

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

1 2006
Số 343

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272

Email: toanhocct@yahoo.com Web: <http://www.nxbgd.com.vn/toanhoc tuoi tre>

*Chúc mừng
năm mới!*



2006

Bình Thuận



PGS.TS. Phan Doan Thoai

Thư chúc mừng năm mới

Bạn đọc yêu quý !

Nhịp bước của thời gian đã đưa chúng ta bước sang năm thứ 6 của thiên niên kỉ mới. Bạn đang cầm trên tay tờ tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đầu tiên của năm thứ 43, số 343 đầu Xuân Bính Tuất. Với các bạn yêu thích toán và đam mê Toán học và Tuổi trẻ thì đó là sự đáp ứng những chờ mong của các bạn. Với chúng tôi, những người làm báo thì đó là kết quả của nhiều nỗ lực, cố gắng.

Mỗi năm chúng ta có những bạn đọc mới với những nhu cầu, sở thích mới. Chúng tôi nhận được những yêu cầu mới mẻ và cao hơn từ độc giả và đang gắng đáp ứng những đòi hỏi đó. Nhưng có những đề nghị rất khác nhau như có bạn muốn tạp chí chỉ đăng toàn về Toán, trong khi có nhiều bạn lại muốn không chỉ có toán mà phải có bài về Vật lí, Tin học, Tiếng Anh, Hóa học và cả mục Câu lạc bộ. Tên tạp chí là **Toán học và Tuổi trẻ** nên nội dung của nó sẽ phong phú và đa dạng đúng như tên gọi của mình. Chính chúng tôi, những người làm báo Toán cũng mong các bạn không chỉ giỏi Toán mà còn thạo tiếng Anh, hiểu biết xã hội, trau dồi vốn sống của Tuổi trẻ. Năm mới 2006 Tạp chí muốn cải tiến theo hướng Toán phải toán hơn - phục vụ tốt hơn cho việc học toán, phát triển sâu hơn lí thuyết và gần với thực tế hơn, Trẻ càng trẻ nữa. Mong các bạn tích cực hưởng ứng viết bài và mua, đọc Tạp chí.

Nhân dịp năm mới Tạp chí chúc các độc giả và các cộng tác viên gần xa vui, khỏe, thành đạt trong cuộc sống, thành công trong học tập.

Thân mến

TỔNG BIÊN TẬP

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

KẾT QUẢ CUỘC THI OLYMPIC KHOA HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ HAI TẠI INDONESIA CỦA ĐOÀN VIỆT NAM



Từ trái sang phải: Minh Hiếu, Hải Hà, Thế Hùng, Nguyễn Phương, Ngọc An và Nguyễn Khánh

LÊ KIM LONG

(Trưởng đoàn)

Cuộc thi Olympic Khoa học Quốc tế (IJSO: International Junior Science Olympiad) được tổ chức lần đầu tiên vào tháng 12 năm 2004 tại Jakarta, Indonesia. Kỳ thi IJSO lần thứ hai được tổ chức tại Yogyakarta, Indonesia từ 4 đến 13 tháng 12 năm 2005. Tháng 10 năm 2005, Bộ Giáo dục và Đào tạo giao cho Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Vĩnh Phúc chọn đội tuyển học sinh lớp 9 để đại diện cho Việt Nam. Trưởng đoàn là thầy Lê Kim Long (ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội), Phó đoàn là thầy Lê Anh Tuấn (Sở GD-ĐT Vĩnh Phúc) và một quan sát viên. Đội tuyển gồm 6 em học sinh giỏi được chọn từ các trường THCS của các huyện và thị xã Vĩnh Yên, Phúc Yên, Vĩnh Tường, Lập Thạch, Bình Xuyên, Yên Lạc. Các em học sinh Việt Nam

thường nổi trội một trong các môn như Toán, Vật lí, Hoá học và Sinh học trong khi nội dung thi là chương trình Trung học Cơ sở của nhiều môn khoa học: Vật lí, Hoá học, Sinh học... Đội tuyển đã được sự quan tâm đặc biệt của lãnh đạo tỉnh Vĩnh Phúc.

(Xem tiếp trang 31)



MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA PHẦN NGUYÊN

TRẦN HÀ

(GV THCS Tam Đa, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Trong các kì thi học sinh giỏi cấp THCS, chúng ta thường gặp những bài toán liên quan đến phần nguyên, chẳng hạn như: tính phần nguyên, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, giải phương trình có chứa phần nguyên...

Không ít bạn còn nhiều lúng túng khi giải phương trình có chứa phần nguyên. Trong bài viết này, chúng tôi trao đổi cùng các bạn yêu toán một số phương pháp thường dùng để giải phương trình có chứa phần nguyên. Hi vọng sẽ đem lại đôi điều bổ ích cho các bạn.

Phương pháp 1. Dùng định nghĩa để khử dấu phần nguyên

$$[x] = n \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leq x < n+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq x - n < 1. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\left[\frac{3x+1}{5} \right] = 2x-1 \quad (1)$$

Lời giải. (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \frac{3x+1}{5} - 2x+1 < 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \frac{-7x+6}{5} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq -7x+6 < 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \in \mathbb{Z} \\ \frac{6}{7} \geq x > \frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm của (1) là $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$\left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] = 17 \quad (2)$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2} \right] < 1 \\ 0 \leq \frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3} \right] < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \left(\left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] \right) < 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{5x}{6} - 17 < 2 \Rightarrow 102 \leq 5x < 114$$

$$\Rightarrow \frac{102}{5} \leq x < \frac{114}{5}.$$

Kết hợp với $x \in \mathbb{Z}$, ta được $x = 21$; $x = 22$.

Thử lại: $x = 21$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm nguyên của (2) là $x = 21$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$[x]^2 - 2[x] - 3 = 0 \quad (3)$$

Lời giải. (3) $\Leftrightarrow [x] \cdot ([x] - 2) = 3 \Leftrightarrow [x] = 3$
hoặc $[x] = -1$ (vì $[x] > [x] - 2$).

Nếu $[x] = 3 \Leftrightarrow 3 \leq x < 4$.

Nếu $[x] = -1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$.

Vậy nghiệm của (3) là:

$$3 \leq x < 4; \quad -1 \leq x < 0.$$

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ để khử dấu phần nguyên

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\left[\frac{7x-5}{3} \right] = \frac{16x+3}{5}.$$

Lời giải. Đặt $\frac{16x+3}{5} = y$, ($y \in \mathbb{Z}$), ta có

$$\Rightarrow x = \frac{5y-3}{16} \Rightarrow \frac{7x-5}{3} = \frac{35y-101}{48}.$$

Do đó

$$\left[\frac{35y-101}{48} \right] = y \Leftrightarrow 0 \leq \frac{35y-101}{48} - y < 1.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -13y - 101 < 48 \Leftrightarrow \frac{-101}{13} \geq y > \frac{149}{13}$$

$$\Leftrightarrow y = -8; -9; -10; -11 \text{ (do } y \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Với } y = -8 \text{ thì } \frac{16x+3}{5} = -8 \Leftrightarrow x = -\frac{43}{16}.$$

$$\text{Với } y = -9 \text{ thì } \frac{16x+3}{5} = -9 \Leftrightarrow x = -3.$$

$$\text{Với } y = -10 \text{ thì } \frac{16x+3}{5} = -10 \Leftrightarrow x = -\frac{53}{16}.$$

$$\text{Với } y = -11 \text{ thì } \frac{16x+3}{5} = -11 \Leftrightarrow x = -\frac{58}{16}.$$

Vậy tập nghiệm của (4) là

$$\left\{ -\frac{58}{16}, -\frac{53}{16}, -\frac{43}{16}, -3 \right\}.$$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$x^2 - 6[x] + 5 = 0 \quad (5)$$

Lời giải. Đặt $[x] = y$ ($y \in \mathbb{Z}$) thì từ (5) ta có $6y = x^2 + 5$. Suy ra $y > 0$. Lại có $y \leq x < y + 1$ nên $y^2 + 5 \leq x^2 + 5 < y^2 + 2y + 6 \Leftrightarrow y^2 + 5 \leq 6y < y^2 + 2y + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 6y + 5 \leq 0 \\ y^2 - 4y + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5.$

Do $y \in \mathbb{Z}$ và $1 \leq y \leq 5$ nên $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$\text{Với } y = 1 \text{ thì } \begin{cases} [x] = 1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Với } y = 2 \text{ thì } \begin{cases} [x] = 2 \\ x^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{7}.$$

$$\text{Với } y = 3 \text{ thì } \begin{cases} [x] = 3 \\ x^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x < 4 \\ x = \pm\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{13}.$$

$$\text{Với } y = 4 \text{ thì } \begin{cases} [x] = 4 \\ x^2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq x < 5 \\ x = \pm\sqrt{19} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{19}.$$

$$\text{Với } y = 5 \text{ thì } \begin{cases} [x] = 5 \\ x^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy tập nghiệm của (5) là $\{1, \sqrt{7}, \sqrt{13}, \sqrt{19}, 5\}$.

Phương pháp 3. Xét khoảng các giá trị của biến để khử dấu phần nguyên. Với chú ý rằng: Nếu $x \geq y$ thì $[x] \geq [y]$.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$x^4 = 2x^2 + [x] \quad (6)$$

Lời giải. (6) $\Leftrightarrow [x] = x^2(x^2 - 2)$.

Ta xét các trường hợp sau:

• Nếu $x^2 = 2$ thì $\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ [x] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ không tồn tại x .

• Nếu $x^2 < 2$ thì $\begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ [x] \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow [x] = 0$

hoặc -1 .

Với $[x] = 0$ thì $\begin{cases} x^2(x^2 - 2) = 0 \\ 0 \leq x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0;$

Với $[x] = -1$ thì $\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \\ -1 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$

• Nếu $x^2 > 2$ thì $\begin{cases} x > \sqrt{2} \text{ hoặc } x < -\sqrt{2} \\ [x] > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt{2}.$$

Suy ra $1 \leq [x] \leq x$ do đó

$$[x] = x^2(x^2 - 2) \geq [x]^2([x]^2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow [x]([x]^2 - 2) \leq 1 \Rightarrow [x] = 1.$$

Từ đó $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ suy ra $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$

(do $[x] = 1$).

Giá trị này thuộc khoảng đang xét.

Vậy tập nghiệm của (6) là $\{-1, 0, \sqrt{1+\sqrt{2}}\}$.

Xin mời các bạn tự thử sức mình để giải các phương trình sau :

a) $\left[\frac{2-5x}{4} \right] = -x$;

b) $\left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right]$;

c) $\left[\frac{1-x}{2} \right] + \left[1 - \frac{x}{2} \right] = \frac{1-3x}{8}$;

d) $1 - [x+1] = \frac{[x]-x}{[x]-1}$;

e) $x^4 - 3x^2 - [x] = 0.$

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI

NĂM HỌC 2005-2006

(Đề thi đăng trên THPT số 342, tháng 12 năm 2005)

Bài 1. 1) Đáp số: 5.

2) Với điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 4$ thì

$$A = \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} + \frac{2+\sqrt{x}}{4-x} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{4-2\sqrt{x}}{4-x}$$

$$A = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - 8\sqrt{x} + 16 = 4 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 4)^2 = 4.$$

Giải phương trình này (chú ý $x \neq 4$) ta được $x = 36$.

3) a) Đáp số: PT đã cho có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{1}{3}.$$

b) Hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = \left(\frac{2}{5}, 1\right)$.

Bài 2. 1) Hàm số $y = (2m + 1)x + 3$ nghịch biến và đồ thị của nó đi qua điểm $(1; 2)$ khi

$$\begin{cases} 2m+1 < 0 \\ 2 = (2m+1)+3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

2) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x = \frac{y+m}{2} \\ (2-m^2)y = 2(\sqrt{2}-m). \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $2 - m^2 \neq 0$, hay $m \neq \sqrt{2}$ và $m \neq -\sqrt{2}$.

3) a) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m + 3$; $x_2 = m - 2$.

b) Phương trình có hai nghiệm đều âm khi

$$\begin{cases} m+3 < 0 \\ m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$

Bài 3. (h. 1) 1) Từ giả thiết có $\widehat{OAN} = \widehat{OMN}$ $= 90^\circ$ nên tứ giác $AOMN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

2) Cách 1. Ta có $\widehat{MNO} = \widehat{MAO}$; $\widehat{MPO} = \widehat{MBO}$ mà $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^\circ$ nên $\widehat{ONM} + \widehat{MPO} = 90^\circ$,

dẫn đến tam giác NOP vuông tại O .

Cách 2. Vì ON và OP tương ứng là các tia phân giác của $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$ nên $\widehat{NOP} = 90^\circ$.

Cách 3. Gọi I là trung điểm của NP

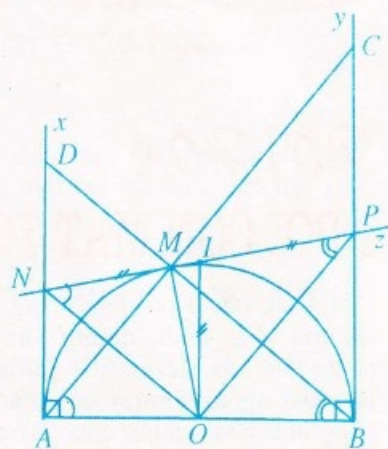
thì $OI = IN = IP = \frac{1}{2}(AN + BP)$, suy ra tam giác NOP vuông tại O (đpcm).

3) Nhận xét rằng $ON \perp AM$ và $BD \perp AM$, suy ra $ON \parallel BD$. Do O là trung điểm AB nên N là trung điểm AD . Chứng minh tương tự ta cũng thấy P là trung điểm của BC .

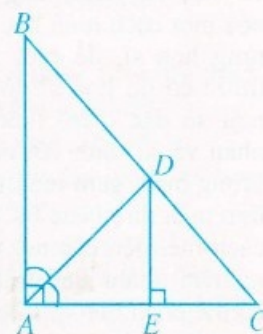
Bài 4. (h. 2). Dựng $DE \perp AC$ ($E \in AC$). Tam giác AED vuông cân tại E nên $AD = AE \cdot \sqrt{2}$ (1).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{EC}{AC} &= \frac{DE}{AB} \\ \Rightarrow \frac{AC - AE}{AC} &= \frac{AE}{AB} \\ \Rightarrow AE \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right) &= 1 \quad (2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1), (2) dẫn đến} \\ \frac{\sqrt{2}}{AD} &= \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$



Hình 1



Hình 2

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Sưu tầm và biên soạn)



HỘI HỌA DƯỚI CON MẮT TOÁN HỌC

Mỗi tác phẩm hội họa mang dấu ấn của một tác giả nhất định, nhưng xác định được tác phẩm nào của tác giả nào là một điều rất khó, hầu như ngoài tầm tay của người thường thức, cũng như nhà nghiên cứu, vì xác suất đúng rất thấp!

Điều đó cũng dễ hiểu vì hầu như không có một quan hệ khách quan nào đủ chính xác giữa tác phẩm và tác giả. Dường như không thể toán học hóa mối quan hệ đó được.

Tuy vậy trong một chừng mực nào đó, người ta cũng cố gắng toán học hóa quan hệ tác phẩm - tác giả. Mới đây ba nhà nghiên cứu Harry Farid, Daniel Rockmore và Siwei Lyu của trường Dartmouth ở Hanover, bang New Hampshire đã có nhiều cố gắng đáng khích lệ về việc này. Các ông đã một phần nào lượng hóa một cách toán học đặc điểm nghệ thuật của từng họa sĩ, để biết xem một bức tranh cho trước có do họa sĩ đó vẽ không. Họ đã tìm ra một số đặc điểm thống kê của nghệ thuật cá nhân và so sánh với các bức vẽ khác. Đó là số lượng màu, gam màu thường sử dụng và các tổ hợp màu được các tác giả đó ưa dùng cũng như cách thể hiện các nét vẽ, các mảng màu... Trắc nghiệm nhiều lần trên nhiều bức tranh, họ đã có thể phân biệt những bức tranh do Bruegel vẽ và những bức tranh giả mang tên Bruegel.

Bằng giải pháp này, người ta hi vọng có thể phân biệt tranh thật, tranh giả, và quan trọng nhất là phát hiện được những bức tranh thật bị mất cắp...

PHAN THANH QUANG
(Theo Recherche số 1/2005)

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2005 - 2006

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (1,5 điểm)

Tìm tập xác định của hàm số

$$y = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}}{|x+1| - |x-1|}.$$

Câu 2. (2 điểm)

Cho a, b, c là độ dài các cạnh và p là nửa chu vi của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Câu 3. (2,5 điểm)

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - m(m-2)x - (m-1)^2 = 0.$$

Tìm các giá trị của m sao cho bất đẳng thức sau là bất đẳng thức đúng:

$$2\sqrt{x_1+x_2-2(m-2)} - 3\sqrt{-x_1x_2} \geq 1.$$

Câu 4. (3 điểm)

Ở miền trong của một hình vuông cạnh bằng 1 có một tứ giác lồi diện tích lớn hơn $\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng có hai đầu mút ở trên cạnh của tứ giác, song song với cạnh của hình vuông và có độ dài lớn hơn $\frac{1}{2}$.

Câu 5. (1 điểm)

Tìm cặp số tự nhiên (m, n) thỏa mãn hệ thức

$$m^2 + n^2 = m + n + 8.$$

Đặt mua tạp chí Toán học và Tuổi trẻ dài hạn tại các cơ sở Bưu điện quận, huyện, thị xã, thành phố và các tỉnh.



THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

LTS. Mùa thi tuyển sinh đã đến gần. Nhiều trường trung học phổ thông trên cả nước đã bắt đầu tổ chức các kì kiểm tra cho các bạn học sinh lớp 12 trước khi thi tốt nghiệp và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng, Trung học chuyên nghiệp. Để giúp các bạn ôn tập được tốt hơn, bắt đầu từ số này chúng tôi xin giới thiệu một số đề kiểm tra môn toán, như vậy hi vọng các đề đó sẽ giúp các bạn tự thử sức mình trong một khoảng thời gian nhất định. Phần hướng dẫn giải sẽ đăng ở các số báo tiếp theo.

ĐỀ SỐ 1

Câu 1. (2 điểm)

Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

2) Gọi d_k là đường thẳng đi qua $M(0; -1)$ và có hệ số góc k . Tìm k để đường thẳng d_k cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

Câu 2. (3 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc xOy , cho tam giác ABC có

$A(1; 0)$, hai đường thẳng tương ứng chứa đường cao kẻ từ B, C của tam giác thứ tự có phương trình:

$$x - 2y + 1 = 0 \text{ và } 3x + y - 1 = 0.$$

Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

2) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC trong không gian $Oxyz$ với $A(3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 1)$.

3) Cho hình chóp tam giác đều $SABC$, cạnh đáy là a , cạnh bên là b . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Câu 3. (2 điểm)

1) Giải phương trình

$$4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0.$$

2) Giải phương trình

$$\cot gx = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}.$$

Câu 4. (2 điểm)

1) Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{4x+5}{x^2+3x+2} dx$.

2) Một trường THPT có 18 học sinh giỏi toàn diện, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 8 học sinh trong số 18 học sinh trên đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh được chọn?

Câu 1. (1 điểm)

Tìm các góc A, B, C của tam giác ABC sao cho

$Q = \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C$ đạt giá trị nhỏ nhất.

PHAN TUẤN CỘNG

(GV trường THPT chuyên Nguyễn Trãi,
Hải Dương)

GIẢI BÀI ... (Tiếp trang 27)

Từ (6), (7), (8), (9), (10), ta nhận thấy khi x tăng (tức là R_b tăng) thì độ sáng của các đèn Δ_1, Δ_4 tăng, còn độ sáng của các đèn $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_5$ giảm.

Nhận xét. 1) Có thể giải câu b) bằng cách xác định các biểu thức về sự phụ thuộc của cường độ dòng điện vào điện trở của biến trở qua mỗi đèn, rồi nhận xét.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Vũ Quang Hoà, 12A2, Vũ Ngọc Quang, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Đỗ Duy Chúng, 11A1,

THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Bắc Ninh:** Nguyễn Xuân Nam, Nguyễn Trọng Đạt, 12 Lí, Nguyễn Thành Linh, 10 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Khánh Hoà:** Lê Thế Huy, 11 Lí, THPT Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Lí Viễn Trường, 11A1, THPT Phù Cát I; **Thanh Hoá:** Nguyễn Bá Duẩn, 12B2, THPT Hoàng Hoá II; **Đắc Lắc:** Phạm Thị Thu Hương, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Du; **Thái Bình:** Nguyễn Bình, 11A1, THPT Nam Tiến Hải; **Nghệ An:** Lê Đình Dũng, 10A1, THPT chuyên, Đại học Vinh, Lê Đình Khiết, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hưng Yên:** Phạm Hải Luận, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN VĂN THUẬN



DÙNG TÍNH CHẤT TIẾP TUYẾN BA ĐƯỜNG CÔNIC ĐỂ GIẢI TOÁN

PHAN CUNG ĐỨC

(GV khối PTCTT, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Ba đường conic Elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, Hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và Parabol (P): $y^2 = 2px$ thường được gọi chung là ba

đường conic vì đó là ba nghiệm hình thu được khi cắt mặt nón tròn xoay (cone) bằng một mặt phẳng. Ở bài này, chúng tôi sử dụng các khái niệm, các kí hiệu, các phương trình (PT) dạng chính tắc... của chúng đã được xây dựng trong sách giáo khoa (SGK).

Khi giải một bài toán có liên quan đến tiếp tuyến của ba đường conic, học sinh thường có thói quen sử dụng "Phương pháp giải tích", nghĩa là xuất phát từ PT của tiếp tuyến, viết PT các đường có liên quan, tìm tọa độ của một điểm bằng cách giải hệ PT hai đường đi qua điểm đó, tìm quỹ tích của điểm chuyển động bằng cách tìm PT của đường quỹ tích... Đây là một phương pháp cơ bản, dễ trình bày nhưng thường nặng về tính toán và rất dễ bị nhầm lẫn. Do đó, chúng tôi muốn trao đổi thêm một phương pháp khác, đó là "Phương pháp hình học". Chúng ta sẽ khai thác các tính chất hình học của tiếp tuyến để có lời giải thuần túy hình học, trình bày gọn gàng hơn và ít tính toán hơn. Vì thế, sẽ tiết kiệm được thời gian khi làm bài và nhất là trong phòng thi.

Cơ sở lý luận của phương pháp này là định lý đã được trình bày trong các bộ SGK cũ, chẳng hạn cuốn Hình học 12 (GS. Văn Như Cương chủ biên).

Định lý. Cho điểm M tùy ý thuộc đường conic (C). Gọi (t) là tiếp tuyến qua M đối với (C). Khi đó

1) Nếu (C) là (E) thì (t) là phân giác ngoài của góc F_1MF_2 .

2) Nếu (C) là (H) thì (t) là phân giác trong của góc F_1MF_2 .

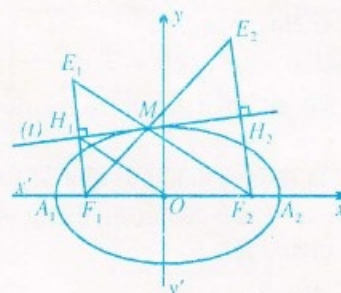
3) Nếu (C) là (P) thì (t) là phân giác trong của góc F_1MF_2 .

(H là hình chiếu vuông góc của M lên đường chuẩn (d)).

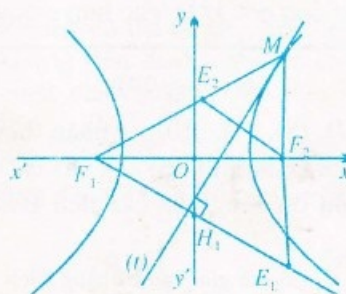
Các kết quả sau nhận được trực tiếp từ định lý trên. Có thể chứng minh các kết quả này bằng phương pháp giải tích. Các bạn hãy thử xem.

Kết quả 1. (Nếu (C) là (E) hoặc (H)).

Gọi E_1, E_2 theo thứ tự là các điểm đối xứng của F_1, F_2 qua (t) thì E_1, M, F_2 (hoặc E_2, M, F_1) thẳng hàng và $F_1E_2 = F_2E_1 = 2a$ (xem h.1 và h.2).



Hình 1



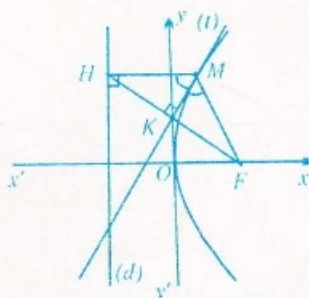
Hình 2

Từ đó nếu cho M chuyển động trên (C) thì quỹ tích của E_1 là đường tròn tâm F_2 bán kính

2a (kí hiệu $(F_1; 2a)$) và của E_2 là đường tròn $(F_1; 2a)$. Ngoài ra, nếu gọi H_1, H_2 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F_1, F_2 lên (t) thì quỹ tích của H_1 và H_2 là đường tròn $(O; a)$.

Kết quả 2. (Nếu (C) là (P)).

Gọi H là điểm đối xứng của F qua (t) thì H thuộc đường chuẩn (d) . Gọi K là hình chiếu vuông góc của F lên (t) thì K thuộc trục tung (h. 3).



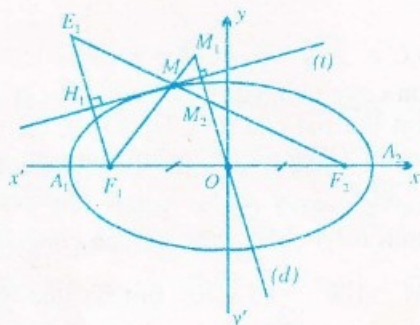
Hình 3

Bây giờ chúng ta đưa một vài thí dụ minh họa.

Thí dụ 1. Giả sử M là điểm thuộc (E) :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và (t) là tiếp tuyến qua M đối với (E) . Đường thẳng (d) qua O , vuông góc với (t) cắt MF_1, MF_2 lần lượt ở M_1, M_2 . Tìm quỹ tích của các điểm M_1 và M_2 khi M thay đổi trên (E) .

Lời giải. (h.4). Vì khi M thay đổi trên (E) , $(d) \perp (t)$ nên $d // F_1E_1$ dẫn đến M_2 là trung điểm của E_1F_2 nên $F_2M_2 = \frac{1}{2}F_2E_1 = a$. Vậy quỹ tích của M_2 là đường tròn $(F_2; a)$.



Hình 4

Tương tự, quỹ tích của M_1 là đường tròn $(F_1; a)$.

(Các bạn tự làm phần đảo).

Thí dụ 2. Cho điểm M tùy ý thuộc (H) :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và (t) là tiếp tuyến của (H) qua M .

(t) cắt trục tung ở N . Gọi N_1, N_2 là hình chiếu vuông góc của N lên MF_1, MF_2 . Chứng minh đường thẳng (N_1N_2) đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên (H) .

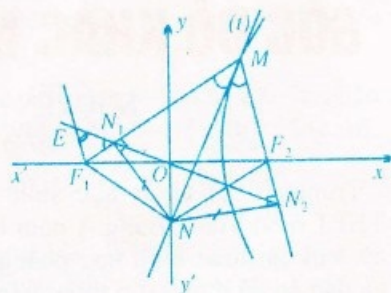
Lời giải.

(h. 5).

Đường thẳng qua F_1 song song với MF_2 cắt N_1N_2 tại E .

Từ định lý trên ta thấy $\triangle MN_1N_2$ cân tại M suy ra $\triangle EF_1N_1$ cân

tại $F_1 \Rightarrow F_1E = F_1N_1$ mà $\triangle NN_1F_1 = \triangle NN_2F_2 \Rightarrow F_1N_1 = F_2N_2$. Vậy $F_1E = F_2N_2$, dẫn đến tứ giác $F_1EF_2N_2$ là hình bình hành. Do đó hai đường chéo của nó cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy N_1N_2 luôn qua điểm O cố định (đpcm).

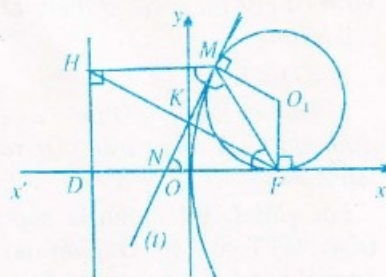


Hình 5

Thí dụ 3. Cho parabol $(P): y^2 = 2px$. Hãy dựng đường tròn (O_1) vừa tiếp xúc với tia Ox tại tiêu điểm F vừa tiếp xúc với (P) .

Lời giải.

(h. 6) Giả sử đường tròn (O_1) tiếp xúc với (P) tại M . Tiếp tuyến chung (t) của (P) và đường tròn (O_1) qua M cắt trục hoành ở N . Do (t) là



Hình 6

phân giác trong của $\widehat{HMF}$ nên $\widehat{NMF} = \widehat{FNM}$. Mặt khác $NM = NF$ nên $\triangle NMF$ đều, suy ra $\widehat{MFN} = 60^\circ$.

Vậy điểm M là giao điểm của (P) với đường thẳng cố định đi qua F , lập với tia FO một góc 60° với (P) . Từ đó tâm O_1 xác định và suy ra cách dựng đường tròn (O_1) . Bài toán có hai nghiệm hình đối xứng nhau qua Ox .

Các bạn hãy giải lại các thí dụ trên bằng phương pháp giải tích để có sự so sánh giữa hai phương pháp.

NHỮNG CÁCH TIẾP CẬN MỘT BÀI TOÁN TỪ NHIỀU GÓC ĐỘ KHÁC NHAU

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
(Hà Nội)

Trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT môn Toán, Bảng A năm học 2004–2005 có một bài toán hình học phẳng (bài 2) mà đề và đáp án đã được giới thiệu trên tạp chí THPT số 340, tháng 10/2005. Bài viết này giới thiệu với bạn đọc những cách tiếp cận và khai thác bài toán đó dưới những góc độ khác nhau. Để bạn đọc dễ theo dõi, trước hết xin nhắc lại nội dung đề toán.

Bài 2. Trong mặt phẳng cho đường tròn (O) tâm O bán kính R và hai điểm A, B cố định trên đường tròn đó sao cho chúng không thẳng hàng với O . Xét một điểm C trên (O) , C không trùng với A và B . Dựng các đường tròn sau: (O_1) đi qua A và tiếp xúc với BC tại C , và (O_2) đi qua B , tiếp xúc với AC tại C . Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt lại nhau ở điểm D khác C . Chứng minh rằng:

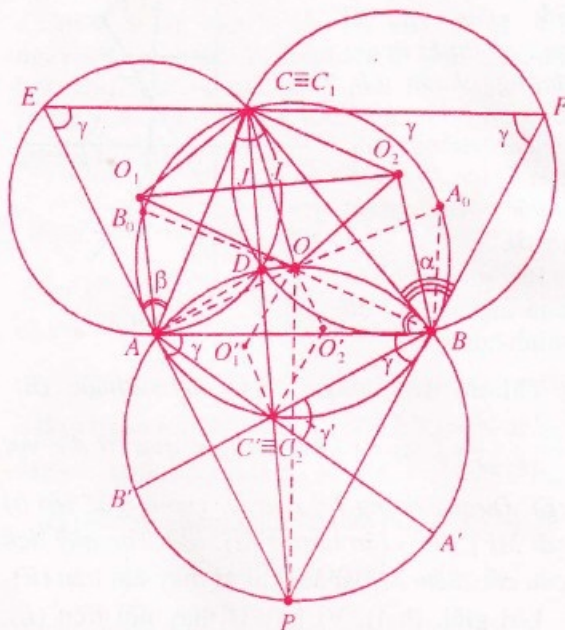
- 1) $CD \leq R$;
- 2) Đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định khi C di động trên (O) và C không trùng với A và B .

Lời giải 1. Đó chính là đáp án của bài toán trên THPT số 340. Đáp án này là một phương án giải của bài toán, trong đó sử dụng đến định lý sin, định lý cosin và công thức biến đổi lượng giác (Hình học 10).

Lời giải này không đòi hỏi vẽ thêm hình phụ mà vẫn lập luận chặt chẽ khi xét đầy đủ hai trường hợp về góc $\widehat{ACB}$ có thể nhọn hay tù, tuy việc đòi hỏi cần thiết phải huy động đến các định lý sin và cosin không được tự nhiên cho lắm. Vì vậy, chúng ta có cơ sở để tin chắc rằng có nhiều cách nhìn (tiếp cận) bài toán từ những góc độ khác nhau sao cho lời giải đưa ra được tự nhiên hơn.

Lời giải 2. 1) Theo giả thiết thì các cặp đoạn thẳng O_1C , OO_2 và O_2C , OO_1 theo thứ tự vuông góc với BC và CA . Từ đó suy ra OO_1CO_2 là một hình bình hành, vì vậy trung

điểm I của OC cũng là trung điểm của O_1O_2 . Mặt khác, O_1O_2 là đường trung trực của CD , cắt CD tại trung điểm J của nó. Từ đó suy ra $IJ \parallel OD$ và tam giác OCD là vuông ở D . Bởi vậy ta có $CD \leq OC = R$, đpcm. Ngoài ra, dễ thấy rằng: $CD_{\max} = R \Leftrightarrow D \equiv O \Leftrightarrow OC \perp AB$.



2) Vì B không đối xứng với A qua O nên dây AB chia đường tròn (O) thành hai cung: cung lớn $\widehat{A\gamma B}$ chứa góc nhọn γ và cung nhỏ $\widehat{A\gamma'B}$ chứa góc tù $\gamma' = 180^\circ - \gamma$. Ta xét hai trường hợp:

• Nếu $C \in \widehat{A\gamma B}$ thì $\widehat{ACB} = \gamma < 90^\circ$; khi đó O và D nằm cùng phía với C đối với AB . Gọi C' là giao điểm thứ hai của tia CD và (O) , thế thì D thuộc đoạn CC' và tia DC' nằm trong góc (giữa hai tia) $\widehat{ADB}$. Góc $\widehat{CDA}$ là góc nội tiếp của đường tròn (O_1) chắn cung bù của cung $\widehat{ADC}$ nên $\widehat{CDA} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ADC}$. Bởi vậy góc $\widehat{ADC}'$ kẻ bù của $\widehat{CDA}$ có số đo $\widehat{ADC}' = \frac{1}{2}\widehat{ADC}$ và do đó $\widehat{ADC}' = \widehat{ACB}$, trong đó góc (giữa hai tia) $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp của đường tròn (O_1) có một cạnh chứa dây cung CA của (O_1) và cạnh kia là tia tiếp tuyến CB tại C của (O_1) .

(Chính vì lẽ đó mà ta cũng xem và gọi góc (giữa hai tia) $\widehat{ADC}'$, kẻ bù của $\widehat{CDA}$ có một

cạnh chứa dây DA và cạnh kia DC' mà tia đối của nó chứa dây DC của (O_1) là góc nội tiếp suy rộng chắn cung $\widehat{ADC}$ của đường tròn (O_1) ngoại tiếp $\triangle CDA$). Với cách quan niệm đó và lập luận tương tự, ta được: $\widehat{C'DB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp của (O_2) cùng chắn cung $\widehat{CDB}$). Từ đó $\widehat{ADB} = \widehat{AOB}$ và D thuộc cung $\widehat{AOB}$ chứa góc $\widehat{AOB} = 2\gamma$ của đường tròn (AOB) , đồng thời đường thẳng DC' cũng tức là đường thẳng CD đi qua một điểm cố định là trung điểm P của cung bù của cung $\widehat{AOB}$ thuộc đường tròn (AOB) .

• Nếu $C \in \widehat{A'B}$ thì $\widehat{ACB} = \gamma' = 180^\circ - \gamma > 90^\circ$; khi đó D nằm khác phía với C đối với (AB) và do đó, D vẫn nằm cùng phía với O đối với (AB) . Trong trường hợp này đối với (O_1) và (O_2) theo thứ tự ta có: $\widehat{ADC} = \widehat{ACB}'$ và $\widehat{CDB} = \widehat{A'CB}$ (bạn đọc tự vẽ hình), trong đó CB' là tia đối của tia CB ; CA' là tia đối của tia CA . Mặt khác $\widehat{ACB}' = \widehat{A'CB} = 180^\circ - \widehat{ACB} = \gamma$. Từ đó $\widehat{ADC} = \widehat{CDB} = \frac{1}{2} \widehat{ADB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ và các kết luận rút ra trong trường hợp góc $\widehat{ACB}$ nhọn đã xét ở trên vẫn còn nguyên hiệu lực.

Sau đây các phương án giải tiếp theo (chỉ đề cập lời giải phần 2) của bài toán.

Lời giải 3. Rõ ràng lời giải 2 trên đây chỉ đòi hỏi vốn kiến thức hình học môn Toán bậc THCS, nhưng nhất thiết lập luận phải chặt chẽ, xét đầy đủ hai trường hợp về góc $\widehat{ACB}$. Tuy nhiên, nếu sử dụng góc định hướng giữa hai đường thẳng $[\text{mod } \pi]$ và giữa hai vector $[\text{mod } 2\pi]$ thì lời giải sẽ ngắn gọn hơn; ngoài ra, còn dễ dàng chỉ ra được quỹ tích của điểm D . Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} (DA, DC) &= (AD, AC) + (CA, CD) = \\ &= (CA, CD) + (CD, CB) = (CA, CB) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} (DC, DB) &= (CD, CB) + (BC, BD) = \\ &= (CA, CD) + (CD, CB) = (CA, CB) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} (DA, DB) &= 2(DA, DC) = 2(DC, DB) = \\ &= 2(CA, CB) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức } (DA, DB) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}$$

nói lên rằng: $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}$.

Sau đó, ta dễ dàng kết luận được rằng:

Nếu $\{C\}$ là $(O) \setminus \{A, B\}$ thì

$\{D\}$ là $\widehat{AOB} \setminus \{A, B\}$ ($\{C\}$ - kí hiệu tập hợp các điểm C).

Có thể chứng minh điều đó bằng cách chỉ ra rằng nếu một đường thẳng (tia) bất kì đi qua P , cắt (O) ở hai điểm C_1, C_2 và cắt cung $\widehat{AOB}$ ở điểm D thì hai cặp đường tròn $(O_1), (O_2)$ và $(O'_1), (O'_2)$ ứng với hai điểm C_1, C_2 đều nhận D là giao điểm thứ hai, khác C của chúng (xem hình vẽ). Ngoài ra, cũng từ các đẳng thức thu được về góc định hướng, kết luận nêu ra ở lời giải 2 vẫn còn nguyên hiệu lực.

Lời giải 4. Vì C di động trên (O) nhưng $C \notin \{A, B\}$ nên ta lại đặc biệt chú ý đến A và B , hai vị trí bị loại trừ của điểm C . Quan sát khi $C \rightarrow A$ (hoặc $C \rightarrow B$) ta nhận ra rằng đến khi $C \equiv A$ thì (O_1) trở thành "đường tròn điểm A ", (CA) trở thành tiếp tuyến (AA) tại A của (O) và (O_2) trùng (O) , $D \equiv C \equiv A$ và do đó (CD) chính là (AA) . Cũng vậy, cho $C \rightarrow B$ đến khi $C \equiv B$ thì $D \equiv C \equiv B$ và khi đó (CD) chính là tiếp tuyến (BB) tại B của (O) . Điều đó khiến ta dự đoán (CD) đi qua $P = (AA) \cap (BB)$. Gọi E và F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (PA) với (O_1) và của (PB) với (O_2) . Thế thì: $\widehat{AEC} = \widehat{ACB} = \gamma = \widehat{CFB}$ rồi đặt $\widehat{BAC} = \alpha$ và $\widehat{CBA} = \beta$ thì $\widehat{ECA} = \alpha$ và $\widehat{BCF} = \beta$ (do $\widehat{PAB} = \widehat{ABP} = \gamma$). Từ đó E, C, F thẳng hàng, $EF \parallel AB$, do đó $AE = BF$. Từ đây suy ra điểm P có cùng phương tích với (O_1) và (O_2) ; bởi vậy P phải thuộc đường thẳng CD .

Lời giải 5. Vì ba đường thẳng AP, BP và CD đều xuất phát từ các đỉnh của tam giác ABC nên việc chứng minh (CD) đi qua P có thể hi vọng nhờ vào điều kiện đủ của định lý Céva. Bạn đọc có thể tự kiểm nghiệm điều này trên cơ sở định lý Céva dưới dạng lượng giác.

Cuối cùng, điểm C di động trên (O) kéo theo tâm O_i của (O_i) ($i = 1, 2$) cũng chuyển động theo.

Trong khi $\{D\}$ là một cung tròn $\widehat{AOB} \setminus \{A, B\}$ thì $\{O_i\}$ ($i = 1, 2$) lại là đường tròn loại bỏ đi hai điểm. Đề nghị bạn đọc chỉ rõ hai đường tròn quỹ tích đó của O_1 và O_2 .

LỜI GIẢI BÀI THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 46 NĂM 2005

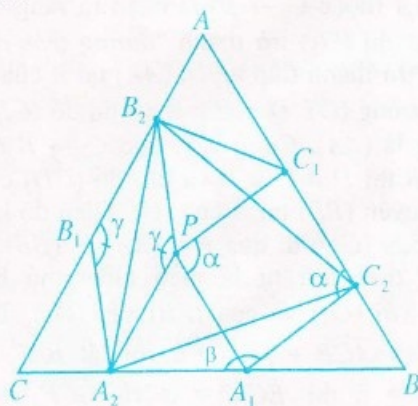
VŨ ĐÌNH HÒA
(GV trường ĐHSP Hà Nội)

Kì thi Toán Quốc tế lần thứ 46 được tổ chức tại Mérida thuộc Mexico từ 9.7.2005 tới ngày 19.7.2005. Ở bài báo dưới đây chúng tôi xin giới thiệu đề và lời giải của sáu bài toán trong kì thi đó.

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. Trên các cạnh của tam giác đều ABC chọn sáu điểm: A_1, A_2 trên BC ; B_1, B_2 trên CA ; C_1, C_2 trên AB . Các điểm này là đỉnh của một lục giác lồi $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ có sáu cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1B_2, B_1C_2 và C_1A_2 đồng quy.

Lời giải. Bài toán này có thể giải bằng nhiều cách khác nhau. Sau đây là một lời giải đơn giản.



Đựng tam giác đều PA_1A_2 bên trong tam giác ABC (xem hình vẽ). Do tam giác ABC là tam giác đều, nên ta có $PA_2 \parallel AC$ và $PA_1 \parallel AB$. Từ đó suy ra các tứ giác $PA_2B_1B_2$ và $PA_1C_2C_1$ là các hình thoi. Tam giác PC_1B_2 có ba cạnh bằng cạnh của lục giác $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ nên là tam giác đều.

Đặt $\alpha = \widehat{C_1C_2A_1}$, $\beta = \widehat{A_2A_1C_2}$, $\gamma = \widehat{A_2B_1B_2}$.

Dùng kết quả góc ngoài của tam giác bằng tổng các góc trong không kề với nó, ta có $\alpha + \beta = 240^\circ$. Mặt khác, $PA_2B_1B_2$ và $PA_1C_2C_1$ là các hình thoi, PA_1A_2 và PC_1B_2 là các tam giác đều, ta có: $\alpha + \gamma = 240^\circ$. Suy ra $\beta = \gamma$.

Một cách tương tự, ta cũng có $\widehat{B_2C_1C_2} = \beta$. Từ đó có ba tam giác cân $B_2C_1C_2$, $C_2A_2A_1$ và

$A_2B_1B_2$ bằng nhau. Suy ra tam giác $B_2C_2A_2$ là tam giác đều. Như vậy, các đường thẳng A_1B_2, B_1C_2 và C_1A_2 là các đường trung trực các cạnh của tam giác $B_2C_2A_2$ nên chúng đồng quy.

Bài 2. Cho $a_1, a_2, \dots$ là một dãy số nguyên với vô hạn số hạng dương và vô hạn số hạng âm. Biết rằng với mỗi số nguyên dương n , các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ cho n số dư khác nhau trong phép chia cho n . Chứng minh rằng mỗi số nguyên xuất hiện đúng một lần trong dãy số này.

Lời giải. Ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 1. Với $i < j$ thì $a_i \neq a_j$, vì nếu $a_i = a_j$ thì tập hợp $\{a_1, a_2, \dots, a_j\}$ chỉ cho không quá $j-1$ số dư khác nhau trong phép chia cho j .

Nhận xét 2. Nếu $i < j \leq n$, thì $|a_i - a_j| \leq n-1$, vì nếu $m = |a_i - a_j| > n-1$ thì các số $a_1, a_2, \dots, a_m$ cho ta nhiều nhất là $m-1$ số dư trong phép chia cho m mà thôi.

Nhận xét 3. Với mỗi $n \geq 1$, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là tập hợp gồm n số nguyên liên tiếp.

Chứng minh: Với $n \geq 1$, kí hiệu $i(n)$ và $j(n)$ thứ tự là chỉ số của số lớn nhất và số nhỏ nhất của dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$. Theo nhận xét 1, n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ nhận n giá trị đôi một khác nhau từ $a_{i(n)}$ tới $a_{j(n)}$ tức là $|a_{j(n)} - a_{i(n)}| \geq n-1$.

Do $|a_{j(n)} - a_{i(n)}| \leq n-1$ theo nhận xét 2, nên có $|a_{j(n)} - a_{i(n)}| = n-1$ và $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là tập hợp số $\{a_{i(n)}, a_{i(n)+1}, \dots, a_{j(n)} = a_{i(n)} + (n-1)\}$.

Từ nhận xét 1, mỗi số nguyên xuất hiện nhiều nhất một lần trong dãy đã cho. Xét số nguyên x tùy ý. Do dãy đã cho có vô hạn số âm, nên tồn tại $a_i < x$, tương tự do dãy có vô hạn số dương, nên tồn tại $a_j > x$. Với $n \geq \max(i, j)$, dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ chứa x theo nhận xét 3.

Bài 3. Cho x, y và z là các số thực dương sao cho $xyz \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Lời giải.

Bất đẳng thức (BĐT) cần chứng minh tương đương với:



HỎI - SỐ NÀY

PHẢI HIỂU THẾ NÀO ?

1. (1.06). Trong SGK Toán 7 tập một sau §4. Hai đường thẳng song song, có bài tập 29/92.

"Cho góc nhọn xOy và một điểm O' . Hãy vẽ một góc nhọn $x'O'y'$ có $O'x' // Ox$ và $O'y' // Oy$..."

Học sinh sẽ phải hiểu thế nào khi đầu bài cho "... $O'x' // Ox$ và $O'y' // Oy$..." khi đó $O'x'$, Ox , $O'y'$ và Oy là những tia ? Nếu là đường thẳng thì đó là các kí hiệu sai còn nếu là tia thì học sinh chưa được học khái niệm hai tia song song bao giờ.

Tìm hiểu vấn đề này thì thấy trong SGK, SBT, SGV Toán 7 và nhiều tài liệu tham khảo khác còn có nhiều bài tập kiểu như vậy.

Ví dụ bài tập 26/91 SGK "vẽ cặp góc so le trong xAB , yBA có số đo đều bằng 120° . Hỏi hai đường thẳng Ax , By có song song với nhau không? Vì sao? Các bài 44/81, 48/83, 49/83, 13/99 SBT Toán 7 tập một... và rất nhiều bài tập và lời giải trong các tài liệu tham khảo khác mặc nhiên dùng các kí hiệu coi như đã học hai tia song song.

Ngay từ lớp 6 học sinh đã được học : "Người ta dùng các chữ cái thường $a, b, \dots, m, p, \dots$ để đặt tên cho các đường thẳng (Toán 6 Tập một trang 103). Khi học §3: Đường thẳng đi qua hai điểm, các em được biết thêm: "Vì đường thẳng được xác định bởi hai điểm nên ta còn lấy tên hai điểm đó để đặt tên cho đường thẳng, chẳng hạn ta gọi tên đường thẳng đi qua hai điểm A, B là đường thẳng AB hoặc đường thẳng BA ". Ta còn đặt tên bằng hai chữ cái thường, ví dụ đường thẳng xy hoặc yx . Thế còn học sinh được học khái niệm tia là: Hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O được gọi là một tia gốc O ".

Rà soát lại các kiến thức học sinh đã học, chúng tôi thấy việc đặt và gọi tên đường thẳng, tia chưa khi nào kí hiệu Ax hay By là đường thẳng. Học sinh mới chỉ được học hai đường thẳng song song chứ chưa được học hai tia song song cũng như chưa được học hai đoạn thẳng song song (!). Vì vậy các em phải hiểu Ax , By là hai đường thẳng thì có nhầm lẫn trong cách đặt tên tia? Còn nếu hiểu đó là hai tia thì ta chưa có khái niệm hai tia song song. Còn ở bài tập 29/92, rõ ràng xOy và $x'O'y'$ là hai góc thì Ox , Oy , $O'x'$, $O'y'$ là các tia chứ không thể là các đường thẳng.

Trên đây là một số suy nghĩ, băn khoăn của tôi xin phép được nêu ra mong các tác giả viết SGK Toán 7, các bạn đồng nghiệp cùng trao đổi.

NGUYỄN ANH THUẦN

(GV THCS Trần Văn On, Hồng Bàng,
Hải Phòng)

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq 3.$$

Sử dụng BĐT Bunhiacôpxki cho các số dương và điều kiện $xyz \geq 1$, ta có

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geq (x^{5/2}(yz)^{1/2} + y^2 + z^2)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2, \text{ nghĩa là}$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{yz + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Tương tự :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} \leq \frac{zx + x^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq \frac{yx + y^2 + x^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên và áp dụng kết quả $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$, ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq \\ & \leq 2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2} \leq 3 \text{ (dpcm).} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = y = z = 1.$$

(Kì sau đăng tiếp)



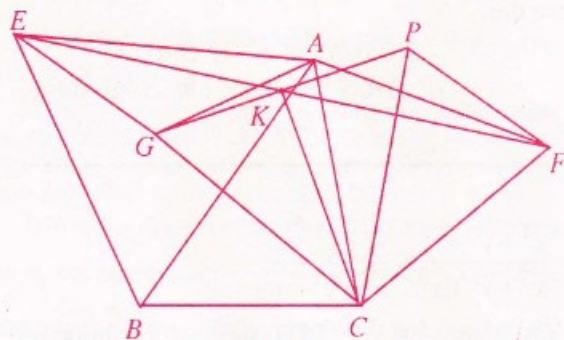
ỨNG DỤNG GÓC ĐỊNH HƯỚNG VÀO VIỆC GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

NGUYỄN MINH HÀ
(GV DHSP Hà Nội)

Trong THPT số 339 (9/2005) và 340 (10/2005), chúng tôi đã giới thiệu với bạn đọc khái niệm góc định hướng của hai vectơ và góc định hướng của hai đường thẳng cùng một vài hệ thức liên quan tới số đo của chúng. Trong bài này, chúng tôi sẽ giới thiệu ứng dụng của góc định hướng trong việc giải một số bài toán hình học. Việc sử dụng góc định hướng sẽ giúp lời giải ngắn gọn, trong khi dùng góc không có hướng phải phụ thuộc vào hình vẽ, phải xét nhiều vị trí tương đối của các hình.

Trong bài này thay cho cách nói bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn, ta nói bốn điểm A, B, C, D đồng viên.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC . Về phía ngoài nó ta dựng các tam giác đều ABE, ACF . Gọi G là tâm tam giác ABE và K là trung điểm của đoạn EF . Chứng minh rằng tam giác KGC vuông và có một góc bằng 60° .



Hình 1

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử (AB, AC) là góc dương (h. 1) Lấy điểm P sao cho K là trung điểm của GP thì tứ giác $EGFP$ là hình bình hành nên $GE = PF$. Từ giả thiết G là tâm tam giác đều ABE , ta có $GA = GE$. Vậy

$$GA = PF \quad (1)$$

Từ giả thiết tam giác ACF đều, ta có

$$CA = CF \quad (2)$$

Mặt khác $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FC}) \equiv (\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{FC}) \pmod{2\pi}$
(vì $\overrightarrow{FP}$ và $\overrightarrow{GE}$ cùng hướng) nên

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FC}) &\equiv (\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{CA}) + \\ &+ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CF}) + (\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{FC}) \pmod{2\pi} \\ \Rightarrow (\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FC}) &\equiv -\frac{2\pi}{3} + (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) - \frac{\pi}{3} + \pi \pmod{2\pi} \\ \Rightarrow (\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FC}) &\equiv (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{PFC} = \widehat{GAC} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\triangle CGA = \triangle CPF$. Từ đó, dễ dàng thấy $CG = CP$ và $\widehat{GCP} = \widehat{ACF} = 60^\circ$, suy ra $\triangle KGC$ vuông tại K và $\widehat{KGC} = 60^\circ$.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với AA', BB', CC' là các đường phân giác trong. Gọi M là điểm bất kì không thuộc BC, CA, AB . Các điểm X, Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua AA', BB', CC' . Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy hoặc đôi một song song.

Lời giải. Trước hết xin phát biểu không chứng minh một nhận xét.

Nhận xét. Cho ba điểm A, B, C và đường thẳng Δ . Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của A, B, C qua Δ . Khi đó:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \pmod{2\pi}.$$

Trở lại việc giải bài toán 2 (h.2).

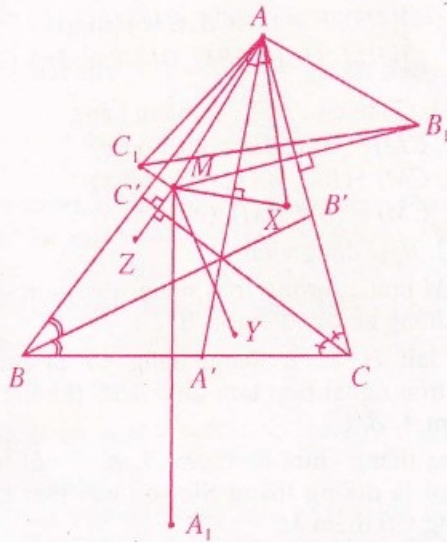
Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB . Dễ thấy $AB_1 = AM = AC_1$ (1).

Mặt khác, theo nhận xét trên, ta có

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB_1}) &\equiv (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}) \pmod{2\pi} \\ \Rightarrow (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB_1}) &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi} \\ \Rightarrow (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB_1}) &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Tương tự như vậy, ta có

$$(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AC_1}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi}$$



Hình 2

Từ đó suy ra

$$(\overline{AX}, \overline{AB_1}) + (\overline{AX}, \overline{AC_1}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

nên AX là phân giác góc B_1AC_1 (2)

Từ (1), (2) suy ra: AX là trung trực của đoạn B_1C_1 . Tương tự như vậy, BY, CZ theo thứ tự là trung trực của C_1A_1, A_1B_1 .

Từ đó, ta có kết luận sau:

Nếu A_1, B_1, C_1 không thẳng hàng thì AX, BY, CZ đồng quy; nếu A_1, B_1, C_1 thẳng hàng thì AX, BY, CZ đôi một song song.

Bài toán 3. Cho tứ giác $ABCD$ mà các cặp cạnh đối không song song nội tiếp đường tròn (O) . Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AC và BD, AD và BC . Gọi I, M, N theo thứ tự là trung điểm của EF, AB, CD . Chứng minh rằng:

a) $\mathcal{P}_{E/(O)} + \mathcal{P}_{F/(O)} = EF^2$;

b) $\triangle IEM \sim \triangle INE$.

Lời giải. Trước hết xin phát biểu không chứng minh một nhận xét quen thuộc.

Nhận xét. Cho tứ giác $ABCD$ mà các cặp cạnh đối không song song. Gọi E, F, K lần lượt là giao điểm của AC và BD, AD và BC, AB và CD . Khi đó

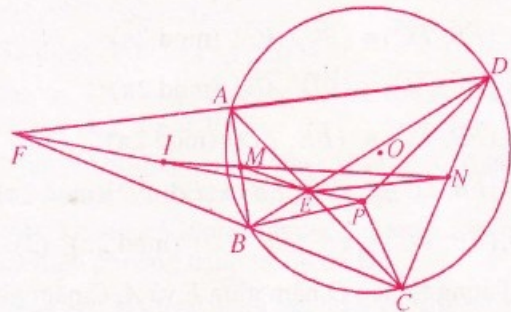
a) Trung điểm của các đoạn AC, BD, KF thẳng hàng.

b) Trung điểm của các đoạn AB, DC, EF thẳng hàng.

c) Trung điểm của các đoạn AD, CB, KE thẳng hàng.

Tác giả của nhận xét trên là nhà toán học nổi tiếng người Đức K.Gauss. Các bạn có thể xem chứng minh nhận xét này ở lời giải bài T7/308 THPT số 312 (6.2003).

Trở lại việc giải bài toán 3 (h. 3).



Hình 3

a) Gọi P là giao của EF với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE ($P \neq E$). Ta có:

$$(PF, PB) \equiv (PE, PB) \pmod{\pi}$$

$$(PF, PB) \equiv (CE, CB) \pmod{\pi}$$

$$(PF, PB) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi}$$

$$(PF, PB) \equiv (DA, DB) \pmod{\pi}$$

$$(PF, PB) \equiv (DF, DB) \pmod{\pi}.$$

Suy ra bốn điểm B, P, O, F đồng viên.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{E/(O)} + \mathcal{P}_{F/(O)} &= \overline{EB} \cdot \overline{ED} + \overline{FB} \cdot \overline{FC} \\ &= \overline{EF} \cdot \overline{EP} + \overline{FE} \cdot \overline{FP} = \overline{EF}(\overline{EP} - \overline{FP}) = EF^2. \end{aligned}$$

b) Theo nhận xét trên, I, M, N thẳng hàng (chú ý: I nằm ngoài đoạn MN).

Ta thấy hai tam giác IEM và INE có góc MIE chung nên

$$\triangle IEM \sim \triangle INE \Leftrightarrow IE^2 = IM \cdot IN$$

$$\Leftrightarrow \overline{IE}^2 = \overline{IM} \cdot \overline{IN}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} FE^2 = \frac{1}{2} (\overline{FA} + \overline{EB}) \cdot \frac{1}{2} (\overline{FD} + \overline{EC})$$

$$\Leftrightarrow EF^2 = \overline{FA} \cdot \overline{FD} + \overline{FA} \cdot \overline{EC} + \overline{EB} \cdot \overline{FD} + \overline{EB} \cdot \overline{EC}$$

$$\Leftrightarrow EF^2 = \overline{FA} \cdot \overline{FD} + (\overline{FE} + \overline{EA}) \cdot \overline{EC} + \overline{EB} \cdot \overline{FD} + \overline{EB} \cdot \overline{EC}$$

$$\Leftrightarrow EF^2 = \mathcal{P}_{F/(O)} + \mathcal{P}_{E/(O)} + \overline{FE} \cdot \overline{EC} + \overline{EB} \cdot \overline{FD} + \overline{EB} \cdot \overline{EC}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \overline{FB} \cdot \overline{EC} + \overline{EB} \cdot \overline{FD}$$

$$\Leftrightarrow 0 = FB \cdot EC \cdot \cos(\overline{FB}, \overline{EC}) + EB \cdot FD \cdot \cos(\overline{EB}, \overline{FD}) \quad (1)$$

Chú ý rằng nếu A nằm giữa F và D , B nằm giữa F và C thì ta có :

$$\begin{aligned} (\overline{FB}, \overline{EC}) &\equiv (\overline{BC}, \overline{EC}) \pmod{2\pi} \\ \Rightarrow (\overline{FB}, \overline{EC}) &\equiv (\overline{BC}, \overline{AC}) \pmod{2\pi} \\ \Rightarrow (\overline{FB}, \overline{EC}) &\equiv (\overline{BD}, \overline{AD}) \pmod{2\pi} \\ \Rightarrow (\overline{FB}, \overline{EC}) &\equiv (\overline{BE}, \overline{FD}) \pmod{2\pi} \\ \Rightarrow (\overline{FB}, \overline{EC}) &\equiv (\overline{BE}, \overline{EB}) + (\overline{EB}, \overline{FD}) \pmod{2\pi} \\ \Rightarrow (\overline{FB}, \overline{EC}) &\equiv \pi + (\overline{EB}, \overline{FD}) \pmod{2\pi} \quad (2) \end{aligned}$$

Tương tự nếu D nằm giữa F và A , C nằm giữa F và B ta cũng có (2).

Suy ra

$$\cos(\overline{FB}, \overline{EC}) \equiv -\cos(\overline{EB}, \overline{FD}) \quad (3)$$

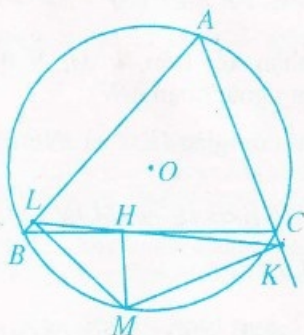
Mặt khác, $\Delta FAB \sim \Delta FCD$; $\Delta EAB \sim \Delta EDC$

$$\text{nên } \frac{FB}{FD} = \frac{AB}{CD} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow FB \cdot EC = EB \cdot FD \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra (1) đúng. Từ đó suy ra đpcm.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm bất kì và H, K, L theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB . Tìm tập hợp những điểm M sao cho H, K, L thẳng hàng.

Lời giải. Dễ thấy, khi M trùng với các điểm A, B, C thì thỏa mãn điều kiện đề bài.



Hình 4

Khi M khác A, B, C (h. 4) ta thấy: H, K, L thẳng hàng

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (HK, HL) &\equiv 0 \pmod{\pi} \\ \Leftrightarrow (HK, HM) + (HM, HL) &\equiv 0 \pmod{\pi} \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý rằng, các bộ bốn điểm K, M, H, C và L, M, H, B đồng viên.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} (HK, HM) \equiv (CK, CM) \pmod{\pi} \\ (HM, HL) \equiv (BM, BL) \pmod{\pi} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có : H, K, L thẳng hàng

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (CK, CM) + (BM, BL) &\equiv 0 \pmod{\pi} \\ \Leftrightarrow (CA, CM) + (BM, BA) &\equiv 0 \pmod{\pi} \\ \Leftrightarrow (CA, CM) &\equiv (BA, BM) \pmod{\pi} \\ \Leftrightarrow M, A, B, C &\text{ đồng viên.} \end{aligned}$$

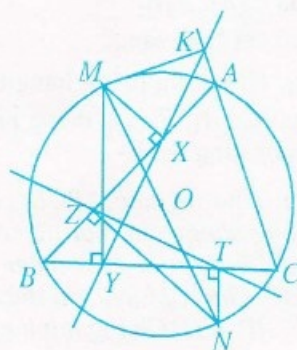
Vậy M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (không kể các điểm A, B, C).

Tóm lại: H, K, L thẳng hàng $\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (không kể các điểm A, B, C).

Đường thẳng chứa ba điểm H, K, L nói trên được gọi là đường thẳng Simson của tam giác ABC ứng với điểm M .

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . MN là một đường kính của (O) . Chứng minh rằng: Các đường thẳng Simson của tam giác ABC ứng với hai điểm M, N thì vuông góc với nhau.

Lời giải. (h. 5) Gọi X, Y là các hình chiếu của M trên AB, BC theo thứ tự và Z, T là các hình chiếu của N trên AB, BC theo thứ tự. Ta cần chứng minh $XY \perp ZT$.



Hình 5

Thật vậy, ta thấy, các bộ bốn điểm M, B, X, Y và N, B, Z, T đồng viên.

Ta có: (XY, ZT)

$$\begin{aligned} &\equiv (XY, MY) + (MY, NT) + (NT, ZT) \pmod{\pi} \\ \Rightarrow (XY, ZT) &\equiv (XB, MB) + 0 + (NB, ZB) \pmod{\pi} \\ \Rightarrow (XY, ZT) &\equiv (NB, MB) \pmod{\pi} \quad (\text{vì } XB, ZB \text{ trùng nhau}) \\ \Rightarrow (XY, ZT) &\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \quad (\text{vì } MN \text{ là đường kính của } (O)). \end{aligned}$$

Suy ra $XY \perp ZT$ (đpcm).

(Kì sau đăng tiếp)

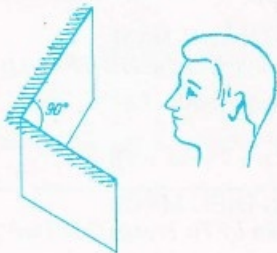


Cuộc thi vui TOLITI 2006

Cuộc thi do ba tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Vật lý và Tuổi trẻ, Tin học và Nhà trường đồng tổ chức. Đề thi sẽ đăng trên các số ra các tháng 1, 4, 7, 10 năm 2006. Thời hạn nhận bài giải là 2 tháng sau khi đăng đề (theo dấu bưu điện). Bài giải chỉ gửi về một trong ba tạp chí. Mỗi bài đều ghi họ tên, tuổi, địa chỉ. Ngoài phong bì để rõ BÀI DỰ THI CUỘC THI TOLITI 2006. Sau đây là đề của đợt 1.

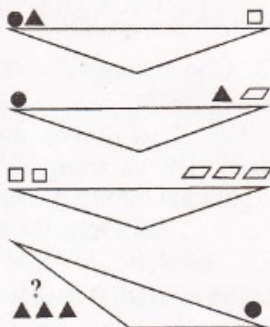
Bài TOLITI-1. Soi gương

Khi soi gương, ảnh của bạn trong gương có trái tim ở bên phải (nếu tim của bạn ở bên trái), tức là khi soi gương bên phải và bên trái đảo ngược cho nhau. Hỏi điều đó có còn đúng không khi bạn soi vào gương như hình vẽ?



Bài TOLITI-2. Cân các hình

Bao nhiêu hình tam giác sẽ thăng bằng với một hình tròn trong hình thứ tư dựa vào giả thiết là 3 hình đầu tiên?

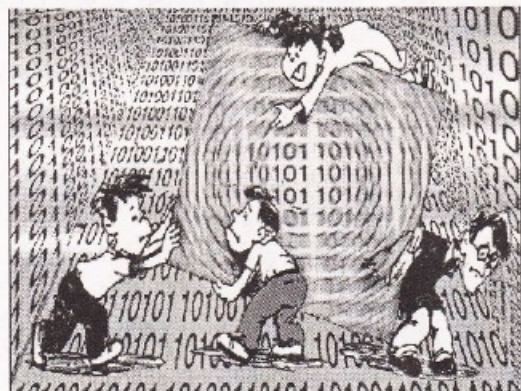


Bài TOLITI-3. Phép nhân kì lạ

Bạn hãy quan sát cách nhân kì lạ dưới đây với hai số là 18 và 37. Kết quả thu được là hoàn toàn đúng. Bạn hãy mô tả và chứng minh tính đúng đắn của cách nhân này.

18	37
9	74
4	148
2	296
1	592

666



PROBLEMS ... (Tiếp trang 17)

the circumcenter and the centroid of triangle ABC . Calculate the measure of the angle formed by the lines AG and OG .

T12/343. Let $ABCD$ be a tetrahedron such that its altitudes are concurrent. Let R and r be respectively the circumradius and the inradius of the tetrahedron $ABCD$. Let R_A, R_B, R_C, R_D be respectively the circumradii of the tetrahedra $OBCD, OACD, OABD, OABC$ where O is the circumcenter of the tetrahedron $ABCD$. Prove that:

$$a) \frac{1}{R_A^2} + \frac{1}{R_B^2} + \frac{1}{R_C^2} + \frac{1}{R_D^2} \geq \frac{16}{9R^2};$$

$$b) \frac{R_A}{\sqrt{3R^2 + 4R_A^2}} + \frac{R_B}{\sqrt{3R^2 + 4R_B^2}} + \frac{R_C}{\sqrt{3R^2 + 4R_C^2}} + \frac{R_D}{\sqrt{3R^2 + 4R_D^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R}{r}.$$



CÁC LỚP THCS

Bài T1/343 (Lớp 6). Tìm x và y , biết rằng
 $|x-2005| + |x-2006| + |y-2007| + |x-2008| = 3$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/343 (Lớp 7). Cho tam giác ABC với $\widehat{BAC} = 55^\circ$, $\widehat{ABC} = 115^\circ$. Trên tia phân giác của góc ACB lấy điểm M sao cho $\widehat{MAC} = 25^\circ$. Tính số đo góc BMC .

VĨNH LINH
(GV Hải Dương)

Bài T3/343. Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn các điều kiện sau :

- i) $x^3 + y^3 = 2z^3$;
- ii) $x + y + z$ là số nguyên tố.

PHẠM HOÀNG HÀ
(GV THPT chuyên Ngoại ngữ, ĐHNH Hà Nội)

Bài T4/343. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+86} - \sqrt[3]{x-5} = 1.$$

HOÀNG TRỌNG LÂM
(GV THCS TT Phú Bài, Hương Thủy, Thừa Thiên Huế)

Bài T5/343. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a^4}{(b-1)^3} + \frac{b^4}{(a-1)^3}$$

trong đó a, b là các số lớn hơn 1 và thỏa mãn điều kiện $a + b \leq 4$.

CAO XUÂN NAM
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T6/343. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $AB = AC = b$ ($a > b$). Đường phân giác BD có độ dài bằng cạnh bên. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(\frac{a-b}{b}\right) = 1.$$

PHẠM HUY THÔNG
(GV Hà Nội)

Bài T7/343. Cho tam giác ABC với các đường phân giác trong AA_1, BB_1, CC_1 . Biết rằng $\widehat{A_1B_1C_1} = 90^\circ$. Tính số đo góc ABC .

NGUYỄN VIỆT HÀ
(SV K27G Toán, ĐHSP Hà Nội 2)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/343. Với mỗi số dương x , kí hiệu $a(x)$ là số các số nguyên tố không lớn hơn x . Với mỗi số nguyên dương m , kí hiệu $b(m)$ là số các ước nguyên tố của m . Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n luôn có

$$a(n) + a\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + a\left(\frac{n}{n}\right) = b(1) + b(2) + \dots + b(n).$$

PHAN THÀNH NAM
(SV khoa Toán - Tin 2003, ĐHKHTN TPHCM)

Bài T9/343. Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - (x-4)\sqrt{x-7} - 3x + 28 = 0.$$

TRẦN ĐIỀU MINH
(GV THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)

Bài T10/343. Không dùng máy tính, tìm giá trị đúng của góc nhọn x thỏa mãn

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2)^2}}.$$

LÊ THỪA THÀNH
(GV THPT BC Nguyễn Hiền, Đà Nẵng)

Bài T11/343. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^2 = 4S \cot A$ trong đó $BC = a$ và S là diện tích tam giác ABC . Gọi O và G theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm tam giác ABC . Tính góc giữa hai đường thẳng AG và OG .

LƯU XUÂN TÌNH
(GV PTCTT ĐHSP Hà Nội)

Bài T12/343. Giả sử $ABCD$ là một tứ diện trực tâm (các đường cao đồng quy). Gọi (O, R) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$; r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện đó; R_A, R_B, R_C, R_D theo thứ tự là bán kính mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện $OBCD, OACD, OABD, OABC$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{1}{R_A^2} + \frac{1}{R_B^2} + \frac{1}{R_C^2} + \frac{1}{R_D^2} \geq \frac{16}{9R^2}; \\ \text{b) } & \frac{R_A}{\sqrt{3R^2 + 4R_A^2}} + \frac{R_B}{\sqrt{3R^2 + 4R_B^2}} + \frac{R_C}{\sqrt{3R^2 + 4R_C^2}} \\ & + \frac{R_D}{\sqrt{3R^2 + 4R_D^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R}{r}. \end{aligned}$$

NGUYỄN HỒNG QUÂN
(GV THPT Hồng Ngự 2, Đồng Tháp)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/343. Một chất điểm chuyển động nhanh dần trên một đường tròn bán kính R (trên mặt phẳng nằm ngang) sao cho tại mỗi điểm gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến bằng nhau về độ lớn. Vận tốc ban đầu của chất điểm là v_0 . Sau một khoảng thời gian t quãng đường chất điểm đi được là S .

a) Tìm biểu thức vận tốc và gia tốc tức thời theo S ;

b) Tìm biểu thức vận tốc và gia tốc tức thời theo t ;

c) Tìm biểu thức S theo t .

LÊ HÀ KIẾT

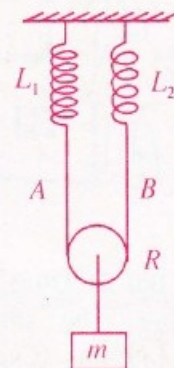
(SV Đ05LT03, Điện - Điện tử, ĐHBK, TP HCM)

Bài L2/343. Cho hai lò xo L_1 và L_2 . Khi kéo bằng một lực $F = 0,6N$ thì L_1 giãn ra một đoạn

2cm, còn L_2 giãn ra một đoạn 4cm. Mắc hai lò xo L_1 và L_2 vào hệ như hình bên. Vật có khối lượng $m = 40g$ (bỏ qua khối lượng của lò xo, ròng rọc và dây treo). Lúc đầu giữ cho hai lò xo không bị biến dạng. Thả tay cho vật dao động không vận tốc đầu. Bỏ qua mọi ma sát.

1) Chứng tỏ vật dao động điều hòa ;

2) Tìm phương trình dao động của vật m , cho $g = 10m/s^2$.



NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/343. (for 6th grade)

Find the numbers x and y satisfying the condition:

$$|x-2005| + |x-2006| + |y-2007| + |x-2008| = 3.$$

T2/343. (for 7th grade)

Let ABC be a triangle with $\widehat{BAC} = 55^\circ$, $\widehat{ABC} = 115^\circ$. On the bisector of angle ACB , take the point M so that $\widehat{MAC} = 25^\circ$. Calculate the measure of angle BMC .

T3/343. Find the natural numbers x, y, z satisfying the following conditions:

i) $x^3 + y^3 = 2z^3$;

ii) $x + y + z$ is a prime number.

T4/343. Solve the equation

$$\sqrt[3]{x+86} - \sqrt[3]{x-5} = 1.$$

T5/343. Find the least value of the expression

$$A = \frac{a^4}{(b-1)^3} + \frac{b^4}{(a-1)^3}$$

where a, b are numbers greater than 1, satisfying the condition $a + b \leq 4$.

T6/343. Let ABC be a triangle with $BC = a$, $AB = AC = b$ ($a > b$). Suppose that the measure of the angled bisector BD is equal to b .

Prove that $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = 1$.

T7/343. Let ABC be a triangle with angled bisectors AA_1, BB_1, CC_1 . Suppose that $\widehat{A_1B_1C_1} = 90^\circ$. Calculate the measure of angle ABC .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/343. For every positive number x , let $a(x)$ denote the number of prime numbers not exceeding x and for every positive integer m , let $b(m)$ denote the number of prime divisors of m . Prove that for every positive integer n , we have

$$a(n) + a\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + a\left(\frac{n}{n}\right) = b(1) + b(2) + \dots + b(n).$$

T9/343. Solve the equation

$$\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - (x-4)\sqrt{x-7} - 3x + 28 = 0.$$

T10/343. Not using calculators, find the exact measure of acute angle x satisfying

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2)^2}}$$

T11/343. Let ABC be a triangle satisfying the condition $a^2 = 4S \cot A$, where $BC = a$ and S is the area of $\triangle ABC$. Let O and G be respectively

(Xem tiếp trang 15)



Bài T1/339 (Lớp 6). Số 5^{50} viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số?

Lời giải. (Của các bạn trường THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên, **Vĩnh Phúc**).

Nhận xét. Số a có n chữ số khi và chỉ khi

$$10^{n-1} \leq a < 10^n.$$

Cách 1. Ta thấy

$$5^{50} = 5^{35} \cdot 5^{15} = 5^{35} \cdot (5^3)^5 = 5^{35} \cdot 125^5 \quad (1)$$

$$10^{35} = 5^{35} \cdot 2^{35} = 5^{35} \cdot (2^7)^5 = 5^{35} \cdot 128^5 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $5^{50} < 10^{35}$.

Mặt khác

$$5^{50} = 5^{34} \cdot 5^{16} = 5^{34} (5^4)^4 = 5^{34} \cdot 625^4 \quad (3)$$

$$10^{34} = 5^{34} \cdot 2^{34} = 5^{34} \cdot (2^3)^3 \cdot 2^7 = 5^{34} \cdot 512^3 \cdot 128 \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra $10^{34} < 5^{50}$.

Vậy ta có

$$10^{34} < 5^{50} < 10^{35} \text{ nên } 5^{50} \text{ có 35 chữ số.}$$

Cách 2. Giả sử 5^{50} có m chữ số và 2^{50} có n chữ số.

$$\text{Ta có } 10^{m-1} < 5^{50} < 10^m \text{ và } 10^{n-1} < 2^{50} < 10^n.$$

$$\text{Từ đó } 10^{m-1} \cdot 10^{n-1} < 5^{50} \cdot 2^{50} < 10^m \cdot 10^n$$

$$\text{hay } 10^{m+n-2} < 10^{50} < 10^{m+n}$$

$$\text{nên } m+n-2 < 50 < m+n$$

$$\text{hay } 50 < m+n < 52.$$

$$\text{Do đó } m+n = 51 \quad (5)$$

$$\text{Mặt khác, từ } 2^{50} = (2^{10})^5 = 1024^5 \text{ và}$$

$$10^{15} = (10^3)^5 = 1000^5 \text{ suy ra } 10^{15} < 2^{50}.$$

$$\text{Từ } 2^{50} = (2^8)^6 \cdot 4 = 256^6 \cdot 4 \text{ và } 300^6 = (3^2)^3 \cdot 10^{12} < 10^3 \cdot 10^{12} = 10^{15} \text{ suy ra } 2^{50} < 10^{15} \cdot 4 < 10^{16}.$$

$$\text{Vậy } 10^{15} < 2^{50} < 10^{16} \text{ nên } 2^{50} \text{ có 16 chữ số (6).}$$

$$\text{Từ (5), (6) suy ra } m = 51 - 16 = 35, \text{ nghĩa là } 5^{50} \text{ có 35 chữ số.}$$

Nhận xét. 1) Một số bạn tính toán đến số quá lớn (số có 6 chữ số) hoặc tính lũy thừa của số thập phân nên phức tạp hơn hai cách giải nêu trên.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn, trong đó có các bạn giải bằng hai cách:

Vĩnh Phúc: Hoàng Bảo Châu, Nguyễn Duy Hưng, Trần Thị Mai Ly, Phùng Thị Thúy Nga, Đào Xuân Dương, Đỗ Huy Hải, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên, Nguyễn Ngọc Thọ, Nguyễn Hồng Chuyên, Đỗ Công Huân, Nguyễn Thị Huân, Nguyễn Xuân Thành, 6A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Nguyễn Hoàng Giang, 6E, THCS Lý Quý Đôn, Cầu Giấy; **Quảng Ninh:** Đỗ Thái Chung, 6A1, THCS Nguyễn Trãi, Uông Bí; **Thanh Hóa:** Cao Thanh Tùng, 6A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa; **Hải Dương:** Nguyễn Đức Nguyên, 6A, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn; **Quảng Ngãi:** Cao Thị Nhật Linh, 6D, THCS Hành Phước, Lương Sơn Hải, 6A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Bình Định:** Trương Thị Hồng Nguyên, 6A2, Nguyễn Thị Hải Hương, 6A3, THCS Ngô Mây, Phù Cát.

VIỆT HẢI

Bài T2/339 (Lớp 7). Tìm giá trị nhỏ nhất của các phân số có dạng $\frac{ab}{ac+bd}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện

$$a + b = c + d = 2006.$$

$$\text{Lời giải. Đặt } M = \frac{ab}{ac+bd} \Rightarrow \frac{1}{M} = \frac{ac+bd}{ab} = \frac{c}{b} + \frac{d}{a}.$$

Nhận xét: M đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{1}{M}$ đạt giá trị lớn nhất (vì $M > 0$).

$$\text{Ta có } a+b=c+d=2006 \text{ nên } 1 \leq a, b, c, d \leq 2005.$$

Để ý rằng trong hai phân số $\frac{c}{b}$ và $\frac{d}{a}$ bao giờ cũng có một phân số không vượt quá 1 (vì nếu $\frac{c}{b} > 1$ và $\frac{d}{a} > 1$ thì $c+d > a+b$). Giả sử, chẳng hạn $\frac{c}{b} \leq 1$.

• Nếu $d \leq 2004$ thì $\frac{d}{a} \leq 2004$ (vì $a \geq 1$). Khi

$$\text{đó } \frac{1}{M} = \frac{c}{b} + \frac{d}{a} \leq 1 + 2004 = 2005. \quad (1)$$

• Nếu $d = 2005$ thì $c = 1$. Khi đó

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{b} + \frac{2005}{a}.$$

$$\text{Với } a > 1 \text{ ta có } \frac{1}{M} \leq 1 + \frac{2005}{2} < 1005. \quad (2)$$

Với $a = 1$ thì $b = 2005$, ta có

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{2005} + \frac{2005}{1} = \frac{2005^2 + 1}{2005} = \frac{4020026}{2005} \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) và nhận xét trên ta thấy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{2005}{4020026}$ và đạt được khi

$a = c = 1, b = d = 2005$ hoặc $a = c = 2005, b = d = 1$.

Nhận xét. 1) Ngoài lời giải trên đây, một số bạn còn đặt $a = 1 + m, b = 2005 - m$ ($m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq 2004$),

$c = 1 + n, d = 2005 - n$ ($n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 2004$).

Rồi chỉ ra rằng $ab = 2005 + m(2004 - m) \geq 2005$.

$ac + bd = 1 + 2005^2 - m(2004 - n) - n(2004 - m) \leq 1 + 2005^2$.

Từ đó suy ra $M = \frac{ab}{ac + bd} \geq \frac{2005}{2005^2 + 1}$, dẫn đến kết

luận như trên.

2) Bạn Nguyễn Hoàng Hải, 9A3, THCS Lâm Thao, Phú Thọ, còn đưa ra và chứng minh được bài toán tổng quát:

"Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a + b = c + d = m + 1$ (m nguyên dương).

Khi đó $\frac{ab}{ac + bd}$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{m}{m^2 + 1}$, đạt được khi $a = c = 1, b = d = m$ hoặc $a = c = m, b = d = 1$ ".

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Dương Hồng Quân, 7A, THCS Lập Thạch, huyện Lập Thạch; **Trần Thị Mai Ly**, 6A1, Đỗ Huy Hải, 6A2, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; **Thanh Hóa:** Nguyễn Thị Thu Hà, 6B, Trịnh Quang Dũng, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** Lê Thị Thảo, Đặng Thị Lan Hương, Nguyễn Hồng Lâm, 7C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Nam Định:** Nguyễn Đăng Khang, 7A9, THCS Phùng Chí Kiên, TP Nam Định; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyên, 7⁷, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/339. Phương trình

$$x^{2005} + y^{2005} = 2007^{2005}$$

có nghiệm nguyên dương không?

Lời giải. Giả sử x, y là hai số nguyên dương thỏa mãn phương trình

$$x^{2005} + y^{2005} = 2007^{2005} \quad (1)$$

Vai trò của x, y trong phương trình như nhau, nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $1 \leq x \leq y < 2007$.

Từ bất đẳng thức trên, vì y là số nguyên nên $y + 1 \leq 2007$.

$$\text{Do đó } 2007^{2005} \geq (y+1)^{2005} =$$

$$y^{2005} + 2005y^{2004} + \dots + 2005y + 1.$$

Để ý rằng, tất cả các số hạng trong khai triển ở vế phải đều dương nên ta được bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} 2007^{2005} &> y^{2005} + 2005y^{2004} \\ \Rightarrow x^{2005} + y^{2005} &= 2007^{2005} > y^{2005} + 2005y^{2004} \\ \Rightarrow x^{2005} &> 2005y^{2004}. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } y \geq x \geq 1 \text{ nên } x^{2005} > 2005y^{2004} \geq 2005x^{2004} \Rightarrow x > 2005.$$

Ta được $2005 < x \leq y < 2007$.

Do x, y là hai số nguyên nên từ bất đẳng thức trên suy ra $x = y = 2006$.

Nhưng khi đó, vế trái của (1) là một số chẵn còn vế phải là một số lẻ, mâu thuẫn.

Vậy không có hai số nguyên dương x, y nào thỏa mãn phương trình trong đề bài.

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và hầu hết làm theo cách trên. Trong bài đã sử dụng khai triển nhị thức:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} + \dots + b^n.$$

2) Nếu không sử dụng khai triển trên, ta có thể chứng minh bất đẳng thức quen thuộc sau bằng phương pháp quy nạp (các bạn hãy tự chứng minh):

Nếu $a > 0$ và n là một số nguyên dương lớn hơn 1 thì

$$(a+1)^n > a^n + na^{n-1}.$$

3) Bài toán trên là một trường hợp đặc biệt của định lý lớn Fermat khẳng định rằng phương trình $x^n + y^n = z^n$ trong đó x, y, z là các số nguyên cùng khác 0 và n là số tự nhiên lớn hơn 2, không có nghiệm nguyên.

Đến năm 1993, định lý này đã được Andrew Wiles (người Anh) chứng minh. Định lý đã như một sự thách thức đối với các nhà toán học trong suốt thời gian hơn 350 năm.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Hà Ngọc Thủy, Lê Anh Dũng, 8A, THCS Thái Hòa, Lập Thạch; **Nguyễn Thị Giang A**, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Kim Đình Sơn**, 8D, THCS Liên Bảo, TX Vĩnh Yên; **Hà Nội:** Lê Quang Huy, 7H1, THCS Trưng Vương, Q Hoàn Kiếm; **Nguyễn Thị Quỳnh Trang**, 7C, THCS Mai Lâm, Đông Anh; **Đỗ Đức Kiên**, Phạm Duy Long, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Thanh Hóa:** Nguyễn Trọng Cường, 8B, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn; **Nguyễn Thị Linh**, Lê Thị Thương, Hoàng Thị Quỳnh, 8D, Cao Thanh Tùng, 6A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Trịnh Thị Huệ**, 8A, THCS Định Bình, Yên Định; **Lê Đức Hùng**, 8B, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Hà Tây:** Nguyễn Đắc Hùng, 7A, THCS Sơn Tây, TX Sơn Tây; **Hải Phòng:** Nguyễn Quang Hiếu, 8C8, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền; **Nguyễn Quý Duy**, 8A1, THCS Hồng Bàng; **Phú Thọ:** Nguyễn Trường Giang, 7A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Nghệ An:** Hoàng Trung Đức, Tăng Văn Bình, Nguyễn Thị Tố Uyên, Võ Văn Công, Dương Hoàng Hưng, Hoàng Thị Lệ Quỳnh, Nguyễn Thị Kim Chi, Lê Tuấn Sĩ, 8B, Trương Thị Hiền Lương, Thái Thị Mai Anh, 8C, Phạm Thế Hoàng, Đinh Viết Trí, Vũ Đình Long, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vũ Đức Hoàn**, Phan Huy Cao, 8C, Đậu Thế Vũ, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hồ Hữu**

Quân, Nguyễn Sỹ Hoàng, 8C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; Hà Tẩy: Kiều Thanh Khiêm, 8A, THCS Tam Hưng, Thanh Oai; Quảng Trị: Trương Xuân Nhã, 8A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà; Lê Tâm Thư, 7A, THCS Triệu Trạch, Triệu Phong; Nam Định: Phạm Thị Diệp, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; Lưu Thu Hạnh, 8A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định...

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/339. Giải phương trình

$$2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{27}{2}x + 6}.$$

Lời giải. Viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$$2\sqrt[4]{\frac{(9x+4)^2}{3}} + 4 = 1 + \sqrt{\frac{3(9x+4)}{2}} \quad (1)$$

Điều kiện: $x \geq -\frac{4}{9}$ (*). Đặt $9x + 4 = y \geq 0$.

Khi đó (1) trở thành

$$2\sqrt[4]{\frac{y^2}{3}} + 4 = 1 + \sqrt{\frac{3y}{2}} \Leftrightarrow 4\sqrt[4]{\frac{y^2}{3}} + 4 = 1 + \frac{3y}{2} + \sqrt{6y}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy: $\sqrt{6y} \leq \frac{6+y}{2}$.

$$\text{Do đó: } 4\sqrt[4]{\frac{y^2}{3}} + 4 \leq 2y + 4 \Leftrightarrow 4\left(\frac{y^2}{3} + 4\right) \leq$$

$$(y+2)^2 \Leftrightarrow \frac{(y-6)^2}{3} \leq 0 \Leftrightarrow y = 6.$$

Từ đó $x = \frac{y-4}{9} = \frac{2}{9}$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = \frac{2}{9}$.

Nhận xét. 1) Chỉ có một bạn làm sai, còn lại đều tìm ra đúng kết quả. Cách giải của các bạn là khá phong phú như dùng BĐT Cauchy, Bunhiacôpxki, đặt ẩn phụ, khử căn thức để đưa về phương trình đa thức bậc cao có nghiệm đặc biệt... Tuy nhiên phương pháp giải có sử dụng BDT Cauchy hay Bunhiacôpxki cho lời giải gọn gàng hơn.

2) Các bạn có lời giải tốt là: **Hải Dương:** Nguyễn Huy Hoàng, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành, Hải Dương; **Phú Thọ:** Triệu Tuấn Linh, 8B, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** Vũ Thị Tuyết, 7A, Nguyễn Thị Trinh, 8C, THCS Tự Lập, Mê Linh; **Hà Tây:** Nguyễn Hữu Ngọc Linh, 8A2, THCS Vông Xuyên, Phúc Thọ; **Thái Bình:** Nguyễn Quốc Trường, 8A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải, Nguyễn Minh Đức, 9C, THCS Trường Sơn, Nông Cống, Mai Trung Nghĩa, 9B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghe An:** Lê Thị Ngọc Mai, SN 15/2D, Nguyễn Văn Trỗi, Bến Thủy, TP Vinh.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/339. Cho các số thực dương x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 thỏa mãn điều kiện

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 2005.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2x_3} + \frac{1}{1+x_3x_4} + \frac{1}{1+x_4x_5} + \frac{1}{1+x_5x_1}.$$

Lời giải. Áp dụng BDT Cauchy cho hai số

$$\text{dương } \frac{1}{1+x_1x_2} \text{ và } \frac{1+x_1x_2}{402^2} \text{ ta có}$$

$$\frac{1}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_1x_2}{402^2} \geq 2\sqrt{\frac{1+x_1x_2}{(1+x_1x_2) \cdot 402^2}} = \frac{1}{201}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1x_2 = 401$.

Tương tự, ta có

$$\frac{1}{1+x_2x_3} + \frac{1+x_2x_3}{402^2} \geq \frac{1}{201};$$

$$\frac{1}{1+x_3x_4} + \frac{1+x_3x_4}{402^2} \geq \frac{1}{201};$$

$$\frac{1}{1+x_4x_5} + \frac{1+x_4x_5}{402^2} \geq \frac{1}{201};$$

$$\frac{1}{1+x_5x_1} + \frac{1+x_5x_1}{402^2} \geq \frac{1}{201}.$$

Suy ra

$$P + \frac{5+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1}{402^2} \geq \frac{5}{201} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1x_2 = x_2x_3 = x_3x_4 = x_4x_5 = x_5x_1 = 401$.

Áp dụng BDT $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, ta có

$$\begin{aligned} & x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 \\ & \leq \frac{x_1^2+x_2^2}{2} + \frac{x_2^2+x_3^2}{2} + \frac{x_3^2+x_4^2}{2} + \frac{x_4^2+x_5^2}{2} + \frac{x_5^2+x_1^2}{2} \\ & = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 2005 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$P + \frac{5+2005}{402^2} \geq \frac{5}{201} \Leftrightarrow P \geq \frac{5}{402}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \sqrt{401}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{402}$ khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \sqrt{401}$.

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này và đều làm đúng. Tuy nhiên đa số thường dùng các BĐT phức tạp hơn như: BĐT Schwarz, BĐT Cauchy cho 5 số dương, BĐT Bunhiacôpxki cho hai bộ 5 số...

2) Một số bạn đã nêu bài toán tổng quát hơn:

"Cho các số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = k$ ($k > 0, n > 1$). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b + x_1 x_2} + \frac{a}{b + x_2 x_3} + \dots + \frac{a}{b + x_{n-1} x_n} + \frac{a}{b + x_n x_1}$$

với $a > 0, b > 0$."

Kết quả min $P = \frac{an^2}{bn + k}$ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{\sqrt{kn}}{n}$.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghệ An: Nguyễn Thị Vân Trang, 8A, Tăng Thị Bình, Dương Hoàng Hưng, 8B, Nguyễn Thị Hồng, Vũ Thanh Thủy, 9A, Nguyễn Đức Công, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đỗ Lương, Nguyễn Văn Hòa, 8D, THCS Quỳnh Lương, Quỳnh Lưu, Hoàng Hữu Phương, 9C, THCS Diễn Lộc, Diễn Châu; **Thanh Hóa:** Nguyễn Thị Hồng Nhung, Lê Thu Trang, Nguyễn Cao Tuấn, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa, Dương Thị Hương Giang, Lê Thị Thảo, 9B, THCS TTr Nga Sơn, Lương Chiến Thắng, 9C, THCS Đông Thọ, Trịnh Thanh Quang, 9B, THCS Hàm Rồng; **Hà Nội:** Nguyễn Ngọc Hiếu, 9A, THCS Nguyễn Công Trứ, Ba Đình, Đỗ Như Milan, 9A1, THCS Chu Văn An; **Phú Thọ:** Triệu Tuấn Linh, 8B, THCS Văn Lang, Việt Trì, Nguyễn Hoàng Hải, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hải Dương:** Đinh Công Diệp, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hưng Yên:** Lương Xuân Huy, 9A, THCS Tiên Lữ; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Anh Diệp, 9G, THCS TTr Kỳ Anh; **Quảng Bình:** Nguyễn Phi Hùng, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Hoàn Lão, Bố Trạch; **Quảng Trị:** Lê Thị Huyền Trang, 8/4, THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà, Nguyễn Thị Sách, 9A, THCS Gio Mai, Gio Linh; **Quảng Ngãi:** Võ Thị Hồng Huyền, Lương Thị Yến Anh, 8C, THCS Huỳnh Thúc Kháng; **Đà Nẵng:** Võ Minh Đức, Nguyễn Kim Trọng, 9/2, THCS Nguyễn Khuyến; **Kiên Giang:** Võ Đức Huy, 9A, THCS Lê Quý Đôn, TP Rạch Giá.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/339. Cho hình chữ nhật ABCD. Đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt các đường thẳng AB, AD lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng

$$BE \cdot \sqrt{CF} + DF \cdot \sqrt{CE} = AC \cdot \sqrt{EF}.$$

Lời giải. Theo ĐL Talet ta có $\frac{BE}{AE} = \frac{CE}{EF}$,

$$\frac{DF}{AF} = \frac{CF}{EF}$$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên được

$$\frac{BE}{AE} + \frac{DF}{AF} = 1.$$

Nhân cả hai vế với AE. AF được

$$BE \cdot AF + DF \cdot AE$$

$$= AE \cdot AF$$

$$= AC \cdot EF$$

(bằng 2 lần diện tích ΔAEF).

$$\text{Suy ra } BE \cdot \sqrt{CF} + DF \cdot \sqrt{CE} = AC \cdot \sqrt{EF}$$

$$\text{hay } BE \cdot \sqrt{CF} + DF \cdot \sqrt{CE} = AC \cdot \sqrt{EF}.$$

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn:

Vĩnh Phúc: Dương Hải Nam, 9A, THCS Yên Lạc, Bùi Thế Thời, 9G, THCS Liên Bảo, Vĩnh Yên; **Phú Thọ:** Nguyễn Hoàng Hải, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hải Dương:** Nguyễn Huy Hoàng, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hưng Yên:** Lương Xuân Huy, 9A, THCS Tiên Lữ, Đoàn Thu Hà, 9A3, THPT Chu Mạnh Trinh, Văn Giang; **Hà Tây:** Đinh Hoàng Long, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức, Nguyễn Lệnh Dũng, 8A, THCS Nguyễn Văn Huyền, Hoài Đức; **Hà Nam:** Phạm Đức Thanh, 9C, THCS Nam Cao, Lý Nhân, Văn Ngọc Sơn, 9A1, THCS Nguyễn Khuyến, Bình Lục; **Hà Nội:** Đỗ Như Milan, 9A1, THCS Chu Văn An; **Nam Định:** Đỗ Thị Thu, 9A, THCS Hải Hậu; **Thanh Hóa:** Lê Bá Công Nguyên, 8B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa, Trịnh Thị Huệ, 8A, THCS Đinh Bình Yên Định; **Nghệ An:** Tăng Văn Bình, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đỗ Lương; **Hà Tĩnh:** Trần Đức Thiện, 9G, THCS TTr Kỳ Anh, Phạm Phương Thảo, 7/4, THCS Lê Văn Thiêm, **Quảng Trị:** Vũ Thị Bích Loan, 8/3, THCS Hiếu Giang, Đông Hà; **Thừa Thiên - Huế:** Đoàn Thị Thiện Hào, 8², THCS Nguyễn Tri Phương, Huế, **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Đồng Tháp:** Đặng Hoàng Phúc, 9A3, THCS Lưu Văn Long.

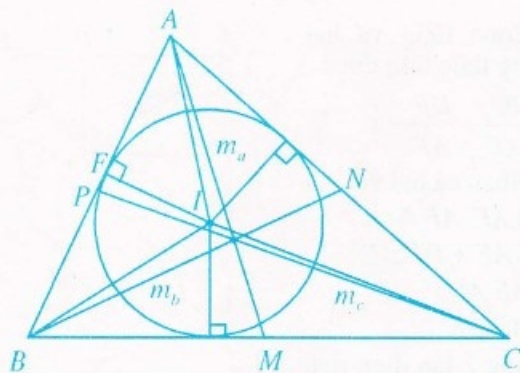
VŨ KIM THỦY

Bài T7/339. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng

$$\frac{IA^2}{m_a^2} + \frac{IB^2}{m_b^2} + \frac{IC^2}{m_c^2} \leq \frac{4}{3}.$$

Lời giải. Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi S, p, r lần lượt là diện tích, nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC . Giả sử F là điểm tiếp xúc của đường tròn (I) với cạnh AB. Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông AFI ta có

$$IA^2 = FI^2 + AF^2 = r^2 + (p - a)^2 =$$



$$= \frac{S^2}{p^2} + (p-a)^2 = \frac{bc(p-a)}{p}.$$

Mặt khác

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \geq \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = p(p-a).$$

Suy ra $\frac{IA^2}{m_a^2} \leq \frac{bc}{p^2}.$

Tương tự: $\frac{IB^2}{m_b^2} \leq \frac{ac}{p^2}; \frac{IC^2}{m_c^2} \leq \frac{ab}{p^2}.$

Từ đó $\frac{IA^2}{m_a^2} + \frac{IB^2}{m_b^2} + \frac{IC^2}{m_c^2} \leq \frac{4(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}.$

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2, \text{ dẫn đến}$$

$$\frac{IA^2}{m_a^2} + \frac{IB^2}{m_b^2} + \frac{IC^2}{m_c^2} \leq \frac{4}{3} \text{ (dpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hay tam giác ABC đều.

Nhận xét. 1) Để chứng minh công thức đường trung tuyến bằng kiến thức toán THCS các bạn có thể xem bài "Về định lý hàm số cosin và công thức trung tuyến trong tam giác" TH&TT số 331, tháng 1-2005.

2) Nếu để ý đến công thức tính độ dài đường phân giác trong của tam giác $d_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$ và bất đẳng

thức $d_a^2 \leq p(p-a)$ thì chúng ta có kết quả sau (bạn đọc tự chứng minh):

Với mọi tam giác ABC ta có

$$\frac{IA^2}{m_a^2} + \frac{IB^2}{m_b^2} + \frac{IC^2}{m_c^2} \leq \frac{ab+bc+ca}{p^2} \leq \frac{IA^2}{d_a^2} + \frac{IB^2}{d_b^2} + \frac{IC^2}{d_c^2}.$$

(d_a, d_b, d_c là độ dài các đường phân giác trong của tam giác đó).

3) Có ít bạn tham gia giải bài này. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải đúng:

Phú Thọ: Nguyễn Hoàng Hải, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Tây:** Nguyễn Lệnh Dũng, 8A, THCS Nguyễn Văn Huyền, Hoài Đức; **Hải Dương:** Phan Tiến

Thành, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Thanh Hóa:** Nguyễn Thị Thu Hà, 6B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghe An:** Nguyễn Đức Công, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/339. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + uy^2 + vz^2$ bằng $2t$, trong đó t là nghiệm của phương trình

$$2x^3 + (u+v+1)x^2 - uv = 0$$

trong khoảng $(0; \sqrt{uv})$.

Tìm các số nguyên tố u, v để $2t$ là số hữu tỉ.

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn Nguyễn Lưu Bách, 10A1 Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội và Vũ Văn Quang, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc).

a) Xét hàm số $f(x) = 2x^3 + (u+v+1)x^2 - uv$ với các số dương u, v . Ta có

$$f'(x) = 6x^2 + 2(u+v+1)x \geq 0$$

nên $f(x)$ là hàm đồng biến.

$$\text{Lại có } f(0) = -uv < 0,$$

$f(\sqrt{uv}) = 2uv\sqrt{uv} + uv(u+v) > 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm trong $(0; \sqrt{uv})$.

Ta có

$$\begin{aligned} P - 2t &= x^2 + uy^2 + vz^2 - 2t(xy + yz + zx) \\ &= [x - t(y+z)]^2 + (u-t^2) \left[y - \frac{t(t+1)}{u-t^2} z \right]^2 + \\ &\quad z^2 \cdot \frac{2t^3 + (u+v+1)t^2 - uv}{u-t^2} = \end{aligned}$$

$$= [x - t(y+z)]^2 + (u-t^2) \left[y - \frac{t(t+1)}{u-t^2} z \right]^2 \geq 0.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } x = t(y+z), y = \frac{t(t+1)}{u-t^2} z.$$

$$\text{Đặt } a = \frac{t(t+1)}{u-t^2}. \text{ Vì } f(\sqrt{u}) = 2u\sqrt{u} + u^2 + u > 0 \text{ nên } u - t^2 > 0 \Rightarrow a > 0.$$

Khi đó $x = ty + tz = (at + t)z = bz$ (với $b = t(a+1) > 0$). Ta chọn z sao cho

$$xy + yz + zx = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{ab+a+b}}.$$

$$\text{Vậy với } x = \frac{b}{\sqrt{ab+a+b}}, y = \frac{a}{\sqrt{ab+a+b}},$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{ab+a+b}} \text{ thì } P = 2t.$$

Vậy $\min P = 2t$.

b) Giả sử $u \geq v$. Đặt $t = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$).

Vì t là nghiệm của $f(x)$ nên $uv : p, 2 : q$.

Mặt khác $f\left(\frac{u}{2}\right) > \frac{u+v+1}{4}u^2 - uv > 0$ do đó $t < \frac{u}{2}$. Vậy $t \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{v}{2}, v\right\}$.

• Nếu $t = \frac{1}{2}$ thì $4uv = u + v + 2 \leq 3u$. Vô lí

• Nếu $t = 1$ thì $uv = u + v + 3$

$\Rightarrow (u-1)(v-1) = 4 \Rightarrow u = 5, v = 2$ hoặc $u = 3, v = 3$.

• Nếu $t = \frac{v}{2}$ thì $4u = v(2v + u + 1)$

$\Rightarrow u = \frac{2v+u+1}{4}v > v$ thì $4 : v \Rightarrow v = 2 \Rightarrow u = 5$.

• Nếu $t = v$ thì $u = v(2v^2 + u + v + 1) \Rightarrow u : v$

$\Rightarrow u = v \Rightarrow 2v^2 + 2v + 1 = 1$. Vô lí.

Vậy các cặp (u, v) thỏa mãn đề bài là

$(u, v) = (5; 2); (2; 5); (3; 3)$.

Nhận xét. 1) Một số bạn sau khi chứng minh $P \geq 2t$ đã quên không chỉ ra giá trị của x, y, z để $P = 2t$.

2) Các bạn có lời giải tốt gồm:

Hà Tĩnh: Nguyễn Nhật Linh, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Phúc:** Lê Công Tuyển, 12A chuyên Vĩnh Phúc, Trần Tấn Phong, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hải Dương:** Hoàng Văn Hùng, 12A, THPT Kinh Môn; **Vĩnh Long:** Dương Minh Tiến, 12T, THPT chuyên Vĩnh Long; **Hưng Yên:** Phạm Tiến Dũng, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tây:** Lê Vĩnh Hòa, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Nam Định:** Phạm Tiến Đạt, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/339. Xét dãy số (x_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi $x_n = a_n^{u_n}$, trong đó

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn khi n dần tới vô hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. (Của bạn Trần Mỹ Linh, 10T, THPT chuyên Bạc Liêu).

Ta có

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} = \frac{1.2.3 \dots (2n)}{(2.4.6 \dots (2n))^2} = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)}$$

Nên

$$a_n^2 = \frac{1^2.3^2.5^2 \dots (2n-1)^2}{2^2.4^2.6^2 \dots (2n)^2} < \frac{1^2.3^2.5^2 \dots (2n-1)^2}{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1) \dots ((2n)^2-1)} = \frac{1^2.3^2.5^2 \dots (2n-1)^2}{1.3.3.5.5.7 \dots (2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}.$$

$$\text{Do đó } 0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Dùng định lí kẹp ta suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (1)

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\lim_{\substack{x > 0 \\ x \rightarrow 0}} x^x = 1$.

Với $0 < x < 1$, đặt $\left[\frac{1}{x}\right] = m$.

Ta có $m \leq \frac{1}{x} < m+1$.

Suy ra $\frac{1}{m+1} < x \leq \frac{1}{m}$. Do đó $\frac{1}{\sqrt[m]{m+1}} < x^x$ (2)

Theo BĐT Cauchy

$$\frac{1+1+\dots+1}{(m-2)\text{ số } 1} + \sqrt{m+1} + \sqrt{m+1}$$

$$\geq m \cdot \sqrt[m]{1.1 \dots 1. \sqrt{m+1} \cdot \sqrt{m+1}} = m \cdot \sqrt[m]{m+1}.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{\sqrt[m]{m+1}} \geq \frac{m}{m-2+2\sqrt{m+1}} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra

$$x^x > \frac{m}{m-2+2\sqrt{m+1}}.$$

Chú ý $0 < x < 1$ nên $x^x < 1$ và

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m}{m-2+2\sqrt{m+1}} = 1.$$

Do đó lại dùng định lí kẹp ta có $\lim_{\substack{x > 0 \\ x \rightarrow 0}} x^x = 1$ (4)

Kết hợp (1) và (4) ta nhận được $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{a_n} = 1$.

Nhận xét. Hầu hết các bạn chứng minh khẳng định (4) bằng quy tắc L'Hospital của chương trình đại học. Học sinh THPT phải phát biểu và chứng minh lại khi dùng quy tắc đó.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/339. Cho số thực a thuộc $(0; 1)$. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ và thỏa mãn điều kiện sau với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) = x^2 \quad (1)$$

Lời giải. (Của đa số các bạn)

Từ (1), lần lượt thay x bởi $ax, a^2x, \dots, a^n x$ ta nhận được

$$\begin{aligned} f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) &= x^2, \\ f(ax) - 2f(a^2x) + f(a^3x) &= a^2x^2, \\ f(a^2x) - 2f(a^3x) + f(a^4x) &= a^4x^2, \\ &\dots \\ f(a^n x) - 2f(a^{n+1}x) + f(a^{n+2}x) &= a^{2n}x^2. \end{aligned}$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên và sử dụng giả thiết $a \in (0, 1)$, ta thu được

$$f(x) - f(ax) + f(a^{n+1}x) - f(a^{n+2}x) = \frac{1 - a^{2(n+1)}}{1 - a^2} x^2 \quad (2)$$

$$\text{Nhận xét rằng } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{2(n+1)}}{1 - a^2} = \frac{1}{1 - a^2}.$$

Theo giả thiết, ứng với mỗi x cho trước, ta đều có $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a^{n+1}x) = 0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a^{n+2}x) = 0$.

Vậy nên, từ (2), suy ra

$$f(x) - f(ax) = \frac{x^2}{1 - a^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Tiếp theo, từ (3), lần lượt thay x bởi $ax, a^2x, \dots, a^n x$, ta nhận được

$$\begin{aligned} f(x) - f(ax) &= \frac{1}{1 - a^2} x^2, \\ f(ax) - f(a^2x) &= \frac{a^2}{1 - a^2} x^2, \\ &\dots \\ f(a^n x) - f(a^{n+1}x) &= \frac{a^{2n}}{1 - a^2} x^2. \end{aligned}$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên và sử dụng giả thiết $a \in (0, 1)$, ta thu được

$$f(x) - f(a^{n+1}x) = \frac{1 - a^{2(n+1)}}{(1 - a^2)^2} x^2.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$, ta thu được

$$f(x) = \frac{x^2}{(1 - a^2)^2} + b \quad \text{với } b \in \mathbb{R}$$

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = \frac{x^2}{(1 - a^2)^2} + b$ với $b \in \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện bài ra.

Nhận xét. Đây là một bài toán thuộc loại trung bình và thuộc dạng quen thuộc nên có rất nhiều bạn tham gia giải. Đa số các bạn đều giải tương tự như cách trình bày ở trên. Xin nêu tên một số bạn có lời giải ngắn gọn:

Lang Sơn: Bùi Văn Ngọc, 12A, THPT Chu Văn An; **Phú Thọ:** Nguyễn Quang Huy, 12T, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Giang:** Lê Trung Kiên, 11T, THPT chuyên Bắc Giang; **Bắc Ninh:** Nguyễn Trí Dũng, 11A1, THPT Thuận Thành; **Vĩnh Phúc:** Vũ Văn Quang, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Hà Minh Tuấn, 11A2, THPT chuyên ĐHKHTN, Nguyễn Quang Kiên, 11A1, THPT chuyên ĐHSP; **Hà Tây:** Lê Đức Trọng, 11T, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Nam Định:** Nguyễn Văn Đình, 12I, THPT Giao Thủy; **Hải Dương:** Vũ Xuân Dương, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** Phan Tiến Dũng, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Hòa Bình:** Vũ Việt Dũng, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Hà Trang, 11T, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Trịnh Hà Linh, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Tô Hồng Sơn, 11A1, THPT Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Trần Đình Cường, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Tuấn Minh, 12T, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** Phan Thị Quỳnh Trân, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** Nguyễn Thị Hoàng Oanh, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Quảng Ngãi:** Trần Ngọc Hiệu, 11T, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Trị:** Võ Xuân Thủy, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** Đặng Ngọc Thanh, 11T, THPT chuyên Quảng Bình; **Gia Lai:** Trần Thanh Nam, 12C3, THPT Hùng Vương; **Đắk Lắk:** Lê Đức Quang, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Nguyễn Lê Văn, 12A13, THPT Vũng Tàu, TP Vũng Tàu; **TP Hồ Chí Minh:** Nguyễn Hoàng Dũng, 11T, THPT Nguyễn Thượng Hiền; **Cần Thơ:** Võ Quốc Bá Cẩn, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ; **Phú Yên:** Trần Hồ Thanh Phú, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bến Tre:** Lê Văn Chánh, 11T, THPT Bến Tre; **Cà Mau:** Châu Ngọc Huy, 12A1, THPT Dâm Dơi.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/339. Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính r . Lấy điểm P cố định nằm bên trong đường tròn với $OP = d > 0$. Hai dây cung AB và CD đi qua điểm P tạo thành một góc α không đổi ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$). Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng $AB + CD$ khi hai dây AB, CD thay đổi và xác định vị trí của các dây AB, CD đó.

Lời giải. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AB + CD$ là bài toán khó, chưa có lời giải. Sau đây là cách tìm giá trị lớn nhất của $AB + CD$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O trên AB, CD . Gọi I là trung điểm của OP và M là hình chiếu của I trên HK (xem hình vẽ).

$$\text{Để thấy: } \begin{cases} IO = IP = IH = IK = \frac{d}{2} \\ \widehat{HIK} = 2\alpha \end{cases}$$

Áp dụng BĐT $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x+y+z) \geq 9$ đối với ba số dương x, y, z rồi thay x, y, z lần lượt bởi $S^2 + S_i^2$ ($i = 1, 2, 3$) và sử dụng (*) thì được:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{S^2 + S_i^2} \geq \frac{9}{4S^2} \quad (2)$$

Thay $\frac{S^2}{S^2 + S_i^2} = 1 - \frac{S_i^2}{S^2 + S_i^2}$ với $i = 1, 2, 3$ vào

(2) thì thu được BĐT (1) cần tìm.

Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $S^2 + S_1^2 = S^2 + S_2^2 = S^2 + S_3^2 \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow a = b = c, BC = CA = AB$ tức là khi và chỉ khi $PABC$ là một tứ diện vuông cân ở P .

Nhận xét. 1) Bài toán này thuộc loại dễ, số bạn tham gia giải khá đông và đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên, vẫn còn một số bạn quên không xét khi và chỉ khi nào thì đẳng thức ở (1) xảy ra.

2) Các bạn sau đây có lời giải gọn gàng hơn cả:

Hà Nội: Phạm Hồng Sơn, 11A1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Hà Tây:** Trịnh Ngọc Tiến, 11 Toán, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Vĩnh Phúc:** Lê Tiến Đức, Nguyễn Văn Ngọc, Phùng Đình Phúc, Nguyễn Kim Thuật, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Nguyễn Hữu Hiền, 12A4, THPT Lê Xoay, Vĩnh Tường; **Thanh Hóa:** Trịnh Văn Vương, 11T, THPT Lam Sơn, Phạm Khắc Thanh, 11A, THPT Triệu Sơn, Mai Văn Cường, 12T, THPT Mai Anh Tuấn, Nga Sơn, Thanh Hóa; **Nghệ An:** Tô Hồng Sơn, 11A1, THPT Phan Bội Châu, TP Vinh, Đặng Công Vinh, 11I, THPT Nghĩa Đàn; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Hạnh Dung, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Phạm Tiến Đồng, 11 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Đà Nẵng:** Nguyễn Như Quốc Trung, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng; **Bến Tre:** Huỳnh Tấn Đạt, 12 Toán, THPT Bến Tre; **Cà Mau:** Châu Ngọc Huy, 12A1, THPT Đầm Dơi, Cà Mau.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/339. Một con lắc lò xo, gồm lò xo có độ cứng $k = 50$ (N/m) và vật nặng $M = 500$ (g), dao động điều hòa với biên độ A_0 dọc theo trục Ox trên mặt phẳng nằm ngang. Hệ đang dao động thì một vật $m = \frac{500}{3}$ (g) bắn vào M theo phương nằm ngang với vận tốc $v_0 = 1$ (m/s). Giả thiết va chạm là hoàn toàn đàn hồi và xảy ra vào thời điểm lò xo có chiều dài nhỏ nhất. Sau khi va chạm vật M dao động điều hòa làm cho lò xo có chiều dài cực đại và cực tiểu lần lượt là $l_{\max} = 100$ (cm) và $l_{\min} = 80$ (cm). Cho $g = 10$ (m/s²).

1) Tìm vận tốc của các vật ngay sau va chạm.

2) Xác định biên độ dao động trước va chạm.

Lời giải. Vào thời điểm va chạm, lò xo có chiều dài nhỏ nhất nên vận tốc vật M ngay trước va chạm bằng không, đồng thời lúc này vật có li độ lớn nhất và bằng biên độ ($x = +A_0$).

Gọi V, v lần lượt là vận tốc của vật M và m ngay sau va chạm. Vì va chạm là hoàn toàn đàn hồi nên áp dụng các định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn năng lượng ta có (chọn chiều dương là chiều của $\vec{v}_0$):

$$mv_0 = mv + MV; \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}.$$

Từ đó giải ra và thay số ta được: $V = 0,5$ m/s và $v = -0,5$ m/s (vật m bị bật trở lại).

2) Tại thời điểm ngay sau va chạm vật M có li độ và vận tốc là: $x = +A_0, V = 0,5$ (m/s) nên cơ năng của vật lúc đó là $E_0 = 25A_0^2 + 0,0625$ (J).

Sau khi va chạm biên độ dao động của vật là

$$A = \frac{l_{\max} - l_{\min}}{2} = 0,1 \text{ (m)}$$

do đó công năng toàn phần của vật là

$$E = \frac{kA^2}{2} = 0,25 \text{ (J)}$$

Từ $E_0 = E$ ta tìm được $A_0 = 0,05\sqrt{3}$ (m) = $5\sqrt{3}$ (cm) $\approx 8,67$ (cm).

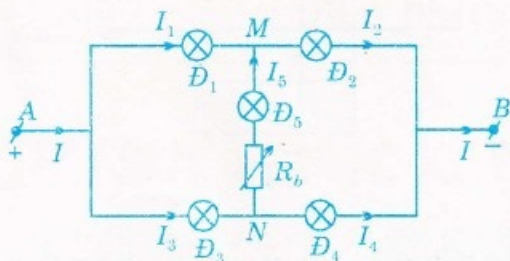
Vậy biên độ dao động trước va chạm là 8,67 cm.

Nhận xét. Các bạn có lời giải và đáp số đúng:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Thành Công A, Ngô Thị Liên, Nguyễn Tiến Đạt, Cù Quốc Cường, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Xuân Nam, Trần Đức Trung, Nguyễn Công Dương, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Bình Định:** Võ Hào Nhân, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Nghệ An:** Nguyễn Xuân Nguyên, 12A1, khối Phổ thông chuyên Đại học Vinh; **Hà Nội:** Nguyễn Thành Trung, B₁K19A, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Yên Bái:** Nguyễn Thị Thu, 12 Lí, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Khánh Hòa:** Nguyễn Ngọc Kỳ Nam, 12 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Kim Khuyến, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Tuyên Quang:** Lưu Hồng Quân, 11B₁, THPT chuyên Tuyên Quang; **Thanh Hóa:** Lê Bá Ngọc, 11F, THPT Lam Sơn, Trịnh Văn Việt, 12A4, THPT Yên Định I, Nguyễn Bá Duẩn, 12B₂, THPT Hoàng Hóa II.

MAI ANH

Bài 1.2/339. Cho mạch điện như hình vẽ $U_{AB} = 12(V)$. Công suất tiêu thụ của các đèn $D_1; D_2; D_3; D_4; D_5$ lần lượt là $P_1 = 4(W); P_2 = 16(W); P_3 = 4(W); P_4 = 10(W); P_5 = 1(W)$. Công suất tiêu thụ trên biến trở R_b là $1(W)$. Dòng điện có chiều như hình vẽ.



a) Xác định điện trở của các đèn và điện trở phần biến trở tham gia vào mạch điện.

b) Khi điện trở phần biến trở tham gia vào mạch điện thay đổi thì độ sáng của các đèn thay đổi thế nào? Giả sử rằng khi đó, các đèn và biến trở không bị hỏng.

Lời giải. Công suất của toàn mạch điện là :

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_b = 36(W).$$

Dòng điện trong mạch chính :

$$I = \frac{P}{U_{AB}} = \frac{36}{12} = 3(A).$$

Theo hình vẽ ta có :

$$I_1 + I_3 = 3 \Rightarrow \frac{P_1}{U_1} + \frac{P_3}{U_3} = 3$$

$$\text{hay } \frac{4}{U_1} + \frac{4}{U_3} = 3 \quad (1)$$

$$I_2 + I_4 = 3 \Rightarrow \frac{P_2}{U_2} + \frac{P_4}{U_4} = 3,$$

$$\text{hay } \frac{16}{12 - U_1} + \frac{10}{12 - U_3} = 3 \quad (2)$$

Các PT (1), (2) tương ứng tương đương với :

$$4U_1 + 4U_3 = 3U_1U_3 \quad (3)$$

$$26U_1 + 20U_3 - 120 = 3U_1U_3 \quad (4)$$

Từ các PT (3) và (4), ta có PT bậc hai :

$$33U_1^2 - 192U_1 + 240 = 0 \quad (5)$$

PT (5) có 2 nghiệm :

$$U_1 = 4(V), U_1 = \frac{20}{11}(V).$$

Ta loại nghiệm $U_1 = \frac{20}{11}(V)$, vì khi đó

$U_{NM} = U_1 - U_3 = -\frac{35}{11}(V)$, dòng điện sẽ ngược chiều với chiều trên hình vẽ.

Với $U_1 = 4(V)$, tính được $U_3 = 2(V)$;

$U_2 = 8(V); U_4 = 10(V); U_{NM} = U_1 - U_3 = 2(V)$.

$$\text{Vậy : } I_1 = \frac{P_1}{U_1} = 1(A); I_2 = \frac{P_2}{U_2} = 2(A);$$

$$I_3 = \frac{P_3}{U_3} = 2(A); I_4 = \frac{P_4}{U_4} = 1(A);$$

$$I_5 = I_{NM} = \frac{P_{NM}}{U_{NM}} = 1(A).$$

Do đó : $R_1 = 4(\Omega); R_2 = 4(\Omega); R_3 = 1(\Omega); R_4 = 10(\Omega); R_5 = 1(\Omega); R_b = 1(\Omega)$.

a) Gọi điện trở của đoạn NM là $x, x = R_b + R_5$.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} I_1 + I_5 = I_2 \\ I_5 + I_4 = I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{U_1}{4} + \frac{U_1 - U_3}{x} = \frac{12 - U_1}{4} \\ \frac{U_1 - U_3}{x} + \frac{12 - U_3}{10} = \frac{U_3}{1} \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} (2+x)U_1 - 2U_3 = 6x \\ -10U_1 + (10+11x)U_3 = 12x. \end{cases}$$

$$\text{Từ đó : } U_1 = \frac{66x+84}{11x+32} =$$

$$= \frac{66x+84}{66} = \frac{1}{11} \quad (6)$$

$$U_3 = \frac{12x+84}{11x+32} = \frac{1}{12} \quad (7)$$

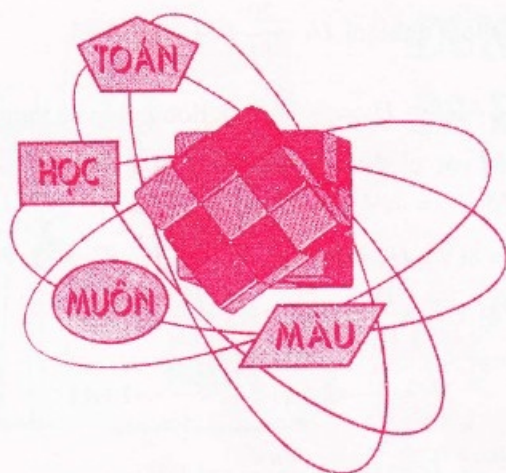
Mặt khác :

$$U_2 = 12 - U_1 \quad (8); U_4 = 12 - U_3 \quad (9);$$

$$U_{NM} = U_1 - U_3 = \frac{54x}{11x+32}$$

$$\Rightarrow I_{NM} = \frac{54}{11x+32} \quad (10).$$

(Xem tiếp trang 5)



CẮT HÌNH VUÔNG ĐƯỢC CÁC HÌNH TRÒN BẰNG NHAU

Người ta muốn cắt một tấm kim loại hình vuông cạnh $a = 100\text{mm}$ thành n hình tròn bằng nhau và rời nhau sao cho diện tích hình tròn là lớn nhất. Nếu $n = 9$ (h. 1) thì đường kính của hình tròn là $d \approx 33\text{mm}$ (tính chính xác đến milimét). Xét tương tự với $n = 16$.



Hình 1

Dành cho bạn đọc

1) Hãy cắt tấm kim loại trên thành $n = 18$ hình tròn bằng nhau và theo bạn đường kính lớn nhất của chúng là bao nhiêu?

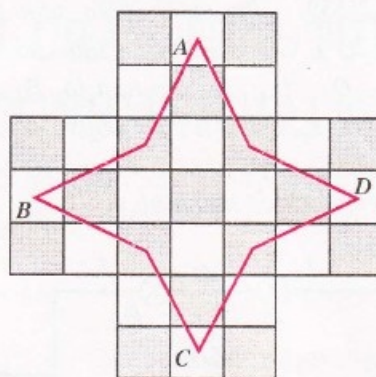
2) Hỏi như trên với $n = 12$.

Giải đáp

QUÂN MÃ ĐI TRÊN BÀN CỜ HÌNH CHỮ THẬP

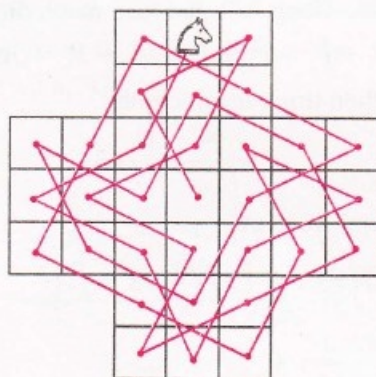
(Đề đăng trong THPT số 340 tháng 10/2005)

a) Ta sẽ chứng minh (bằng phản chứng) rằng quân mã không thể đi liên tiếp qua tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô một lần. Trên bàn cờ được tô màu như ở hình 2, có 16 ô màu trắng và 17 ô màu sẫm. Quân mã đi mỗi bước từ ô màu này



Hình 2

sang ô màu khác. Giả sử quân mã đi qua tất cả 33 ô thì phải xuất phát từ ô màu sẫm và kết thúc tại ô màu sẫm, do đó ở mỗi ô màu trắng (trong đó có các ô A, B, C, D) phải có một đường đi vào và một đường đi ra. Lúc đó ta có đường gấp khúc khép kín đi qua 4 ô A, B, C, D như ở hình 2, dẫn đến mâu thuẫn.



Hình 3

b) Quân mã có thể đi liên tiếp qua 32 ô (còn một ô không đến được) như ở hình 3, chú ý rằng ô xuất phát hoặc ô kết thúc phải là một trong các ô A, B, C, D.

Bạn *Bùi Viết Sang*, 10C10, THPT Kiến An, Hải Phòng đã đưa ra 6 lời giải với ô A là ô xuất phát.

PHI PHI

TỪ THÁNG 1.2006 TẠP CHÍ BẮT ĐẦU THỬ NGHIỆM WEBSITE.
BAN XEM ĐƯỜNG DẪN GIỚI THIỆU Ở BÌA 1.



THI THƠ NĂM BÌNH TUẤT

Rất vui vì ngay ngày 23.12.2005 thơ mừng xuân Bình Tuất đã gửi về hưởng ứng thi thơ. Xin đăng những bài đầu tiên hay nhất.

VUI XUÂN CÙNG BÁO TOÁN

Năm đã tròn năm, đón gió xuân
Mới tươi ý lạ, góp thêm phần
tới bến tương lai tròn đạo nghĩa
Toán học, Thầy - Trò tiếp nối chân
Phải trái, trước sau, đời bàn luận
Toán hình, toán số, dạy khuyến nhân.
Hơn kém không bàn sai phép tính
Trẻ trung đâu đếm tuổi quá tuần.
Càng say thuật toán, càng mê số
Trẻ tuổi đạo học Thiện - Mĩ - Chân
Mãi vui vườn toán, đẹp vườn xuân.

CAO XUÂN DIỆP
(Khoa Tự nhiên, CĐSP Nam Khê,
Uông Bí, Quảng Ninh)

NGHỀ DẠY TOÁN

Năm sớm vui rộn rã
Mới bực giảng Nhà trường
tới từng trang giáo án.
Toán yêu càng yêu hơn
Phải say mê hứng thú
Toán đẹp đâu hề khô
Hơn chục năm đèn sách
Trẻ trung một ước mơ
Càng dày công phấn đấu
Trẻ tuổi một quyết tâm
mãi đi cùng Toán học.

NGUYỄN THẠCH DŨNG
(Bộ môn Toán, ĐH Xây dựng Hà Nội)



THƯ CỦA NGƯỜI YÊU TOÁN

Nhân dịp năm mới bạn Phượng nhận được một bức thư bằng mật mã của một bạn trai yêu toán như sau:

1317412649403147263249181741471849
3932174739493627491816233149182036
454927434631

Biết rằng mỗi chữ cái, mỗi dấu, ô trống giữa hai chữ (nếu có) đều được mã hóa bởi một số gồm hai chữ số và chúng khác nhau thì số mã hóa khác nhau. Số các chữ cái nằm giữa hai chữ cái bất kì trong bảng chữ cái tiếng Việt (theo Từ điển tiếng Việt của Viện ngôn ngữ học) nhỏ hơn hiệu giữa hai số mã hóa của hai chữ cái đó một đơn vị. Chữ P được mã hóa bởi số 22.

Bạn hãy giúp bạn Phượng dịch bản mật mã trên.

VÂN KHANH

THÁCH ĐỐI

Câu thách đối:

Năm mới, cộng sức, thêm bền chí, không chia lòng, bớt phân tâm, thành công nhân bội.

Về đối:

1) Xuân sang, tích trí, góp thiện luân, trừ tham nhũn, giảm quan liêu, thất bại loại trừ.

CAO XUÂN DIỆP

2) Xuân sang, trừ bệnh, bớt dao động, có hợp tác, thêm toàn tâm, thất bại đẩy lùi.

NGUYỄN ANH THUẦN
(GV THCS Trần Văn On, Hải Phòng)

3) Tết đến, hợp lực, tăng nhiệt huyết, tích căn nguyên, tích nhân duyên, danh thơm lữ tiến.

NGUYỄN THẠCH DŨNG

Tạp chí còn mời gửi các câu đối mới do bạn tự sáng tác về nhà trường, về toán nhưng chưa thấy các bạn gửi, mới chỉ có các về đối của câu đối đã ra.

CLB



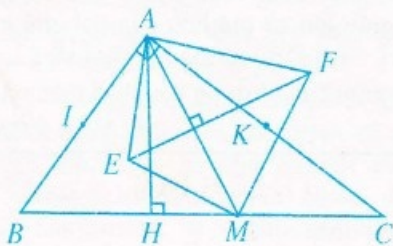
Giải đáp bài : CÓ HỢP LÍ KHÔNG ?

(Đề đăng trên THPT số 338, tháng 8.2005)

- Từ cách đánh giá các bất đẳng thức

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} S_{AEMF} = \frac{1}{4} AM \cdot EF \geq \frac{1}{4} AM^2$$
$$\geq \frac{1}{4} AH^2 = \frac{b^2 c^2}{4(b^2 + c^2)} \text{ ta thấy } S_{AEF} = \frac{b^2 c^2}{4(b^2 + c^2)}$$

khi $AM = EF$ và $AM = AH$, lúc đó $AB = AC$, hay $\triangle ABC$ vuông cân tại A , điều này không phù hợp với đề bài. Nghĩa là việc kết luận giá trị nhỏ nhất của S_{AEF} bằng $\frac{b^2 c^2}{4(b^2 + c^2)}$ là không đúng !



- Có thể giải lại bài toán như sau : Dựng $AH \perp BC$. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB và AC . Từ $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AEM} = \widehat{AEF}$ và $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AFM} = \widehat{AFE}$, suy ra $\widehat{AEF} + \widehat{AFE} = 90^\circ$, dẫn đến $\triangle AEF$ vuông tại A . Từ đó

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF \geq \frac{1}{2} AI \cdot AK = \frac{bc}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $E \equiv I$ và $F \equiv K$, khi đó $M \equiv H$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S_{AEF} bằng $\frac{bc}{8}$ đạt được khi và chỉ khi $M \equiv H$.

Nhận xét. Có rất nhiều bài gửi về tòa soạn bình luận về cách giải chưa chính xác ở THPT số 338. Sau đây là các bạn có đáp án tốt hơn cả và gửi bài sớm về tòa soạn: **Trần Tuấn Nghĩa**, 10 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên, TP Thái Nguyên; **Nguyễn Thành Trung**,

10A2 Toán, khối THPT chuyên Toán – Tin, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, Hà Nội; **Đặng Minh Toàn**, 9A1, THCS Ngô Gia Tự, Nguyễn Tuấn Thành, 10 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương; **Nguyễn Thị Thụy**, 9B, THCS Hoàng Quý, Hoàng Hóa, Thanh Hóa.

NGỌC HIỂN

ĐÃ CHUẨN CHƯA ?

Có bài toán: "Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z lớn hơn -1 , ta có

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2"$$

với lời giải như sau : Nếu $x < 0$, ta thay x bởi $(-x)$ thì hai biểu thức đầu của vế trái trong bất đẳng thức đã cho không đổi, còn biểu thức thứ ba giảm xuống (do mẫu số tăng lên). Từ đó không mất tính tổng quát có thể giả sử rằng $x \geq y \geq z \geq 0$.

Từ $(x-1)^2 \geq 0$, suy ra $3(x^2+1) \geq 2(x^2+x+1)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

$$\text{Do đó } \frac{1+x^2}{1+y+z^2} \geq \frac{1+x^2}{1+x+x^2} \geq \frac{2}{3}.$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{1+y^2}{1+z+x^2} \geq \frac{2}{3}; \quad \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{2}{3}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Theo các bạn lời giải trên đã chuẩn chưa ?
Lời giải của bạn như thế nào ?

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

ĐÃ PHÁT HÀNH

QUYỂN ĐÓNG TẬP CẢ NĂM THPT 2005

Bạn chưa có đủ các số THPT cả năm 2005 ?
Bạn muốn có đủ bộ sưu tập về THPT ? Bạn muốn có liên tục các cuốn đóng tập ?

Bạn có thể mua cuốn đóng tập cả năm THPT tức 12 số trong năm 2005, ngoài có bìa cứng. Sách có bán từ 1.2006 tại tòa soạn hoặc gửi qua bưu điện. Bạn hãy liên hệ với địa chỉ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187B Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : (04) 5144272.
Email : toanhocvt@yahoo.com

Giá bán lẻ mỗi cuốn 52000 đồng. (Nếu ở xa bạn gửi kèm cước bưu điện. Muốn biết chi tiết xin liên hệ trực tiếp với tòa soạn).

Trân trọng cảm ơn.

THPT

SÁCH MỚI**TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ
TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ (QUYỂN 1)**

Ra đời một "Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ" là điều tạp chí THPT ấp ủ từ lâu. Một trong những cuốn sách ấy đã ra mắt bạn đọc: *Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ (Quyển 1)*.

Tuyển chọn này xếp thành ba

chương, mỗi chương trình bày một chuyên đề. Chuyên đề thứ nhất *Phương pháp giải toán* bao gồm các bài viết theo hướng phát triển năng lực tư duy và kỹ năng giải toán. Chuyên đề thứ hai *Toán học và đời sống*, sẽ đem lại cho bạn đọc cách nhìn mới về toán học qua những ứng dụng phong phú,

đa dạng và thiết thực của nó. Chuyên đề thứ ba *Lịch sử Toán học* như những lát cắt giúp bạn ngược dòng thời gian đến với những sự kiện và con người xây nên lâu đài toán học hôm nay.

Hì vọng sách sẽ là hữu ích với các thầy cô giáo dạy toán, các em học sinh và mọi người yêu toán.

Sách khổ 19×27 cm, dày 300 trang, giá bán lẻ 34.000đồng/cuốn. Bạn đọc có thể mua sách tại

Các nhà sách của NXB Giáo dục:

187B Giảng Võ, TP Hà Nội

231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. HCM.

15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng

Các công ty Sách và Thiết bị trường học các tỉnh, thành.**Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ :**

187B Giảng Võ, Hà Nội

ĐT/FAX: 04.5144272

Email: toanhocvt@yahoo.com

Cảm ơn các bạn.

THTT

KẾT QUẢ ... (Tiếp bìa 2)

Các em tham dự thi phải làm 3 bài thi: Trắc nghiệm, Lí thuyết và Thực hành. Trong mỗi bài thi đều có nội dung của cả ba

môn Vật lí, Hoá học và Sinh học. Các em học sinh của Việt Nam đã hết sức cố gắng để làm bài tốt. Kết quả là đoàn Việt Nam đoạt được:

TT	Họ và Tên	Tên trường THCS	Kết quả
1	Trần Nguyên Khánh	Lý Tự Trọng, huyện Bình Xuyên	Huy chương Bạc
2	Phạm Hồng Ngọc An	Vĩnh Tường, huyện Vĩnh Tường	Huy chương Đồng
3	Nguyễn Hải Hà	Lập Thạch, huyện Lập Thạch	Huy chương Đồng
4	Lê Minh Hiếu	Vĩnh Yên, thị xã Vĩnh Yên	Huy chương Đồng
4	Nguyễn Thị Phương	Yên Lạc, huyện Yên Lạc	Huy chương Đồng
5	Nguyễn Thế Hưng	Hai Bà Trưng, thị xã Phúc Yên	

So với các nước, thời gian chuẩn bị của đội tuyển Việt Nam ngắn hơn nên kết quả của đội chưa cao như mong muốn. Kết quả đạt được của đội tuyển đã được Bộ trưởng Nguyễn Minh Hiền động viên kịp thời

ngay khi toàn đội về tới sân bay Quốc tế Nội Bài. Chúc cho đội tuyển Việt Nam có sự chuẩn bị tốt hơn vào kì thi lần thứ ba sẽ được tổ chức tại thành phố Sao Paulo, Brazil.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 343 (1-2006)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,
TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,
PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,
TS. TRẦN HỮU NAM, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG,
ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI,
ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**

Trần Hà – Một số phương pháp giải phương trình có chứa phần nguyên

3 **Lời giải đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi.**

4 **Toán học và đời sống – Math and Life**
Phan Thanh Quang – Hội họa dưới con mắt toán học.

4 **Đề thi tuyển sinh lớp 10 trường THPT Lê Quý Đôn, Bình Định năm học 2005-2006**

5 **Chuẩn bị thi đại học – University Entrance Preparation**
Phan Tuấn Cộng – Thử sức trước kì thi. Đề số 1.

6 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Phan Cung Đức – Dùng tính chất tiếp tuyến ba đường conic để giải toán.

8 **Nguyễn Đăng Phát – Những cách tiếp cận một bài toán từ nhiều góc độ khác nhau.**

10 **Vũ Đình Hòa – Lời giải bài thi toán Quốc tế lần thứ 46 năm 2005.**

11 **X hỏi ? Y, Z trả lời.**

12 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp - Advanced Elementary Mathematics**

Nguyễn Minh Hà – Ứng dụng góc định hướng vào việc giải một số bài toán hình học.

15 **Cuộc thi vui TOLITI 2006**
Đề đợt 1

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/343, ..., T12/343. L1/343, L2/343.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 339.

28 **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**

29 **Câu lạc bộ - Math Club**

29 **Giải trí toán học – Math Recreation**

30 **Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistake?**

Bìa 2: Kết quả cuộc thi Olympic khoa học Quốc tế lần thứ hai tại Indonesia của đoàn Việt Nam

Bìa 3: Khai trương NXB Giáo dục tại Thành phố Hà Nội

Tổng biên tập: PHAN ĐOÀN THOẠI. Phó ban Phụ trách : PHẠM THỊ BẠCH NGỌC. Thư kí Tòa soạn: VŨ KIM THỦY.

Biên tập : HỒ QUANG VINH.

Trì sự, Chê bản : VŨ ANH THỦY, NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049.

LỄ KHAI TRƯƠNG NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI THÀNH PHỐ HÀ NỘI

Sáng 21.12.2005 tại Khách sạn Kim Liên, số 7 Đào Duy Anh đã diễn ra Lễ khai trương NXB Giáo dục tại Thành phố Hà Nội. Đến dự có GS. TSKH. Trần Văn Nhung, Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, ông Đinh Xuân Dũng, Vụ trưởng Vụ xuất bản, Ban Tư tưởng - Văn hóa Trung ương, đại diện Cục Xuất bản Bộ Văn hóa Thông tin, nhiều đại biểu các ban ngành Trung ương, Hà Nội, Phó Cục trưởng A25 Bộ Công an, Phó Tổng giám đốc Công ty Giấy Việt Nam, đại diện các đài truyền hình, các báo, các Sở Giáo dục và Công ty phát hành sách và thiết bị trường học các địa phương, các đơn vị thành viên trong NXB Giáo dục.

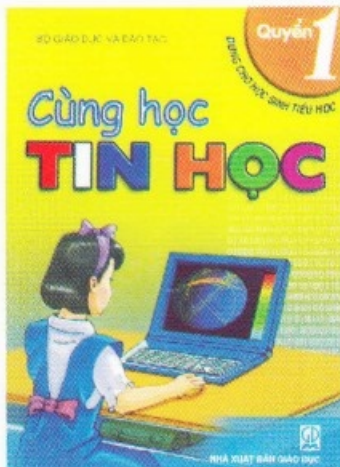


Cùng với các đơn vị thành viên của NXB Giáo dục Bộ GD-ĐT như: các NXB Giáo dục tại TP. Đà Nẵng, NXB Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh, Công ty Bản đồ và Tranh ảnh giáo dục, các trung tâm, tạp chí, các nhà in..., việc thành lập NXB Giáo dục tại TP. Hà Nội góp phần hoàn thiện và phát triển mô hình Công ty mẹ - Công ty con Nhà xuất bản Giáo dục - Bộ Giáo dục & Đào tạo, tiến tới hình thành tập đoàn xuất bản giáo dục trong tương lai. Thứ trưởng Bộ GD-ĐT Trần Văn Nhung, Tổng Giám đốc NXB Giáo dục - Bộ Giáo dục và Đào tạo Ngô Trần Ái, Phó TGD NXB Giáo dục kiêm Giám đốc NXB Giáo dục tại TP. Hà Nội Nguyễn Xuân Hòa đã cắt băng khai trương (ảnh). Sau lễ khai trương NXB Giáo dục đã phát động làm SGK có chất lượng, đúng tiến độ phục vụ năm học tới.

VPV

Sách mới dành cho bậc Tiểu học: CÙNG HỌC TIN HỌC

Hãy học Tin học để vừa học vừa chơi với máy tính



- * Đây là bộ sách Tin học được biên soạn theo chương trình mới được ban hành của Bộ Giáo dục và Đào tạo.
- * Bộ sách được thiết kế theo phong cách hiện đại kết hợp với nhiều tranh ảnh minh họa hấp dẫn.
- * Nội dung được trình bày phù hợp với lứa tuổi học sinh Tiểu học và các lớp đầu cấp THCS.
- * Các đơn vị tập thể đặt mua sách qua các địa chỉ sau:

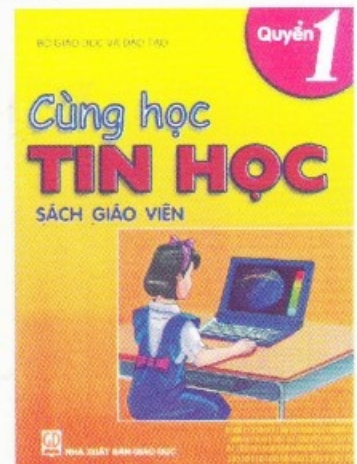
- Phòng Phát hành Sách giáo khoa, NXB Giáo dục, 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT: 04.8562011 Fax: 04.8562493.
- Phòng Phát hành Sách giáo khoa, NXB Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh,

231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh.

ĐT: 08.8358423 Fax: 08.8390727.

- Phòng Phát hành sách Giáo khoa, NXB Giáo dục tại TP. Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.

ĐT: 0511.894504 Fax: 0511.827368.



50 NĂM PHÁT TRIỂN ỔN ĐỊNH BỀN VỮNG CỦA TRƯỜNG THPT VIỆT ĐỨC, HÀ NỘI



Hiệu trưởng
Bùi Hữu Ninh

- Thành lập sau ngày giải phóng Thủ đô Hà Nội (1954) để đón nhận con em cán bộ, chiến sĩ vào tiếp quản Thủ đô, học theo chương trình 9 năm. Tên trường qua các giai đoạn: Phổ thông cấp 2-3, Phổ thông 3 A, B. Hà Nội A, B. Việt Đức, Lý Thường Kiệt. Tên trường hiện nay: THPT Việt Nam - CHLB Đức Hữu nghị (tên gọi tắt là Việt Đức). Ngày thành lập trường: 3.3.1955.

- Trong hơn 50 năm trường đã khẳng định chất lượng đào tạo toàn diện, là một trong những trường hàng đầu của Thủ đô Hà Nội, trường có nhiều mối quan hệ Quốc tế với các nước Đức, Nhật, Anh, Singapo, Mỹ, Úc...

- Trường đào tạo được nhiều thế hệ học sinh ưu tú, trở thành những cán bộ cao cấp, nhiều nhà khoa học hàng đầu, anh hùng LLVT và Anh hùng Lao động. Nhiều học sinh đã hi sinh trong sự nghiệp bảo vệ tổ quốc, đã trở thành Anh hùng, Liệt sĩ và có liệt sĩ được đặt tên một đường phố Hà Nội.

- Tỷ lệ tốt nghiệp THPT gần 100% và khoảng gần 80% vào các trường Đại học, Cao đẳng.



Các giáo viên tổ toán
trường THPT Việt Đức, Hà Nội

- Một trong những trường có điểm tuyển sinh cao nhất thành phố và luôn ở tốp đầu có số lượng học sinh giỏi Thành phố và Quốc gia. Trường giành nhiều huy chương vàng về Văn nghệ, TDTT.

- Đội ngũ các thầy cô giáo luôn luôn mẫu mực, có chất lượng cao, 100% đạt loại khá giỏi và có trên 10% có trình độ trên đại học. Nhiều thầy cô giáo trường thành trở thành các Giáo sư, Tiến sĩ, các nhà lãnh đạo và quản lý của ngành GD-ĐT.

- Tổ toán của trường gồm hơn 20 GV, có 3 Thạc sĩ Toán, luôn luôn là tổ Lao động xuất sắc. Nhiều thầy cô dạy

toán xuất sắc như: thầy Hoàng Chung, Vũ Tuấn, Vũ Bình, Đặng Trần Thái, cô Vũ Thanh Nga... Tỷ lệ tốt nghiệp bộ môn toán hàng năm vào tốp các trường dẫn đầu thành phố. Nhiều hiệu trưởng của trường là những giáo viên trưởng thành từ tổ Toán.

- Trường liên tục là trường Tiên tiến xuất sắc và đã được thưởng Huân chương Lao động Hạng Ba, nhiều cờ và bằng khen về các phong trào tổ chức của Đảng, Công đoàn, Đoàn thanh niên...

- Từ năm học 2000-2001 trường đã chuyển đổi mạnh về mọi mặt, chuẩn bị cho giai đoạn trẻ hóa thế hệ lãnh đạo và giáo viên, luôn luôn vượt lên mọi khó khăn, phấn đấu cho mục tiêu

"PHÁT TRIỂN - ỔN ĐỊNH - BỀN VỮNG".

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT45M6

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT do Bộ VHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ti CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiếu tháng 1 năm 2006

Giá : 4000 đồng

Bốn nghìn đồng