gáp cho kì thi Olympic Toán Quốc tế tại Việt Nam năm 2007. Đã đến lúc chúng ta phải tự đứng lên làm nhà tổ chức các kì thi Olympic các môn chuyên ngành bằng tiếng Anh để tập dượt cho những chương trình hội nhập Quốc tế.

Năm nay, Hội Toán học Hà Nội đứng ra tổ chức thử nghiệm một kì thi Olympic Toán học tại các tỉnh Hải Dương, Phú Thọ, Vĩnh Phúc và Thủ đô Hà Nội (mỗi đội tuyển 10 học sinh (5 học sinh THCS và 5 học sinh lớp 10 THPT)) tham dự kì thi cho từng độ tuổi Junior và Senior (có mở rộng theo chương trình Quốc tế) bằng tiếng Anh. Rất bất ngờ là học sinh của cả bốn đội tuyển đều trình bày được lời giải rất trôi chảy bằng tiếng Anh các lời giải của mình.

Chúng tôi xin trân trọng giới thiệu với bạn đọc Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ nội dung của hai đề thi này.

Important: Answer all 9 questions
No calculator are allowed.

JUNIOR SECTION

Sunday, 09 April 2006 14h00-15h30

Q1. What is the last two digits of the number $(11 + 12 + 13 + \dots + 2006)^2$?

Q.2 Find the last two digits of the sum $2005^{11} + 2005^{12} + \dots + 2005^{2006}$.

Q.3. Find the number of different positive integer triples (x, y, z) satisfying the equations $x^2 + y - z = 100$ and $x + y^2 - z = 124$.

Q4. Suppose x and y are two real numbers such that $x + y - xy = 155$ and $x^2 + y^2 = 325$.

Find the value of $|x^3 - y^3|$.

Q5. Suppose n is a positive integer and three arbitrary numbers are chosen from the set $\{1, 2, 3, \dots, 3n+1\}$ with their sum equal to $3n+1$.

What is the largest possible product of those three numbers?

Q6. The figure $ABCDEF$ is a regular hexagon. Find all points M belonging to the hexagon such that area of the triangle MAC = area of the triangle MCD .

Q7. On the circle (O) of radius 15cm are given two points A, B . The altitude OH of the triangle OAB intersect (O) at C . What is AC if $AB = 16\text{cm}$?

Q8. In the triangle ABC , PQ parallel to BC where P and Q are points on AB and AC respectively. The lines PC and QB intersect at G . It is also given EF parallel to BC , where $G \in EF$, $E \in AB$ and $F \in AC$ with $PQ = a$ and $EF = b$. Find value of BC .

Q9. What is the smallest possible value of $x^2 + y^2 - x - y - xy$?

SENIOR SECTION

Sunday, 09 April 2006 14h00-15h30

Q1. What is the last three digits of the sum $11! + 12! + 13! + \dots + 2006!$?

Q2. Find the last three digits of the sum $2005^{11} + 2005^{12} + \dots + 2005^{2006}$.

Q3. Suppose that $a^{\log_b c} + b^{\log_c a} = m$.

Find the value of $c^{\log_b a} + a^{\log_c b}$.

Q4. Which is larger $2^{\sqrt{2}}$, $2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$ and 3?

Q5. The figure $ABCDEF$ is a regular hexagon. Find all points M belonging to the hexagon such that area of the triangle MAC = area of the triangle MCD .

Q6. On the circle of radius 30cm are given two points A, B with $AB = 16\text{cm}$ and C is a midpoint of AB . What is the perpendicular distance from C to the circle?

Q7. In the triangle ABC , PQ parallel to BC where P and Q are points on AB and AC respectively. The lines PC and QB intersect at G . It is also given EF parallel to BC , where $G \in EF$, $E \in AB$ and $F \in AC$ with $PQ = a$ and $EF = b$. Find value of BC .

Q8. Find all polynomials $P(x)$ such that

$$P(x) + P\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Q9. Let x, y, z be real numbers such that $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Find the largest possible value of $|x^3 + y^3 + z^3 - xyz|$.



SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ COTANG ĐỂ GIẢI TOÁN

NGUYỄN BÁ ĐĂNG
(Sở GD-ĐT Hải Dương)

Trong sách giáo khoa Hình học lớp 10 chúng ta đã làm quen với định lý cosin thể hiện sự liên quan giữa cạnh và góc của tam giác: Với tam giác ABC bất kì, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (1). Từ định lý này ta có kết quả sau đây.

Định lý cotang. Với mọi tam giác ABC ta có

$$\cotg A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S_{ABC}}. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$\cotg A + \cotg B + \cotg C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}.$$

trong đó S_{ABC} kí hiệu diện tích tam giác ABC .

Chứng minh. Sử dụng công thức (1) và công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A$, suy ra $\cotg A = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}$.

Chứng minh tương tự câu a) ta có

$$\cotg B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S_{ABC}}; \cotg C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S_{ABC}}.$$

Từ đó có

$$\cotg A + \cotg B + \cotg C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}} \text{ (đpcm).}$$

Bổ đề 1. Trong tam giác ABC với AM là trung tuyến, $\widehat{MAB} = \alpha$, $\widehat{MAC} = \beta$. Khi đó ta có hệ thức $\cotg \alpha + \cotg C = \cotg \beta + \cotg B$.

(Hệ thức này được suy trực tiếp từ định lý cotang cho các tam giác ABC , ABM , ACM với lưu ý rằng $S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$).

Bổ đề 2. Giả sử M là một điểm trên cạnh BC của tam giác ABC sao cho $\frac{BM}{MC} = \frac{m}{n}$; $\widehat{MAB} = \alpha$; $\widehat{AMB} = \beta$. Khi đó ta có

$$a) (m+n)\cotg \beta = m.\cotg C - n.\cotg B;$$

$$b) m.\cotg \alpha = (m+n)\cotg A + n.\cotg B.$$

Chứng minh. a) Dựng $AH \perp BC$, lúc đó H sẽ nằm trong đoạn BM hoặc đoạn MC , giả sử H thuộc đoạn BM . Lúc đó

$$BM = BH + HM = AH(\cotg B + \cotg \beta);$$

$$MC = HC - HM = AH(\cotg C - \cotg \beta). \text{ Do đó,}$$

$$\frac{BM}{MC} = \frac{\cotg B + \cotg \beta}{\cotg C - \cotg \beta} = \frac{m}{n},$$

suy ra

$$(m+n)\cotg \beta = m.\cotg C - n.\cotg B \text{ (đpcm).}$$

b) Từ M kẻ $ME \parallel AC$ ($E \in AB$), lúc đó $\widehat{MEB} = \widehat{BAC}$, sử dụng câu a) vào tam giác ABM ta có hệ thức cần chứng minh.

Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng định lý cotang và các bổ đề trên để giải một số bài toán sau đây.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM và $\widehat{AMB} = \alpha$. Chứng minh rằng

$$\cotg \alpha = \frac{\sin(B-C)}{2\sin B \sin C}.$$

Lời giải. Hệ thức cần chứng minh tương đương với $2\cotg \alpha = \cotg C - \cotg B$. Áp dụng bổ đề 2 cho trường hợp M là trung điểm của BC ta có điều phải chứng minh.

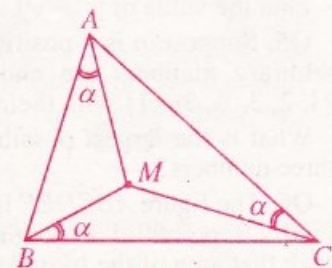
Bài toán 2. Giả sử M là điểm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \alpha$ (M ; α tương ứng được gọi là điểm và góc Brocard).

a) Chứng minh rằng

$$\cotg \alpha = \cotg A + \cotg B + \cotg C.$$

b) Xác định dạng tam giác ABC để góc α lớn nhất.

Lời giải. (h.1). Áp dụng định lý cotang cho các tam giác MAB , MBC , MCA ta được



Hình 1

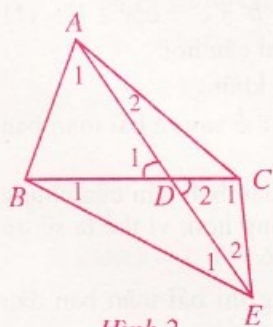
$$\begin{aligned}\cotg\alpha &= \frac{MA^2 + c^2 - MB^2}{4S_{MAB}} = \frac{MB^2 + a^2 - MC^2}{4S_{MBC}} \\ &= \frac{MC^2 + b^2 - MA^2}{4S_{MCA}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}.\end{aligned}$$

Suy ra $\cotg\alpha = \cotgA + \cotgB + \cotgC$.

b) Ta có $\cotgA + \cotgB + \cotgC$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}} = \cotg\alpha.$$

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S_{ABC} \cdot \sqrt{3}$ (đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$) nên $\cotg\alpha \geq \sqrt{3}$, suy ra $\alpha \leq 30^\circ$. Góc α lớn nhất bằng 30° khi tam giác ABC đều.



Hình 2

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 2DC$, kéo dài AD về phía D sao cho $AD = DE$. Chứng minh $2\widehat{BCE} - \widehat{CBE} = 180^\circ$.

Lời giải. (h. 2) Vì $BD = 2DC$ nên theo bổ đề 2 ta có

$$3\cotgD_1 = 2\cotgC - \cotgB = 3\cotgD_2 \quad (1)$$

Trong tam giác ABE với BD là trung tuyến. Áp dụng các bổ đề trên, ta có

$$\cotgB_1 = \cotgB + \cotgE_1 - \cotgA_1 \quad (2)$$

$$2\cotgD_1 = \cotgE_1 - \cotgA_1 \quad (3)$$

Tương tự trong tam giác ACE , ta có

$$\cotgC_1 = \cotgC + \cotgE_2 - \cotgA_2 \quad (4)$$

$$2\cotgD_2 = \cotgA_2 - \cotgE_2 \quad (5)$$

Từ (1) và (3) thay vào (2) được

$$\begin{aligned}\cotgB_1 &= \cotgB + \frac{2}{3}(2\cotgC - \cotgB) \\ &= \frac{\cotgB + 4\cotgC}{3}.\end{aligned}$$

Do $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ nên $\cotgB = \frac{\cotg^2C - 1}{2\cotgC}$ suy ra

$$\cotgB_1 = \frac{9\cotg^2C - 1}{6\cotgC} \quad (6)$$

Từ (1) và (5) thay vào (4) có

$$\begin{aligned}\cotgC_1 &= \cotgC - \frac{2}{3}(2\cotgC - \cotgB) \\ &= -\frac{1}{3\cotgC}\end{aligned} \quad (7)$$

Để có $2\widehat{BCE} - \widehat{CBE} = 180^\circ$ ta chứng minh $\cotg2C_1 = \cotgB_1$. Thật vậy

$$\cotg2C_1 = \frac{\cotg^2C_1 - 1}{2\cotgC_1} \quad (8)$$

Thay (7) vào (8) được

$$\cotg2C_1 = \frac{9\cotg^2C - 1}{6\cotgC} \quad (9)$$

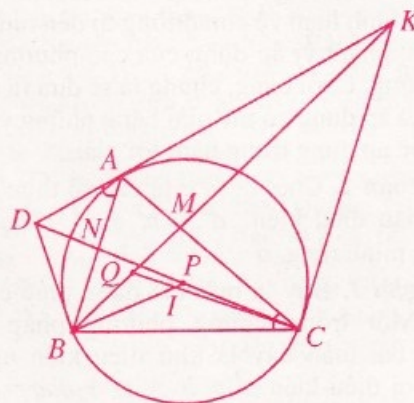
Từ (6) và (9) có đpcm.

Bài toán 4. Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt tiếp tuyến tại A với đường tròn đó theo thứ tự ở D và K . Đường thẳng BK cắt AC tại M , đường thẳng CD cắt cạnh AB tại N , gọi Q là trung điểm của BM , P là trung điểm CN , đường thẳng BP cắt đường thẳng CQ tại I . Chứng minh rằng tam giác BIC cân.

Lời giải. (h.3). Giả sử $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \frac{CM}{AM} &= \frac{S_{CBK}}{S_{ABK}} = \frac{BC \sin \widehat{BCK}}{AB \sin \widehat{BAK}} \\ &= \frac{BC \sin C}{AB \sin A} = \frac{a^2}{c^2}.\end{aligned}$$

Từ đó theo bổ đề 2 phần b) ta có



Hình 3

$$a^2 \cotg \widehat{CBM} = (a^2 + c^2) \cotgB + c^2 \cotgC.$$

Trong tam giác BCM , CQ là trung tuyến có $\cotg \widehat{BCQ} = 2\cotgC + \cotg \widehat{CBM}$

$$\begin{aligned}\cotg \widehat{BCQ} &= 2\cotgC + \frac{a^2 + c^2}{a^2} \cotgB + \frac{c^2}{a^2} \cotgC \\ &= 2\cotgC + \cotgB + \frac{c^2}{a^2} (\cotgB + \cotgC)\end{aligned}$$

$$\cotg \widehat{BCQ} = 2(\cotgB + \cotgC) + \cotgA.$$

(Xem tiếp trang 10)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN**NĂM LỜI GIẢI HAY CHO MỘT BÀI TOÁN ĐẸP**

TRẦN NAM DŨNG

(ĐHKHTN, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

LTS. Cùng đi tới đích có nhiều con đường khác nhau. Giải một bài toán bằng nhiều cách không phải là mục đích của người làm toán. Tuy nhiên lướt qua các con đường ấy ta tìm được những cách tối ưu. Đó cũng là một phẩm chất có được từ việc học toán. Tòa soạn THPT mở thêm chuyên mục **Nhiều cách giải cho một bài toán**. Chúng tôi mong muốn nhận được nhiều cách giải hay, phát triển theo nhiều tuyến kiến thức khác nhau và sử dụng những công thức khác nhau chứ không phải chỉ thay đổi chút ít để kể được nhiều cách. Mong được các bạn hưởng ứng viết bài và tìm đọc chuyên mục mới. Sau đây xin giới thiệu một bài viết đầu tiên.

Những bài toán đẹp thường có những lời giải hay, lời giải tự nhiên. Điều quan trọng hơn, vì tính tự nhiên của chúng, những lời giải đó sẽ không đơn thuần là một lời giải mà còn là khuôn mẫu có thể áp dụng cho những bài toán khác.

Dưới đây, chúng ta sẽ xem xét một ví dụ như vậy: Một bài toán với năm lời giải khác nhau. Chúng ta sẽ không đơn thuần đưa ra năm lời giải mà còn bình luận về con đường đi đến những lời giải đó, phạm vi áp dụng của các phương pháp tương ứng. Cuối cùng, chúng ta sẽ đưa ra một số bài toán áp dụng có thể giải bằng những ý tưởng đã được áp dụng trong năm lời giải.

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng $a + b + c \leq 3$.

Lời giải 1. Đây là một bất đẳng thức có điều kiện. Một trong những phương pháp xử lý những bài toán này là khử điều kiện ngay từ đầu. Coi điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ như phương trình bậc hai theo a , ta được

$$a = \frac{-bc + \sqrt{(4-b^2)(4-c^2)}}{2}.$$

Một cách tự nhiên, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho căn thức trong biểu thức trên, ta có đánh giá

$$a \leq \frac{-bc + \frac{4-b^2+4-c^2}{2}}{2} = \frac{8-(b+c)^2}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } a+b+c &= \frac{8-(b+c)^2+4(b+c)}{4} \\ &= \frac{12-(b+c-2)^2}{4} \leq \frac{12}{4} = 3. \end{aligned}$$

Bình luận. Đây là một cách phá điều kiện trực tiếp.

Lời giải 2. Ta lại xử lý điều kiện theo một kiểu khác đó là hoán đổi vai trò giữa điều kiện và điều cần chứng minh. Điều kiện là một biểu thức phức tạp, còn điều cần chứng minh lại đơn giản. Nếu đảo lại, $a+b+c = 3$ thì $a^2 + b^2 + c^2 + abc$ sẽ thế nào? Thử với bộ $(0, 1, 2)$ ta có dự đoán

"Nếu $a + b + c = 3$ thì $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$ ". (*)

Chúng ta phải trả lời hai câu hỏi:

- 1) Dự đoán đó có đúng không?
- 2) Nếu (*) đúng thì có thể suy ra bài toán ban đầu không?

Đối với việc giải bài toán ban đầu của chúng ta thì câu hỏi 2) quan trọng hơn, vì thế ta sẽ trả lời trước câu hỏi này.

Mệnh đề. Nếu (*) đúng thì bài toán ban đầu cũng đúng.

Thật vậy, giả sử (*) đã được chứng minh và giả sử rằng a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Ta sẽ chứng minh rằng $a + b + c \leq 3$. Giả sử ngược lại rằng $a + b + c = 3k > 3$. Đặt $a = ka', b = kb', c = kc'$ thì $a' + b' + c' = 3$. Vì (*) đã được chứng minh nên từ đây ta suy ra $a'^2 + b'^2 + c'^2 + a'b'c' \geq 4$.

Nhưng do $k > 1$ nên từ đây, suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + abc > a'^2 + b'^2 + c'^2 + a'b'c' \geq 4$. Mâu thuẫn.

Bây giờ, để giải quyết bài toán ban đầu, chỉ cần chứng minh BĐT (*). Bài này có thể giải bằng nhiều cách, ví dụ bằng phương pháp dồn biến quen thuộc.

Đặt $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + abc - 4$; $t = \frac{b+c}{2}$.

Sau đây ta sẽ lần lượt chứng minh

- i) $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$;
- ii) $f(a, t, t) \geq 0$ với $a + 2t = 3$.

Thật vậy. Xét $f(a, b, c) - f(a, t, t) = (b^2 + c^2 - 2t^2) + a(bc - t^2) = \frac{(2-a)(b-c)^2}{4} \geq 0$,

tức i) được chứng minh.

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh $f(a, t, t) \geq 0$ với $a + 2t = 3$. Bằng phép thế $a = 3 - 2t$, điều này tương đương với $(t-1)^2(5-2t) \geq 0$, đúng do $2t = b+c < 3$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bình luận. Cách xử lý điều kiện bằng đạo để giúp chúng ta đơn giản hóa điều kiện, biến thành một bài toán với điều kiện dễ sử dụng hơn. Chi tiết về phương pháp dồn biến các bạn có thể tham khảo các bài viết trong cuốn "Tài liệu bồi dưỡng giáo viên chuyên Toán", Hè 2005, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

Lời giải 3. Lời giải 3, có thể nói, xuất phát từ ý tưởng dồn biến ở lời giải trên. Nhưng lần này không đổi chỗ giả thiết và kết luận nữa, mà thực hiện dồn biến ngay ở điều kiện. Cụ thể là

nếu đặt $t = \frac{b+c}{2}$ sẽ có đánh giá:

$$\begin{aligned} 4 &= a^2 + b^2 + c^2 + abc - 4 \\ &= a^2 + 2t^2 + at^2 + (b^2 + c^2 - 2t^2) + a(bc - t^2) \\ &= a^2 + 2t^2 + at^2 + \frac{(2-a)(b-c)^2}{4} \geq a^2 + (2+a)t^2 \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $t^2 \leq 2-a$ sẽ có đánh giá

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + 2t \leq a + 2\sqrt{2-a} = \\ &= a + 2\sqrt{1 \cdot (2-a)} \leq a + 1 + 2 - a = 3. \end{aligned}$$

Bình luận. Lời giải rất ngắn gọn và ấn tượng. Lời giải này, có thể nói, được gợi ý từ cách chứng minh của (*). Tuy nhiên, chúng ta có thể đi đến ý tưởng này một cách độc lập và có thể áp dụng với các bài toán khác. Tạm đặt tên ý tưởng là dồn biến trong điều kiện.

Lời giải 4. Từ điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ ta suy ra $a, b, c \in (0; 2)$. Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số $2-a, 2-b, 2-c$ ta có

$$\begin{aligned} 27(2-a)(2-b)(2-c) &\leq (2-a+2-b+2-c)^3 \\ \Leftrightarrow 27(8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc) &\leq (6-a-b-c)^3 \\ \Leftrightarrow 27(8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2-4) &\leq (6-a-b-c)^3 \\ \Leftrightarrow 27(s^2-4s+4) &\leq (6-s)^3 \\ \Leftrightarrow (s-3)(s^2+12s+36) &\leq 0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $s \leq 3$.

Bình luận. Đây có lẽ là lời giải kém tự nhiên nhất trong các lời giải đã trình bày. Tuy nhiên, việc sử dụng các BĐT hệ quả dạng $(a-\alpha)(a-\beta) \leq 0$ với $a \in [\alpha; \beta]$, hay $(a-\alpha)(b-\alpha)(c-\alpha) \geq 0$ với $a, b, c \geq \alpha$... là các thủ thuật rất hữu hiệu để

đánh giá các đại lượng trung bình $s = a + b + c$, $t = ab + bc + ca$, $p = abc$ thông qua nhau.

Lời giải 5. Cũng do điều kiện $a, b, c \in (0; 2)$ đã gợi chúng ta đi đến phép thế lượng giác. Rõ ràng có thể đặt $a = 2\cos A$ và $b = 2\cos B$, với A, B là các góc nhọn. Khi đó, tính c theo a, b , ta được

$$\begin{aligned} c &= \frac{-ab + \sqrt{(4-a^2)(4-b^2)}}{2} \\ &= \frac{-4\cos A \cos B + 4\sin A \sin B}{2} \\ &= -2\cos(A+B) = 2\cos(\pi - A - B). \end{aligned}$$

Vậy $c = 2\cos C$ với $A + B + C = \pi$. Như thế điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ đã được tham số hóa thành $a = 2\cos A$, $b = 2\cos B$, $c = 2\cos C$ với $A + B + C = \pi$, $A, B, C > 0$. Yêu cầu của bài toán trở thành bất đẳng thức quen thuộc trong tam giác:

$$P = \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Đó là một lời giải ngắn gọn cho bất đẳng thức

$$\begin{aligned} P &= 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2} \\ &\leq 2\sin \frac{C}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2} = \frac{3}{2} - 2\left(\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Bình luận. Phương pháp lượng giác hóa để phá điều kiện giúp chúng ta đưa được nhiều bất đẳng thức đại số có điều kiện về các bất đẳng thức trong tam giác. Như vậy phương pháp này chỉ thực sự hiệu quả nếu chúng ta nắm vững các bất đẳng thức cơ bản trong tam giác. Ngoài ra, việc biết các hệ thức lượng trong tam giác như $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$, $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$, ... cũng là điều kiện quan trọng để "nhìn" ra các phép lượng giác hóa.

Cuối cùng, để nhìn rõ hơn tính hiệu quả của từng phương pháp, cũng như để nhìn thấy những khó khăn mà chúng ta có thể gặp phải, ta hãy xem xét hướng tổng quát sau đây.

Bài toán 2. Tìm tất cả những giá trị $k \geq 0$ sao cho với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn các điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + kabc = 3 + k$ và $a + b + c \leq 3$.

Kết quả của bài toán 2 là $k \leq \frac{3}{2}$. Các phương pháp nào trong các phương pháp đã trình bày...
(Xem tiếp trang 29)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/347. (Lớp 6)

So sánh $\frac{5}{8}$ và $\left(\frac{389}{401}\right)^{10}$.

HOÀNG HÙNG

(GV THCS Chu Văn An, Hải Phòng)

Bài T2/347. (Lớp 7) Cho tam giác ABC . Các điểm E, F theo thứ tự nằm trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABE} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$, $\widehat{ACF} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. Gọi O là giao điểm của BE và CF . Giả sử $OE = OF$. Chứng minh rằng $AB = AC$ hoặc $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T3/347. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^3 + y^2 = 16 \\ z^2 + yz = 3. \end{cases}$$

DƯƠNG CHÂU DINH

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T4/347. Xét các phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac}.$$

TRẦN HỒNG SƠN

(GV THPT bán công Thái Thụy, Thái Bình)

Bài T5/347. Xét các tam giác ABC có các độ dài các cạnh là a, b, c sao cho thỏa mãn hệ thức $1964ab + 15bc + 10ca = 2006abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{1974}{p-a} + \frac{1979}{p-b} + \frac{25}{p-c}$$

trong đó p là nửa chu vi của tam giác ABC .

NGUYỄN TIÊN TIẾN

(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T6/347. Cho tứ giác $ABCD$. Lấy các điểm M, P theo thứ tự trên các cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD}$. Tìm tập hợp trung điểm I của MP khi M, P di động trên AB, AC .

NGUYỄN LÁI

(GV THPT Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hoà, Phú Yên)

Bài T7/347. Tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135^\circ$, AM và BN là các đường cao. Đường thẳng MN cắt đường trung trực của AC tại P . Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của NP và BC . Chứng minh rằng tam giác ADE là tam giác vuông cân.

HUỖNH THANH TÂM

(CB Bưu điện An Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/347. Cho 167 tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_{167}$ thoả mãn các điều kiện sau:

$$(1) \sum_{i=1}^{167} |A_i| = 2004;$$

$$(2) |A_j| = |A_i| |A_i \cap A_j| \text{ với mọi } i, j \in \{1, 2, \dots, 167\} \text{ và } i \neq j.$$

Tính $\left| \bigcup_{i=1}^{167} A_i \right|$, trong đó $|A|$ là kí hiệu số phần tử của tập hợp A .

NGUYỄN SƠN HÀ

(GV Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T9/347. Tìm tất cả những hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, thoả mãn điều kiện

$$f_3(x) + f(x) = 2x, \text{ với mọi } x \text{ thuộc } \mathbb{R},$$

trong đó $f_3(x) = f(f(f(x)))$.

NGUYỄN VĂN ÁI

(GV THPT Lê Thế Hiếu, Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T10/347. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y},$$

trong đó x, y, z là các số dương thoả mãn

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 2006.$$

PHẠM HOÀNG HÀ

(GV THPT chuyên ĐHNN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/347. Tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB . Gọi điểm đối xứng của D qua M là D_1 , của E qua N là E_1 , của F

qua P là F_1 . Chứng minh rằng điểm O nằm trong tam giác $D_1E_1F_1$.

THÁI VIỆT THẢO

(Sở Giáo dục - Đào tạo Nghệ An)

Bài T12/347. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 theo thứ tự là trọng tâm các mặt BCD, CDA, DAB, ABC của tứ diện $ABCD$. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự là giao điểm của AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh rằng

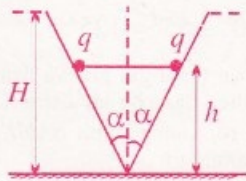
$$\frac{AG_1}{AA_1} + \frac{BG_2}{BB_1} + \frac{CG_3}{CC_1} + \frac{DG_4}{DD_1} \leq \frac{8}{3}.$$

NGUYỄN TRIỆU DŨNG

(GV TTGDTX Thanh Trì, Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/347. Một máng hình nón với góc ở đỉnh là 2α chứa hai vật nhỏ tích điện như nhau cùng khối lượng m và nổi với nhau bằng một sợi dây ở cùng độ cao h (hình vẽ). Ban đầu hai vật nằm trong mặt phẳng thẳng đứng chứa đỉnh hình nón. Sau khi đốt dây, hai vật bắt đầu



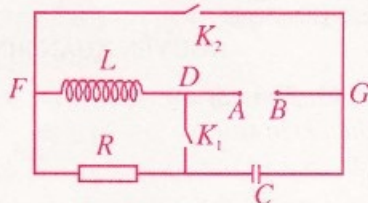
chuyển động lên trên dọc theo bề mặt của máng trong mặt phẳng thẳng đứng và khi tới độ cao H phía trên đỉnh hình nón thì hai vật bay ra ngoài với vận tốc v . Hệ số ma sát của vật với bề mặt máng là $\mu = \tan \alpha$ ($\alpha > 1$). Tính điện tích q của mỗi vật.

TRẦN VĂN NGÀ

(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài L2/347. Một mạch điện như sơ đồ dưới, trong đó $u_{AB} = 200\sqrt{2} \sin 100\pi t$ (V);

$$R = 75 (\Omega); C = \frac{10^{-4}}{\pi} (\text{F}); L = \frac{2}{\pi} (\text{H}).$$



Viết biểu thức cường độ dòng điện tức thời qua mạch chính trong mỗi trường hợp sau:

- 1) K_1 mở, K_2 đóng; 2) K_1 đóng, K_2 mở;
- 3) K_1 và K_2 cùng mở; 4) K_1 và K_2 cùng đóng.

NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/347. (for 6th grade)

Compare $\frac{5}{8}$ with $\left(\frac{389}{401}\right)^{10}$.

T2/347. (for 7th grade)

Let E, F be points respectively on the sides AC, AB of a triangle ABC such that $\widehat{ABE} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}, \widehat{ACF} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. The lines BE and CF intersect at O . Suppose that $OE = OF$. Prove that $AB = AC$ or $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

T3/347. Find integral solutions of the system

$$\begin{cases} 4x^3 + y^2 = 16 \\ z^2 + yz = 3. \end{cases}$$

T4/347. Consider all quadratic equations $ax^2 + bx + c = 0$ having two roots belonging to the segment $[0; 2]$. Find the greatest value of the expression

$$P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac}.$$

T5/347. Consider all triangles ABC such that the measures a, b, c of their sides satisfy the relation $1964ab + 15bc + 10ca = 2006abc$. Find the least value of the expression

$$M = \frac{1974}{p-a} + \frac{1979}{p-b} + \frac{25}{p-c}$$

where p is the semiperimeter of triangle ABC .

T6/347. Let be given a quadrilateral $ABCD$. Take two points M, P respectively on the sides AB, AC such that $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD}$. Find the locus of the midpoints I of the segments MP when M, P moves respectively on AB, AC .

T7/347. Let ABC be a triangle with $\widehat{BAC} = 135^\circ$ and AM, BN be two of its altitudes (M on BC, N on CA). The line MN cuts the perpendicular bisector of AC at P . Let D and E be the midpoints respectively of NP and BC . Prove that ABC is a right isosceles triangle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/347. Let be given 167 sets $A_1, A_2, \dots, A_{167}$ satisfying the following conditions:

(Xem tiếp trang 26)



Bài T1/343 (Lớp 6). Tìm x và y , biết rằng $|x-2005| + |x-2006| + |y-2007| + |x-2008| = 3$.

Lời giải. Chú ý rằng $|a| = |-a| \geq a$ với giá trị a tùy ý. Áp dụng điều trên có

$$|x-2005| + |x-2008| = |x-2005| + |2008-x| \geq x - 2005 + 2008 - x = 3.$$

Từ đó và giả thiết đề bài suy ra

$$|x-2006| + |y-2007| \leq 0.$$

Điều này chỉ xảy ra khi $|x-2006| = 0$ và $|y-2007| = 0$ hay $x = 2006$ và $y = 2007$. Thay vào giả thiết đề bài ta thấy $x = 2006$ và $y = 2007$ thỏa mãn.

Nhận xét. 1) Một số bạn giải dài dòng khi tính thêm $2005 \leq x \leq 2008$ hoặc xét các giá trị của x trong các khoảng $x \leq 2005$, $2006 \leq x \leq 2007$, $x \geq 2008$. Trong lời giải trên cũng không cần dùng đến bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a+b|$.

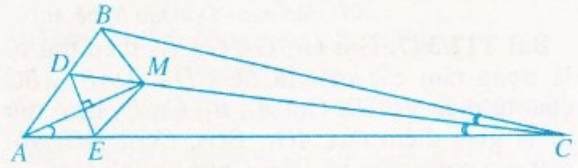
2) Các bạn lớp 6 có lời giải đúng và gọn là:

Phú Thọ: Kim Huyền Trang, Nguyễn Mỹ Linh, Nguyễn Quang Huy, 6A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Hoàng Sơn, Phùng Thảo Linh, 6A, Nguyễn Hoàng Hào, Tạ Thị Việt Trinh, Nguyễn Văn Cường, Nguyễn Thị Hà Anh, Nguyễn Mạnh Hùng, Bùi Thị Ngọc Bích, Kim Đình Đại, Nguyễn Thị Phương Liên, Nguyễn Kiều Anh, Nguyễn Thị Lệ Thu, Nguyễn Tuấn Anh Quân, Phạm Thị Thùy Linh, 6B, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Nguyễn Hồng Vân, 6D, THCS Triệu Đề, Lập Thạch; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Tiến, 6C, THCS Anh Sơn, Anh Sơn, Lê Công Thắng, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Trị:** Nguyễn Đức Tú, 6/4 THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hà; **Đắk Lắk:** Nguyễn Hoàng Minh Trâm, 6E, THCS Chu Văn An, Eakar.

VIỆT HẢI

Bài T2/343 (Lớp 7). Cho tam giác ABC với $\widehat{BAC} = 55^\circ$, $\widehat{ABC} = 115^\circ$. Trên tia phân giác của góc ACB lấy điểm M sao cho $\widehat{MAC} = 25^\circ$. Tính số đo góc BMC .

Lời giải. Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - (55^\circ + 115^\circ) = 10^\circ$. Kẻ $DE \perp AM$ ($E \in AC$).



Ta có $\widehat{DAM} = \widehat{DMA} = 30^\circ$ nên $\triangle DAM$ cân tại D . Từ đó suy ra $\widehat{ADM} = 120^\circ$ và DE là đường phân giác của góc ADM nên $\widehat{EDM} = \widehat{BDM} = 60^\circ$, do đó $\triangle EDC = \triangle BDC$ (g.c.g). Xét hai tam giác BMC và EMC có $BC = EC$ (theo trên), $\widehat{MCB} = \widehat{MCE} = 5^\circ$, MC chung, do đó $\triangle BMC = \triangle EMC$ (c.g.c), suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{EMC} = 180^\circ - \widehat{DME} = 180^\circ - \widehat{DAE} = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$.

Nhận xét. 1). Rất đông các bạn tham gia giải và đều đúng. Ngoài lời giải trên đây, nhiều bạn còn lấy điểm K trên tia CB sao cho $CK = CA$, rồi chứng minh $\triangle AMK$ đều, sau đó cũng đi đến kết quả tương tự.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và hình vẽ chính xác:

Vĩnh Phúc: Phùng Ngọc Quý, Phùng Thanh Lam, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Hồng Vân, 7D, THCS Tam Sơn, huyện Từ Sơn, Vũ Xuân Tùng, THCS Từ Sơn, TX Bắc Ninh; **Hà Nội:** Trần Hà Lan, Nguyễn Nguyệt Anh, 7A11, THCS Giảng Võ, Ba Đình, Trương Thùy Linh, 6I, THCS Ba Đình; **Hung Yên:** Phan Thị Hà, 6A, THCS Tiên Lữ; **Hải Phòng:** Lê Anh Tú, 7B9, THCS Chu Văn An, Lê Chân; **Thanh Hóa:** Hoàng Tiến Dũng, Trương Quốc Cường, Lê Hoàng Vũ, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Lê Đình Huy, 7B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định; **Nghệ An:** Phạm Thế Hoàng, Đinh Viết Tú, Vũ Đình Long, 7A, Võ Thị Thương, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Vũ Thị Đài Linh, Nguyễn Thị Mai Uyên, 7C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Ngãi:** Dương Trần, Võ Quang Viễn, 7A, THCS Hành Trung, Phan Nữ Như Huyền, 7D, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/343. Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn các điều kiện sau :

i) $x^3 + y^3 = 2z^3$;

ii) $x + y + z$ là số nguyên tố.

Lời giải. Sử dụng hằng đẳng thức

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b), \text{ ta được}$$

$$(x+y+z)^3 = (x+y)^3 + z^3 + 3z(x+y)(x+y+z) = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + z^3 + 3z(x+y)(x+y+z)$$

$$= 2z^3 + z^3 + 3(x+y)(xy+zx+zy+z^2) \\ = 3z^3 + 3(x+y)[x(y+z)+z(y+z)].$$

Từ đó

$$(x+y+z)^3 = 3z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) : 3.$$

Do đó $(x+y+z):3$.

Cùng với giả thiết $x+y+z$ là số nguyên tố, nên $x+y+z=3$.

Vai trò của x và y trong bài toán như nhau, không mất tính tổng quát, có thể giả thiết $x \leq y$. Kết hợp với i) ta được $x \leq z \leq y$.

Ta có $3 = x+y+z \geq 3x \Rightarrow x \leq 1$.

Vì x là số tự nhiên, nên $x=0$ hoặc $x=1$.

1) Nếu $x=0$. Ta có y, z là các số tự nhiên thoả mãn $\begin{cases} y+z=3 \\ z \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z=1 \\ y=2 \end{cases}$.

Cả hai nghiệm trên không thoả mãn điều kiện i).

2) Nếu $x=1$. Ta có y, z là các số tự nhiên thoả mãn $\begin{cases} y+z=2 \\ 1 \leq z \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Nghiệm $x=y=z=1$, thoả mãn bài toán.

Nhận xét. 1) Có gần 600 bạn tham gia giải bài toán này và hầu hết có lời giải đúng. Điểm mấu chốt khi giải bài toán là chứng minh $(x+y+z):3$ để suy ra $x+y+z=3$.

Có thể sử dụng $n^3 - n = n(n-1)(n+1):3$ và từ giả thiết, có $x^3 + y^3 + z^3 = 3z^3:3$, có thể suy ra $(x+y+z):3$.

2) Các bạn lớp 6, 7 sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Duy Anh, Nguyễn Thuý Linh, Nguyễn Thị Huyền Trang, 6A, Nguyễn Hải Duy, Hoàng Quỳnh Liên, Phạm Mỹ Linh, Tạ Thị Việt Chinh, Nguyễn Thị Hà Anh, Nguyễn Tuấn Anh Quân, Nguyễn Việt Long, Lê Văn Tú, Nguyễn Kiều Anh, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghe An:** Lê Thị Thảo, Hồ Thị Quỳnh Mai, Vũ Mai An, Đồng Vinh Quang, Nguyễn Hồng Lâm, Đinh Công Thuật, Nguyễn Thị Thanh, Hồ Việt Hằng, Lê Việt Hải, Hoàng Mạnh Cường, Hồ Thuý Hằng, Phạm Hồng Phi, Nguyễn Đức Linh, 7C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Vũ Đình Long, Phạm Thế Hoàng, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** Lê Quang Huy, 7H1, THCS Trưng Vương, Q Hoàn Kiếm; **Hưng Yên:** Phan Thị Hà, 6A, THCS Tiên Lữ; **Phú Thọ:** Nguyễn Trường Giang, 7A2, THCS Giáy, Phong Châu, Phú Ninh; **Quảng Trị:** Hồ Sĩ Ngọc Tiến, 7A, THCS Diệu Thuận; **Hải Phòng:** Nguyễn Ngọc Huy, 7A, THCS Trần Văn Ôn, Hồng Bàng.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/343. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+86} - \sqrt[3]{x-5} = 1 \quad (1)$$

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+86} - \sqrt[3]{x-5})^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow x+86 - (x-5) -$$

$$- 3\sqrt[3]{(x+86)(x-5)}(\sqrt[3]{x+86} - \sqrt[3]{x-5}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 91 - 3\sqrt[3]{(x+86)(x-5)} = 1 \quad (2)$$

$$(vì \sqrt[3]{x+86} - \sqrt[3]{x-5} = 1)$$

$$(2) \Leftrightarrow (x+86)(x-5) = 27000$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 81x - 27430 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-130)(x+211) = 0 \Leftrightarrow x = 130 \text{ hoặc } x = -211.$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là $x = 130$ và $x = -211$.

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải và hầu hết là đúng. Một số bạn đã đưa ra và giải bài toán tổng quát hơn: "Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x+b} = c$ ".

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: Nguyễn Thành Dũng, 9A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ; **Hà Nội:** Nguyễn Quý Tuấn, 9A, PTDL Lương Thế Vinh, Cầu Giấy; **Hà Nam:** Dương Văn Năm, 9A, THCS Văn Xá, Kim Bảng; **Nam Định:** Trần Thị Hồng Vân, 9D, Nguyễn Hiền, Nam Trực; **Hải Phòng:** Nguyễn Ngọc Huy, 7A, THCS Trần Văn Ôn, Hồng Bàng, Trần Anh Quân, 8A2, THCS Hồng Bàng, Hồng Bàng; **Thanh Hóa:** Lê Trọng Cường, 8B, THPT Nguyễn Chí Ch, Đông Sơn; **Hà Tĩnh:** Vương Bằng Việt, 9/4, THCS Lê Văn Thiêm, TX Hà Tĩnh; **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Quảng Trị:** Nguyễn Thúc Vũ Hoàng, 6M, THCS Nguyễn Huệ, TX Đông Hà; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Nguyễn Minh Dương, 9A1, THCS Võ Trường Toản, TP. Vũng Tàu; **Kiên Giang:** Vũ Đại Nghĩa, 9/3, THCS Mai Thị Hồng Hạnh, Giồng Riềng.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/343. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a^4}{(b-1)^3} + \frac{b^4}{(a-1)^3}$$

trong đó a, b là các số lớn hơn 1 và thoả mãn điều kiện $a+b \leq 4$.

Lời giải. Do $a > 1, b > 1$ nên $a-1 > 0, b-1 > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có

$$A \geq \frac{2a^2b^2}{(a-1)(b-1)\sqrt{(a-1)(b-1)}} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } 0 < 1.(b-1) \leq \frac{b^2}{4} \quad (2)$$

$$0 < 1.(a-1) \leq \frac{a^2}{4} \quad (3)$$

$$4 \geq a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 4 \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra

$$A \geq \frac{2a^2b^2 \cdot 4^3}{a^3b^3} = \frac{128}{ab} \geq \frac{128}{4} = 32.$$

$$A = 32 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^4}{(b-1)^3} = \frac{b^4}{(a-1)^3} \\ a-1=b-1=1 \Leftrightarrow a=b=2. \\ a+b=4. \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 32 và đạt được khi $a=b=2$.

Nhận xét. a) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Đặc biệt, bạn **Nguyễn Quốc Trường**, 8A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải, Thái Bình nêu ra bài toán tổng quát:

Giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{x_1^m}{(x_2-1)^k} + \frac{x_2^m}{(x_3-1)^k} + \dots + \frac{x_{n-1}^m}{(x_n-1)^k} + \frac{x_n^m}{(x_1-1)^k}$$

(trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số lớn hơn 1 thỏa mãn

$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 2n$ và m, n, k là các số tự nhiên thỏa mãn $m \leq 2k$) là $n \cdot 2^m$ và đạt được khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 2$.

b) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

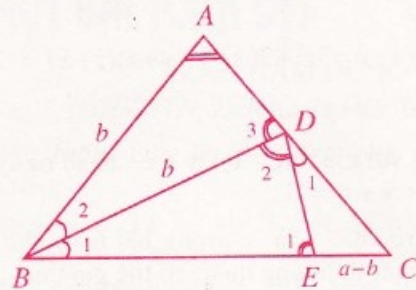
Hải Phòng: Phạm Duy Hiệp, 8B8, THCS Trần Phú, Nguyễn Ngọc Huy, 7A, THCS Trần Văn Ôn, Hồng Bàng;
Hà Tây: Đinh Hoàng Long, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức, Phạm Thành Quang, Đội 4, La Khê, TX Hà Đông, Kiều Thanh Khiêm, 8A, THCS Kim Hưng, Tam Hưng;
Hải Dương: Phạm Ngọc Dương, 8B, THCS Liên Hòa, Kim Thành; **Thái Bình:** Nguyễn Quốc Trường, 8A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thế Hưng, 9A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Hồng, Nguyễn Thúy Vy, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** Nguyễn Minh Anh, 9B, THCS Trần Mai Ninh, Nguyễn Cao Tuấn, Nguyễn Thị Ngọc, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Luật, 9B, THCS Sơn Hồng, Hương Sơn; **Quảng Bình:** Đinh Thanh Hà, 9A, THCS Nguyễn Hàm Ninh, Quảng Trạch; **Quảng Trị:** Nguyễn Đức Tú, 6⁴, THCS Trần Hưng Đạo, TX Đông Hà; **Yên Bái:** Nguyễn Thu Thủy, 9I, THCS Lê Hồng Phong; **Phú Thọ:** Vũ Hồng Quân, 9A3, THCS Lâm Thao; **Đắk Lắk:** Nguyễn Hoàng Phương, 9E, THCS Chu Văn An; **Kiên Giang:** Võ Đức Huy, 9⁴, THCS Lê Quý Đôn, TP. Rạch Giá.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/343. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $AB = AC = b$ ($a > b$). Đường phân giác BD có độ dài bằng cạnh bên. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = 1.$$

Lời giải. (Theo bạn **Bùi Văn Hoàng**, 7B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, Nghệ An).



Theo tính chất của đường phân giác, ta có

$$CD = \frac{ab}{a+b}. \quad (1)$$

Lấy $E \in BC$ sao cho: $BE = b$. Ta thấy, các tam giác BAD , BED cùng cân tại B và bằng nhau.

Từ đó suy ra: $\widehat{D}_1 = 180^\circ - \widehat{D}_2 - \widehat{D}_3 = 180^\circ - \widehat{D}_2 - \widehat{E}_1 = \widehat{B}_1 \Rightarrow \triangle CED \sim \triangle CDB$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow CE \cdot CB = CD^2 \quad (2).$$

Từ (1), (2) với chú ý rằng $CE = a - b$, ta có

$$\begin{aligned} (a-b)a &= \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{a+b}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ab} &= 1 \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) &= 1 \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng. Tuy nhiên, nhiều bạn cho lời giải quá dài, một số bạn còn dùng đến các công thức biến đổi lượng giác.

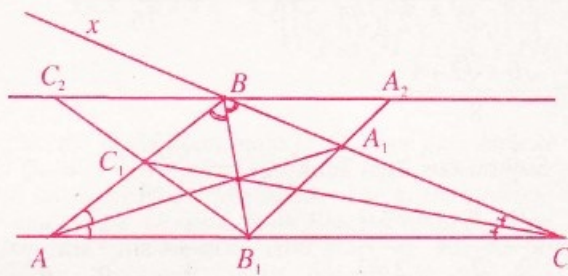
2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Thanh Hóa: Nguyễn Cao Tuấn, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ; **Phú Yên:** Nguyễn Vũ Hoàng Minh, 8A, THCS Lương Thế Vinh, TP Tuy Hòa; **Kiên Giang:** Võ Đức Huy, 9⁴, THCS Lê Quý Đôn, Thành phố Rạch Giá; **Lâm Đồng:** Đinh Thành Nhân, 9A7, THCS Quang Trung, TP. Đà Lạt; **Quảng Trị:** Võ Phi Long, 9E, THCS Gio Linh; **Vĩnh Phúc:** Võ Thị Lan Anh, Nguyễn Thị Hải Yến, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Bảo Quốc, 9C, Võ Thị Hồng Huyền, 8C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Phạm Thị Quỳnh My, 8K, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T7/343. Cho tam giác ABC với các đường phân giác trong AA_1 , BB_1 , CC_1 . Biết rằng $\widehat{A_1B_1C_1} = 90^\circ$. Tính số đo góc ABC .

Lời giải.



Qua B kẻ đường thẳng song song với AC. Kéo dài B_1C_1 và kéo dài B_1A_1 cắt đường thẳng trên tương ứng tại C_2 và A_2 . Theo định lý Thales và tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{BC_2}{AB_1} = \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{CB}{CA} \quad (1)$$

$$\frac{BA_2}{CB_1} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC} \quad (2)$$

Chia theo vế của (1) cho (2) ta được

$$\frac{BC_2}{BA_2} \times \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CB}{BA}$$

Mà $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CB}{BA}$ nên $\frac{BC_2}{BA_2} = 1$

hay $BA_2 = BC_2$ (3)

Do $\triangle C_2B_1A_2$ vuông, cùng với (3) suy ra

$$BB_1 = BC_2 = BA_2. \text{ Dẫn đến } \widehat{BB_1C_2} = \widehat{BC_2B_1} = \widehat{C_2B_1A}.$$

Vậy $\widehat{AB_1C_2} = \widehat{BB_1C_2}$. Do đó C_1 là tâm đường tròn bàng tiếp $\triangle BB_1C$.

$$\text{Từ đó } \widehat{C_1BA} = \widehat{AB_1C_1} = \widehat{B_1BC} = \frac{180^\circ}{3}.$$

$$\text{Do vậy } \widehat{ABC} = 120^\circ.$$

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: Phan Thị Hà, 6A, THCS Tiên Lữ; **Phú Thọ:** Nguyễn Hoàng Hải, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Nguyễn Lâm Phúc, 8A, THPT Hà Nội-Amsterdam, **Thanh Hoá:** Hoàng Anh Tuấn, 9A, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** Phan Xuân Minh, 9C, THCS Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** Trần Đức Thiện, 9G, THCS Kỳ Anh; **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk.

VŨ KIM THỦY

Bài T8/343. Với mỗi số dương x , kí hiệu $a(x)$ là số các số nguyên tố không lớn hơn x . Với mỗi

số nguyên dương m , kí hiệu $b(m)$ là số các ước nguyên tố của m . Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n luôn có

$$a(n) + a\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + a\left(\frac{n}{n}\right) = b(1) + b(2) + \dots + b(n).$$

Lời giải. (Theo bạn Trịnh Văn Vượng, 11T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa). Ta chứng minh công thức trên bằng quy nạp.

Với $n = 1$ hiển nhiên ta có $a(1) = b(1) = 0$.

Giả sử công thức đúng tới n , tức là

$$\sum_{i=1}^n a\left(\frac{n}{i}\right) = \sum_{i=1}^n b(i) \quad (1)$$

Ta chứng minh (1) đúng với $n + 1$.

Gọi $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ là tất cả các ước nguyên tố của $n + 1$. Ta có $b(n + 1) = m$.

Kí hiệu $X = \{1, 2, \dots, n + 1\}$, $A = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ ở đó $q_i = \frac{n+1}{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

$$\text{Vì } \frac{n}{i} \leq \frac{n+1}{i} \leq \frac{n}{i} + 1 \quad \forall i \in X \text{ nên}$$

$$a\left(\frac{n}{i}\right) \leq a\left(\frac{n+1}{i}\right) \leq a\left(\frac{n}{i}\right) + 1.$$

$$\text{Do đó } a\left(\frac{n+1}{i}\right) = \begin{cases} a\left(\frac{n}{i}\right) + 1 & \text{nếu } i \in A \\ a\left(\frac{n}{i}\right) & \text{nếu } i \notin A. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \sum_{i=1}^{n+1} a\left(\frac{n+1}{i}\right) &= \sum_{i=1}^n a\left(\frac{n}{i}\right) + m \quad (\text{do } a(1) = 0). \\ &= \sum_{i=1}^n a\left(\frac{n}{i}\right) + m = \sum_{i=1}^{n+1} b(i) \quad (\text{do } b(n+1) = m \text{ và giả thiết quy nạp}). \end{aligned}$$

Vậy công thức (1) cũng đúng với $n + 1$.

Nhận xét. Hầu hết các bạn tham gia giải đều chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Một số bạn chứng minh trực tiếp.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Trần Trung Dũng, Vũ Văn Quang, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Đặng Anh Tuấn, 11 chuyên, ĐHSPT Hà Nội; **Hà Tây:** Nguyễn Hữu Hiến, 10T, Trịnh Ngọc Tú, 11T, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hưng Yên:** Phạm Tiến Dũng, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Hoàng Vũ Hạnh, 11T, THPT chuyên Lam Sơn;

Nghệ An: Trịnh Văn Nam, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Văn Thìn, 12A, chuyên Đại Học Vinh; **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 9A5, THCS Nguyễn Du; **Bạc Liêu:** Trần Mỹ Linh, 10T, THPT chuyên Bạc Liêu; **Bình Định:** Võ Xuân Thanh, 11T, THPT Tuy Phước.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/343. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - (x-4)\sqrt{x-7} - 3x + 28 = 0 \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 7$.

Biến đổi ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - (x-4)\sqrt{x-7} - 3x + 28 \\ &= \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} - 2) - (x-4)(\sqrt{x-7} - 1) - (4x - 32) \\ &= \sqrt[3]{x} \cdot \frac{x-8}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} - (x-4) \cdot \frac{x-8}{\sqrt{x-7} + 1} - 4(x-8) \\ &= (x-8) \cdot A \text{ trong đó} \\ & A = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} - \frac{x-4}{\sqrt{x-7} + 1} - 4 \\ & < 1 - 0 - 4 = -3 < 0 \text{ do } x \geq 7. \end{aligned}$$

Do đó $(x-8) \cdot A = 0$ khi và chỉ khi $x = 8$.

Vậy $x = 8$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Nhận xét. Đây là bài toán cơ bản, và có biến đổi đẹp. Tôi soạn nhận được lời giải của gần 150 bạn học sinh, hầu hết các bạn đều giải theo cách trên. Có một số bạn đã phải dùng đạo hàm để khảo sát hàm số (chứng minh hàm số đơn điệu, do đó $x = 8$ là nghiệm duy nhất). Hoan nghênh các bạn lớp 7, lớp 8 sau có lời giải tốt: **Vinh Phúc:** Đỗ Mạnh Hùng, 8E, THCS Đạo Đức, Bình Xuyên; **Hải Dương:** Phạm Ngọc Dương, 8B, THCS Liên Hòa, Kim Thành; **Thanh Hóa:** Lê Khánh Toàn, 8B, THCS Điện Biên; **Quảng Trị:** Đinh Thị Hà Nhi, 7C, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà, Trần Văn Thành, 7A, THCS Cam Hiếu, Cam Lộc, Lê Thị Huyền Trang, 8/4, THCS Nguyễn Trãi, Hoàng Đức Hân, 8/2, THCS Thành Cổ, TX Quảng Trị; **TP. Cần Thơ:** Lê Thị Lan Anh, 7A3, THCS Bùi Hữu Nghĩa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/343. Không dùng máy tính, tìm giá trị đúng của góc nhọn x thỏa mãn

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)^2}}$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Từ giả thiết, ta có

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1+[(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)]^2} = \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+8}{16} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \cos \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Do x là góc nhọn nên $x = \frac{\pi}{24}$.

Cách khác

Từ giả thiết suy ra

$$\tan x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1).$$

Suy ra

$$\frac{1}{\tan x} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) = \sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2.$$

Do đó

$$\tan 2x = \frac{2}{\frac{1}{\tan x} - \tan x} = \frac{2}{2(\sqrt{3}+2)} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{4+2\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \\ &= \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \tan \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Từ đây, ta thu được $x = \frac{\pi}{24}$.

Nhận xét. Các bạn đều giải tương tự như các cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/343. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^2 = 4\text{Scot}A$ trong đó $BC = a$ và S là diện tích tam giác ABC . Gọi O và G theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm tam giác ABC . Tính góc giữa hai đường thẳng AG và OG .

Lời giải

Chúng ta giải bài toán trên trong trường hợp ABC không phải là tam giác đều. Gọi $AC = b$, $AB = c$.

Ta có $2S = bc \cdot \sin A$.
 Từ hệ thức $a^2 = 4S \cdot \cot A$,
 suy ra $a^2 = 2bc \cdot \cos A$.

Sử dụng định lý cosin cho tam giác ABC ta được hệ thức $b^2 + c^2 = 2a^2$ (1)

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \text{ suy ra}$$

$$9\overrightarrow{OG}^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2.$$

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \quad (R \text{ là bán kính}$$

đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Gọi M là trung điểm của BC thì ta thấy

$$AG^2 = \frac{4}{9}AM^2 =$$

$$= \frac{4}{9} \left(\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \right) = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}.$$

$$\text{Do đó } AG^2 + OG^2 = R^2 + \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{9} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$AG^2 + OG^2 = R^2 = OA^2$. Từ đó $AG \perp OG$, nghĩa là góc giữa hai đường thẳng AG và OG có số đo bằng 90° .

Nhận xét. Toà soạn nhận được rất nhiều bài giải cho đề toán này. Đa số các bạn đều sử dụng phương pháp vector đi đến công thức $G.W. Leibniz$:

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(với mọi điểm M) để tính OG^2 theo R và a, b, c .

Tiếp đó dùng định lý cosin suy rộng để từ giả thiết $a^2 = 4S \cdot \cot A$ dẫn đến hệ thức (1) rồi suy ra kết quả cần tìm. Một số bạn đã giải thêm bài toán: *Giả sử I và O theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC không đều. Khi đó $\widehat{AIO} \leq 90^\circ$ khi và chỉ khi $2a < b + c$. Sau đây là các bạn có lời giải gọn hơn cả:*

Hà Nội: Tạ Văn Hà, Phạm Ngọc Trâm, 10A1 Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội, Đoàn Trí Dũng, Phạm Quang Định, Nguyễn Quang Kiên, 11A1, Đặng Anh Tuấn, 11A2, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, Nguyễn Đức Bằng, Nguyễn Lệnh Tuấn, 11A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Cầu Giấy; **Vĩnh Phúc:** Hà Tuấn Anh, 10A1, Nguyễn Văn Ngọc, Phùng Đình Phúc, Nguyễn Kim Thuật, 11A1, Vũ Văn Quang, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tây:** Lê Vĩnh Hoà, Trịnh Ngọc Tú, 11Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TX Hà Đông; **Hưng Yên:** Phan Tiến Dũng, Nguyễn Văn Thọ, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** Nguyễn Tuấn Thành, Phan Tiến Thành, Tường Thế Nghĩa, 10T1, Đỗ Thị Thu Thảo, 10T2, Vũ Xuân Dương, Vương Minh Quang.

11Toán, THPT Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương; **Thanh Hoá:** Trịnh Văn Vương, 11T, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** Hoàng Thị Thuý, 11A1, Tăng Văn Vương, 11A2, Phan Xuân Minh, Nguyễn Văn Trường, 10A10, THPT chuyên ĐH Vinh, Hoàng Minh Thắng, 10A1, Trịnh Văn Nam, Lê Ngọc Thạch, 11A1, THPT Phan Bội Châu, TP Vinh; **Hà Tĩnh:** Bùi Hoàng Đan, Nguyễn Bảo Minh Hoàng, 10 Toán, Nguyễn Thị Hạnh Dung, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** Nguyễn Đình Tuấn, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TX Đông Hà; **Quảng Bình:** Phạm Tiến Đồng, 11T, THPT chuyên; **Khánh Hoà:** Đinh Văn Vương, 10T, Nguyễn Thanh Nam, 11T, THPT Lê Quý Đôn, TP Nha Trang; **Đắk Lắk:** Lê Đức Quang, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP Buôn Ma Thuột; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Đinh Ngọc Thái, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu; **Vĩnh Long:** Chương Công Danh, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Cần Thơ:** Võ Quốc Bá Cẩn, 12A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

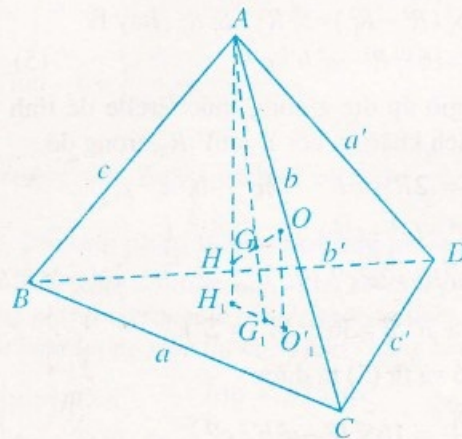
HỒ QUANG VINH

Bài T12/343. Giả sử $ABCD$ là một tứ diện trực tâm (các đường cao đồng quy). Gọi (O, R) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$; r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện đó; R_A, R_B, R_C, R_D theo thứ tự là bán kính mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện $OBCD, OACD, OABD, OABC$. Chứng minh rằng

$$a) \frac{1}{R_A^2} + \frac{1}{R_B^2} + \frac{1}{R_C^2} + \frac{1}{R_D^2} \geq \frac{16}{9R^2}; \quad (i)$$

$$b) \frac{R_A}{\sqrt{3R^2 + 4R_A^2}} + \frac{R_B}{\sqrt{3R^2 + 4R_B^2}} + \frac{R_C}{\sqrt{3R^2 + 4R_C^2}} + \frac{R_D}{\sqrt{3R^2 + 4R_D^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R}{r}. \quad (ii)$$

Lời giải. Ta đưa vào các kí hiệu sau đây: $a, a'; b, b'; c, c'$ lần lượt là độ dài các cặp cạnh đối diện $BC, DA; CA, DB; AB, DC$; h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là độ dài các đường cao $AH_1, BH_2, CH_3,$



DH_4 của tứ diện; H, G và V lần lượt là trục tâm, trọng tâm và thể tích của tứ diện.

Gọi O', R, S_1 lần lượt là tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích của tam giác BCD (mặt đối diện với đỉnh A).

a) Vì $ABCD$ là tứ diện trục tâm nên chân các đường cao H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trục tâm các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D đồng thời ta có các hệ thức

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 \quad (1)$$

Trong tam giác BCD ta có hệ thức

$$\overrightarrow{O_1 H_1} = \overrightarrow{O_1 B} + \overrightarrow{O_1 C} + \overrightarrow{O_1 D}.$$

Từ đó ta tính được

$$H_1 B^2 + H_1 C^2 + H_1 D^2 = 12R_1^2 - (a^2 + b'^2 + c'^2).$$

Mặt khác, lại có các hệ thức sau

$$h_1^2 = AH_1^2 = c^2 - H_1 B^2 = b^2 - H_1 C^2 = a'^2 - H_1 D^2.$$

Từ đó suy ra

$$h_1^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2 - 12R_1^2) \quad (2)$$

Đối chiếu (1) và (2) ta còn được

$$h_1^2 = a^2 + a'^2 - 4R_1^2 \quad (3)$$

Từ $3V = S_1 h_1$ và từ (3) suy ra

$$9V^2 = S_1^2 h_1^2 = S_1^2 (a^2 + a'^2 - 4R_1^2),$$

hay là $36V^2 = 4S_1^2 (a^2 + a'^2) - a^2 b'^2 c'^2$.

$$\text{Từ đó ta được } \frac{a^2 b'^2 c'^2}{S_1^2} = 4(a^2 + a'^2) - \frac{36V^2}{S_1^2},$$

$$\text{hay là } \frac{a^2 b'^2 c'^2}{S_1^2} = 4(a^2 + a'^2) - 4h_1^2 \quad (4)$$

Gọi V_1 là thể tích của tứ diện $OBCD$ thì ta có $3V_1 = S_1 \cdot OO_1$

$$9V_1^2 = S_1^2 (R^2 - R_1^2) = S_1^2 R^2 - S_1^2 R_1^2, \text{ hay là}$$

$$12^2 V_1^2 = 16S_1^2 R^2 - a^2 b'^2 c'^2 \quad (5)$$

Bây giờ áp dụng công thức Crelle để tính V_1 theo cách khác, ta có: $\Sigma = 6V_1 R_A$, trong đó

$$\begin{aligned} 16\Sigma^2 &= 2R^4 (a^2 b'^2 + a^2 c'^2 + b'^2 c'^2) \\ &- R^4 (a^4 + b'^4 + c'^4) \\ &= R^4 (2a^2 b'^2 + 2a^2 c'^2 + 2b'^2 c'^2 - a^4 - b'^4 - c'^4) = 16R^4 S_1^2. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } R^4 S_1^2 = 36V_1^2 R_A^2 (= \Sigma^2).$$

Từ đó và từ (5) ta được

$$\frac{4R^4 S_1^2}{R_A^2} = 16S_1^2 R^2 - a^2 b'^2 c'^2$$

$$\Rightarrow \frac{4R^4}{R_A^2} = 16R^2 - \frac{a^2 b'^2 c'^2}{S_1^2}.$$

Kết hợp đẳng thức này với (4) ta được

$$\frac{R^4}{R_A^2} = 4R^2 - (a^2 + a'^2) + h_1^2 \quad (6)$$

Lại từ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ta được

$$16(R^2 - OG^2) = a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2, \text{ và}$$

$$\text{do đó ta có } a^2 + a'^2 = \frac{16}{3}(R^2 - OG^2) \quad (7)$$

Ngoài ra, gọi G_1 là trọng tâm tam giác BCD ta dễ dàng tính được

$$12R_1^2 = \frac{4}{3}(a^2 + b'^2 + c'^2 + 9O_1 G_1^2).$$

Từ đó và từ (2) ta được

$$h_1^2 = \frac{1}{3}(a'^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b'^2 + c'^2) + 4O_1 G_1^2$$

và do đó

$$h_1^2 \geq \frac{1}{3}(a'^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b'^2 + c'^2) \quad (8)$$

Đối chiếu (6), (7) và (8) ta được BĐT

$$\begin{aligned} \frac{R^4}{R_A^2} &\geq \frac{1}{3}(a'^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b'^2 + c'^2) - \\ &- \frac{4}{3}R^2 + \frac{16}{3}OG^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Tương tự, ta cũng có ba BĐT nữa biểu thị các tỉ số $\frac{R^4}{R_B^2}, \frac{R^4}{R_C^2}$ và $\frac{R^4}{R_D^2}$ bằng cách thay các cặp bộ ba $(a', b, c; a, b', c')$ lần lượt bởi: $(b', c, a; b, c', a')$; $(c', a, b; c, a', b')$ và $(a', b', c'; a, b, c)$. Sau đó, cộng theo vế bốn BĐT có dạng (9), lưu ý đến hệ thức (1) và áp dụng (7) một lần nữa, ta thu được BĐT (i) cần tìm.

b) Các hệ thức (6) và (7) cho ta hệ thức sau:

$$\frac{R^4}{R_A^2} = h_1^2 - \frac{4}{3}R^2 + \frac{16}{3}OG^2;$$

từ đó ta được

$$h_1^2 = \frac{R^2(3R^2 + 4R_A^2)}{3R_A^2} - \frac{16}{3}OG^2;$$

$$\text{và do đó (do } OG^2 \geq 0) \quad h_1^2 \leq \frac{R^2(3R^2 + 4R_A^2)}{3R_A^2},$$

$$\text{hay là } \frac{R_A}{\sqrt{3R^2 + 4R_A^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{R}{h_1} \quad (10)$$

Ta cũng có ba BĐT nữa tương tự bằng cách hoán vị vòng quanh. Cuối cùng, cộng theo vế bốn BĐT có dạng (10) và sử dụng hệ thức quen thuộc

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r} \quad (11)$$

Ta thu được BĐT (ii) cần tìm. Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi tứ diện ABCD là đều (vì vừa là tứ diện trực tâm vừa là tứ diện gần đều).

Nhận xét. Chỉ có duy nhất bạn Nguyễn Tuấn Dũng, 11A, THPT Phan Chu Trinh, Sông Cầu, Phú Yên tham gia giải bài toán trên. Bạn Dũng có lời giải khá độc đáo chứng minh BĐT (i). Bằng cách đặt $OO_i = d_i$, bạn thu được hệ thức: $R^2 = 2R_A d_1 = 2R_B d_2 = 2R_C d_3 = 2R_D d_4$ hay là $R^2 = 2p_i d_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), trong đó R_A, R_B, R_C, R_D được thay bởi p_1, p_2, p_3, p_4 . Sau đó thiết lập được

$$\text{BĐT } \sum_{i=1}^4 d_i^2 \geq \frac{4}{9} R^2. \text{ Cuối cùng, chứng minh được BĐT}$$

(i) cần tìm.

Tuy nhiên, rất đáng tiếc, do vội vàng bạn Dũng đã chứng minh sai BĐT sau: $(R + d_i)^2 = \left(R + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} d_i\right)^2 \leq$

$$\frac{4}{3} (R^2 + 3d_i^2) !!! \text{ (Chỉ có BĐT } (R + d_i)^2 \leq 2(R^2 + d_i^2) \text{ mà thôi) và từ đó ngộ nhận là đã chứng minh được BĐT (ii).}$$

Tuy nhiên, bạn Dũng vẫn đáng được biểu dương.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/343. Một chất điểm chuyển động nhanh dần trên một đường tròn bán kính R (trên mặt phẳng nằm ngang) sao cho tại mỗi điểm gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến bằng nhau về độ lớn. Vận tốc ban đầu của chất điểm là v_0 . Sau một khoảng thời gian t quãng đường chất điểm đi được là S .

a) Tìm biểu thức vận tốc và gia tốc tức thời theo S ;

b) Tìm biểu thức vận tốc và gia tốc tức thời theo t ;

c) Tìm biểu thức S theo t .

Lời giải. a) Ta có $a_t = a_n \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R} = \frac{v dv}{ds} \quad (1)$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{\frac{S}{R}} \quad (2) \text{ (vì lúc } t = 0, v = v_0).$$

$$\text{Từ đó } a = a_n \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} v_0^2}{R} e^{\frac{2S}{R}}.$$

$$\text{b) Từ (1) ta cũng có } \frac{dv}{v^2} = \frac{dt}{R} \Rightarrow v = \frac{v_0 R}{R - v_0 t} \quad (3)$$

$$\Rightarrow a = a_n \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} v_0^2 R}{(R - v_0 t)^2}.$$

c) Từ (2) và (3) suy ra

$$S = R \ln \frac{v}{v_0} = R \ln \frac{R}{R - v_0 t}$$

chú ý rằng phải có $R - v_0 t > 0 \Rightarrow t < \frac{R}{v_0}$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Ngọc Lâm, 10B chuyên Lí, ĐHKHTN Hà Nội; **Hải Dương:** Vũ Việt Hà, 10 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Vĩnh Phúc:** Tạ Đức Mạnh và Trần Đăng, 10A3, Nguyễn Minh Khuông, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** Ngô Huy Cừ, 11 Lí, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Ninh:** Trần Thái Hà và Trần Đức Trung, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Khánh Hòa:** Lê Thế Huy, 11 Lí, Nguyễn Ngọc Kỳ Nam, 12 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Kim Khuyển, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Ngọc Thành Nam và Lê Kiên Trung, 11A1, THPT Gia Định; **Bình Định:** Lý Viễn Trường, 11A1, THPT Phù Cát I.

MAI ANH

Bài L2/343. Cho hai lò xo L_1 và L_2 . Khi kéo bằng một lực $F = 0,6\text{N}$ thì L_1 giãn ra một đoạn 2cm, còn L_2 giãn ra một đoạn 4cm. Mắc hai lò xo L_1 và L_2 vào hệ như hình bên. Vật có khối lượng $m = 40\text{g}$ (bỏ qua khối lượng của lò xo, ròng rọc và dây treo). Lúc đầu giữ cho hai lò xo không bị biến dạng. Thả tay cho vật dao động không vận tốc đầu. Bỏ qua mọi ma sát.

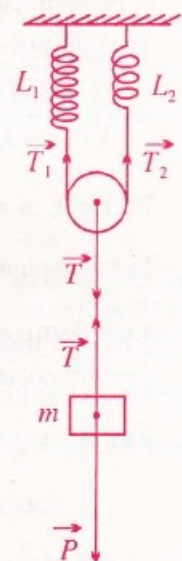
1) Chứng tỏ vật dao động điều hòa;

2) Tìm phương trình dao động của vật m , cho $g = 10\text{m/s}^2$.

Lời giải. 1) Gọi k_1, k_2 là độ cứng của các lò xo L_1, L_2 . Ta có

$$k_1 = \frac{0,6}{0,02} = 30 \text{ (N/m)}; k_2 = \frac{0,6}{0,04} = 15 \text{ (N/m)}.$$

Giả sử tại vị trí cân bằng lò xo L_1 và L_2 giãn các đoạn Δl_1 và Δl_2 tương ứng.



Chọn gốc tọa độ ở vị trí cân bằng, chiều dương hướng xuống dưới. Phương trình định luật II Newton khi vật cân bằng có dạng

$$mg - T = 0 \quad (1)$$

Ta lại có $T = 2T_1 = 2T_2$ hay $T = 2k_1 \Delta l_1 = 2k_2 \Delta l_2$.

Phương trình (1) đưa về dạng

$$mg - k_1 \Delta l_1 - k_2 \Delta l_2 = 0 \quad (2)$$

Khi vật có li độ x thì lò xo L_1 và L_2 lần lượt giãn thêm các đoạn x_1 và x_2 . Ta có phương trình

$$mg - k_1 (\Delta l_1 + x_1) - k_2 (\Delta l_2 + x_2) = mx'' \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$mx'' + k_1 x_1 + k_2 x_2 = 0 \quad (4)$$

Để dàng chứng minh được : $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ và $k_1 x_1 = k_2 x_2$; phương trình (4) đưa về dạng

$$x'' + \frac{4k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)} x = 0 \text{ hay } x'' + \omega^2 x = 0 \quad (5)$$

ở đây $\omega^2 = \frac{4k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}$. Phương trình (5) chứng tỏ dao động của vật là dao động điều hoà.

2) Nghiệm của phương trình (5) là

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}} = 10\sqrt{10} \text{ (rad/s)}.$$

$$\text{Tại } t = 0, x_0 = -\frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2} = -1 \text{ (cm)}.$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_0 = A \sin \varphi = -1 \\ v = A \omega \cos \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \text{ cm} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad.} \end{cases}$$

Vậy phương trình dao động của vật là

$$x = \sin\left(10\sqrt{10}t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (cm)}.$$

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Bình Định : Lê Thanh Bình, Nguyễn Việt Duy, Lê Thị Mỹ Hoa, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Hà Nội :** Nguyễn Ngọc Lâm, 10B chuyên Lí, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội ; **Hà Tĩnh :** Lê Hà Dũng, 11A1, THPT Hồng Lĩnh, Dương Đức Lâm, 12A1, THPT Nguyễn Trung Thiên, Thạch Hà ; **Hải Dương :** Vũ Tuấn Anh, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **TP. Hồ Chí Minh :** Lê Kiên Trung, 11A1, Nguyễn Ngọc Thành Nam, 11A1, THPT Gia Định ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Văn Nam, 11A1,

PROBLEMS ... (Tiếp trang 17)

$$(1) \sum_{i=1}^{167} |A_i| = 2004 ;$$

$$(2) |A_j| = |A_i| |A_i \cap A_j| \text{ for all } i, j \in \{1, 2, \dots, 167\} \text{ and } i \neq j.$$

Calculate $\left| \bigcup_{i=1}^{167} A_i \right|$, where $|A|$ denotes the number of elements of the set A .

T9/347. Find all continuous functions f , defined on $\mathbb{R}$, satisfying the condition $f_3(x) + f(x) = 2x$, for all $x \in \mathbb{R}$, where $f_3(x) = f(f(f(x)))$.

T10/347. Find the least value of the expression

$$H = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y},$$

where x, y, z are positive numbers satisfying $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 2006$.

T11/347. Let ABC be an acute triangle with altitudes AD, BE, CF and let O be its circumcenter. Let M, N, P be the midpoints respectively of the segments BC, CA, AB . Let D_1, E_1, F_1 be the reflexions respectively of D in M , of E in N , of F in P . Prove that O lies inside the triangle $D_1E_1F_1$.

T12/347. Let G_1, G_2, G_3, G_4 be the centroids respectively of the faces BCD, CDA, DAB, ABC of a tetrahedron $ABCD$. Let A_1, B_1, C_1, D_1 be the points of intersection of the circumsphere of the tetrahedron respectively with AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 . Prove that

$$\frac{AG_1}{AA_1} + \frac{BG_2}{BB_1} + \frac{CG_3}{CC_1} + \frac{DG_4}{DD_1} \leq \frac{8}{3}.$$

THPT Yên Lạc II, Vũ Ngọc Quang, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Nghệ An :** Nguyễn Lê Thương, 10A3, Nguyễn Tất Nghia, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu ; **Thanh Hoá :** Trịnh Văn Vương, 11T, Lê Bá Sơn, 10F, THPT Lam Sơn ; **Mai Văn Cường, Mai Ngọc Tuấn, Đinh Văn Tuấn, 12T, THPT Mai Anh Tuấn, Nga Sơn, Lê Xuân Long, 12A1, THPT Nông Cống II.**

NGUYỄN VĂN THUẬN



VỀ SÁCH GIÁO KHOA MỚI HÌNH HỌC 10

NGUYỄN MỘNG HY - Chủ biên
(TP. Hồ Chí Minh)

Khi mới bắt đầu vào học lớp 10, lớp đầu tiên của cấp Trung học phổ thông, học sinh được tiếp cận với một khái niệm hoàn toàn mới của toán học: đó là khái niệm về vectơ và các phép toán về vectơ. Với công cụ vectơ, học sinh sẽ tập làm quen với nhiều nghiên cứu hình học bằng một phương pháp mới có hiệu quả và mang tầm khái quát cao: đó là phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Với sách giáo khoa (SGK) Hình học 10, học sinh sẽ được làm quen với một phương pháp tư duy mới: tư duy hình học bằng những con số biểu thị cho những điểm, tìm hiểu các tính chất của đường thẳng, đường tròn, đường elip thông qua phương trình của các đường đó. Với phương pháp tọa độ, SGK Hình học 10 sẽ giúp cho học sinh có thêm những công cụ mới để suy luận và tư duy một cách chặt chẽ và chính xác, tránh được những hiểu lầm do trực giác gây ra, giúp học sinh mở rộng được kiến thức của mình, tạo điều kiện tiếp cận và làm quen với những kiến thức cao hơn, tổng quát hơn ở bậc Đại học sau này.

1. Nội dung sách giáo khoa Hình học 10

Sách gồm có ba chương.

- Chương I trình bày các khái niệm cơ bản về vectơ và các phép toán về vectơ. Sau đó giới thiệu khái niệm tọa độ của một điểm trên trục số, tọa độ của vectơ và của điểm đối với một hệ tọa độ Oxy trong mặt phẳng. Chương này được học trong 14 tiết.

- Chương II giới thiệu định nghĩa giá trị lượng giác của một góc α với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Đó trình bày định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ và những ứng dụng của phép toán đó trong hình học. Tiếp theo đó SGK giới thiệu hai định lý quan trọng về hệ thức lượng trong tam giác: định lý cosin và định lý sin. Cuối cùng SGK giới thiệu các công thức mới để tính diện tích tam giác và về vấn đề giải tam giác. Chương này được học trong 12 tiết.

- Chương III giới thiệu việc lập phương trình đường thẳng, phương trình đường tròn và phương trình đường elip. Về phương trình đường thẳng, SGK chỉ đề cập tới hai loại phương trình: phương trình tham số và phương trình tổng quát, biết xét vị trí tương đối của hai đường thẳng bằng phương trình của chúng. Ngoài ra SGK còn giới thiệu cách dùng tọa độ để tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng và cách tính góc của hai đường thẳng. Về phương trình đường tròn và đường elip, SGK đã trình bày phương trình của các đường đó cùng với những yếu tố xác định có liên quan đến phương trình của chúng. Chương này được học trong 14 tiết và tiếp đó có phần ôn tập cuối năm được thực hiện trong 3 tiết.

2. Những nội dung của SGK mới có thay đổi so với SGK cũ (SGK hợp nhất năm 2000)

a) Những nội dung không được trình bày trong SGK mới gồm có:

- Phần hệ thức lượng trong đường tròn trong đó bao gồm phần phân tích của một điểm đối với một đường tròn và tìm trục đẳng phương của hai đường tròn. Tiếp theo đó là phần áp dụng để xét sự nội tiếp của một tứ giác đối với một đường tròn.

Nội dung các phần trên đây có thể xem là những ứng dụng của tích vô hướng và có rất ít những ứng dụng trong thực tế, nên đã không được đưa vào chương trình mới của Hình học 10.

- Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng là phần tương đối khó đối với trình độ chung của học sinh lớp 10. Thực tế trong những năm gần đây nhiều trường phổ thông trung học đã bỏ qua không dạy phần này và trong các đề thi vào các trường đại học cũng không có nội dung này. Theo chương trình mới thì nội dung các phép biến hình phẳng được đưa vào nội dung chương trình Hình học 11.

b) Những nội dung được đưa thêm vào SGK hình học 10 hiện nay:

Trước đây phần phương pháp tọa độ trong mặt phẳng bao gồm phương trình đường thẳng, phương trình đường tròn, phương trình các đường elip, parabol, hyperbol thuộc SGK Hình học 12. Nay phần này được đưa vào SGK Hình học 10 để hoàn chỉnh phần phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Đây là một việc làm hợp lý và cần thiết. Như vậy học sinh lớp 10 được học một cách đầy đủ và tương đối trọn vẹn phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

3. Một số đặc điểm của SGK Hình học 10

SGK Hình học 10 được viết với tinh thần nhằm góp phần đổi mới phương pháp dạy và học, nhằm phát huy tốt nhất tính tích cực học tập của học sinh, tạo điều kiện cho học sinh tự học, tự nghiên cứu để nắm được các kiến thức cơ bản và các kỹ năng cơ bản trong khi học. Vì vậy, SGK Hình học 10 có một số đặc điểm sau đây.

a) SGK là tài liệu chủ yếu dùng cho học sinh đồng thời là tài liệu để giáo viên sử dụng trong việc chuẩn bị và tiến hành giảng dạy. SGK được viết đúng theo những quy định của chương trình môn học và các nội dung của SGK phải góp phần hình thành cho học sinh phương pháp học tập tích cực và chủ động. Do đó các vấn đề được nêu ra trong SGK phải được đặt ra một cách rõ ràng, có dẫn dắt từng bước và tránh áp đặt thiếu tự nhiên.

b) SGK mới có đưa thêm các hoạt động đa dạng, làm cho học sinh có điều kiện ôn lại kiến thức, hoặc đặt vấn đề giới thiệu sự xuất hiện của kiến thức mới, hoặc áp dụng ngay các kiến thức vừa được học, tại những thời điểm khác nhau của bài học. Cần chú ý nội dung các hoạt động này có thể thay đổi cho phù hợp các loại đối tượng học sinh khác nhau và giáo viên có thể cho học sinh tự đọc và suy nghĩ trước ở nhà,

hoặc làm tại lớp, hoặc phân ra thành các đề tài nhỏ và thực hiện theo nhóm. Các hoạt động ghi ở trong SGK chỉ có tính chất gợi ý của các tác giả, giáo viên có thể tìm hiểu về nội dung bài giảng và suy nghĩ để đưa ra những hoạt động gây được hứng thú học tập cho học sinh, nhằm vào việc rèn luyện kiến thức, kỹ năng cơ bản và phát huy được tinh thần tìm tòi sáng tạo của học sinh nhiều hơn nữa.

c) SGK Hình học 10 cố gắng giảm nhẹ phần chứng minh các tính chất hoặc các định lý còn mang nặng tính chất lý thuyết và không mang lại lợi ích nhiều. Có thể thay việc chứng minh này bằng các ví dụ minh họa và kiểm chứng. Ví dụ như chúng ta không chứng minh các tính chất của phép cộng vectơ, các tính chất của phép nhân một số với một vectơ mà cho học sinh thừa nhận các tính chất đó.

d) SGK có chú ý quan tâm tới việc gắn toán học với thực tế sản xuất và thực tế đời sống, ví dụ như đưa thêm ứng dụng của vectơ trong việc biểu diễn phân tổng hợp lực và phân tích lực, ứng dụng của tích vô hướng trong việc tính công hoặc ứng dụng của định lý cosin, định lý sin và các định lý quen thuộc khác trong việc đo đạc, giải tam giác.

e) SGK lần này có đưa thêm các câu hỏi trắc nghiệm, tạo điều kiện cho học sinh làm quen với một dạng bài tập mới mà hiện nay nhiều nước trên thế giới và trong khu vực đã đưa vào SGK, đồng thời có hướng dẫn cho học sinh sử dụng máy tính bỏ túi để tính toán giải các bài tập hình học được tiện lợi hơn.

Trên đây chúng tôi xin giới thiệu sơ bộ về nội dung SGK Hình học 10 được đưa vào sử dụng bắt đầu từ năm học 2006-2007. Thay mặt nhóm tác giả chúng tôi rất hoan nghênh những ý kiến đóng góp làm cho SGK ngày một tốt hơn.

THÔNG BÁO

Tăng giá báo từ tháng 7.2006

Kể từ tháng 7.2006 giá bán lẻ mỗi số Toán học và Tuổi trẻ là 5000 đồng (năm nghìn đồng).
Trân trọng thông báo để độc giả được biết.

THTT

KÌ THI HỌC SINH GIỎI... (Tiếp trang 6)

Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**); Nguyễn Minh Đức (11) (THPT Chuyên, **Bạc Liêu**); Trần Đa Khoa, Văn Lâm Ngà (11) (THPT Lê Quý Đôn, **Bình Định**); Nguyễn Đức Nghĩa (THPT Trần Hưng Đạo, **Bình Thuận**); Võ Quốc Bá Cẩn (THPT Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**); Lê Phi Hùng (THPT Nguyễn Du, **Đắk Lắk**); Nguyễn Minh Trí (THPT Cao Lãnh, **Đồng Tháp**); Trần Thanh Nam, Trần Thị Ánh Ngọc, Nguyễn Bích Thảo (nữ), Trần Đức Việt (11) (THPT Hùng Vương, **Gia Lai**); Nguyễn Tiến Long (THPT Hoàng Văn Thu, **Hòa Bình**); Vũ Duy Tiến, Đỗ Anh Tú (11) (THPT Chu Văn An, **Lạng Sơn**); Lê Đức Việt (Lào Cai); Mai Xuân Minh (Ninh Thuận); Nguyễn Văn Vinh (Quảng Nam); Nguyễn Văn Cường, Trần Lương Khiêm (11), Lương Bá Linh, Nguyễn Quốc Việt (THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi**); Nguyễn Hữu Nam Ninh (11) (THPT Năng khiếu Sơn La); Đặng Hữu Lộc, Nguyễn Trung Thông (THPT Chuyên, **Tiền Giang**); Đỗ Thị Hương Ly (11) (Tuyên Quang); Lê Xuân Bách (THPT Nguyễn Bình Khiêm, **Vĩnh Long**).

• **Giải Khuyến khích:** 54 học sinh.

Lê Hải Châu, Nguyễn Thành Trung (THPT Chuyên **Bạc Liêu**); Trần Quốc Tuấn (THPT Bến Tre, **Bến Tre**); Trần Quang Ánh, Võ Đức Thuận (11) (THPT Lê Quý Đôn, **Bình Định**); Trần Dương Sơn (Bình Phước); Nguyễn Thanh Lâm, Tô Quang Phước (11 THPT Trần Hưng Đạo, **Bình Thuận**); Nguyễn Minh Cường (11 THPT Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**); Nguyễn Đình Minh Anh, Ngô Thùy Dươn, Đào Thị Thu Thảo (11), Nguyễn Thị Ánh Thơ, Đỗ Thanh Tùng (11) (THPT Nguyễn Du, **Đắk Lắk**); Nguyễn Thị Như Quỳnh (Điện Biên); Nguyễn Công Dũng, Nguyễn Quốc Tuấn (11 THPT Hùng Vương, **Gia Lai**); Phạm Văn Hùng (11 THPT Chuyên Hà Giang); Vũ Việt Dũng, Trương Quốc Hưng (11 THPT Hoàng Văn Thu, **Hòa Bình**); Phạm Minh Hoàng, Vy Thành Nam, Nguyễn Phong Phú (11) (THPT Chu Văn An, **Lạng Sơn**); Phạm Trung Hòa, Nguyễn Huy Thắng (11), Phan Trọng Tuệ (Lào Cai); Lê Việt Bảo, Cù Thị Kim Dung (11), Cao Tiến Đức (11), Đào Lê Ngân (11), Trần Đức Thiện (11), Nguyễn Thị Hoàng Yến (11) (Lâm Đồng); Nguyễn Kỳ Thanh, Tô Công Thịnh, Hồ Nguyễn Thiện Tín, Võ Huy Văn (Ninh Thuận); Nguyễn Minh Châu, Trình Nhật Chương (11), Hà Hải Triều (THPT Lương Văn Chánh, **Phú Yên**); Trần Hữu Luân (Quảng Nam); Cao Kỳ Hân (11), Lê Đức Ý (THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi**); Lê Minh Đức, Phan Bảo Nguyễn, Trương Xuân Nhã, Nguyễn Chí Thanh (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**); Phan Công Chiến (11) (THPT Hoàng Lê Kha, **Tây Ninh**); Nguyễn Cao Cường (11), Nguyễn Phạm Anh Huy, Đặng Trương Khánh Linh (THPT Chuyên **Tiền Giang**); Phạm Hoàng Phúc (11) (Trà Vinh); Vũ Thành Thơ (THPT Nguyễn Bình Khiêm, **Vĩnh Long**); Phan Tất Cường (11), Hoàng Thanh Tùng (THPT Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**).

NĂM LỜI GIẢI HAY... (Tiếp trang 15)

giải quyết được bài toán trên đây? Tham số $k = 1$ có phải là một giá trị rất đặc biệt để có nhiều lời giải hay? Chúng tôi xin dành câu trả lời cho bạn đọc. Ngoài ra, để khám phá khả năng áp dụng của từng phương pháp, chúng tôi đưa ra các bài tập đề nghị dưới đây. Hãy giải lại các bài toán khá quen thuộc này bằng các cách tiếp cận khác nhau.

Bài tập

1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$a) \ x + y + z \leq \frac{3}{2};$$

$$b) \ xy + yz + zx \leq \frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2;$$

$$c) \ xy + yz + zx \leq \frac{1}{2} + 2xyz.$$

2. (USAMO 2001) Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ thì ta có $0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2$.

3. (IMO 2005) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz \geq 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

4. (VMO 1996) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + acd + bcd = 16.$$

Chứng minh rằng

$$a + b + c + d \geq \frac{2}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

5. (VMO 1999) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}.$$

6. (VietnamTST 2001) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $21ab + 2bc +$

$$8ca \leq 12. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

7. (VMO 2002) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Chứng minh rằng $2(a + b + c) - abc \leq 10$.



Giải đáp bài: ĐÃ CHUẨN CHƯA?

(Đề đăng trên THPT số 343, tháng 1.2006)

• Nhận xét rằng: Biểu thức ở vế trái bất đẳng thức đã cho có dạng hoán vị vòng quanh nên chỉ được xem biến bất kì nào đó là lớn nhất hoặc nhỏ nhất mà thôi. Do đó đoạn lập luận sau trong lời giải bài toán: Giả sử $x \geq y \geq z \geq 0...$

$$\text{Ta có } \frac{1+x^2}{1+y+z^2} \geq \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự có } \frac{1+y^2}{1+z+x^2} \geq \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{2}{3} \quad (3)$$

là không chính xác! (Không thể suy ra được các BĐT (2) và (3) bằng phép tương tự vì vai trò của x, y, z trong bài là không bình đẳng).

Sau đây là một lời giải đúng của bài toán (theo bạn Nguyễn Thị Hạnh Dung, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh, Hà Tĩnh). Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \\ & \geq \frac{2(1+x^2)}{2(1+z^2)+(1+y^2)} + \frac{2(1+y^2)}{2(1+x^2)+(1+z^2)} \\ & + \frac{2(1+z^2)}{2(1+y^2)+(1+x^2)} = M. \end{aligned}$$

Đặt $1+x^2=a$; $1+y^2=b$; $1+z^2=c$ (a, b, c dương).

$$\text{Lúc đó } M = \frac{2a}{2c+b} + \frac{2b}{2a+c} + \frac{2c}{2b+a}.$$

$$\text{Đặt } N = \frac{c}{2c+b} + \frac{a}{2a+c} + \frac{b}{2b+a};$$

$$P = \frac{b}{2c+b} + \frac{c}{2a+c} + \frac{a}{2b+a} \text{ thì } 2N+P=3.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$M+N = \frac{2a+c}{2c+b} + \frac{2b+a}{2a+c} + \frac{2c+b}{2b+a} \geq 3, \text{ suy ra}$$

$$2M+2N \geq 6 \quad (4)$$

$$2P + \frac{M}{2} = \frac{2b+a}{2c+b} + \frac{2c+b}{2a+c} + \frac{2a+c}{2b+a} \geq 3, \text{ suy ra}$$

$$P + \frac{M}{4} \geq \frac{3}{2} \quad (5)$$

Cộng theo vế các BĐT (4) và (5) ta có

$$\frac{9M}{4} + (2N+P) \geq \frac{15}{2}. \text{ Mà } 2N+P=3 \text{ nên } M \geq 2.$$

Từ đó ta có BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Ngoài bạn Dung, hai bạn sau cũng có đáp án đúng: Đỗ Văn Đức, 9A1, THCS Tê Tiêu, Mỹ Đức, Hà Tây; Hoàng Đức Ý, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa.

NGỌC HIỀN

LỜI GIẢI MỘT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Vận dụng bất đẳng thức để đánh giá hai vế một PT không mẫu mực đôi khi tỏ ra khá hiệu quả. Chẳng hạn đối với PT vô tỉ sau

Giải PT

$$\sqrt{2x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt{x^2-2x+2} = \sqrt{2(x^2+9)}.$$

Lời giải. Chứng minh được với các số thực a, b, c, d tùy ý thì

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Gọi $f(x)$ là vế trái của PT đã cho, ta có

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2+x^2} + \sqrt{(3-x)^2+2^2} + \sqrt{(1-x)^2+1}.$$

Áp dụng (1) ta có

$$\sqrt{(x-1)^2+x^2} + \sqrt{(3-x)^2+2^2} \geq \sqrt{2^2+(x+2)^2} \quad (2)$$

Đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi

$$2(x-1) = x(3-x). \text{ Lại có}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2^2+(x+2)^2} + \sqrt{(1-x)^2+1} \geq \\ & \geq \sqrt{(3-x)^2+(x+3)^2} = \sqrt{2(x^2+9)} \quad (3) \end{aligned}$$

Đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi $2 = (x+2)(1-x)$.

Theo dõi các kết quả trên ta thấy $f(x) \geq \sqrt{2(x^2+9)}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2(x-1)=x(3-x) \\ 2=(x+2)(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Mời các bạn cho biết ý kiến của mình! Lời giải của bạn như thế nào?

BÙI TUẤN ANH

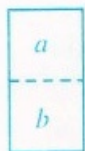
(GV THPT Yên Thủy A, Hòa Bình)



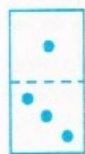
MA PHƯƠNG ĐÔ-MI-NÔ

Đô-mi-nô là một bộ 28 quân bài, mỗi quân bài là một hình chữ nhật được chia thành 2 ô vuông có vạch ngăn, trong mỗi ô vuông hoặc để trống (ứng với số 0) hoặc ghi các dấu tròn nhỏ từ 1 đến 6. Gọi a, b là số các dấu tròn của một quân bài (h. 1) ($\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ chỉ là một quân bài).

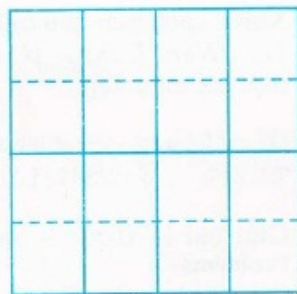
Chẳng hạn quân bài $\frac{1}{3}$ (quay ngược được $\frac{3}{1}$) có dạng như ở hình 2.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Bạn hãy chọn 8 quân bài đô-mi-nô khác nhau mà các ô đều có dấu tròn sao cho khi sắp xếp chúng vào hình vuông như ở hình 3 thì tổng số các dấu tròn ở mỗi hàng bằng tổng số các dấu tròn ở mỗi cột và bằng 9. Trong số 8 quân bài được chọn có ô nào gồm 6 dấu tròn không? Để xác định ta quy ước sắp xếp ở hàng trên nếu

$\frac{a_1}{b_1}$ nằm bên trái $\frac{a_2}{b_2}$ thì: hoặc $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$, hoặc $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ trong đó $a_1 < a_2$; còn ở cột đầu bên trái nếu $\frac{a_1}{b_1}$ nằm trên $\frac{a_2}{b_2}$ thì $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2$.

VÂN KHANH

Giải đáp bài :

PHÉP CỘNG LÍ THỨ

Theo đề bài ta không xét các chữ số 0 và 9. Phép cộng các chữ số khác nhau không nhớ có các dạng sau:

$$\begin{aligned} 7+1 &= 6+2 = 5+3 = 8; & 6+1 &= 5+2 = 4+3 = 7; \\ 5+1 &= 4+2 = 6; & 4+1 &= 3+2 = 5; & 3+1 &= 4; \\ 2+1 &= 3. \end{aligned}$$

Phép cộng các chữ số khác nhau có nhớ có các dạng sau:

$$\begin{aligned} 8+3 &= 7+4 = 6+5 = 11; & 8+4 &= 7+5 = 12; \\ 8+5 &= 7+6 = 13; & 8+6 &= 14; & 8+7 &= 15. \end{aligned}$$

Để giải bài này trong phép cộng ta xét dần tổng các chữ số từ phải sang trái.

a) Các phép cộng sau có tổng số lớn nhất là 87654321.

$$\begin{array}{r} 15237468 \\ + 72416853 \\ \hline 87654321 \\ + 25136478 \\ + 62517843 \\ \hline 87654321 \\ + 51382467 \\ + 36271854 \\ \hline 87654321 \end{array}$$

Ở phần (a), trong phép cộng thứ nhất có thể thay $68+53$ bởi $86+35$, trong phép cộng thứ hai có thể thay $78+43$ bởi $87+34$, trong phép cộng thứ ba có thể thay $67+54$ bởi $76+45$, ta đều có đáp án khác.

b) Các phép cộng sau có tổng số nhỏ nhất là 34126578.

$$\begin{array}{r} 12467835 \\ + 21658743 \\ \hline 34126578 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12657843 \\ + 21468735 \\ \hline 34126578 \end{array}$$

Ở phần (b) trong cả hai phép cộng có thể thay $78+87$ bởi $87+78$ ta đều có đáp án khác. Cũng có thể thay $12+21$ bởi $21+12$ ta được các đáp án khác.

Trong phép cộng ở cả phần (a) và phần (b) khi đổi chỗ hàng thứ nhất với hàng thứ hai ta được thêm các đáp án khác.

Hoan nghênh các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nguyễn Hữu Thành, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ; Châu Phước Khánh, 12A1, THPT chuyên Trà Vinh; Dương Hoàng Hưng, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An; Dương Văn An, 10A1, THPT Châu Thành, TX Bà Rịa, Ngô Thị Phương Trinh, 11A1, THPT Võ Thị Sáu, Đất Đỏ, Bà Rịa - Vũng Tàu; Nguyễn Văn Huyền, 11A0, THPT Yên Phong số 1, Bắc Ninh.

VÂN KHANH

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 347 (5-2006)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI.

Phó Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC.

Thư kí Tòa soạn : ThS. VŨ KIM THỦY.

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools
Vũ Tiến Việt – Ứng dụng của một bất đẳng thức đơn giản.
- 3 Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên năm học 2005–2006.
- 4 Kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm học 2005–2006.
- 7 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation
Thử sức trước kỳ thi
Hoàng Ngọc Cảnh – Đề số 5.
Huỳnh Duy Thủy – Hướng dẫn giải Đề số 4.
- 9 Nguyễn Anh Dũng – Phương pháp đổi biến số và tích phân từng phần.
- 11 Nguyễn Văn Mậu, Vũ Kim Thủy – Kỳ thi Olympic Toán học Pre-SMO 2006 do Hội Toán học Hà Nội tổ chức.
- 12 Phương pháp giải toán – Math Problem Solving
Nguyễn Bá Đang – Sử dụng định lý cotang để giải toán.

- 14 Nhiều cách giải cho một bài toán
Trần Nam Dũng – Năm lời giải hay cho một bài toán đẹp.
- 16 Đề ra kì này – Problems in This Issue
T1/347, ..., T12/347, L1/347, L2/347.
- 18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems
Giải các bài của số 343.
- 27 Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum
Nguyễn Mộng Hy – Về sách giáo khoa mới Hình học 10.
- 30 Sai lầm ở đâu ? – Where's the Mistake ?
- 31 Giải trí toán học – Math Recreation.

Bìa 1: Học sinh THPT Kim Liên, Hà Nội biểu diễn văn nghệ.

Bìa 3: Bạn có biết ? – Do you know ?

Trịnh Đức Thắng – Bài toán biến số xe.

Nguyễn Đăng Quang – Trao đổi về bài toán hai màu.

Biên tập : HỒ QUANG VINH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.

Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.

ĐT : 08.8309049.

BẠN CÓ BIẾT ?**BÀI TOÁN BIỂN SỐ XE**

Viện sĩ Lev. D. Landau khi đi xe hơi thường đề nghị những người cùng đi tham gia trò chơi giải trí. Đó là trò chơi với số đăng kí của các biển số xe ô tô họ gặp trên đường với 4 chữ số a, b, c, d sao cho khi dùng các phép tính số học và các hàm sơ cấp sẽ tạo ra một đẳng thức giữa các cặp số thứ nhất $(a; b)$ và cặp số thứ hai $(c; d)$ theo thứ tự các chữ số đó.

Nhận thấy với các phần tử của cặp số $(a; b)$ hoặc $(c; d)$ có tích hoặc tổng không nhỏ hơn 6 ta luôn có

$$\sin[(a \times b)!]^0 = 0, \sin[(a + b)!]^0 = 0$$

$$\text{và } \cos[(a \times b)!]^0 = 1, \cos[(a + b)!]^0 = 1.$$

Vậy bài toán đặt ra là chỉ còn phải xét các cặp số $(a; b)$ hoặc $(c; d)$ có tổng hoặc tích nhỏ hơn 6.

Đó là các cặp số $(0; 0), (0; 1), (0; 2), (0; 3), (0; 4), (0; 5), (1; 0), (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 0), (2; 1), (2; 2), (3; 0), (3; 1), (4; 0), (4; 1)$ và $(5; 0)$.

- Xét dãy $(a; b)$ hoặc $(c; d)$: $(0; 0), (0; 1), (0; 2), (0; 3), (0; 4), (0; 5)$ ta có $0 \times b = 0, (0 \times b)! = 1$ (theo quy ước đã biết $0! = 1$)

- Xét các cặp số $(1; 0), (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4)$ ta có $1^b = 1$.

- Xét các cặp số: $(2; 0), (2; 1), (2; 2), (3; 0), (3; 1)$ ta có

$$\begin{array}{ll} 2 \times 0 = 0, & (2 \times 0)! = 1 \\ \log_2 1 = 0, & 2 - 1 = 1 \\ 2 - 2 = 0, & \log_2 2 = 1 \\ 3 \times 0 = 0, & (3 \times 0)! = 1 \\ \log_3 1 = 0, & \sqrt[3]{1} = 1. \end{array}$$

- Xét các cặp số $(4; 0), (4; 1), (5; 0)$ ta có

$$\begin{array}{ll} 4 \times 0 = 0, & (4 \times 0)! = 1 \\ \log_4 1 = 0, & \sqrt[4]{1} = 1 \\ 5 \times 0 = 0, & (5 \times 0)! = 1. \end{array}$$

Như vậy ta luôn cân bằng được hai cặp số $(a; b)$ và $(c; d)$. Vậy bài toán luôn có lời giải (đpcm). Tuy nhiên, không phải lúc nào cũng cần dùng cách thức tổng quát trên.

- Các ví dụ

Với số đăng kí 7731 ta có $7 - 7 = \log_3 1$.

Với số đăng kí 6012 ta có $6^0 = 1^2$.

Với số đăng kí 0123 ta có $0 + 1 = -(2 - 3)$.

Với số đăng kí 9031 ta có

$$\cos[(9 + 0)!]^0 = \sqrt[3]{1}.$$

Với số đăng kí 4851 ta có

$$\sin[(4 \times 8)!]^0 = \sin[(5 + 1)!]^0.$$

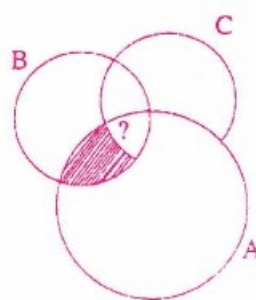
TRỊNH ĐỨC THẮNG

(Viện Chiến lược và phát triển GTVT)

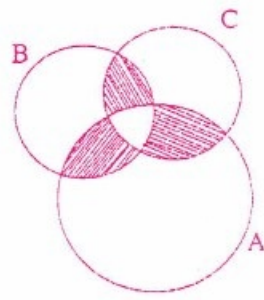
**Trao đổi về bài báo
BÀI TOÁN HAI MÀU**

(Toán học và Tuổi trẻ số 346 tháng 4/2006)

Trong bài báo trên, tác giả Nguyễn Văn Thiêm dựa theo La Recherche tháng 4-2005 có viết về việc có thể tô màu một bản đồ chỉ bằng hai màu, không có hai miền kề nhau nào có thể có cùng một màu. Bài báo viết "Ta hãy thử cùng xem xét bài toán này với một bản đồ phẳng, trên đó mỗi nước đều có hình dạng là một phần của hình tròn, các biên giới đều là các cung tròn. Kết quả vẫn đúng". Diễn đạt như vậy là chưa chính xác. Tôi có thể dễ dàng nêu một ví dụ để bạn tô màu thử (h. 1). Chắc bạn không thể chọn cách tô màu nào phù hợp. Đầu đề này vẫn đúng "mỗi nước là một phần của hình tròn, các biên giới đều là cung tròn". Mảng có dấu ? nếu tô trắng thì trùng hình tròn lớn, nếu tô đen thì trùng mảng đen bên cạnh.

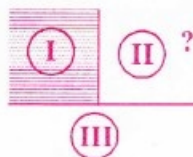


Hình 1



Hình 2

Vấn đề là ở chỗ bài toán trên chỉ đúng khi bản đồ được lập bởi các đường tròn (chứ không phải là các cung tròn), trên đó mỗi nước đều có hình dáng là một phần của hình tròn, các biên giới đều là cung tròn. Ở ví dụ trên, nếu thay cung tròn C bằng đường tròn liên tục thì bài toán sẽ đúng (h. 2).



Hình 3

Cũng tương tự như vậy, có thể lưu ý thêm trong bài toán hai màu nếu thay giả thiết "một số đường thẳng", bởi "một số tia" hoặc "một số đoạn thẳng" thì kết quả bài toán không còn đúng nữa. Một ví dụ đơn giản với ba miền trong hình 3.

NGUYỄN ĐĂNG QUANG
(NXB Giáo dục)

TRƯỜNG THPT KIM LIÊN, HÀ NỘI

Trường THPT Kim Liên được thành lập từ tháng 9-1974 cùng với sự hình thành những khu tập thể mới ở phía Tây Hà Nội như Kim Liên, Khương Thượng, Trung Tự. Năm học đầu tiên nhà trường chỉ có 16 lớp với 30 giáo viên do thầy giáo Trần Quý Độ làm hiệu trưởng.

Ngay từ năm học 1974-1975 đối tượng tuyển sinh vào trường hầu hết là con em cán bộ viên chức nên việc đầu tư học tập cho học sinh được coi trọng. Từ những năm đầu tiên nhà trường đã quan tâm đến chất lượng dạy và học. Nhà trường đã sớm tạo được phong cách và thể mạnh riêng. Từng bước tập thể nhà trường đã tự khẳng định mình và trở thành địa chỉ giáo dục đào tạo tin cậy của Quận Đống Đa, Hà Nội.

Từ năm 1990 trường được chuyển về địa điểm mới tại phường Trung Tự, quận Đống Đa với cơ sở vật chất tạm đủ điều kiện cho dạy và học với 52 lớp và 2600 học sinh. Trường có 95 giáo viên trong đó 12 giáo viên có trình độ Thạc sĩ, 10 giáo viên có học sinh dự thi học sinh giỏi Quốc gia, 90 giáo viên giỏi cấp Thành phố và 82 giáo viên có sáng kiến kinh nghiệm được xếp loại cấp Thành phố. Học sinh Kim Liên cũng đã đoạt 21 giải học sinh giỏi cấp Quốc gia, 1 giải Quốc tế về Dự án Giáo dục môi trường khu vực Đông Nam Á (3-2006), 737 giải học sinh giỏi cấp Thành phố và 10 năm liên tục nhà trường đã dẫn đầu khối các trường không chuyên của Hà Nội về số giải học sinh giỏi. Hàng năm tỉ lệ đỗ vào Đại học - Cao đẳng đạt khoảng 85%.

Không chỉ thường hằng say học tập, học sinh Kim Liên còn nhiệt tình sôi nổi trong các hoạt động văn hóa, văn nghệ thể dục thể thao và cũng đã giành được nhiều giải cao trong các cuộc thi cấp Quận, Thành phố và Quốc gia. Học sinh Kim Liên đã xây dựng được phong cách *Học chăm - Học giỏi - Kỷ luật - Trung thực - Năng động và Sáng tạo*.



Các giáo viên tổ Toán trường THPT Kim Liên

Nhà trường đã vinh dự được nhận Huân chương Lao động hạng Ba (1999), Huân chương Lao động hạng Hai (2004) của Chủ tịch nước trao tặng, Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ (1999) và Cờ Đơn vị thi đua Xuất sắc của Chủ tịch UBND TP. Hà Nội tặng. Vinh dự to lớn, trách nhiệm nặng nề, thầy và trò nhà trường càng ý thức được vai trò của mình trong vận hội mới của đất nước, không ngừng vươn lên để "Bông sen vàng" tỏa sáng và ngát hương.

ISSN : 0866-8035
Chi số : 12884
Mã số : 8BT49M6

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT do Bộ VHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2006

Giá : 4000 đồng
Bốn nghìn đồng