

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

T. HUY. 4500
Huyện Quốc Huy

12 2005
Số 342

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 42
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhocvt@yahoo.com

THI ĐUA DẠY TỐT - HỌC TỐT



thực hiện: NHÀ TRƯỜNG VĂN HÓA, NHÀ GIÁO MẪU MỰC, HỌC SINH THANH LỊCH



Tập thể cán bộ giáo viên
trường THCS Lê Quý Đôn
Quận Cầu Giấy, Hà Nội



TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN, QUẬN CẦU GIẤY, HÀ NỘI



Hiệu trưởng
Nguyễn Thị Thái

- Thành lập năm 1995 với tên gọi Trường Chuyên phổ thông THCS huyện Từ Liêm, Hà Nội. Tháng 9 năm 1997 trường được đổi tên thành Trường THCS Lê Quý Đôn, quận Cầu Giấy. Địa điểm: Phố Tô Hiệu, Nghĩa Tân, Cầu Giấy. Tháng 8 năm 2002 trường sáp nhập với trường THCS Nghĩa Đô và chuyển về đường Nguyễn Văn Huyền, phường Nghĩa Đô, quận Cầu Giấy.
- 100% giáo viên đạt chuẩn, 65% giáo viên đạt trên chuẩn.
- Trường đứng đầu quận Cầu Giấy về thành tích học sinh giỏi cấp quận, thành phố. Là đơn vị đi đầu trong quận về ứng dụng công nghệ tin học vào công tác quản lý và dạy học.
- Năm 2004, trường có 1 học sinh đoạt Huy chương Vàng Olympic Toán Singapore.
- Nhiều học sinh cũ của trường đạt giải Học sinh giỏi Quốc gia, có những em đạt giải Quốc tế môn Toán, Tin trong đó có em *Nguyễn Trọng Cảnh* đoạt Huy chương Vàng Toán Quốc tế năm 2003 tại Nhật Bản.
- Liên tục là trường tiên tiến xuất sắc cấp thành phố. Năm học 2003 - 2004 được nhận bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Năm học 2004 - 2005 được nhận bằng khen của Chính phủ. Nhiều

năm liên trường đạt danh hiệu trường tiên tiến xuất sắc cấp thành phố về thể dục thể thao, Liên đội mạnh cấp quận, thành phố, Công đoàn cơ sở xuất sắc, Chi bộ vững mạnh.

Sách mới Tiếng Anh dành cho Tiểu học: LET'S LEARN ENGLISH

Hãy học tiếng Anh cùng với các bạn Nam và Mai trong sách

Let's Learn English!

Đây là bộ sách tiếng Anh được biên soạn theo chương trình mới được ban hành của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Bộ sách được thiết kế theo phong cách hiện đại, kết hợp với tranh ảnh minh họa ngộ nghĩnh, tinh tế, rất hấp dẫn với các em học sinh tiểu học.

Nhà xuất bản Giáo dục hợp tác với Nhà xuất bản SNP Panpac Singapore xuất bản bộ sách này. Các Sở Giáo dục - Đào tạo, các Công ty Sách - Thiết bị có thể đặt mua tại:

Hà Nội: Phòng phát hành SGK, 187B-Giảng Võ

ĐT: (04) 8562011 Fax: (04) 8562493

Đà Nẵng: Phòng phát hành SGK, 15-Nguyễn Chí Thanh

ĐT: (0511) 894504 Fax: (0511) 827368

TP Hồ Chí Minh: Phòng phát hành SGK, 231-Nguyễn Văn Cừ, Q5

ĐT: (08) 8358423 Fax: (08) 8390727



BẠN NHỚ TÌM ĐỌC SỐ 343 (1.2006) ĐỂ CÓ ĐỀ THI CUỘC THI VUI TOLITI 2006



TRUNG HỌC CƠ SỞ

Ta đã biết định lý Viète: Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Nhờ định lý này, ta đã giải được rất nhiều bài toán đại số. Trong bài viết này, chúng tôi xin bắt đầu từ một bài toán sau đây.

Bài toán mở đầu. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 .

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Chứng minh rằng $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$ (*)

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= x_1^{n+2} + x_2^{n+2} \\ &= (x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^n + x_2^n) \\ &= -\frac{b}{a} S_{n+1} - \frac{c}{a} S_n. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra hệ thức (*).

Dưới đây chúng tôi xin trình bày một số bài toán giải được nhờ ứng dụng bài toán trên.

Bài toán 1. Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 2 = 0$.

Hãy tính $x_1^7 + x_2^7$.

Lời giải. Theo bài toán mở đầu ta có

$$S_{n+2} - 2S_{n+1} - 2S_n = 0$$

với $S_1 = 2, S_2 = 8$. Từ đó tính được $S_7 = 1136$.

Bài toán 2. Tìm đa thức bậc 7 có hệ số nguyên và nhận $\alpha = \sqrt[7]{\frac{3}{5}} + \sqrt[7]{\frac{5}{3}}$ là nghiệm.

Lời giải. Đặt $x_1 = \sqrt[7]{\frac{3}{5}}, x_2 = \sqrt[7]{\frac{5}{3}}$, ta có

$$x_1 + x_2 = \alpha, x_1 x_2 = 1.$$

Do đó x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - \alpha x + 1 = 0$.

Theo bài toán mở đầu ta có :

ỨNG DỤNG CỦA MỘT BÀI TOÁN ĐẠI SỐ NHỜ ĐỊNH LÝ VIỆT

HOÀNG NGỌC ĐAN
(GV THCS Lê Quý Đôn, Hà Nội)

$$S_{n+2} - \alpha S_{n+1} + S_n = 0 \text{ với } S_1 = \alpha, S_2 = \alpha^2 - 2.$$

Từ đó tính được

$$S_7 = x_1^7 + x_2^7 = \alpha^7 - 7\alpha^5 + 14\alpha^3 - 7\alpha.$$

Mặt khác

$$S_7 = x_1^7 + x_2^7 = \left(\sqrt[7]{\frac{3}{5}}\right)^7 + \left(\sqrt[7]{\frac{5}{3}}\right)^7 = \frac{34}{15}.$$

$$\text{Suy ra } \alpha^7 - 7\alpha^5 + 14\alpha^3 - 7\alpha = \frac{34}{15}$$

$$\text{hay } 15\alpha^7 - 105\alpha^5 + 210\alpha^3 - 105\alpha - 34 = 0.$$

Vậy đa thức cần tìm là

$$15x^7 - 105x^5 + 210x^3 - 105x - 34.$$

Bài toán 3. Giả sử x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$.

Chứng minh rằng $S_n = x_1^n + x_2^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) là số nguyên không chia hết cho 5.

Lời giải. a) Trước hết ta chứng minh $S_n \in \mathbb{Z}$ bằng phương pháp quy nạp :

Với $n = 1 : S_1 = 6 \in \mathbb{Z}$.

Với $n = 2 : S_2 = 34 \in \mathbb{Z}$.

Giả sử $S_k \in \mathbb{Z}$ và $S_{k+1} \in \mathbb{Z}$ ($k \in \mathbb{N}^*$), ta cần chứng minh $S_{k+2} \in \mathbb{Z}$.

Thật vậy, theo bài toán mở đầu ta có :

$$S_{k+2} - 6S_{k+1} + S_k = 0$$

$$\text{tức là } S_{k+2} = 6S_{k+1} - S_k.$$

Do S_k và $S_{k+1} \in \mathbb{Z}$ nên từ kết quả trên có $S_{k+2} \in \mathbb{Z}$.

Vậy $S_n \in \mathbb{Z}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$).

b) Từ kết quả :

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= 6S_{n+1} - S_n = 6(6S_n - S_{n-1}) - S_n \\ &= 35S_n - 5S_{n-1} - S_{n-1}. \end{aligned}$$

Suy ra S_{n+2} và $-S_{n-1}$ chia cho 5 có cùng số dư.

Ta có $S_n, -S_{n+3}, S_{n+6}, -S_{n+9}, \dots$ chia cho 5 có cùng số dư.

Mà $S_1 = 6, S_2 = 34, S_3 = 198$ đều không chia hết cho 5 nên $S_n (n \in \mathbb{N}^*)$ không chia hết cho 5.

Bài toán 4. Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá $(4 + \sqrt{15})^7$.

Lời giải. Đặt $x_1 = 4 + \sqrt{15}, x_2 = 4 - \sqrt{15}$. Ta có $x_1 \cdot x_2 = 1, x_1 + x_2 = 8$.

Khi đó x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 1 = 0$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n (n \in \mathbb{N}^*)$

Theo bài toán mở đầu ta có: $S_{n+2} - 8S_{n+1} + S_n = 0$.

Ta tính được $S_1 = 8, S_2 = 62, S_3 = 488, S_4 = 3842, S_5 = 30248, S_6 = 238142, S_7 = 1874888$.
Vậy $x_1^7 = 1874888 - x_2^7$.

Mà $0 < x_2^7 = (4 - \sqrt{15})^7 < 1$ nên

$1874887 < 1874888 - x_2^7 < 1874888$. Do đó

$1874887 < x_1^7 = (4 + \sqrt{15})^7 < 1874888$.

Vậy số nguyên lớn nhất không vượt quá $(4 + \sqrt{15})^7$ là 1874887.

Bài toán 5. Chứng minh rằng trong biểu diễn thập phân của số $(7 + 4\sqrt{3})^n (n \in \mathbb{N}^*)$, có ít nhất n chữ số 9 ngay sau dấu phẩy.

Lời giải. Đặt $x_1 = 7 + 4\sqrt{3}, x_2 = 7 - 4\sqrt{3}$. Ta có $x_1 + x_2 = 14, x_1 \cdot x_2 = 1$.

Khi đó x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 14x + 1 = 0$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n = (7 + 4\sqrt{3})^n + (7 - 4\sqrt{3})^n (n \in \mathbb{N}^*)$.

Ta chứng minh được $S_n \in \mathbb{Z}$ bằng phương pháp quy nạp và vì $S_n > 0$ nên $S_n \in \mathbb{N}^*$.

Vì $0 < 7 - 4\sqrt{3} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} < \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$ nên

$0 < (7 - 4\sqrt{3})^n < \frac{1}{10^n}$.

Từ đó suy ra

$(7 + 4\sqrt{3})^n < S_n < (7 + 4\sqrt{3})^n + \frac{1}{10^n}$;

$S_n - \frac{1}{10^n} < (7 + 4\sqrt{3})^n < S_n$

mà $S_n \in \mathbb{N}^*$ nên $(7 + 4\sqrt{3})^n$ có ít nhất n chữ số 9 ngay sau dấu phẩy.

Xin mời các bạn hãy ứng dụng bài toán mở đầu để giải các bài tập sau đây.

Bài 1. Cho phương trình

$$x^2 + 5(m^2 + 1)x + 1 = 0.$$

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt (x_1 và x_2).

b) Chứng minh rằng $S_n = x_1^n + x_2^n (n \in \mathbb{N})$ là số nguyên.

c) Tìm số dư trong phép chia S_{2005} cho 5.

Bài 2. Xét phương trình

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0 (a, b \in \mathbb{Q}).$$

a) Chứng minh rằng $a = -5, b = 3$ là cặp số hữu tỉ duy nhất làm cho phương trình đã cho có ba nghiệm trong đó có một nghiệm là $2 + \sqrt{5}$.

b) Kí hiệu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình trên. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n (n \in \mathbb{N}^*)$, hãy tính S_1, S_2, S_3 .

Chứng minh rằng $S_n \in \mathbb{Z}$.

c) Tìm số dư của phép chia S_{2005} cho 4.

Bài 3. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px - 1 = 0$ (với $p \in \mathbb{Z}$ và p lẻ).

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$S_n = x_1^n + x_2^n$ và $S_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau.

Bài 4. Chứng minh rằng trong biểu diễn thập phân của số $(7 + 4\sqrt{3})^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ có ít nhất n chữ số 9 ngay sau dấu phẩy.

Bài 5. Chứng minh rằng phần thập phân của số $(5 + \sqrt{26})^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ bắt đầu bằng n chữ số giống nhau.

Bài 6. a) Chứng minh rằng

$$d_n = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

(với $n \in \mathbb{N}$) là số tự nhiên.

b) Tìm tất cả các giá trị của n để d_n là số chính phương.

Bài 7. Tìm chữ số đơn vị trong biểu diễn thập phân của số $(15 + \sqrt{220})^{19} + (15 + \sqrt{220})^{82}$.

(Các bạn có thể xem thêm bài "Ứng dụng của một hệ thức truy hồi" của tác giả Nguyễn Đức Trường, THPT số 320, tháng 2-2004).

SÁCH MỚI**TUYỂN CHON THEO CHUYÊN ĐỀ
TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ (QUYỂN 1)**

Ra đời một "tủ sách Toán học và Tuổi trẻ" là điều tạp chí THPT ấp ủ từ lâu. Một trong những cuốn sách ấy đã ra mắt bạn đọc: *Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ* (Quyển 1). Tuyển chọn này xếp thành ba chương, mỗi chương trình bày một chuyên đề. Chuyên đề thứ nhất *Phương pháp giải toán* bao gồm các bài viết theo hướng phát triển năng lực tư duy và kỹ năng giải toán. Chuyên đề thứ hai là

Toán học và Đời sống, sẽ đem lại cho bạn cách nhìn mới về toán học qua những ứng dụng phong phú, đa dạng và thiết thực của nó. Chuyên đề thứ ba *Lịch sử Toán học* như những lát cắt giúp bạn ngược dòng thời gian đến với những sự kiện và con người xây nên lâu đài toán học hôm nay.

Hi vọng sách sẽ là hữu ích với các thầy cô giáo dạy toán, các em học sinh và mọi người yêu toán.

Sách khổ 19×27 cm, dày 300 trang, giá bán lẻ 34.000 đồng / cuốn. Bạn đọc có thể mua sách tại

Các nhà sách của NXB Giáo dục:

187B Giảng Võ, TP Hà Nội

231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh

15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng

Các công ty Sách & Thiết bị trường học các tỉnh, thành.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ:

187B Giảng Võ, Hà Nội;

ĐT/FAX : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

Các độc giả có thể gửi *Thư chuyển tiền* (không nên gửi trong phong bì) về tòa soạn theo giá: 39000đ/cuốn (đã gồm cả cước bưu điện) hoặc liên hệ trực tiếp khi mua với số lượng từ 20 cuốn trở lên để được trừ phí phát hành.

Cảm ơn các bạn.

THHT

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI

NĂM HỌC 2005-2006

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1 (3 điểm)

1) Thực hiện phép tính $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{2} - \sqrt{6} + \frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$.

2) Cho biểu thức $A = \frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{1}{2 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4 - x}$

với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

Rút gọn biểu thức A và tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{4}$.

3) Giải phương trình và hệ phương trình sau :

a) $9x^2 - 9x + 2 = 0$;

b)
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 11 \\ \frac{4}{x} - \frac{9}{y} = 1. \end{cases}$$

Bài 2 (3 điểm)

1) Tìm các giá trị của m để hàm số $y = (2m + 1)x + 3$ nghịch biến và đồ thị của nó đi qua điểm $(1; 2)$.

2) Tìm m để hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - y = m \\ 4x - m^2 y = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

3) Cho phương trình

$$x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0.$$

a) Tìm các nghiệm của phương trình theo m .

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm đều âm.

Bài 3 (3 điểm)

Cho M là điểm bất kì trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (M không trùng với A, B). Vẽ các tiếp tuyến Ax, By, Mz của nửa đường tròn đó. Đường thẳng Mz cắt Ax, By lần lượt tại N và P . Đường thẳng AM cắt By tại C và đường thẳng BM cắt Ax tại D . Chứng minh:

a) Tứ giác $AOMN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Tam giác NOP là tam giác vuông.

c) Các điểm N và P lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AD và BC .

Bài 4 (1 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A có AD là đường phân giác của góc A . Cho biết $AB = c, AC = b$ và $AD = d$.

Chứng minh: $\frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

(Các bạn xem lời giải ở số sau)

**LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
HỆ THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐHKHTN-ĐHQG HÀ NỘI**

NĂM HỌC 2005-2006

MÔN TOÁN

(Đề thi đăng trên THPT số 341, tháng 11 năm 2005)

VÒNG 1

Câu I. Đặt $x + y = S$; $xy = P$.

Hệ đã cho có dạng :
$$\begin{cases} S + P = 3 \\ S^2 - 2P = 2. \end{cases}$$

Hệ trên có các nghiệm là: $\begin{cases} S=2 \\ P=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=1;$

$$\begin{cases} S = -4 \\ P = 7 \end{cases} \Rightarrow \text{không tồn tại } x, y.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x, y) = (1, 1)$.

Câu II. Phương trình (PT) đã cho tương đương với :

$$11-x-4\sqrt{x+3}-2\sqrt{3-2x}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3-4\sqrt{x+3}+4)+(3-2x-2\sqrt{3-2x}+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)^2 + (\sqrt{3-2x}-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}-2=0 \\ \sqrt{3-2x}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Câu III. PT đã cho có dạng :

$$x^2 + 17[y^2 + 2xy + 3(x+y)] = 1740.$$

Chú ý rằng với số x nguyên, x có thể có dạng sau:

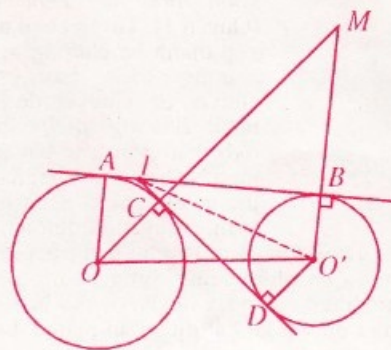
$x = 17k \pm r$ với $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và $k \in \mathbb{Z}$.

Từ đó suy ra $x^2 \in \{17k, 17k+1, 17k+4, 17k+9, 17k+8, 17k+16, 17k+2, 17k+15, 17k+13\}$.

Nhận thấy rằng về phải là 1740 khi chia cho 17 có số dư là 6. Trong khi đó về trái khi chia cho 17 trong mọi trường hợp đều không có số dư là 6. Vậy PT đã cho không có nghiệm nguyên.

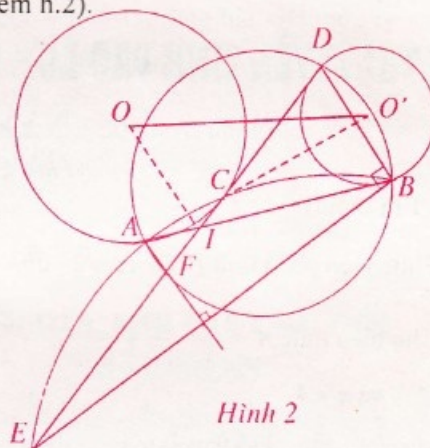
Câu IV. 1) (Xem h.1).

Ta có $OM \parallel O'D$ (OM và $O'D$ cùng vuông góc với CD) $\Rightarrow \widehat{MOO'} = \widehat{OO'D} < \widehat{IO'D} = \widehat{IO'M} < \widehat{OO'M} \Rightarrow OM > O'M$.



Hình 1

2) (Xem h.2).



Hình 2

Tứ giác $ACBE$ nội tiếp và $IA = IC$, nên $IB = IE$. Mặt khác $IB = ID$, do đó $\triangle BED$ vuông tại B hay $BD \perp BE$ (1)

Tứ giác $ADBF$ nội tiếp và $IB = ID$, nên $IA = IF$ suy ra $AF \parallel BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AF \perp BE$.

Câu V. Điều kiện đã cho có thể viết lại là

$$xy^2 + x^2 \cdot \frac{1}{z} + y \cdot \frac{1}{z^2} = 3.$$

Biểu thức P có dạng: $P = \frac{1}{\frac{1}{z^4} + x^4 + y^4}$.

Đặt $\frac{1}{z} = t$, ta thu được bài toán sau :

"Với x, y, t là các số dương thỏa mãn
 $xy^2 + yt^2 + tx^2 = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^4 + y^4 + t^4}$$

Theo BĐT Cauchy cho bốn số dương, ta có

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + y^4 + 1 \geq 4xy^2 \\ y^4 + t^4 + t^4 + 1 \geq 4yt^2 \\ t^4 + x^4 + x^4 + 1 \geq 4tx^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(x^4 + y^4 + t^4) + 3 \geq 4(xy^2 + yt^2 + tx^2) = 12$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + t^4 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{x^4 + y^4 + t^4} \leq \frac{1}{3}$$

Vậy $P_{\min} = \frac{1}{3}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

VÒNG 2

Câu VI. Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$.

Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$ ($t \geq 0$)

$$\Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}$$

PT đã cho có dạng: $t^2 + 2t - 8 = 0 \Rightarrow$

$$t_1 = -4 \text{ (loại)}$$

$$t_2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Thử lại ta thấy $x = -2$ và $x = 2$ là hai nghiệm của PT đã cho.

Câu VII. Do $x^3 + y^3 - xy^2 = 1$ nên PT thứ hai của hệ có dạng:

$$4x^4 + y^4 = (4x+y)(x^3 + y^3 - xy^2)$$

$$\Rightarrow xy(3y^2 - 4xy + x^2) = 0$$

$$a) x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{hệ có nghiệm } (0, 1).$$

$$b) y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{hệ có nghiệm } (1, 0).$$

$$c) 3y^2 - 4xy + x^2 = 0 \quad (*)$$

Với $x \neq 0$ chia cả hai vế của PT (*) cho x^2 ta

$$\text{nhận được: } 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0.$$

$$\text{Đặt } \frac{y}{x} = t \text{ ta có } 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{3}.$$

$$* \text{ Với } \frac{y}{x} = 1 \text{ ta tìm được } x = y = 1.$$

$$* \text{ Với } \frac{y}{x} = \frac{1}{3} \text{ ta tìm được } x = \frac{3}{\sqrt[3]{25}}, y = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}.$$

Vậy hệ có các nghiệm (x, y) là:

$$(0, 1); (1, 0); (1, 1); \left(\frac{3}{\sqrt[3]{25}}, \frac{1}{\sqrt[3]{25}}\right).$$

Câu VIII. 1) Từ $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2$

suy ra $x+y \leq \sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 1+2xy \geq 1$
 suy ra $x+y \geq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=0$ hoặc $y=0$.

2) Ta có

$$P^2 = 2 + 2(x+y) + 2\sqrt{1+2(x+y)+4xy}.$$

Do $x+y \leq \sqrt{2}$ và $4xy \leq 2(x^2 + y^2) = 2$ suy ra

$$P^2 \leq 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}$$

$$\Rightarrow P \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}.$$

Vậy $P_{\max} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$, đạt được

khi $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác, do $x+y \geq 1$ và $4xy \geq 0$, nên

$$P^2 \geq 2 + 2 + 2\sqrt{1+2+0} \Rightarrow P \geq \sqrt{4+2\sqrt{3}}.$$

Vậy $P_{\min} = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$ đạt được khi $x=0$ hoặc $y=0$.

Câu IX. 1) Lấy điểm P' khác phía với điểm P đối với đường thẳng AB sao cho $\triangle BPP'$ vuông cân (tại B) (h. 3).

Ta có $\triangle BPC = \triangle BP'A$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BP'A} = 135^\circ.$$

Do $\widehat{BP'P} = 45^\circ$ nên $\widehat{PP'A} = 90^\circ$.

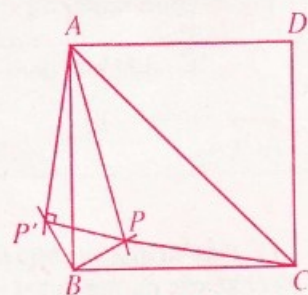
Theo định lý Pythagore

$$PA^2 = AP^2 + P'P^2 = PC^2 + 2PB^2.$$

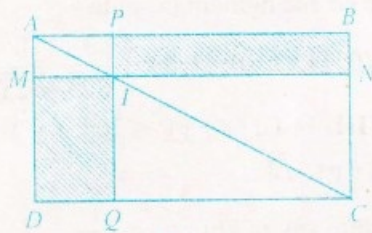
2) Trước hết ta chứng minh nhận xét sau (h. 4).

Nhận xét: Giả sử I là điểm nằm trong hình chữ nhật $ABCD$. Qua I kẻ các đường thẳng MN, PQ tương ứng song song với AB, AD . Gọi diện tích hình chữ nhật $IPBN$ là S_1 , diện tích hình chữ nhật $IQDM$ là S_2 .

Ta có $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi I thuộc đường chéo AC .



Hình 3



Hình 4

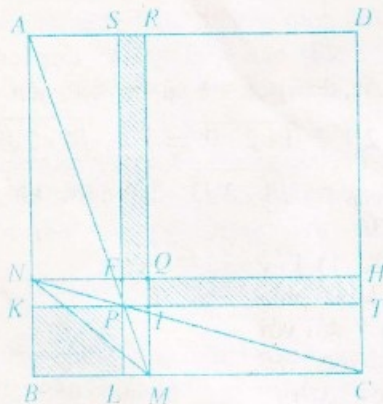
Thật vậy : Giả sử I thuộc đường chéo AC . Vì đường chéo của hình chữ nhật chia hình chữ nhật thành hai phần có diện tích bằng nhau nên $S_1 = S_2$.

Ngược lại, giả sử $S_1 = S_2$, suy ra

$$IN \cdot IP = IM \cdot IQ \Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{IQ}{IP} = \frac{NC}{MA}$$

$\Rightarrow \Delta MAI \sim \Delta NIC \Rightarrow \widehat{MIA} = \widehat{NIC}$. Do M, I, N thẳng hàng nên A, I, C thẳng hàng.

Trở lại bài toán (h. 5).



Hình 5

Để thấy tứ giác $NBMQ$ là hình chữ nhật. Qua P và Q kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông. Do P thuộc đường chéo AM của hình chữ nhật $ABMR$ nên $S_{BLPK} = S_{PIRS}$. P thuộc đường chéo CN của hình chữ nhật $NBCH$ nên $S_{BLPK} = S_{PTHF}$.

$$\text{Vậy : } S_{PIRS} = S_{PTHF} \Rightarrow S_{FQRS} = S_{QITH}.$$

Theo nhận xét trên, suy ra Q thuộc đường chéo PD của hình chữ nhật $SPTD$, tức PQ đi qua điểm D .

Câu X. 1) Các đỉnh của (H) chia đường tròn ngoại tiếp nó thành 14 cung bằng nhau, mỗi cung có số đo là $\alpha = \frac{\pi}{7}$. Các dây nối hai đỉnh

của (H) chắn các cung nhỏ có số đo là $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, 7\alpha$. Do vậy độ dài các dây đó chỉ nhận 7 giá trị khác nhau.

Lấy 6 đỉnh của (H) thì số dây nối hai đỉnh trong 6 đỉnh đó là $(6 \times 5) : 2 = 15$. Vì 15 dây này có các độ dài nhận không quá 7 giá trị khác nhau nên phải có ba dây cùng độ dài. Trong ba dây đó luôn có hai dây không chung đầu mút (vì nếu hai dây bất kì trong ba dây đó đều chung đầu mút thì ba dây bằng nhau đó tạo thành một tam giác đều, do đó số đỉnh của (H) chia hết cho 3, trái với giả thiết). Để thấy hai dây bằng nhau của một đường tròn không chung đầu mút thì 4 đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình thang (cân). Từ đó suy ra trong 6 đỉnh bất kì của (H) luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

2) Phân tích $13860 = 2.2.3.3.5.7.11$ vì $m.n = 13860$ nên m phải là ước số của 13860 tức là tích của một số nhân từ trong 7 nhân từ trên, còn n là tích của các nhân từ còn lại.

Nếu m có chứa nhân từ 2 (hoặc 3) thì nó phải chứa 2^2 (hoặc 3^2) vì ngược lại thì $\frac{m}{n}$ không tối giản.

Do đó nếu kí hiệu $a_1 = 2^2, a_2 = 3^2, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 11$ thì m là tích của một số nhân từ trong các số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 còn n là tích các nhân từ còn lại.

Vì vậy, chỉ có các trường hợp sau :

- 1) Có 1 phân số có tử số là 1 (mẫu số là 13860).
- 2) Có 5 phân số có tử số là 1 trong 5 nhân từ $a_1, a_2, \dots, a_5$, (mẫu là tích của 4 nhân từ còn lại).
- 3) Có 10 phân số có tử số là tích của hai nhân từ trong số $a_1, a_2, \dots, a_5$, (mẫu là tích của 3 nhân từ còn lại).
- 4) Có 10 phân số có tử số là tích của ba nhân từ (mẫu là tích của hai nhân từ còn lại).
- 5) Có 5 phân số có tử số là tích của 4 nhân từ còn mẫu là nhân từ còn lại.
- 6) Có 1 phân số có tử số là tích của cả 5 nhân từ (mẫu số là 1).

Vậy số phân số tối giản $\frac{m}{n}$ thỏa mãn $m.n = 13860$ là $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$.

Các phân số trên được chia thành từng cặp nghịch đảo của nhau và khác 1 nên số phân số lớn hơn 1 là $\frac{32}{2} = 16$.

PHẠM VĂN HÙNG
(GV ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)



SỬ DỤNG TỌA ĐỘ VECTOR ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

ĐỖ THANH SƠN

(GV Khối chuyên Toán - Tin, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Bài viết này đề cập một phương pháp giải một số dạng toán về đại số như chứng minh bất đẳng thức, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa các căn thức bậc hai, giải phương trình, ... Vấn đề này không mới! Bạn đọc có thể đã biết trong một số tài liệu hiện hành (dưới dạng các bài tập), nhưng còn tản mạn chưa được hệ thống. Bài viết này cố gắng hệ thống hóa vấn đề, giúp bạn đọc có thể vận dụng phương pháp xác định tọa độ vector, hoặc tọa độ điểm giải quyết các dạng toán nói trên. Trước hết chúng ta nhắc lại vài điểm cơ bản về vector trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy .

Cho ba vector $\vec{u} = (x_1, y_1)$; $\vec{v} = (x_2, y_2)$; $\vec{w} = (x_3, y_3)$ thỏa mãn điều kiện $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ (hoặc $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$) (*). Khi đó

Độ dài các vector $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ lần lượt là

$$u = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, v = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, w = \sqrt{x_3^2 + y_3^2}.$$

Ta biết rằng với điều kiện (*) thì $u + v \geq w$ hay $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{x_3^2 + y_3^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u} \uparrow \vec{v}$, hay $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$. Kết quả đó gợi cho ta thiết lập mối quan hệ giữa các biểu thức đại số trong bài toán đang xét với độ dài của các vector trong mặt phẳng tọa độ.

Phương pháp. Khi gặp các bài toán đại số mà mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \dots$ được biểu diễn dưới dạng tổng của

hai bình phương $\sqrt{A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \sqrt{B} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \dots$

Ta thiết lập các vector có tọa độ thích hợp trên hệ trục tọa độ Descartes Oxy sao cho độ dài các vector đó tương ứng bằng $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \dots$. Sau đó nghiệm lại rằng tổng các vector bằng vector không (hoặc có một vector bằng tổng các vector còn lại), rồi sử dụng bất đẳng thức (BDT) về độ dài ba cạnh của tam giác hoặc BDT về độ dài đường gấp khúc để đi đến kết quả bài toán.

Để làm rõ cho phương pháp, chúng tôi xin đưa ra một số thí dụ minh họa sau đây.

Thí dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có $\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 2\sqrt{2}$.

Lời giải. Về trái của BDT có thể viết dưới dạng $\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{(x-1)^2 + 1}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy chọn $\vec{u} = ((x+1), 1)$; $\vec{v} = ((1-x), 1)$; $\vec{w} = (2, 2)$. Khi đó $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$;

$$u = \sqrt{x^2 + 2x + 2}; v = \sqrt{x^2 - 2x + 2}; w = 2\sqrt{2}.$$

Từ BDT tam giác $u + v \geq w$ ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Thí dụ 2. Với a, b là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2b^2 - 6b + 9} + \sqrt{2b^2 - \frac{10ab}{3} + \frac{13a^2}{9}} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{13a^2}{9} - 4a + 4} \geq \frac{15\sqrt{13}}{13} \quad (1)$$

Lời giải. Ta biến đổi các biểu thức

$$\sqrt{2b^2 - 6b + 9} = \sqrt{b^2 + (b-3)^2};$$

$$\sqrt{2b^2 - \frac{10ab}{3} + \frac{13a^2}{9}} = \sqrt{(b-a)^2 + \left(b - \frac{2a}{3}\right)^2}.$$

Xét các điểm $M\left(a, \frac{2a}{3}\right)$; $N(b, b)$; $A(0, 3)$;

$B(2, 0)$ và lập các vector $\vec{AN} = (b, b-3)$;

$$\vec{MN} = \left(b-a, b - \frac{2a}{3}\right); \vec{BM} = \left(a-2, \frac{2a}{3}\right).$$

Khi đó $AN = \sqrt{b^2 + (b-3)^2}$;

$$MN = \sqrt{(b-a)^2 + \left(b - \frac{2a}{3}\right)^2}; BM = \sqrt{\frac{13a^2}{9} - 4a + 4}.$$

1. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{x^2+4}+2\sqrt{x^2-4x+5} \geq 5$

với mọi $x \leq \frac{4}{3}$;

b) $\sqrt{x^2+4} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2+2x+2} \geq \frac{7\sqrt{5}}{6}$

với mọi $x \geq -\frac{2}{3}$;

(HD: Chọn $A(0, 2)$; $B(-1, -1)$; $M(x, 0)$; còn M_1 là điểm xác định bởi $\overline{MB}=2\overline{BM_1}$).

c) $\sqrt{a^2-4a+8} + \sqrt{10b^2-18b+9} + \sqrt{10b^2-2ab+a^2} \geq \sqrt{29}$

với mọi số thực a, b .

(HD: Chọn $A(0, 3)$; $B(2, -2)$; $M(b, 3b)$, $N(a, 0)$).

d) $\sqrt{10x^2-24x+16} + \sqrt{13y^2-18xy+10x^2} + \sqrt{13y^2-6yz+z^2} + \sqrt{z^2-12z+40} \geq 6\sqrt{2}$

với mọi x, y, z .

(HD: Chọn $A(-2, 6)$; $B(4, 0)$; $M(0, z)$; $N(2y, 3y)$; $P(3x, x)$).

e) $\sqrt{5b^2-8b+4} + \sqrt{5b^2-8ab+5a^2} + 2\sqrt{5a^2-4a+1} \geq \frac{6\sqrt{5}}{5}$ với mọi a, b .

2. Giải phương trình

$\left| \sqrt{x^2+4x+13} - \sqrt{x^2-2x+2} \right| = 5$.

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $P = \sqrt{2}|\sin x| + |\sin x - \cos x|$;

b) $Q = \sqrt{x^2-4x+13} + \sqrt{x^2+6x+10}$;

c) $R = \sqrt{4a^2-2\sqrt{3}+1} + \frac{4}{3}\sqrt{4a^2-2\sqrt{3}a+3}$.

(HD: Chọn $A(0, 1)$; $B(\sqrt{3}, 0)$; $M(a, \sqrt{3}.a)$).

THÔNG TIN THÊM

VỀ KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN - VẬT LÝ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

Trong số 341 (11.2005) do sơ xuất khi xử lý trên máy đã bỏ sót số điểm của bạn Võ Văn Tuấn. Xin được thông báo :

Bạn Võ Văn Tuấn, lớp 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk, Đắk Lắk đạt Giải Nhất môn Toán trong cuộc thi này. Chúng tôi đã gửi Bằng chứng nhận và giải thưởng tới bạn.

Thành thật xin lỗi bạn Tuấn và độc giả.

THTT

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

CHUYÊN MỤC CŨ CÁCH HỌC MỚI

Nhu cầu học và sử dụng tiếng Anh đang tăng lên ở hầu hết các nước. Tạp chí THTT đã có chuyên mục **Tiếng Anh qua các bài toán và lời giải** từ 1.1998. Nhiều bạn có nguyện vọng chuyên mục này nên sống động hơn. Bắt đầu từ số này, chuyên mục mới thể hiện đúng như tên gọi của nó. Tòa soạn sẽ nhận các lời giải bằng tiếng Anh mà các bạn gửi về và chọn đăng những lời giải tốt. Các bạn sẽ vừa nâng cao kiến thức toán, kiến thức tiếng Anh vừa tăng thêm những hiểu biết về xã hội. Mong các bạn nhiệt tình hưởng ứng.

SỐ 69 (UNIT 1)

Problem

a) Peter and Jane earn a combined monthly income of \$3000. They have to meet the following expenses each month: food \$640; electricity, water and gas \$110; telephone \$40; hire purchase payments \$180; housing loan \$360; insurance \$75; car maintenance \$165; others \$350.

i) Calculate their total monthly expenses.

ii) Express their monthly savings as a percentage of their income.

b) Given that their combined monthly income increases by 8% and their monthly expenses on food; electricity, water and gas; car maintenance increase by 3%; 6% and 9% respectively, calculate

i) their new monthly savings,

ii) their percentage increase or decrease in their monthly savings.

Vocabulary

income	thu nhập (gồm cả lương và khoản tiền khác)
hire purchase	trả góp
earn	kiếm được (tiền) bằng làm việc
payment	khoản tiền phải trả
loan	vay, mượn, số tiền vay
insurance	số tiền nộp bảo hiểm
car maintenance	số tiền bảo dưỡng, bảo quản xe
saving	tiết kiệm

Solution (Chờ các bạn gửi về).

VŨ KIM THUY

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2004-2005

BẢNG B

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV ĐHSP Hà Nội)

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. Xét các số thực x, y thỏa mãn điều kiện:

$$x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

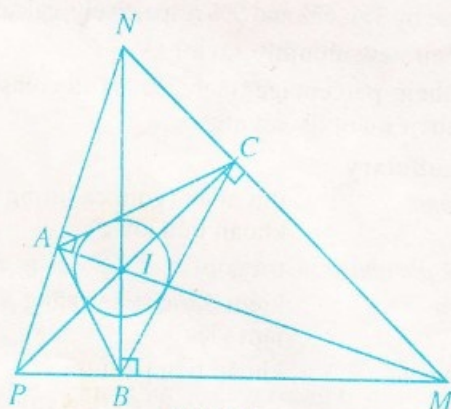
$$P = x + y.$$

Lời giải. (Xem lời giải bài 1, bảng A, THPT số 340, tháng 10-2005).

Bài 2. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I . Gọi M, N và P lần lượt là tâm của đường tròn bàng tiếp góc A , đường tròn bàng tiếp góc B và đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác đó. Gọi O_1, O_2 và O_3 tương ứng là tâm của các đường tròn (INP) , (IPM) và (IMN) . Chứng minh rằng :

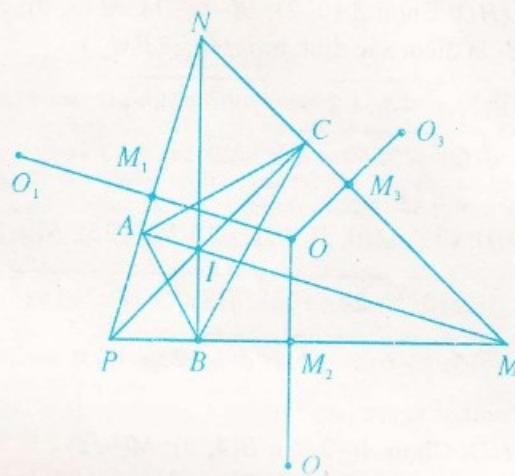
1) Các đường tròn (INP) , (IPM) và (IMN) có bán kính bằng nhau ;

2) Các đường thẳng MO_1, NO_2 và PO_3 cắt nhau tại một điểm (XYZ) kí hiệu đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z .



Hình 1

Lời giải. 1) (h. 1). Vì đường phân giác trong và đường phân giác ngoài xuất phát từ cùng một đỉnh của một tam giác vuông góc với nhau nên suy ra I là trực tâm của tam giác MNP . Do đó các đường tròn (INP) , (IPM) , (IMN) đối xứng với đường tròn (MNP) tương ứng qua các



Hình 2

đường thẳng NP, PM, MN . Vì thế, các đường tròn (INP) , (IPM) và (IMN) có bán kính bằng nhau (đpcm).

2) (h. 2). Gọi O là tâm đường tròn (MNP) . Khi đó, theo chứng minh trên, ta có O_1, O_2, O_3 đối xứng với O tương ứng qua các đường thẳng NP, PM, MN .

Từ đó suy ra trung điểm M_1 của OO_1 cũng đồng thời là trung điểm của NP , trung điểm M_2 của OO_2 cũng đồng thời là trung điểm của PM , trung điểm M_3 của OO_3 cũng đồng thời là trung điểm của MN . Do đó, ta có

$$\overline{O_1O_2} = 2\overline{M_1M_2} = \overline{NM}$$

$$\overline{O_1O_3} = 2\overline{M_1M_3} = \overline{PM}$$

Suy ra các tứ giác O_1NMO_2 và O_1PMO_3 là các hình bình hành. Vì vậy :

- NO_2 cắt MO_1 tại trung điểm của đoạn thẳng MO_1 ;
- PO_3 cắt MO_1 tại trung điểm của đoạn thẳng MO_1 .

Do đó các đường thẳng MO_1, NO_2 và PO_3 cắt nhau tại một điểm. (đpcm).

• **Chú ý.** 1. Đối với bài làm của thí sinh theo phương pháp của lời giải trên, yêu cầu trình bày chi tiết phép chứng minh tính đối xứng của một trong ba cặp đường tròn: (INP) và (MNP), (IPM) và (MNP), (IMN) và (MNP).

2. Còn có thể chứng minh kết quả của câu 1) bằng cách tính bán kính của các đường tròn (INP), (IPM), (IMN) theo bán kính của đường tròn (MNP).

Bài 3. Tìm kết quả học tập ở một lớp học, người ta thấy:

Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Toán cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Vật lý;

Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Vật lý cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Văn;

Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Văn cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử;

Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Toán.

Chứng minh rằng trong lớp học nói trên có ít nhất một học sinh đạt điểm giỏi ở cả bốn môn: Toán, Vật lý, Văn và Lịch sử.

Lời giải. Gọi T, L, V, S tương ứng là tập hợp các học sinh đạt điểm giỏi ở môn Toán, môn Vật lý, môn Văn và môn Lịch sử.

Kí hiệu: $T_1 = T \cap L, L_1 = L \cap V, V_1 = V \cap S$.

Theo giả thiết của bài toán, ta có

$$|T_1| > \frac{2}{3}|T|, |L_1| > \frac{2}{3}|L| \text{ và } |V_1| > \frac{2}{3}|V|.$$

Theo yêu cầu của bài toán, ta cần chứng minh

$$|T \cap L \cap V \cap S| > 0.$$

Không mất tổng quát, giả sử T là tập có nhiều phần tử nhất.

$$\text{Ta có } |T_1 \cap L_1| = |T_1| + |L_1| - |T_1 \cup L_1| \quad (1)$$

Vì $T_1 \cup L_1 \subseteq L$ nên $|T_1 \cup L_1| \leq |L|$. Do đó, từ (1) ta được

$$\begin{aligned} |T_1 \cap L_1| &> \frac{2}{3}|T| + \frac{2}{3}|L| - |L| = \frac{2}{3}|T| - \frac{1}{3}|L| \\ &\geq \frac{1}{3}|T| \quad (\text{do } |T| \geq |L|) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } |T_1 \cap L_1 \cap V_1| &= |T_1 \cap L_1| + |V_1| \\ &- |(T_1 \cap L_1) \cup V_1| \end{aligned} \quad (3)$$

Vì $L_1 \subseteq V$ nên $T_1 \cap L_1 \subseteq V$. Từ đây, với lưu ý rằng $V_1 \subseteq V$, suy ra

$$(T_1 \cap L_1) \cup V_1 \subseteq V.$$

Do đó $|(T_1 \cap L_1) \cup V_1| \leq |V|$. Vì vậy, từ (2) và (3) ta được

$$\begin{aligned} |T_1 \cap L_1 \cap V_1| &> \frac{1}{3}|T| + \frac{2}{3}|V| - |V| \\ &= \frac{1}{3}|T| - \frac{1}{3}|V| \geq 0 \quad (\text{do } |T| \geq |V|). \end{aligned} \quad (4)$$

Hiển nhiên $T \cap L \cap V \cap S = T_1 \cap L_1 \cap V_1$. Vì thế, từ (4) ta được điều cần chứng minh.

NGÀY THỨ HAI

Bài 4. Hãy tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, n) thỏa mãn hệ thức

$$\frac{x! + y!}{n!} = 3.$$

Lời giải. Viết lại hệ thức của đề bài dưới dạng $\frac{x!}{n!} + \frac{y!}{n!} = 3$ (1)

Giả sử (x, y, n) là bộ số tự nhiên thỏa mãn (1).

Vì hệ thức (1) đối xứng với x, y nên không mất tổng quát, giả sử $x \leq y$.

Ta có các nhận xét sau:

– Nhận xét 1: Nếu $x < n$ và $y \leq n$ thì $\frac{x!}{n!} + \frac{y!}{n!} < 2$.

– Nhận xét 2: Nếu $x < n$ và $y > n$ thì $\frac{x!}{n!} + \frac{y!}{n!} \notin \mathbb{N}^*$.

– Nhận xét 3: Nếu $x > n$ thì $\frac{x!}{n!} + \frac{y!}{n!} \geq 4$.

Chứng minh: Vì $x \in \mathbb{N}^*$ và $y \geq x$ nên từ $x > n$ suy ra $x \geq n+1$ và $y \geq n+1$. Do đó:

$$\frac{x!}{n!} \geq n+1 \geq 2 \quad (2)$$

$$\frac{y!}{n!} \geq n+1 \geq 2 \quad (3)$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức (2) và (3), ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Dựa vào các nhận xét nêu trên, từ (1) suy ra $x = n$.

Khi đó, từ (1) ta có $1 + \frac{y!}{n!} = 3$, hay $\frac{y!}{n!} = 2$ (4)

Suy ra $y \geq n + 1$. Khi đó, ta có $\frac{y!}{n!} \geq n + 1 \geq 2$.

Vì thế

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y!}{n!} = n+1 \\ n+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \text{ và } n = 1.$$

Từ đó, ta được $x = 1$.

• Tóm lại, nếu (x, y, n) là bộ số tự nhiên thỏa mãn (1) thì phải có : $(x, y, n) = (1, 2, 1)$ hoặc $(x, y, n) = (2, 1, 1)$.

Ngược lại, bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy cả hai bộ số vừa nêu đều thỏa mãn (1).

• Vậy, hai bộ số nêu trên là tất cả các bộ số cần tìm theo yêu cầu của đề bài.

Bài 5. Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy$$

với mọi số thực x, y .

Lời giải. (Xem lời giải bài 4 bảng A, THPT số 341, tháng 11-2005).

Bài 6. Cho dãy số thực (x_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$ xác định bởi : $x_1 = a$ và $x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$, trong đó a là một số thực thuộc đoạn $\left[0; \frac{4}{3}\right]$.

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x$. Khi đó có thể viết hệ thức xác định dãy (x_n) dưới dạng $x_{n+1} = f(x_n)$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

• Ta có $f'(x) = 9x^2 - 14x + 5$. Từ đó, ta có bảng biến thiên sau của hàm $f(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{5}{9}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{275}{243}$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$	

Từ đó, do $f(0) = 0$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$ và $\frac{275}{243} < \frac{4}{3}$ suy ra:

Với mọi $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ luôn có $f(x) \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ (1)

Xét các trường hợp sau :

• Trường hợp 1: $a = 0$. Khi đó, dãy (x_n) là dãy hằng : $x_n = 0 \forall n \geq 1$. Vì vậy, (x_n) là dãy hội tụ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

• Trường hợp 2: $a = \frac{4}{3}$. Khi đó dãy (x_n) là dãy hằng : $x_n = \frac{4}{3}, \forall n \geq 1$. Vì vậy, (x_n) là dãy hội tụ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{4}{3}$.

• Trường hợp 3: $0 < a < \frac{4}{3}$. Khi đó, từ (1) suy ra $x_n \in \left(0; \frac{4}{3}\right), \forall n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } |x_{n+1} - 1| &= |3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n - 1| \\ &= (x_n - 1)^2 \cdot |3x_n - 1| \quad \forall n \geq 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Vì $x_n \in \left(0; \frac{4}{3}\right), \forall n \geq 1$ nên $|3x_n - 1| < 1$
 $\forall n \geq 1$. Do đó, từ (2) suy ra
 $|x_{n+1} - 1| < (x_n - 1)^2 \quad \forall n \geq 1$

Từ đó, bằng quy nạp theo n , dễ dàng chứng minh được rằng

$$|x_n - 1| < (a - 1)^{2^{n-1}}, \quad \forall n \geq 1 \quad (3)$$

Vì $a \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ nên $|a - 1| < 1$.

Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a - 1)^{2^{n-1}} = 0$.

Vì thế, từ (3) suy ra dãy (x_n) là dãy hội tụ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

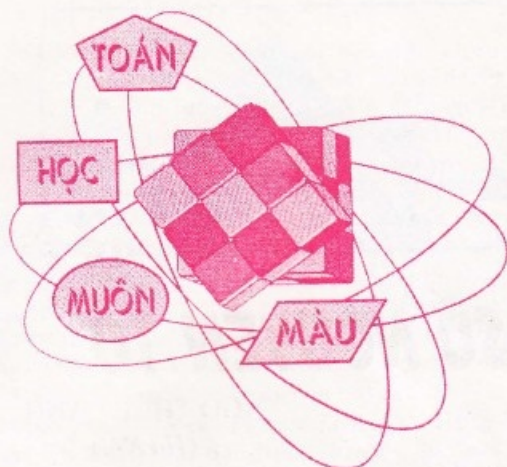
• Vậy, tóm lại dãy (x_n) là hội tụ, và :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \text{ nếu } a = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{4}{3} \text{ nếu } a = \frac{4}{3};$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 \text{ nếu } a \in \left(0; \frac{4}{3}\right).$$

• **Chú ý.** Có thể giải bài toán bằng cách khảo sát tính đơn điệu và bị chặn của dãy số (x_n) .



PHỦ HÌNH VUÔNG BẰNG BA HÌNH NHỎ BẰNG NHAU

Một cửa sổ hình vuông cạnh là $a = 100\text{cm}$ bị vỡ kính cần được chấn gió tạm thời. Người ta dùng ba hình nhỏ bằng nhau, sắp xếp chõm lên nhau để che kín cửa sổ.

Dành cho bạn đọc

1) Nếu ba hình nhỏ đều là hình vuông thì cạnh của chúng ít nhất theo bạn là bao nhiêu (tính chính xác đến xentimét) và sắp xếp như thế nào?

2) Nếu ba hình nhỏ đều là hình tròn thì đường kính của chúng ít nhất theo bạn là bao nhiêu (tính chính xác đến xentimét) và sắp xếp như thế nào?

Giải đáp: PHÂN CHIA ĐA GIÁC THÀNH CÁC HÌNH TỰ ĐỒNG DẠNG

(Đề đăng trong THPT số 339 tháng 9.2005)

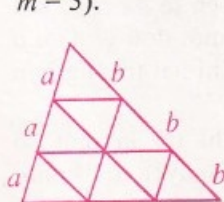
1) Xét các hình đa giác đều. Ta thấy tam giác đều là trường hợp đặc biệt của tam giác thường (xem h.1), hình vuông là trường hợp đặc biệt của hình bình hành (xem h.2), nên phân chia được thành nhiều hình nhỏ đồng dạng với hình ban đầu.

Xét đa giác đều n đỉnh mà $n > 4$ thì góc α ở đỉnh của nó phải thỏa mãn $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $k\alpha > 180^\circ$ với số nguyên $k \geq 2$, do đó đỉnh của đa giác nhỏ được chia ra không thể nằm tại đỉnh hoặc trên cạnh của đa giác ban đầu, nghĩa là không thể phân chia được.

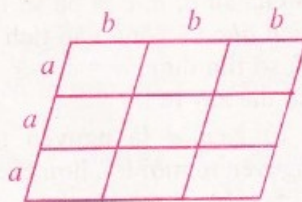
2) Dưới đây trình bày một số dạng đa giác (lồi, lõm) có thể phân chia được thành k ($k \geq 2$) đa giác nhỏ bằng nhau và đồng dạng với đa giác ban đầu (kể cả hình đối xứng với nó qua một trục).

a) Hình tam giác, $k = m^2$ (h. 1 ứng với $m = 3$).

b) Hình bình hành, $k = m^2$ (h.2 ứng với $m = 3$).

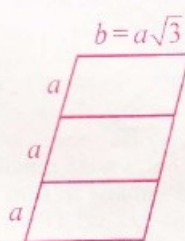


Hình 1

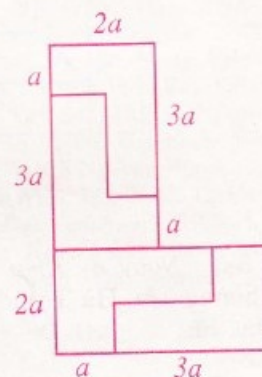


Hình 2

c) Hình bình hành có hai cạnh kề là ma và $b = a\sqrt{m}$, với $k = m > 1$ (h. 3 ứng với $m = 3$).



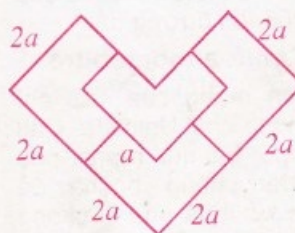
Hình 3



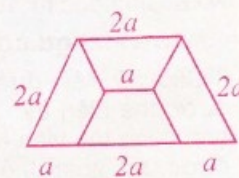
Hình 4

d) Hình chữ L, $k = 4^n$ (h. 4 với $n = 1$).

e) Hình chữ V, $k = 4^n$ (h. 5 với $n = 1$).

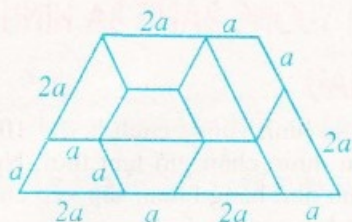


Hình 5



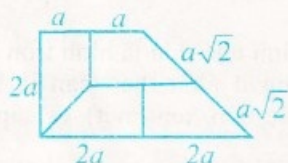
Hình 6a

g) Hình thang cân, $k = m^2$ (h. 6a và h. 6b ứng với $m = 2$ và $m = 3$).

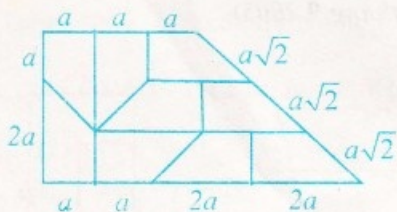


Hình 6b

h) Hình thang vuông, $k = m^2$ (h. 7a và h. 7b ứng với $m = 2$ và $m = 3$).



Hình 7a



Hình 7b

Bạn Nguyễn Kiên Cường, 12B, THPT Thường Tín, Hà Tây đã nêu được một số hình như thế.

PHI PHI

WEBSITE CỦA TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đang thử nghiệm Website Toán học và Tuổi trẻ từ tháng 12.2005. Trang Web sẽ chính thức bắt đầu hoạt động, trong khuôn khổ Website của NXB Giáo dục từ 1.2006 với đường dẫn

www.nxbgd.com.vn/toanhocvatuoi

Các dữ liệu đưa lên mạng của Tạp chí được thể hiện trên phông chữ Unicode. Các bạn cộng tác viên khi gửi bài qua mạng, nếu được, xin soạn thảo trên phông chữ này để tạo thuận lợi cho việc xử lý và nhanh chóng chuyển lên mạng. Rất mong được các bạn cộng tác viên hợp tác để Website THPT ngày càng phong phú hơn, nhằm phục vụ tốt nhu cầu của bạn đọc.

Cảm ơn các bạn.

THTT



SỐ NGUYÊN TỐ

NGÔ THỨC LANH

(Hà Nội)

Một số tự nhiên, lớn hơn 1, được gọi là *số nguyên tố*, nếu nó chỉ có hai ước số là chính nó và 1. Ví dụ 3 là số nguyên tố.

Các số tự nhiên, khác 0 và 1, không nguyên tố được gọi là *hợp số*. Ví dụ $6 (= 2 \times 3)$ là hợp số.

Định lý cơ bản của số học khẳng định rằng

Một số tự nhiên bất kì (khác 0 và 1)

– hoặc là số nguyên tố

– hoặc là một tích của những thừa số nguyên tố, và như thế theo một cách duy nhất.

Như vậy các số nguyên tố là vật liệu cơ bản để xây dựng tất cả các số tự nhiên (trừ 0 và 1). Vì các số tự nhiên tăng lên vô hạn, nên câu hỏi đầu tiên đặt ra là: Có bao nhiêu số nguyên tố? Có thể liệt kê tất cả chúng ra hay chúng lập thành một dãy vô hạn?

Giả thuyết thứ hai là đúng. Để chứng minh điều này, Euclide đã đưa ra một lập luận rất đẹp, xuất phát từ giả thiết rằng dãy số nguyên tố là hữu hạn – ông giả thiết nó có 3 phần tử – Euclide chứng minh rằng tồn tại một số nguyên tố mới, bằng cách vận dụng sự kiện là hai số tự nhiên liên tiếp không có ước số chung nào khác 1. Phép chứng minh của Euclide như sau:

Giả sử a, b, c là ba số nguyên tố đã cho. Xét tích abc và cộng vào tích đó một đơn vị. Gọi d là số tìm được $d = abc + 1$. Chỉ hai trường hợp có thể xảy ra:

1) Nếu d là nguyên tố, thì đó là một số nguyên tố mới lớn hơn các số nguyên tố đã cho.

2) Nếu d không là nguyên tố thì nó phân tích được thành những thừa số nguyên tố, gọi e là một trong các thừa số đó; e không thể bằng a , hoặc b , hoặc c , vì khi đó nó sẽ là một ước số của abc và $abc + 1$, điều này không thể xảy ra,

vì abc và $abc + 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp. Vậy e là một số nguyên tố mới không nằm trong số các số nguyên tố đã cho.

Phép chứng minh trên vẫn đúng nếu giả sử tất cả chỉ có n số nguyên tố và chứng tỏ rằng: *Dãy số nguyên tố là vô hạn.*

Câu hỏi tiếp theo đặt ra là: Làm thế nào nhận biết một số tự nhiên đã cho là nguyên tố?

Việc liệt kê các số nguyên tố nhỏ hơn 100 không khó khăn gì vì chỉ việc loại đi tất cả các bội số của 2 trừ 2, rồi các bội số của 3 trừ 3, các bội số của 5 trừ 5 và các bội số của 7 trừ 7 trong 100 số tự nhiên đầu.

Phương pháp này đã được biết đến từ thời Cổ đại, nó gọi là "*Sàng Eratosthène*". Eratosthène là một nhà toán học cổ Hi Lạp sống ở thế kỉ III trước Công nguyên, bạn của Archimède.

Ngoài giới hạn 100, ta có thể tiến hành như sau: Chia số đã cho cho các số nguyên tố liên tiếp (tất nhiên các số chia hết cho 2, 3, 5, ... thì phải loại ngay từ đầu) tới số nguyên tố lớn nhất nhỏ hơn hay bằng căn số bậc hai của số đã cho thì dừng lại).

Ví dụ, hãy xét xem số 193 có là nguyên tố không. Số này không chia hết cho 2, cho 3, cho 5 và cho 11. Phép chia 193 cho 7 có thương là 27 và dư là 4 ($27 > 7$). Phép chia 193 cho 13 cho thương là 14 và dư là 11 ($14 > 13$). Nếu ta chia 193 cho số nguyên tố tiếp theo 17 thì thương chắc chắn sẽ nhỏ hơn 17. (Nếu phép chia không có dư thì thương đó là một ước số của 193, và vì nó nhỏ hơn 17 nên nó sẽ có ít nhất một thừa số nguyên tố nhỏ hơn 17). Khi đó thừa số này cũng là một ước số của 193. Nhưng điều này đã không xảy ra. Vậy phép chia 193 cho 17 phải có dư, tức là 193 không chia hết cho 17. Đến đây có thể dừng lại vì 193 không thể chia hết cho những số nguyên tố lớn hơn 17 tức là ta chỉ cần chia 193 cho những số nguyên tố nhỏ hơn hay bằng $\sqrt{193}$. Ta có thể kết luận rằng 193 là nguyên tố vì nó không thể phân tích thành các thừa số nguyên tố.

Người ta không nhận thấy một sự tuần hoàn nào trong dãy số nguyên tố. Trùng lên trên các số nguyên tố dường như có một sự huyền bí nào đó.

Ngày 17.4.1643, thầy tu Marin Mersenne (1588–1648), người ham thích toán học và bạn của Pierre de Fermat hỏi Fermat: Số 100895598169 có phải là một số nguyên tố

không? Fermat đã trả lời khá nhanh chóng rằng số đó không phải là nguyên tố vì nó là tích của 112503 với 898423 (là những số nguyên tố).

Mersenne đã nghĩ rằng các số có dạng $M_p = 2^p - 1$ (trong đó p là nguyên tố), là số nguyên tố. Nhưng năm 1903, nhà toán học Mỹ F.N Cole (1861–1927) chứng tỏ rằng số $M_{67} = 2^{67} - 1$ không phải là nguyên tố.

Pierre de Fermat (1601–1665) thì nghĩ rằng các số dạng $F_n = 2^{2^n} + 1$ là nguyên tố. Nhưng năm 1732, Euler (1707–1783) chứng tỏ rằng $F_5 = 2^{2^5} + 1$ không phải là nguyên tố, vì nó chia hết cho 641.

Việc tìm các số nguyên tố lớn trong một thời gian dài chỉ là một trò chơi của nhiều nhà toán học.

Các nhà toán học Euler, Goldbach, Waring, Wilson, Leibniz, Vinogradov v.v... đã nghiên cứu về số nguyên tố. Nhưng kết quả của sự nghiên cứu đó cũng chưa nhiều.

Ngày nay việc nghiên cứu về số nguyên tố được kích thích bởi sự kiện là các số nguyên tố có ích trong việc mã hóa và giải mã các thông điệp thông tin.

Năm 1876, số nguyên tố lớn nhất do nhà toán học Pháp Edouard Lucas (1842–1891) thiết lập là:

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727$$

Nó có 39 chữ số.

Sau đó, nhờ máy tính điện tử, người ta đã tìm được các số nguyên tố sau đây:

$$2^{3217} - 1 \text{ có } 687 \text{ chữ số (năm 1957)}$$

$$2^{11213} - 1 \text{ có } 3376 \text{ chữ số (năm 1963)}$$

$$2^{21701} - 1 \text{ có } 6533 \text{ chữ số (năm 1978)}$$

$$2^{44497} - 1 \text{ có } 13395 \text{ chữ số (năm 1979)}$$

$$2^{86243} - 1 \text{ có } 25962 \text{ chữ số (năm 1983)}$$

$$2^{216091} - 1 \text{ có } 65050 \text{ chữ số (năm 1985)}$$

$$2^{859433} - 1 \text{ có } 258716 \text{ chữ số (năm 1994)}$$

$$2^{1257787} - 1 \text{ có } 378632 \text{ chữ số (năm 1996)}$$

$$2^{1398269} - 1 \text{ có } 420921 \text{ chữ số (năm 1997)}$$

Số cuối này khai triển ra và đánh máy không dễ khoảng cách sẽ có chiều dài 947 mét.

Bạn có thể xem thêm các bài về các số nguyên tố lớn hơn mới xác định trên THTT số 318 (12.2003) và 333 (3.2005).



CÁC LỚP THCS

Bài T1/342 (Lớp 6). Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho

$$A = 2005^n + n^{2005} + 2005n \text{ chia hết cho } 3.$$

PHẠM ĐỨC THẮNG

(GV THCS Vũ Hữu, Bình Giang, Hải Dương)

Bài T2/342 (Lớp 7). Cho tam giác ABC với $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36^\circ$. Trên tia phân giác của góc ABC lấy điểm N sao cho $\widehat{BCN} = 12^\circ$. Hãy so sánh độ dài của CN và CA .

TRẦN VĂN HINH

(GV THCS Nam Giang, Nam Trực, Nam Định)

Bài T3/342. Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 5x^2 - 4y^2 - 5 = 0.$$

CÙ HUY TOÀN

(SV Công nghệ Vật liệu 02, K50, ĐHBK Hà Nội)

Bài T4/342. Tìm giá trị của biểu thức

$$P = a^{2005} + b^{2005} + c^{2005}$$

trong đó a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \\ a^3 + b^3 + c^3 = 2^9. \end{cases}$$

NGUYỄN TIÊN TIỀN

(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T5/342. Chứng minh bất đẳng thức sau với x là số thực không âm:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} \leq \sqrt{x+9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

TRẦN TUẤN ANH

(ĐHKHTN - ĐHQG TP Hồ Chí Minh)

Bài T6/342. Cho tam giác ABC cân tại A với $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Lấy điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = 20^\circ$ và $\widehat{MCA} = 30^\circ$. Tính góc $\widehat{MBC}$.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV PTCTT ĐHSP Hà Nội)

Bài T7/342. Cho đường tròn (O) , hai dây cung CA, CB không đi qua tâm O và $BA \neq BC$. Đường thẳng qua điểm A vuông góc với đường thẳng OB cắt đường thẳng CB tại điểm N . Gọi M là trung điểm của AN . Đường thẳng BM cắt đường tròn (O) lần nữa tại D . Gọi OE là đường kính của đường tròn đi qua các điểm B, D, O . Chứng minh rằng ba điểm A, C, E thẳng hàng.

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lương Thế Vinh, Quy Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/342. Cho tập hợp M gồm 2005 số dương: $a_1, a_2, \dots, a_{2005}$. Xét tất cả các tập hợp con T_i khác rỗng của M , gọi s_i là tổng các số thuộc một tập hợp con T_i nói trên. Chứng minh rằng có thể chia tập hợp tất cả các số s_i được thành lập như vậy thành 2005 tập hợp con khác rỗng không giao nhau sao cho tỉ số của hai số bất kì thuộc cùng một tập hợp con vừa được phân chia không vượt quá 2.

PHẠM NGỌC BỘI

(GV khoa Toán ĐH Vinh)

Bài T9/342. Dãy số (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định như sau: $x_1 = 1$, và

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}$$

với $n = 1, 2, \dots$

$$\text{Đặt } y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2} \quad (n = 1, 2, \dots). \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

TRẦN VĂN TÂN

(SV Toán K35B, ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T10/342. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left(a^2 + \frac{1}{ab}\right)^\alpha + \left(b^2 + \frac{1}{bc}\right)^\alpha + \left(c^2 + \frac{1}{ca}\right)^\alpha \geq 3.2^\alpha$$

trong đó a, b, c là các số dương và α là số hữu tỉ lớn hơn 1. Đẳng thức xảy ra khi nào?

NGUYỄN TẤT THU

(GV THPT Lê Quý Đôn, Biên Hòa, Đồng Nai)

Bài T11/342. Gọi r và R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{r^2}{2R^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

NGUYỄN TRỌNG QUÂN

(SV44C4, ĐH Thủy Lợi, Hà Nội)

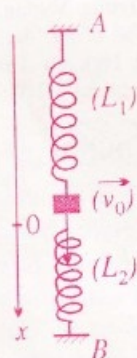
Bài T12/342. Trong không gian cho một mặt cầu (S) và một đường thẳng Δ không cắt (S). Qua một điểm M trên Δ dựng ba tiếp diện bất kì với mặt cầu (S) và gọi A, B, C là các tiếp điểm. Chứng minh rằng mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một đường thẳng cố định khi M di động trên Δ .

ĐẶNG THANH HÀI

(GV Học viện Phòng không Không quân, Hà Tây)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/342. Hai lò xo nhẹ L_1, L_2 giống hệt nhau có cùng độ cứng $k = 20\text{N/m}$ và độ dài tự nhiên $l_0 = 40\text{cm}$. Ta bố trí một hệ như hình vẽ: các lò xo luôn luôn thẳng đứng, vật nhỏ nối giữa hai lò xo có khối lượng $m = 100\text{g}$. Hai đầu còn lại của hai lò xo gắn cố định vào A và B với $AB = l$. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.



Từ vị trí cân bằng tại thời điểm $t = 0$ người ta truyền cho vật m một vận tốc ban đầu $v_0 = 40\text{cm/s}$ theo phương thẳng đứng.

a) Chứng tỏ vật dao động điều hòa. Viết phương trình dao động đó.

b) Khoảng cách $AB = l$ cần thỏa mãn điều kiện gì ở mỗi trường hợp sau để trong quá trình vật dao động thì :

- + Hai lò xo luôn luôn giãn;
- + Hai lò xo luôn luôn nén;

+ Lò xo L_1 luôn luôn giãn còn lò xo L_2 luôn luôn nén.

NGUYỄN MINH TUẤN

(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

Bài L2/342. Một ampe kế mắc nối tiếp với một vôn kế rồi mắc vào hai cực của một nguồn điện có suất điện động $E = 6\text{V}$ (điện trở trong nhỏ không đáng kể) thì ampe kế chỉ I và vôn kế chỉ U . Sau đó mắc một điện trở R song song với vôn kế thì ampe kế chỉ $I_1 = 2I$ và vôn kế chỉ $U_1 = 0,5U$. Hỏi vôn kế lúc đó chỉ mấy vôn?

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Đọc lại cho đúng

Trong THPT số 341 tháng 11.2005 có nhầm do sơ suất kĩ thuật, nay xin đọc lại như sau:

- Trang 4, dòng 13, bỏ đi cụm từ: đã hi sinh.

- Trang 16, đề T9/341:

$$2x^2 + y^2 + 5z^2 + 4xy + 7xz + 4yz > 0.$$

Thành thật xin lỗi các tác giả và bạn đọc.

THTT

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/342 (for 6th grade)

Find all whole numbers n such that the sum

$$A = 2005^n + n^{2005} + 2005n$$

is divisible by 3.

T2/342 (for 7th grade)

Let ABC be a triangle with $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36^\circ$.

On the ray bisecting the angle ABC take the point N so that $\widehat{BCN} = 12^\circ$. Compare the measures of CN and CA .

T3/342. Find all integral solutions of the equation

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 5x^2 - 4y^2 - 5 = 0.$$

T4/342. Find the value of the expression

$$P = a^{2005} + b^{2005} + c^{2005}$$

where a, b, c are real numbers, distinct from 0, satisfying the following conditions

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \\ a^3 + b^3 + c^3 = 2^9. \end{cases}$$

T5/342. Prove the following inequality for nonnegative real numbers x :

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} \leq \sqrt{x+9}.$$

When does equality occur ?

T6/342. Let ABC be a triangle with $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Take the point M inside the triangle so that $\widehat{MAC} = 20^\circ$, $\widehat{MCA} = 30^\circ$. Find the measure of $\widehat{MBC}$.

T7/342. Let be given a circle (O) with center O , two chords CA, CB not passing through O , $BA \neq BC$. The line passing through A , perpendicular to the line OB , cuts the line CB at N . Let M be the midpoint of AN . The line BM cuts the circle (O) at B and D . Let E be the point such that OE is a diameter of the circle passing through B, D, O . Prove that the points A, C, E are collinear.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/342. Let M be a set consisting of 2005 positive numbers $a_1, a_2, \dots, a_{2005}$. Consider all non empty subsets T_i of M and let s_i be the sum of the numbers belonging to T_i . Prove that the

(Xem tiếp trang 27)



Bài T1/338 (Lớp 6). *Hỏi biểu thức $x^4 + y^4 + z^4$, trong đó x, y, z là các phân số dương, có thể lấy giá trị 2004 không?*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh nhận xét sau:

Nếu n là một số nguyên thì n^4 chia cho 16 chỉ có các số dư là 0 hoặc 1.

Thật vậy:

– Nếu n là một số chẵn thì n^4 là số chia hết cho 16.

– Nếu n là một số lẻ thì $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) nên $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$.

Vì $k(k+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên nó luôn luôn là số chẵn. Do đó số n^2 chia cho 8 dư 1.

Ta được $n^4 = (8m+1)^2 = 64m^2 + 16m + 1$ là số chia cho 16 dư 1.

Vậy n^4 chia 16 chỉ có các số dư là 0 (khi n chẵn) hoặc là 1 (khi n lẻ).

Ta trở lại bài toán.

Giả sử x, y, z là các phân số dương thỏa mãn

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2004 \quad (1)$$

Giả sử $x = \frac{m}{p}, y = \frac{n}{p}, z = \frac{k}{p}$ với m, n, k, p

là các số tự nhiên không có cùng ước số chung (USC) nào lớn hơn 1.

$$\text{Từ (1) suy ra } m^4 + n^4 + k^4 = 2004p^4 \quad (2)$$

Nếu p là một số chẵn thì $2004p^4$ là một số chia hết cho 16 nên $m^4 + n^4 + k^4$ chia hết cho 16.

Do đó theo nhận xét trên, ta có m, n, k phải là các số cùng chẵn (nếu ngược lại thì số $m^4 + n^4 + k^4$ khi chia cho 16 chỉ có các số dư 1, 2, 3 nên không chia hết cho 16).

Như vậy m, n, k, p là các số cùng chẵn, trái với giả thiết chúng không có cùng USC lớn hơn 1.

Do đó p là một số lẻ. Nhưng khi đó $2004p^4$ là số chia cho 16 dư 4 còn $m^4 + n^4 + k^4$ là số chia cho 16 chỉ có thể dư 0, 1, 2, 3 nên (2) không thỏa mãn.

Vậy không có các phân số dương x, y, z thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. 1) Với cách giải trên, trong đề bài có thể thay 2004 bằng một số tự nhiên bất kì mà khi chia cho 16 có số dư lớn hơn 3.

2) Đối với bài này, ta có thể chỉ cần chứng minh nhận xét nhẹ hơn là:

Nếu n là một số nguyên thì n^4 chia cho 4 chỉ có các số dư là 0 hoặc 1. Sau đó từ (2) có thể suy ra ba số m, n, k cùng chẵn. Khi đó $m^4 + n^4 + k^4$ chia hết cho 16 nên p phải là số chẵn. Mâu thuẫn với giả thiết m, n, k, p là các số tự nhiên không có cùng USC lớn hơn 1.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Lê Quang Huy, 7H1, THCS Trưng Vương, Q Hoàn Kiếm; **Quảng Trị:** Trương Nhã Uyên, 4/1, TH Hàm Nghi, Đông Hà; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Ngọc, Phùng Ngọc Quý, Lê Thị Tuyết Mai, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/338 (Lớp 7). *Cho tam giác ABC, lấy điểm D thuộc nửa mặt phẳng không chứa điểm C bờ AB sao cho $DA \perp AB$ và $AD = AB$. Lấy điểm E thuộc nửa mặt phẳng không chứa điểm B bờ AC sao cho $EA \perp AC$ và $AE = AC$. So sánh diện tích tam giác ADE với diện tích tam giác ABC.*

Lời giải. (Của đa số các bạn).

Kí hiệu S_{ABC} là diện tích $\triangle ABC$.

Trên tia đối của tia AB lấy điểm B' sao cho $AB' = AB$, ta có $\triangle ADB'$ vuông cân, suy ra

$AD = AB'$ và

$AD \perp AB'$ (h. 1).

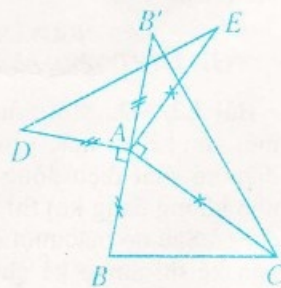
Xét hai tam giác DAE và $B'AC$, có

$AD = AB', AE = AC$ (gt), $\widehat{DAE} = \widehat{B'AC}$ (đẳng thức này đúng khi góc A là nhọn, vuông hay tù). Do đó $\triangle DAE = \triangle B'AC$. Suy ra

$$S_{DAE} = S_{B'AC} \quad (1)$$

Mặt khác, hai tam giác $B'AC$ và ABC có $AB' = AB$, cùng đường cao hạ từ đỉnh C, do đó

$$S_{B'AC} = S_{ABC} \quad (2)$$



Hình 1

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ADE} = S_{ABC}$.

Nhận xét. 1) Ngoài cách giải trên đây, nhiều bạn chứng minh hai tam giác ADE và ABC có các đường cao hạ từ đỉnh D và B xuống cạnh đối diện bằng nhau hoặc dựng điểm B'' sao cho AB'' đi qua trung điểm M của BC và $AB'' = 2AM$ rồi chứng minh $\triangle AB''C = \triangle EDA$.

2) Một số bạn còn nêu được nhận xét: Với điều kiện của đề toán, khi D và C cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB (hoặc E và B cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AC), ta vẫn có $S_{ADE} = S_{ABC}$. Ta có thể đưa ra bài toán tổng quát hơn: "Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, các góc xen giữa chúng bù nhau thì hai tam giác này có diện tích bằng nhau".

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả:

Vinh Phúc: Nguyễn Phương Thảo, 7C, THCS Vinh Yên, TX Vinh Yên; **Bác Ninh:** Nguyễn Bá Toàn, 7C, THCS Thuận Thành; **Thanh Hóa:** Phạm Thị Hồng, 7B, THCS Thị trấn Sao Vàng, Thọ Xuân; **Nghe An:** Vũ Đình Long, 6A; Nguyễn Tất Ngọc, Nguyễn Mạnh Tuấn, Dương Hoàng Hưng, Nguyễn Anh Tú, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thừa Thiên - Huế:** Đoàn Thị Thiện Hào, 7/2, THCS Nguyễn Tri Phương; **Đà Nẵng:** Nguyễn Thị Quỳnh Trang, 7/2, THCS Nguyễn Khuyến; **Quảng Ngãi:** Võ Nguyễn Việt Phương, Võ Thị Hồng Huyền, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyên, 7/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bình Định:** Nguyễn Thị Minh Quý, 7A8, THCS Cát Tân, Phù Cát.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/338. Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình:

$$(2x - y - 2)^2 = 7(x - 2y - y^2 - 1) \quad (1)$$

Lời giải. PT (1) tương đương với

$$2(2x - y - 2)^2 - 7(2x - y - 2) + 7(2y^2 + 3y) = 0 \quad (2)$$

Đặt $t = 2x - y - 2$ thì PT (2) trở thành

$$2t^2 - 7t + 7(2y^2 + 3y) = 0 \quad (3)$$

Đến đây có thể giải theo một trong hai cách sau đây:

Cách 1.

$$(3) \Leftrightarrow 16t^2 - 56t + 49 + 7(16y^2 + 24y + 9) = 112$$

$$\Leftrightarrow (4t - 7)^2 + 7(4y + 3)^2 = 112.$$

$$\text{Suy ra } 7(4y + 3)^2 < 112.$$

$$\Rightarrow -4 < 4y + 3 < 4 \Rightarrow -7 < 4y < 1.$$

Vì y là số nguyên nên từ trên suy ra y chỉ có thể là -1 hoặc 0 .

• Nếu $y = -1$ thay vào PT (2) được $(2x - 1)^2 = 7x$. Ta có $x \in \mathbb{N}$, và $(x, 2x - 1) = 1$ nên chỉ có thể $x = 1$, nhưng $x = 1$ không thỏa mãn PT này.

• Nếu $y = 0$ thay vào PT (2) được $4(x - 1)^2 - 7(x - 1) = 0$ nên $(x - 1)(4x - 11) = 0$.

PT có nghiệm nguyên $x = 1$. Thử thấy $(x, y) = (1, 0)$ thỏa mãn PT (1) nên là nghiệm duy nhất của PT (1).

Cách 2. Nếu $y = -1$ xét như trên dẫn đến PT (1) vô nghiệm.

Nếu $y \leq -2$ hoặc $y \geq 0$ thì

$$2y^2 + 3y = y(2y + 3) \geq 0.$$

Từ PT (3) suy ra $2t^2 - 7t \leq 0$ nên $t(2t - 7) \leq 0$.

Do đó $0 \leq t \leq 3$.

Mặt khác theo PT (3) thì t phải chia hết cho 7 nên $t = 0 \Rightarrow y(2y + 3) = 0 \Rightarrow y = 0$. Thử thấy $(x, y) = (1, 0)$ thỏa mãn PT (1).

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn giải bằng cách xét điều kiện để phương trình bậc hai theo ẩn x (hoặc ẩn y) có nghiệm. Hai cách giải nêu trên không cần sử dụng đến khái niệm căn thức ở lớp 9 mà chỉ cần biến đổi biểu thức, biết hạn chế miền giá trị của biểu thức và xét dấu của biểu thức bậc nhất.

2) Các bạn sau có lời giải gọn:

Phú Thọ: Nguyễn Hoàng Hải, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vinh Phúc:** Vũ Thị Kim Oanh, 8A, Trần Bá Trung, 9A1, THCS Yên Lạc; **Hà Tây:** Nguyễn Lệnh Dũng, 7A, THCS Nguyễn Văn Huyền, Hoài Đức, Nguyễn Trung Nghĩa, 8C, Cấn Mạnh Hùng, 9C, THCS Thạch Thất; **Bác Ninh:** Nguyễn Hồng Vân, 7D, THCS Tam Sơn, Từ Sơn, Nguyễn Thị Luyến, 8B, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình; **Bắc Giang:** Thân Văn Chính, 7A, THCS Nguyễn Hồng, Tân Yên; **Hải Dương:** Phan Ngọc Hiếu, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, TP Hải Dương, Nguyễn Tiến Thành, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hà Nam:** Nguyễn Việt Dũng, 9C, THCS Nam Cao, Lý Nhân; **Thanh Hóa:** Nguyễn Cao Tuấn, 8B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Hoàng Ngọc Quyết, 9D, Nguyễn Thị Hồng, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Dương Quốc Việt, 9E, THCS Trần Mai Ninh, Trình Quang Thanh, 9B, THCS Hàm Rồng, TP Thanh Hóa; **Nghe An:** Dương Phúc Thuồng, 9A, THCS Thuận Sơn, Nguyễn Anh Tú, Nguyễn Mạnh Tuấn, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Luật, 9B, trường cấp 2 Sơn Hồng, Hương Sơn.

VIỆT HẢI

Bài T4/338. Giải phương trình

$$\sqrt{5x-1} + \sqrt[3]{9-x} = 2x^2 + 3x - 1 \quad (1)$$

Lời giải. Cách 1. (Của bạn Dương Phúc Thuồng, 9A, THCS Thuận Sơn, Đô Lương, Nghệ An).

Điều kiện: $5x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{5x-1} - 2) + (\sqrt[3]{9-x} - 2) = 2x^2 + 3x - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2} + \frac{1-x}{\sqrt[3]{(9-x)^2} + 2\sqrt[3]{9-x} + 4}$$

$$= (x-1)(2x+5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{5}{\sqrt{5x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+2\sqrt[3]{9-x}+4} + 2x+5 \end{cases} \quad (2)$$

Đặt vế trái của (2) là T_2 , vế phải của (2) là P_2 .

Do $x \geq \frac{1}{5}$ nên $T_2 \leq \frac{5}{2}$.

Áp dụng $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0$,
ta có $P_2 > 2 \cdot \frac{1}{5} + 5 = \frac{27}{5}$.

Suy ra PT (2) vô nghiệm.

Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Cách 2. (Của bạn *Trần Anh Ngọc*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**).

Đặt vế trái của (1) là T_1 vế phải của (1) là P_1 .

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{5}$. Xét các trường hợp:

• Với $x > 1$ thì $\sqrt[3]{9-x} < 2 < \sqrt{5x-1}$. Khi đó:

$$T_1 < 2\sqrt{5x-1} < 5x-1 < 5x-1 + 2x(x-1) \\ = 2x^2 + 3x - 1 = P_1.$$

• Với $\frac{1}{5} \leq x < 1$ thì $\sqrt[3]{9-x} > 2 > \sqrt{5x-1}$.

Khi đó:

$$T_1 > 2\sqrt{5x-1} > 5x-1 > 5x-1 + 2x(x-1) \\ = 2x^2 + 3x - 1 = P_1.$$

• Với $x = 1$ thì $T_1 = P_1 = 4$.

Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Nhận xét: 1) Đa số các bạn đều giải theo hai cách: biến đổi tương đương (cách 1) và đánh giá giá trị hai vế của PT (cách 2 hoặc một số cách đánh giá khác). Vẫn còn một số bạn nhầm lẫn khi tính toán.

2) Các bạn khác có lời giải tốt là:

Bắc Ninh: Nguyễn Hồng Vân, 7D, THCS Tam Sơn, Từ Sơn; **Nam Định:** Đỗ Thị Thu, 9A, THCS Hải Hậu, Hải Hậu; **Hà Nội:** Đỗ Như Milan, 9A1, THCS Chu Văn An, Hà Nội; **Hải Phòng:** Phạm Thu Hằng, 9B, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Bảo; **Thanh Hóa:** Nguyễn Trọng Hòa, 8A, THCS Trung Sơn, Sầm Sơn, Nguyễn Cao Tuấn, 8B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Đặng Duy Bình, 9C, THCS Diễn Lộc, Diễn Châu; Nguyễn Đức Công, 9D, Nguyễn Thị Thanh Xuân, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Bình:** Phan Hồng Sơn, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Hoàn Lão, Bố Trạch; **Khánh Hòa:** Võ Thái Thông, 9/4 THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/338. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qd} + \frac{c}{pd+qa} + \frac{d}{pa+qb} \geq \frac{4}{p+q}$$

trong đó a, b, c, d, p, q là các số dương và $p \geq q$.

Bất đẳng thức trên còn đúng không với $p < q$?

Lời giải. a) Đặt vế trái của bất đẳng thức (BĐT) cần chứng minh là A.

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski ta có

$$\left(\sqrt{\frac{a}{pb+qc}} \sqrt{a(pb+qc)} + \sqrt{\frac{b}{pc+qd}} \sqrt{b(pc+qd)} \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{c}{pd+qa}} \sqrt{c(pd+qa)} + \sqrt{\frac{d}{pa+qb}} \sqrt{d(pa+qb)} \right)^2$$

$$\leq A[a(pb+qc) + b(pc+qd) + c(pd+qa) + d(pa+qb)]$$

Suy ra:

$$A \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{p(ab+bc+cd+da) + 2q(ac+bd)} \quad (1)$$

Mặt khác, do $p \geq q > 0$ nên

$$(p+q)(a+b+c+d)^2 - 4[p(ab+bc+cd+da) + 2q(ac+bd)] \\ = p(a-b+c-d)^2 + q(a+b+c+d)^2 - 8q(ac+bd) \\ \geq q(a-b+c-d)^2 + q(a+b+c+d)^2 - 8q(ac+bd) \\ = q[2(a^2+b^2+c^2+d^2) - 4(ac+bd)] \\ = 2q[(a-c)^2 + (b-d)^2] \geq 0.$$

Suy ra

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{p(ab+bc+cd+da) + 2q(ac+bd)} \geq \frac{4}{p+q} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra BĐT cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a-c=0 \\ b-d=0 \\ \frac{1}{pb+qc} = \frac{1}{pc+qd} = \frac{1}{pd+qa} = \frac{1}{pa+qb} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=d \\ a=c; b=d; p=q \end{cases}$$

b) Khi $p < q$, chọn $a = 1, b = 2, c = 1, d = 2$,

$$p = 1, q = 2 \text{ thì } A = \frac{13}{10}; \frac{4}{p+q} = \frac{4}{3} \text{ và } \frac{13}{10} < \frac{4}{3}.$$

Lúc đó BĐT trên không còn đúng nữa.

Nhận xét. a) Đa số các bạn giải bài này đã nhầm lẫn khi coi vai trò của a, b, c, d là như nhau và giả sử $a \leq b \leq c \leq d$.

Một số bạn còn đưa ra nhận xét sai là vai trò của p, q như nhau nên khi $p < q$ thì BĐT vẫn đúng.

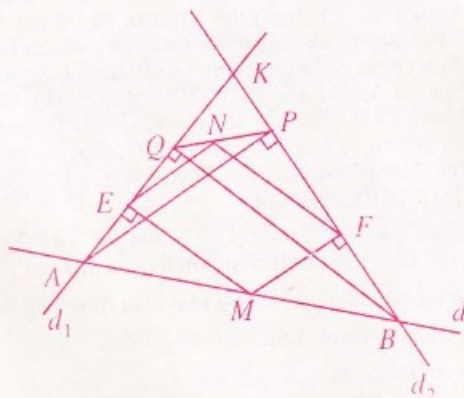
b) Hai bạn sau đây có lời giải tốt: **Đak Lak:** Võ Văn Tuấn, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Hà Nam:** Nguyễn Việt Dũng, 9C, THCS Nam Cao, Lý Nhân.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/338. Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm K và một điểm M nằm ngoài d_1, d_2 . Một đường thẳng d đi qua M cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B (khác K). Kẻ $AP \perp d_2$ tại P , kẻ $BQ \perp d_1$ tại Q . Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua M .

Lời giải. (Của bạn Phạm Thanh Nga, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành, Hải Dương).

Khi $d_1 \perp d_2$ thì P, Q trùng với điểm K cố định. Xét d_1 không vuông góc với d_2 . Kẻ $ME \perp d_1$ tại $E, MF \perp d_2$ tại F . Qua E , kẻ $EN \parallel AP$, cắt đường thẳng PQ tại N (xem hình vẽ).



Vì $AP \parallel MF$ nên $EN \parallel MF$ (1)

Mặt khác, theo định lý Thalès, ta có:

$$\frac{MF}{AP} = \frac{MB}{AB} \quad (\text{vì } MF \parallel AP)$$

$$\frac{MB}{AB} = \frac{EQ}{AQ} \quad (\text{vì } ME \parallel BQ)$$

$$\frac{EQ}{AQ} = \frac{EN}{AP} \quad (\text{vì } EN \parallel AP).$$

Suy ra $MF = EN$ (2)

Từ (1), (2) suy ra tứ giác $MENF$ là hình bình hành. Vì M, E, F cố định nên N cố định.

Vậy PQ luôn đi qua điểm cố định N khi đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua M .

Nhận xét. 1) Tất cả các bạn đều giải đúng, tuy nhiên, một số lời giải khá dài.

2) Bạn **Đỗ Thị Thu**, 9A, THCS Hải Hậu, Nam Định còn đưa ra một lời giải khác, khá hay nhờ nhận xét $\triangle KAB \sim \triangle KPQ$.

3) Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt:

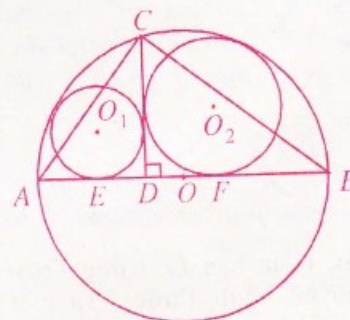
TP Hồ Chí Minh: Cao Lưu Quang, 9₁, THCS Nguyễn Văn Tố, Q.10; **Vĩnh Phúc:** Trần Anh Trung, 9A, THCS Ngô Gia Tự, Mê Linh; **Hải Dương:** Đặng Minh Toàn, Hoàng Tiến Đạt, 9A₁, THCS Ngô Gia Tự, TP Hải Dương; **Phú Thọ:** Nguyễn Hoàng Hải, 9A₃, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** Dương Phúc Thương, 9A, THCS Thuận Sơn, Đô Lương; **Quảng Nam:** Phan Thị Thu Trang, 10A₁, THPT Nguyễn Huy Hiệu, Vĩnh Điện, Điện Bàn; **Bắc Giang:** Hà Khương Duy, 9B, THCS Bó Hạ, Yên Thế.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T7/338. Cho tam giác ABC vuông tại C với đường cao CD và có diện tích S . Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB . Hai đường tròn tâm O_1 và O_2 tiếp xúc với đoạn AB lần lượt tại E và F , tiếp xúc với đoạn CD và tiếp xúc với đường tròn tâm O . Chứng minh rằng

$$S = \frac{AD \times BD \times AE \times BF}{2 \times ED \times FD}$$

Lời giải. Kí hiệu (O) chỉ đường tròn tâm O , gọi R, R_1, R_2 tương ứng là bán kính của các đường tròn $(O), (O_1), (O_2)$.



Ta có $OO_2^2 = OF^2 + O_2F^2$. Từ đó suy ra lần lượt các đẳng thức:

$$(R - R_2)^2 = (AD + R_2 - R)^2 + R_2^2$$

$$\Rightarrow 2AD \times R = (AD + R_2)^2$$

$$\Rightarrow AD \times AB = AF^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = AF^2 \quad (\text{vì } AD \times AB = AC^2)$$

$$\Rightarrow AC = AF.$$

Suy ra $\widehat{ACF} = \widehat{AFC}$. Mà $\widehat{ACF} + \widehat{BCF} = 90^\circ$
và $\widehat{AFC} + \widehat{DCF} = 90^\circ$ nên $\widehat{BCF} = \widehat{DCF}$.

$$\text{Nên } \frac{FB}{FD} = \frac{CB}{CD} \quad (3)$$

$$\text{Tương tự } \frac{EA}{ED} = \frac{CA}{CD} \text{ suy ra}$$

$$\frac{EA}{ED} \times \frac{FB}{FD} = \frac{CA \times CB}{CD^2}$$

$$\text{Từ đó } S = \frac{1}{2} CA \times CB = \frac{1}{2} CD^2 \times \frac{CA \times CB}{CD^2}$$

$$= \frac{AD \times BD \times AE \times BF}{2ED \times FD} \quad (\text{Do } CD^2 = AD \times BD).$$

$$\text{Vậy } S = \frac{AD \times BD \times AE \times BF}{2ED \times FD}$$

Nhận xét. 1) Có lẽ nhiều bạn thấy có ba đường tròn nên ngại làm bài này vì vậy số bài giải không nhiều.

2) Giải tốt bài này có các bạn:

Hải Dương: Hoàng Tiến Đạt, 9A1, THCS Ngô Gia Tự; **Vĩnh Phúc:** Trần Anh Trung, 9A, THCS Tự Lập, Mê Linh; **Hà Tây:** Nguyễn Thế Tâm, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hà Nội:** Đỗ Như Milan, 9A1, THCS Chu Văn An; **Quảng Nam:** Phan Thị Thu Trang, 10A1, THPT Nguyễn Duy Hiệu, TT Vĩnh Điện, Điện Bàn; **Khánh Hòa:** Võ Thái Thống, 9/4 trường Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk, Đoàn Nhật Minh, 9E, THCS Chu Văn An, Eakar.

VŨ KIM THUY

Bài T8/338. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương n sao cho tồn tại đa thức $P(x)$ bậc n với hệ số nguyên và thỏa mãn các điều kiện:

$$a) P(0) = 0, P(1) = 1;$$

b) Với số nguyên dương m bất kỳ thì số dư trong phép chia $P(m)$ cho 2003 là 0 hoặc 1.

Lời giải. (Của bạn Lê Công Truyền, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc). Ta giải bài toán tổng quát với số nguyên tố lẻ p thay cho số 2003.

Giả sử $P(x)$ là đa thức bậc n thỏa mãn các điều kiện đã nêu. Ta chứng minh $n \geq p - 1$.

Giả sử $n \leq p - 2$. Theo công thức nội suy Lagrange thì

$$P(x) = \sum_{k=0}^{p-2} P(k) \left(\frac{\prod_{i=0, i \neq k}^{p-2} (x-i)}{k!(-1)^{p-k}(p-2-k)!} \right)$$

$$\text{Suy ra } P(p-1) = \sum_{k=0}^{p-2} P(k)(-1)^{p-k} C_{p-1}^k \quad (1)$$

Do p là số nguyên tố nên dễ chứng minh được $C_{p-1}^k \equiv (-1)^k \pmod{p}$ với $k = 0, 1, \dots, p-2$.

$$\text{Do } p \text{ lẻ, từ (1) suy ra } \sum_{k=0}^{p-1} P(k) \equiv 0 \pmod{p} \quad (2)$$

Gọi $S = \{0 \leq k \leq p-1 : P(k) \equiv 1 \pmod{p}\}$ và số phần tử của S là h .

Theo điều kiện a) và b) của đề bài thì $1 \leq h \leq p-1$ nhưng từ (2) lại có $h \equiv 0 \pmod{p}$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ giả sử $n \leq p-2$ là sai, nghĩa là phải có $n \geq p-1$.

Khi $n = p-1$. Xét đa thức $P(x) = x^{p-1}$.

Rõ ràng $P(0) = 0, P(1) = 1$.

$P(x) \equiv 0 \pmod{p}$, với mọi $x \in \mathbb{Z}, x \equiv 0 \pmod{p}$.

$P(x) \equiv 1 \pmod{p}$, với mọi $x \in \mathbb{Z}, x \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là $p-1$. Bài T8/338 là trường hợp riêng của bài trên khi $p = 2003$ và giá trị nhỏ nhất của n lúc này là 2002.

Nhận xét. 1) Do sơ suất nên điều kiện $P(0) = 0$ đã in nhầm thành $P(0) = 1$ thành thử bài toán đã trở nên tầm thường. Tuy nhiên, nhiều bạn đã tự sửa điều kiện trước khi có đính chính và đã giải đúng: Trần Đình Cường, 11 Toán, Nguyễn Nhật Linh, 10T, THPT chuyên Hà Tĩnh, Phạm Thành Thái, Vũ Xuân Dương, 11T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương, Phan Tiến Dũng, 10T, THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên, Đào Bùi Kiên Trung, 11A1 Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.

2) Với điều kiện $P(0) = P(1) = 1$ bạn Bùi Văn Ngọc, 12A, THPT Chu Văn An, Lạng Sơn đã giải như sau:

Giả sử n_0 là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện bài toán. Với $n_0 = 1$ thì

$$P(x) = ax + b \quad (a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0).$$

Do $P(0) = 1, P(1) = 1$, suy ra $b = 1, a+b = 1$ nên $a = 0, b = 1$ (loại).

Vậy $n_0 \geq 2$. Chọn đa thức $P(x) = 2003x(x-1) + 1$ ta thấy đa thức này thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Kết luận $n_0 = 2$.

3) Bạn Lê Công Truyền đã đề nghị thêm vào điều kiện a) (giữ nguyên điều kiện b)) khiến bài toán trở nên hay hơn như sau:

a) $P(0) = P(1) = 1$ và tồn tại ít nhất một số tự nhiên a để $P(a)$ chia hết cho 2003.

Với p là số nguyên tố lẻ và nếu giả sử $n \leq p-2$, trong lời giải nêu trên khi có công thức (2) thì sử dụng điều kiện (a') cũng dẫn tới mâu thuẫn. Với $n = p-1$ thì đa thức

$$P(x) = \frac{x^p + 1}{x + 1} = x^{p-1} - x^{p-2} + \dots + x^2 - x + 1$$

thỏa mãn $P(0) = P(1) = 1$.

Với mọi $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ ta có

$$P(mp - 1) \equiv P(-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

$P(mp + r) \equiv P(r) \equiv 1 \pmod{p}$ với mọi $r = 0, 1, \dots, p - 2$ vì theo định lý nhỏ Fermat thì

$$P(r) - 1 = \frac{r^p - r}{r + 1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Vậy $P(x)$ thỏa mãn điều kiện a' và b).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/338. Tìm tất cả các hàm số

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^2 + f(y)) = y + x f(x) \text{ với mọi số thực } x, y.$$

Lời giải. (Của đa số các bạn)

Nhận xét rằng, nếu $f(x)$ là hàm số thỏa mãn bài toán thì $f(x)$ là một đơn ánh. Thật vậy, giả sử $f(x) = f(y)$ thì

$$x + x f(x) = f(x^2 + f(x)) = f(x^2 + f(y)) = y + x f(x)$$

nên suy ra $x = y$.

Đặt $f(0) = a$. Từ giả thiết, ứng với $x = 0$, ta có

$$f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

nên $f(a) = f(f(0)) = 0$ và ứng với $x = 0$, $y = 0$ ta có $f(a^2 + a) = a f(a) = 0$.

Từ đây suy ra $a^2 + a = f(f(a^2 + a)) = f(0) = a$, nên $a = 0$, tức $f(0) = 0$.

Vậy nên, từ giả thiết và (1) ta thu được

$$f(x^2) = f(x^2 + f(0)) = 0 + x f(x) = 0 + f(x) f(f(x))$$

$$= f[(f(x))^2 + f(0)] = f[(f(x))^2], \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } f(x^2) = f[(f(x))^2], \forall x \in \mathbb{R}$$

và do $f(x)$ là đơn ánh nên

$$[f(x)]^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Tiếp theo, ta chứng minh rằng xảy ra chỉ một trong hai khả năng: hoặc $f(x) \equiv x$ hoặc $f(x) \equiv -x$.

Thật vậy, giả sử ứng với $x_0 \neq 0$ nào đó, ta có $f(x_0) = -x_0$. Khi đó, nếu tồn tại giá trị $y \neq 0$ để $f(y) = y$, thì

$$f(y + x_0^2) = f(x_0^2 + y) = f(x_0^2 + f(y)) = y - x_0^2,$$

mâu thuẫn với (2) do không thể xảy ra đẳng thức $(y + x_0^2)^2 = (y - x_0^2)^2$ với $x_0 \neq 0$, $y \neq 0$.

Vậy nên $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại, ta thấy hai hàm số này thỏa mãn điều kiện bài ra.

Nhận xét. Đây là một bài toán thuộc loại trung bình và thuộc dạng quen thuộc nên có rất nhiều bạn tham gia giải. Đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình

bày ở trên, tuy nhiên một số bạn lập luận chưa thật chính xác.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/338. Giả sử (F_n) ($n = 1, 2, \dots$) là dãy Fibonacci ($F_1 = F_2 = 1$; $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với $n = 2, 3, 4, \dots$). Chứng minh rằng nếu $a \neq -\frac{F_{n+1}}{F_n}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$ thì dãy số (x_n) , trong đó $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), là xác định và nó có giới hạn hữu hạn khi n tăng lên vô hạn. Tìm giới hạn đó.

Lời giải. (Của các bạn Hoàng Vũ Hạnh, 11T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa; Đỗ Hoàng Sơn, 12A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Hà Nội).

Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_m$ đã được xác định. Khi đó x_{m+1} được xác định khi $x_m \neq -1$.

$$\text{Nếu } x_m = -1 \text{ thì do } x_m = \frac{1}{1+x_{m-1}} \text{ nên } x_{m-1} = -2.$$

$$\text{Ta viết } x_m = -\frac{F_2}{F_1}, x_{m-1} = -\frac{F_3}{F_2}.$$

$$\text{Giả sử } x_{m-i} = -\frac{F_{i+2}}{F_{i+1}}, \text{ với } i \text{ nào đó, } 0 \leq i \leq m-2.$$

$$\text{Vì } x_{m-i} = \frac{1}{1+x_{m-i-1}} \text{ nên}$$

$$x_{m-i-1} = \frac{1}{x_{m-i}} - 1 = -\frac{F_{i+1}}{F_{i+2}} - 1 = -\frac{F_{i+3}}{F_{i+2}}.$$

$$\text{Khi đó } x_1 = -\frac{F_{m+1}}{F_m}. \text{ Mâu thuẫn với giả thiết}$$

$$x_1 \neq -\frac{F_{m+1}}{F_m}. \text{ Như vậy } (x_n) \text{ là dãy số xác định.}$$

$$\text{Phương trình } x = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \text{ có}$$

$$\text{hai nghiệm } u = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, v = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: $x_1 = v$. Khi đó $x_n = x_1, \forall n \geq 1$.

$$\text{Do đó } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\text{Trường hợp 2: } x_1 \neq v. \text{ Chú ý } \frac{1}{1+x_n} = v$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{1-v}{v} \Leftrightarrow x_n = v. \text{ Do đó } x_n \neq v, \forall n \geq 1.$$

Đặt $z_n = \frac{x_n - u}{x_n - v}$, ta có

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{x_{n+1} - u}{x_{n+1} - v} = \frac{\frac{1}{1+x_n} - u}{\frac{1}{1+x_n} - v} = \\ &= \frac{(1-u) - ux_n}{(1-v) - vx_n} = \frac{u^2 - ux_n}{v^2 - vx_n} = \frac{u}{v} \cdot \frac{x_n - u}{x_n - v} = \frac{u}{v} \cdot z_n. \end{aligned}$$

Từ đó có $z_{n+1} = \left(\frac{u}{v}\right)^n \cdot z_1$ nên $z_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$ (vì $\left|\frac{u}{v}\right| < 1$).

Từ $z_n = \frac{x_n - u}{x_n - v}$ suy ra $x_n = \frac{u - vz_n}{1 - z_n}$ dẫn tới u khi $n \rightarrow +\infty$ (do $z_n \rightarrow 0$).

Tức là trong trường hợp này $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Nhận xét. Lời giải của rất nhiều bạn phải dùng đến công thức tổng quát của dãy số Fibonacci. Cách giải trên (xét $z_n = \frac{x_n - u}{x_n - v}$) khá mới mẻ với đa số bạn đọc.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/338. Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ với diện tích S . Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C. Chứng minh rằng

$$S \leq \frac{a^2 m_a^2 + b^2 m_b^2 + c^2 m_c^2}{\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. BĐT (1) cần chứng minh tương đương với BĐT sau:

$$4(a^2 m_a^2 + b^2 m_b^2 + c^2 m_c^2) \geq 4S\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (2)$$

Sử dụng công thức đường trung tuyến:

$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ và với m_b, m_c ; công thức tính diện tích tam giác ABC:

$$16S^2 = 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4), \text{ ta được}$$

$$4(a^2 m_a^2 + b^2 m_b^2 + c^2 m_c^2) = 4v - u,$$

$$16S^2 = 2v - u, (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2v + u,$$

trong đó ta đã đặt:

$$a^4 + b^4 + c^4 = u \text{ và } a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 = v.$$

Bình phương hai vế của (2) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow (4v - u)^2 \geq 3(2v - u)(2v + u)$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2 \geq 0.$$

Vậy BĐT (1) đã được chứng minh.

Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $u = v$, tức là: $a^4 + b^4 + c^4 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là đều.}$$

Nhận xét. 1) Số bạn tham gia giải khá đông và đều giải đúng. Tuy nhiên, lời giải của đa số các bạn còn dài dòng hoặc sử dụng quá nhiều kiến thức không cần thiết trong khi như chúng ta thấy qua lời giải trên đây thì chỉ sử dụng hai công thức hình học và một BĐT đại số cơ bản nhất $(u-v)^2 \geq 0$. Với bài toán trên có nhiều bạn chưa biến đổi gì cả đã vội vàng sử dụng BĐT sau đây về diện tích: $4S\sqrt{3} \leq a^2 + b^2 + c^2$. Thậm chí, cũng nhiều bạn sử dụng đến cả BĐT Cauchy, Trêbusép hoặc lượng giác hóa các hệ thức về độ dài các cạnh và diện tích tam giác. Hơn thế nữa, có bạn còn huy động đến cả việc khảo sát hàm số mới chứng minh được một BĐT tương đối đơn giản thì thật là kì quặc!

2) Các bạn sau đây có lời giải gọn gàng hơn cả:

Hà Nội: Phạm Hồng Sơn, 11A1, THPT chuyên Toán - Tin, ĐHSPT Hà Nội; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Cẩn, 9A6 THCS Thị trấn Chờ, Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Ngọc Đại, 10A1, Ngô Thị Lệ Hằng, 10A9, Phùng Đình Phúc, Nguyễn Văn Ngọc, Nguyễn Xuân Thọ, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Trần Văn Phong, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hải Dương:** Vũ Xuân Dương, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** Phan Tiến Dũng, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Nguyễn Trung Kiên, Hoàng Đức Ý, 10 Toán, THPT Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** Trần Vĩnh Phúc, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên - Huế:** Trần Nguyễn Tuấn Minh, 11 Toán, THPT Quốc học Huế; **Phú Yên:** Phan Thành Việt, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bến Tre:** Lê Văn Chánh, 11T, THPT Bến Tre.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T12/338. Gọi R và r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện gần đều ABCD ($AB = CD, AC = BD, BC = AD$).

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}} > \frac{3R}{2r}$$

trong đó A, B, C là các góc của tam giác ABC.

Lời giải. (Của bạn Hoàng Khắc Hiếu, 12A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu, Nghệ An).

Với giả thiết của bài toán trên chúng ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$2\left(\frac{R}{r}\right) < \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}} \leq \sqrt{6}\left(\frac{R}{r}\right) (*)$$

Thật vậy, gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, (O_1, R_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Đặt $a = BC$, $b = BD$, $c = CD$. Vì $ABCD$ là tứ diện gần đều nên O cũng là trọng tâm, tâm mặt cầu nội tiếp của tứ diện đó, đồng thời các mặt của nó là các tam giác nhọn bằng nhau (bạn đọc tự chứng minh).

Từ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, dẫn đến

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} \quad (1)$$

Mặt khác, sử dụng định lý Pythagore cho tam giác OO_1B vuông tại O_1 ta có: $r^2 = R^2 - R_1^2$ (2).

Từ (1), (2) ta được
$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2 - 8R_1^2} \quad (3)$$

Vì $b+c > a$ nên $(b+c)a > a^2$. Tương tự có

$$(c+a)b > b^2; (a+b)c > c^2, \text{ suy ra}$$

$$2(ab+bc+ca) > a^2 + b^2 + c^2, \text{ hay}$$

$$(a+b+c)^2 > 2(a^2 + b^2 + c^2) \quad (4)$$

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski ta có

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad (5)$$

$$\text{Để ý rằng } a^2 + b^2 + c^2 - 8R_1^2 =$$

$$= 4R_1^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2)$$

$$= 8R_1^2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C > 0$$

nên từ (4), (5) ta suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2 - 8R_1^2} < \frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 - 8R_1^2} \\ & \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2 - 8R_1^2} \\ & \Leftrightarrow \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2 - 8R_1^2} < \frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} \\ & \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2 - 8R_1^2} \quad (6) \end{aligned}$$

Từ (3) và (6) ta chứng minh được BĐT (*).

Nhận xét. 1) Bài T12/338 còn có thể giải bằng cách sử dụng kết quả sau: Giả sử a_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) là độ dài các cạnh của một khối tứ diện có chứa tâm O mặt cầu ngoại tiếp nó thì ta có BĐT $\sum_{i=1}^6 a_i > 6R$ (trong đó R là bán kính của mặt cầu).

2) Các bạn sau có lời giải gọn:

Hà Nội: Nguyễn Thành Phúc, 12A1 Tin, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Vinh Phúc:** Vũ Văn Quang, 12A1, Nguyễn Xuân Thọ, 11A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Hà Tây:** Nguyễn Quang Phương, 10T3, Trịnh Ngọc Tú, 11 Toán, THPT Nguyễn Huệ, TX. Hà Đông; **Hưng Yên:** Phan Tiến Dũng, 10 Toán, Nguyễn Văn Thọ, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** Vũ Xuân Dương, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP Hải Dương; **Thanh Hóa:** Dương Anh Tuấn, 11A4, THPT Hậu Lộc II, Hậu Lộc; **Nghe An:** Bùi Hoàng Vượng, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Hà Tĩnh:** Trần Văn Cường, 11A1, THPT Nguyễn Văn Trỗi, Can Lộc; **Phú Yên:** Trần Hồ Thanh Phú, 10 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP Tuy Hòa; **Bạc Liêu:** Lê Trung, 12T, THPT chuyên Bạc Liêu, TX. Bạc Liêu; **Đông Nai:** Hà Xuân Thiên Hương, 12 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP Biên Hòa.

HỒ QUANG VINH

Bài L1/338. Trong buồng thang máy đang đi lên nhanh dần đều với gia tốc $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$ có gắn một ròng rọc, khối lượng không đáng kể. Một sợi dây nhẹ, không giãn vắt qua ròng rọc, một đầu dây treo vật $m = 40 \text{ kg}$, đầu kia có một người nặng $M = 40 \text{ kg}$ trèo lên với gia tốc $a = 0,5 \text{ m/s}^2$ đối với dây. Ở thời điểm $t_0 = 0$ vật cách sàn thang máy $0,5 \text{ m}$ và đứng yên đối với thang máy. Khi $t = 1 \text{ s}$ thì dây treo vật bị đứt đột ngột, vật rơi xuống tấm kim loại mỏng đặt ở sàn thang máy. Tính nhiệt độ tăng lên của tấm kim loại do va chạm. Giả sử khi va chạm, toàn bộ động năng của vật đều biến thành nhiệt truyền cho tấm kim loại. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$, nhiệt dung của kim loại là 300 J/K .

Lời giải. Ở thời điểm $t_0 = 0$ vật đứng yên đối với thang máy, người chưa trèo lên. Khi người bắt đầu trèo lên, người tác dụng vào dây lực $\vec{F}$ và gây ra lực căng T kéo vật lên với $T = F$. Chọn hệ quy chiếu gắn với thang máy, trục Ox hướng lên và gọi a_1 là gia tốc của vật đối với thang. Áp dụng định luật II Newton cho vật và người:

$$-mg - ma_0 + T = ma_1 \quad (1)$$

$$-Mg - Ma_0 + T = M(a - a_1) \quad (2)$$

Với $M = m$, từ (1) và (2) tìm được:

$$a_1 = \frac{Ma}{M+m} = 0,25 \text{ m/s}^2.$$

$$\text{Khi dây đứt vật cách sàn } h = 0,5 + \frac{a_1 t^2}{2} = 0,625 \text{ m}$$

và vật có vận tốc $v = a_1 t = 0,25 \text{ m/s}^2$.

Kí hiệu ΔT là độ tăng nhiệt độ của tấm kim loại khi vật va chạm, áp dụng định luật bảo toàn

năng lượng: $C \Delta T = m(g + a_0)h + \frac{mv^2}{2}$, với C là nhiệt dung tấm kim loại. Từ đó: $\Delta T \approx 0,92^\circ\text{C}$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng:

Quảng Nam: Nguyễn Thanh Bình, 11/2, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Bình Định:** Lý Viễn Trường, 11A1, THPT Phù Cát I; **Vĩnh Phúc:** Vũ Ngọc Quang, 12A3, Hoàng Mạnh Thắng, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Tuyên Quang:** Lưu Hồng Quân, 11B1, THPT chuyên Tuyên Quang; **Quảng Ngãi:** Phạm Thị Lê Hương, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Hải Dương:** Lê Hoàng Dũng, 12 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** Phạm Hải Luân, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Nguyễn Tài Linh, 10I, THPT chuyên Lam Sơn, Lê Thị Văn Anh, 11A1, THPT Đông Sơn I.

MAI ANH

Bài L2/338. Cho hệ gồm N lò xo nhẹ và $(N-1)$ vật nhỏ ghép nối tiếp như hình vẽ (với $N \geq 2$). Các lò xo có cùng chiều dài tự nhiên l_0 và độ cứng K ; các vật nhỏ đều có khối lượng m . Biết rằng các vật đứng cân bằng và các lò xo thẳng đứng. A, B cố định và khoảng cách $AB = N.l_0$.

a) Tìm độ biến dạng của lò xo thứ n nào đó.

b) Tìm điều kiện để lò xo thứ n không biến dạng.

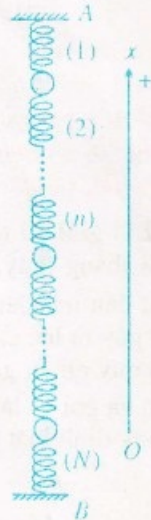
Lời giải. a) Gọi Δl_n là độ biến dạng của lò xo thứ n nào đó. Ta quy ước: $\Delta l_n > 0$ khi lò xo đó giãn, còn $\Delta l_n < 0$ khi lò xo đó nén. Chọn trục Ox như hình vẽ. Xét điều kiện cân bằng của $(N-1)$ vật, ta có hệ phương trình (1) sau:

$$\begin{cases} K\Delta l_1 - K\Delta l_2 - P = 0 \\ K\Delta l_2 - K\Delta l_3 - P = 0 \\ \dots\dots\dots \\ K\Delta l_n - K\Delta l_{n+1} - P = 0 \\ \dots\dots\dots \\ K\Delta l_{N-1} - K\Delta l_N - P = 0 \end{cases}$$

Ta có: $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_N = AB - N.l_0 = 0$ (2)

Hệ (1) được biến đổi thành hệ (3):

$$\begin{cases} K\Delta l_2 = K\Delta l_1 - P \\ K\Delta l_3 = K\Delta l_2 - P = K\Delta l_1 - 2P \\ \dots\dots\dots \\ K\Delta l_n = K\Delta l_{n-1} - P = K\Delta l_1 - (n-1)P \\ \dots\dots\dots \\ K\Delta l_N = K\Delta l_{N-1} - P = K\Delta l_1 - (N-1)P \end{cases}$$



Cộng từng vế các phương trình của hệ, ta được:

$$K(\Delta l_2 + \dots + \Delta l_N) = (N-1)K\Delta l_1 - [1+2+\dots+(N-1)]P.$$

Suy ra

$$K(\Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_N) = N.K\Delta l_1 - \frac{N(N-1)P}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện (2), ta tìm được:

$$N.K\Delta l_1 - \frac{N(N-1)P}{2} = 0 \text{ hay } \Delta l_1 = \frac{(N-1)P}{2K} \quad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta có

$$\Delta l_n = \frac{(N-2n+1)P}{2K} \text{ hay } \Delta l_n = \frac{(N-2n+1)mg}{2K}.$$

Ở đây ta đã thay $P=mg$ với g là gia tốc trọng trường.

b) Để lò xo thứ n không biến dạng thì $\Delta l_n = 0$.

từ kết quả ở câu a), ta tìm được: $n = \frac{N+1}{2}$.

Vì n là số tự nhiên, nên N phải là số lẻ ($N = 3, 5, \dots$). Khi đó, lò xo nằm chính giữa không biến dạng.

Nhận xét: 1) Một số bạn đã giải được câu a), nhưng rất tiếc lại giải sai câu b) khi tìm điều kiện để lò xo thứ n không biến dạng; hoặc không đưa ra được điều kiện N phải là số lẻ ($N = 3, 5, \dots$).

2) Một số bạn sau có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Vũ Quang Hoà, 12A2, Nguyễn Minh Khương, 11A3, Cù Quốc Cường, 11A3, Vũ Ngọc Quang, 12A3, Trần Ngọc Linh, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Đỗ Viết Dũng, 12A1, THPT Bán công Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; **Hải Phòng:** Phạm Tuấn Hiệp, 11 Lí; THPTNK Trần Phú; **TP. Hồ Chí Minh:** Dương Quảng Diên, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** Lê Hoàng Dũng, 12 Lí, Nguyễn Việt Anh, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hà Tĩnh:** Hồ Thái Sơn, 12A, THPT Lí Tự Trọng, Thạch Hà; **Thanh Hoá:** Nguyễn Tài Linh, lớp 10I, Hoàng Anh, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; **Bắc Ninh:** Nguyễn Công Đường, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Yên Bái:** Phan Văn Ân, 11A, THPT Trần Nhật Duật, Yên Bình; **Tiền Giang:** Ngô Hải Đăng, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang, Nguyễn Vĩnh Phúc, 12A18, THPT Chợ Gạo; **Hưng Yên:** Vũ Mạnh Tuấn, 12 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** Vũ Thị Nhung, 11 Lí, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Phương, 11G, THPT Nghĩa Đàn; Nguyễn Văn Cường, 11A2, THPT Lương Đức Bằng.

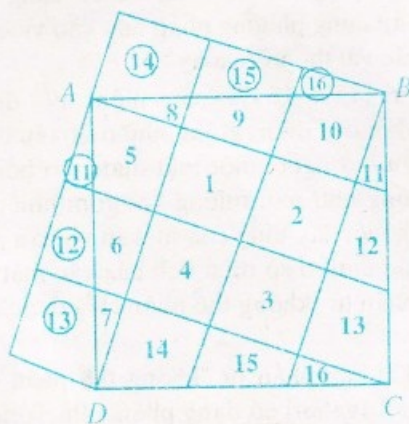
NGUYỄN VĂN THUẬN



Giải đáp bài :

CHIA HÌNH VUÔNG THÀNH 10 HÌNH VUÔNG NHỎ BẰNG NHAU (Đề đăng trên THPT số 340, tháng 10.2005)

Gọi cạnh của hình vuông ban đầu $ABCD$ là a và cạnh của hình vuông nhỏ là b .



Theo điều kiện đề bài ta có $a^2 = 10b^2$ hay $a^2 = (3b)^2 + b^2$. Dựng tam giác vuông có cạnh huyền là a và hai cạnh góc vuông là $b = \frac{a\sqrt{10}}{10}$ và $3b$. Từ đó suy ra cách phân chia hình vuông ban đầu thành 16 mảnh (là ít nhất trong các lời giải) rồi ghép lại (hình x chuyển đến vị trí ③) được 10 hình vuông nhỏ bằng nhau như hình vẽ trên.

Các bạn sau có lời giải tốt và gửi sớm được nhận tặng phẩm :

- Tô Phương Nhung, 12A2, THPT Mai Sơn, Sơn La.
- Trần Văn Hiếu, 11T, THPT chuyên Thái Bình.
- Hoàng Ngọc Hưng, 9B, THCS Trần Phú, Nông Cống, Thanh Hóa.
- Nguyễn Hoàng Hải Vy, 8A9, THCS Lê Lợi, TP Quy Nhơn, Bình Định.
- Trần Minh Hoàng, 10T, THPT chuyên Bến Tre.

VÂN KHANH

CHIA HÌNH VUÔNG THÀNH 11 HÌNH VUÔNG NHỎ BẰNG NHAU

Bạn hãy cắt một miếng bìa hình vuông đã cho làm nhiều mảnh để có thể ghép được thành 11 hình vuông nhỏ có kích thước bằng nhau sao cho số mảnh bị cắt ra theo bạn là ít nhất.

TRẦN CUNG
(Hà Nội)

PROBLEMS ... (Tiếp trang 17)

set of numbers s_i can be partitioned into 2005 non empty disjoint subsets so that the ratio of two arbitrary numbers belonging to a such subset does not exceed 2.

T9/342. The sequence of numbers (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) is defined by: $x_1 = 1$,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$\text{Put } y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Find $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

T10/342. Prove the inequality

$$\left(a^2 + \frac{1}{ab}\right)^\alpha + \left(b^2 + \frac{1}{bc}\right)^\alpha + \left(c^2 + \frac{1}{ca}\right)^\alpha \geq 3.2^\alpha$$

where a, b, c are positive numbers and α is a rational number greater than 1. When does equality occur?

T11/342. Let r and R be respectively the inradius and the circumradius of a triangle ABC . Prove that

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{r^2}{2R^2}.$$

When does equality occur?

T12/342. In space, let be given a sphere (S) and a line Δ not intersecting (S) . For each point M on Δ , take three arbitrary tangent planes to (S) , passing through M and touching (S) at A, B, C . Prove that the planes ABC contain a fixed line when M moves on Δ .



TÓM TẮT LỊCH SỬ XUẤT HIỆN KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

TRẦN LƯƠNG CÔNG KHANH

(Nghiên cứu sinh tại Trung tâm Leibniz,
Đại học Joseph Fourier, Pháp)

Để tính diện tích A của một viên phân parabol, Archimède (khoảng 287-212 TCN) sử dụng phương pháp "vét cạn". Ông tăng số cạnh của đa giác nội tiếp cho đến khi hiệu giữa diện tích của viên phân parabol và đa giác nội tiếp là $A - U$ bé tùy ý. Ông chứng minh bằng phản chứng rằng A là diện tích của viên phân parabol. Đối với bài toán cầu phương⁽¹⁾ các hình phẳng, Archimède lập lại cùng hình thức chứng minh cho mỗi trường hợp đặc biệt và không nhận ra bản chất tương tự của tất cả những bài toán này.

Dùng phương pháp của Archimède, Thabit ibn Qurra (836-901) giải bài toán cầu phương viên phân parabol tương đương với tích phân $\int_0^a \sqrt{px} dx$ của chúng ta ngày nay.

Tư tưởng chính của thời kì đầu sơ khai khái niệm tích phân chính là từ việc tính tổng Darboux (Đác-bu) để xấp xỉ một diện tích cần tìm.

Cuối thế kỉ X, Ibn Al-Haytham (965-1039) tính thể tích của khối paraboloid tròn xoay và trở thành người đầu tiên giải bài toán tương đương với việc tính tích phân $\int_0^a x^4 dx$.

Để xác định trọng tâm của hình phẳng, Stevin (1586) dùng phương pháp của Archimède và lập chuỗi $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots$. Trong khi Archimède dừng lại ở số hạng thứ n rồi thêm vào đó một lượng dư thì Stevin xem xét chuỗi vô hạn theo nghĩa vô hạn "tiềm năng"⁽²⁾,

Valerio (1552-1618) sửa đổi và tổng quát hóa phương pháp "vét cạn" để giảm bớt nhiều chứng minh công kênh.

Kepler (1571-1630) đồng nhất hình tròn với một đa giác đều nội tiếp có vô hạn cạnh và tính diện tích hình tròn bằng cách lấy tổng diện tích các tam giác vô cùng bé có đáy là cạnh đa giác đều, có đỉnh là tâm hình tròn. Trong trường hợp tổng quát, ông chia các mặt và các vật thể thành vô hạn các phần tử vô cùng bé có cùng kích thước và áp dụng phương pháp này vào việc tính thể tích các vật thể tròn xoay.

Cavalieri (1598-1647) quan niệm một đường được tạo bởi các điểm giống như một chuỗi gồm nhiều hạt ngọc, một mặt được tạo bởi các đường giống như một miếng vải gồm nhiều sợi chỉ. Tránh việc lấy tổng của một số vô hạn phần tử, ông xác định tỉ số diện tích của các mặt nhờ tỉ lệ các phần tử "không thể phân chia được" cấu thành.

Trong khi các phần tử "không thể phân chia được" của Cavalieri có dạng phẳng, thì Toricelli (1608-1647) nghiên cứu các phần tử dạng hình trụ và hoàn thiện phương pháp các phần tử "không thể phân chia được".

Roberval (1602-1675) phát triển phương pháp các phần tử "không thể phân chia được" bằng cách quay về với quan điểm cận số học của Stevin và Valerio khi xem xét các cấp số cộng vô hạn. Roberval cho rằng một số vô hạn các đa giác sẽ phủ kín *toàn thể* hình phẳng cần xét.

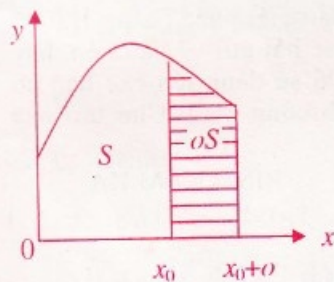
Từ năm 1636, Fermat (1601-1665) đã biết cầu phương các parabol $y = ax^m$ với m nguyên không âm. Sau đó, ông xây dựng một phương thức tổng quát hơn để cầu phương tất cả các parabol và hyperbol (ngoại trừ một trường hợp duy nhất) nhờ cấp số nhân.

Pascal (1623-1662) đối chiếu các quan điểm hình học và số học trong các phương pháp cầu

phương của những người đi trước, so sánh phần tử "không thể phân chia được" trong hình học với số 0 trong số học, hoàn thiện phương thức giải tích để tính diện tích.

Barrow (1630-1677) là người đầu tiên nhận rõ mối liên hệ giữa bài toán tiếp tuyến và bài toán diện tích nhưng ngôn ngữ hình học mà ông sử dụng đã ngăn cản ông diễn đạt tường minh ý tưởng của mình.

Các lượng vô cùng bé (increment) được Newton (1642-1727) nghiên cứu. Ông kí hiệu số gia diện tích là oS . Ông tính tỉ số biến thiên tức thời của diện tích $\frac{oS}{o}$ tại điểm có hoành độ x_0 và nhận thấy tỉ số này bằng $f(x_0)$. Kết quả này được phát biểu bằng thuật ngữ hiện đại là $S'(x_0) = f(x_0)$. Newton xác định phần diện tích nằm dưới đồ thị có phương trình $y = f(x)$ cho trước bằng cách đảo ngược các thao tác lấy đạo hàm, tức là tính tích phân bất định của f . Từ năm 1669, Newton nêu rõ mối liên hệ giữa bài toán



diện tích và bài toán đạo hàm. Tuy nhiên, ta không thể tìm thấy ở Newton các định nghĩa tường minh về đạo hàm, tích phân và số gia vô cùng bé.

Trong luận án của mình (1666), Leibniz (1646-1716) nghiên cứu dãy các số chính phương 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... Ông lập dãy số mới có các số hạng là hiệu hai số hạng liên tiếp của dãy đang xét 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... Ông nhận thấy rằng tổng n số hạng đầu tiên của dãy thứ hai bằng số hạng thứ $n+1$ của dãy thứ nhất (xem bảng dưới đây).

Trong những ghi chép riêng năm 1675, Leibniz bắt đầu phát triển một cách hệ thống

các ý tưởng của mình để hình thành mối liên hệ với phép tính các vô cùng bé. Ông xem dãy số đầu tiên như dãy các giá trị của một hàm số⁽³⁾ và dãy thứ hai như dãy hiệu hai giá trị lân cận của hàm số đó. Ông dùng l để kí hiệu hiệu số này và omn (từ tiếng La tinh *omnia*) để kí hiệu tổng các hiệu l . Tính chất nói trên được viết thành $omn. l = y$. Sau đó, Leibniz dùng dy thay cho l và $\int$ (cách điệu hóa chữ S trong từ *summa*) thay cho omn . Hệ thức trở thành $\int dy = y$. Kí hiệu này (được dùng cho đến tận ngày nay) đã cho phép ông dễ dàng hình thành phương pháp hình thức tính tổng và hiệu các vô cùng bé. Trái với Newton đã sử dụng tích phân bất định và đã tính diện tích và thể tích từ tỉ số biến thiên của chúng, Leibniz đưa vào sử dụng tích phân xác định⁽⁴⁾ và xem diện tích lẫn thể tích như tổng các phần tử vô cùng bé.

Ngày nay tư tưởng này đã được vận dụng để máy tính thực hành tính các tích phân.

Euler (1707-1783) là người đầu tiên sử dụng các kĩ thuật lấy tích phân của Newton trong việc khai triển các hàm số thành chuỗi vô hạn và lấy tích phân từng số hạng của chuỗi. Các tích phân này đơn giản dễ tính hơn và đương nhiên là chọn các số hạng khả tích.

Cauchy (1789-1857) là người đầu tiên đưa ra một định nghĩa chính xác của tích phân (1823).

Ông sử dụng kí hiệu $\int_{x_0}^x f(x)dx$ do Fourier nghĩ

ra để chỉ tích phân này. Cũng có tài liệu cho rằng kí hiệu đó do Leibniz dùng. Cauchy còn nhấn mạnh sự cần thiết phải chứng minh sự tồn tại của tích phân "trước khi làm rõ các

tính chất của chúng". Ông đặt $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$

với $x \in [x_0, X]$ và là người đầu tiên chứng minh định lí cơ bản của phép tính vi tích phân $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [x_0, X]$.

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x) = x^2$	0	1	4	9	16	25	36
$l = f(x) - f(x-1)$		1	3	5	7	9	11
$omn. l = y$		$1 = 1$	$1 + 3 = 4$	$1 + 3 + 5 = 9$	$1 + 3 + 5 + 7 = 16$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$



THÁNG MƯỜI NĂM BẾN TUẤT

Bạn đọc yêu quý,

Một số tờ báo có thư giãn cuối tuần rất vui và bổ ích. Mục Câu lạc bộ của chúng ta giúp các bạn vừa mở mang kiến thức vừa thư giãn cuối

Ông cũng là người đầu tiên xác lập mối liên hệ giữa tích phân và vi phân. Trong SGK toán hiện nay, để tiện cho việc tính toán và chứng minh, người ta định nghĩa tích phân của $f(x)$ từ a đến b bởi công thức Newton-Leibniz

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Cũng thời đó, vào năm 1854, Riemann (1826-1866) trình bày luận văn "Về việc khai triển các hàm số thành chuỗi lượng giác". Xây dựng một lý thuyết tích phân tổng quát hơn của Cauchy nhằm có thể khai triển một cách chính xác các hàm số có vô hạn điểm gián đoạn thành chuỗi Fourier.

Theo Chambadal, lý thuyết tích phân hiện đại gồm hai nội dung chính: tích phân của các hàm số và độ đo các tập hợp. Hai nội dung này được hợp nhất nhờ lý thuyết tổng quát về độ đo do Daniell xây dựng.

(1) Cầu phương là phép tính một tích phân xác định hay xác định một diện tích, như diện tích của một miền giới hạn bởi một đường cong kín (đường tròn, elip...) hoặc diện tích của một hình thung cong.

(2) Aristote (384 – 322 TCN) phân biệt hai loại vô hạn: vô hạn thực tại và vô hạn tiềm năng.

(3) Vào thời kỳ này, Leibniz chưa biết đến định nghĩa dãy số mà chúng ta sử dụng ngày nay: dãy số là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$, nói cách khác, dãy số là một hàm số có miền xác định là $\mathbb{N}$.

(4) Cho đến năm 1690, Leibniz còn nói đến *phép tính tổng*. Sau đó, theo lời khuyên của Jacques Bernoulli, ông thích dùng thuật ngữ *phép tính tích phân* để chỉ rằng ta tìm bằng cách *đảo lại* (tích) các bộ phận (phần).

mỗi tháng. Câu lạc bộ kỳ này là kỳ cuối năm, chúng ta trở lại với truyền thống yêu thơ của người Việt. Thi thơ vốn là một hoạt động được yêu thích trong các nhà trường. Các thầy cô giáo toán vốn có tâm hồn thi sĩ. Kỳ này "đề ra" cho cuộc thi thơ là Năm mới tới Toán phải toán hơn, trẻ càng trẻ mãi. Đó chính là các chữ bắt buộc đầu mỗi câu và theo thứ tự, nghĩa là bài thơ chỉ được gồm 11 câu. Sau đây là một ví dụ:

Năm mới tới kìa những người mê mãi

Mới hôm nao hào hứng số đầu năm

Tới hôm nay mười hai số qua mau

Toán Tuổi trẻ thêm một lần "đóng tập".

Phải ngoảnh lại, thời gian trôi nhanh thật

Toán cho chung quên tính của riêng mình.

Hơn bốn thập niên cùng bạn đồng hành

Trẻ trung cùng tuổi mười lăm, mười sáu.

Càng thêm nhớ những người đi trước

Trẻ cùng ta, trẻ cùng toán mai này

Mãi còn với đời những bài viết mê say.

Các bạn hãy bắt đầu viết nhé. Tháng 1.2006 chúng tôi sẽ đăng các bài gửi về đầu tiên, hay nhất và tháng 2.2006 sẽ đăng tên các bạn có những bài thơ thành công nhất. Chờ thơ của các bạn.

BÌNH NAM HÀ

MỜI ĐỐI, MỜI GỬI CÂU ĐỐI ĐẦU XUÂN

Năm Dậu đang vỗ cánh bay và năm Tuất đang phóng đến rất nhanh. Số báo đầu năm của chúng ta sẽ vui hơn nhờ Thơ và Câu đối. Mời các bạn gửi câu đối cho chúng tôi nhưng phải đủ hai vế, có nội dung gắn với Toán hoặc gắn với Nhà trường.

Còn đây là một vế thách đối của Câu lạc bộ. Tháng 2.2006 chúng ta sẽ biết về đối đối lại thú vị nhất, đối chỉnh nhất.

**NĂM MỚI, CỘNG SỰ, THÊM BÊN
CHỈ, KHÔNG CHIA LÒNG, BỐT PHÂN
TAM THÀNH CÔNG NHẬN ĐỐI.**

Người đối hay nhất sẽ được tặng quà của Câu lạc bộ.

THÙY VŨ



TRẢ LỜI - NHỮNG SỐ TRƯỚC

1. (9.05).

Theo em thì số hữu tỉ (phân số) tuy nó phức tạp hơn số âm nhưng được ra đời trước để phục vụ cho sự phân chia sản phẩm trong lao động của những người thuộc chế độ xã hội Công xã nguyên thủy khi mà lao động sản bắt, hái, lượm mang tính chất tập thể.

(Lưu Quốc Thái, 11/3, THPT Sào Nam, Duy Xuyên, Quảng Nam)

Các bản di cảo của người Ai cập cổ đại cách đây 5000 năm có cách biểu thị phân số khác cách biểu thị của chúng ta ngày nay. Từ thế kỉ II trước Công nguyên, các nhà toán học Trung Quốc đã đặt ra một số quy tắc phép tính về số âm. Họ coi số âm là số biểu thị số tiền nợ, số dương là số tiền có.

Vậy số âm ra đời sau số hữu tỉ.

(Nguyễn Tuấn Anh, 10 Lí, THPT chuyên Sơn La)

HỎI - SỐ NÀY

1.(12.05). HAI ĐÁP ÁN TRONG MỘT ĐỀ TOÁN. Trong một đề thi môn toán có bài toán :

"Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách

phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp ba tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?".

Có hai lời giải như sau :

Lời giải 1. "Có $C_3^1 C_{12}^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất. Với mỗi cách phân công đội thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có $C_2^1 C_8^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai. Với mỗi cách phân công đội thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất và tỉnh thứ hai thì có $C_1^1 C_4^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.

Số cách phân công đội thanh niên tình nguyện về ba tỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$C_3^1 C_{12}^4 . C_2^1 C_8^4 . C_1^1 C_4^4 = 207\,900"$$

Lời giải 2. "Có $C_3^1 C_{12}^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất. Với mỗi cách phân công đội thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có $C_2^1 C_8^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai. Với mỗi cách phân công đội thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất và tỉnh thứ hai thì có $C_1^1 C_4^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba. Sau đó có $3!$ cách đổi chỗ ba nhóm thanh niên về ba tỉnh khác nhau.

Số cách phân công đội thanh niên tình nguyện về ba tỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là :

$$C_3^1 C_{12}^4 . C_2^1 C_8^4 . C_1^1 C_4^4 . 3! = 1\,247\,400"$$

Theo bạn, lời giải nào đúng.

(P.B. Giáo viên trường THPT Yên Lạc, Vĩnh Phúc).

GIỚI THIỆU CÁC TRƯỜNG, PHÒNG GIÁO DỤC VÀ SỞ GIÁO DỤC TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Toán học và Tuổi trẻ là tạp chí truyền thống ra đời từ 1964. Số lượng phát hành nay đã đạt tới 30 000 bản mỗi tháng về mọi vùng miền đất nước. Nhằm động viên phong trào dạy và học của các trường, từ 1994 trên tạp chí đã thường xuyên giới thiệu thành tích các nhà trường. Các trường, phòng, sở có thể gửi ảnh tập thể sư phạm, ảnh tổ Toán hay Khoa học Tự nhiên, ban giám hiệu hoặc hiệu trưởng nhà trường cùng bài viết về thành tích nhà trường để in trên tạp chí. Ảnh tập thể nên là cỡ 10×15 , ảnh cá nhân cỡ 4×6 , không ép plastic, phía sau có chú thích. Muốn biết thêm thông tin xin liên hệ trực tiếp với tòa soạn.

THTT

Đặt mua tạp chí Toán học và Tuổi trẻ dài hạn tại các cơ sở Bưu điện quận, huyện, thị xã, thành phố và các tỉnh.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 342 (12-2005)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc

Tổng biên tập NXB Giáo dục

NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,
TS. NGUYỄN MINH HẢI, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG,
PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH,
TS. TRẦN HỮU NAM, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG,
ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI,
ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Hoàng Ngọc Đan – Ứng dụng của một bài toán đại số nhờ định lý Viète.
- 3 **Trường THCS Lê Quý Đôn, Quận Cầu Giấy, Hà Nội.**
- 3 **Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi.**
- 4 **Lời giải đề thi tuyển sinh lớp 10 hệ THPT chuyên trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội năm học 2005 - 2006.**
- 7 **Phương pháp giải toán - Math Problem Solving**
Đỗ Thanh Sơn – Sử dụng tọa độ vectơ để giải một số bài toán đại số.
- 9 **Tiếng Anh qua các bài toán và lời giải - English through Math Problems and Solutions UNIT 1.**
- 10 **Vũ Đình Hòa** – Lời giải các bài toán thi học sinh giỏi Quốc gia THPT năm học 2004-2005 bằng B.
- 13 **Toán học muôn màu – Multi farious Mathematics**
- 14 **Từ kho tàng toán học – From Math Treasure**
Ngô Thúc Lan – Số nguyên tố
- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/342, ..., T12/342. L1/342, L2/342.
- 18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 338.
- 27 **Giải trí toán học – Math Recreation**
- 28 **Lịch sử toán học – History of Math**
Trần Lương Công Khanh – Tóm tắt lịch sử xuất hiện khái niệm tích phân
- 30 **Câu lạc bộ – Math Club**
- 31 **X hỏi ? Y, Z trả lời.**

Tổng biên tập: PHAN ĐOÀN THOẠI. Phó ban Phụ trách : PHẠM THỊ BẠCH NGỌC. Thư kí Tòa soạn: VŨ KIM THỦY.

Biên tập : HỒ QUANG VINH. Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049.

CASIO

Khi mua máy tính **CASIO**
bạn sẽ được tặng **NGAY!**

Chương trình

Quà Tặng

Mùa khai trường

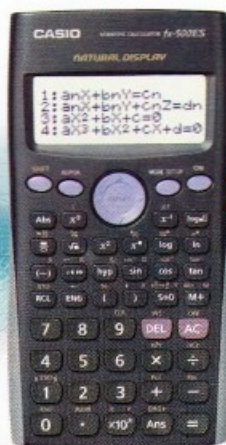


Tặng 02 bút bi cao cấp
Made in Thai Lan
Khi mua 01 máy tính



Tặng sách hướng dẫn sử dụng
khi mua máy tính khoa học
CASIO

Máy tính khoa học duy nhất hiển thị như sách giáo khoa.



fx 500ES



fx 570ES

Cách nhập các bài toán vào máy và hiển thị kết quả giống như giáo viên viết trên bảng

Chú ý!

MÁY TÍNH CASIO
THẬT PHẢI CÓ:



Tem bảo hành
của chính hãng



Dự quang chữ
VKHHS - BCA
khi chiếu tia cực tím



Phiếu bảo hành 02 năm (khi mua đề nghị người tiêu dùng nên yêu cầu người bán hàng phải ghi đầy đủ tên, địa chỉ đại lý bán hàng. Đại lý bán hàng phải có trách nhiệm nhận lại máy hư và gửi về cho công ty để bảo hành)



CÔNG TY CỔ PHẦN XNK BÌNH TÂY (BITEX)

Email: bitex@bitex.com.vn

Website: <http://www.bitexvn.com>

Chương trình quà tặng bắt đầu từ 24/08 đến hết 31/12
(Không áp dụng cho Model HL 122L)
Xem chi tiết tại Nhà sách, cửa hàng bán máy tính

NHỮNG NĂM ĐẦU XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN TRƯỜNG THPT BÁN CÔNG BÌNH GIANG, HẢI DƯƠNG



Hiệu trưởng
Phạm Văn Bình

Trường THPT Bán công Bình Giang được thành lập ngày 22.7.2002. Năm đầu thành lập (khóa 2002-2003) trường chỉ có 2 lớp 10 với số học sinh là 116 em. Năm học này trường có 37 lớp với số học sinh là 2028 em, chiếm 46% số học sinh THPT trong toàn huyện. Nhà trường đã có ngôi trường khang trang với hai nhà lớp học ba tầng, tổng số 24 phòng học. Bên cạnh đó là hệ thống cây cảnh được bố trí hài hòa, tạo cảnh quan nhà trường ngày một xanh - sạch - đẹp.

Trên bước đường phát triển giáo dục của mình, Ban giám hiệu (BGH) luôn suy nghĩ phải khắc phục những khó khăn ban đầu về cơ sở vật chất còn đội ngũ cán bộ, giáo viên luôn hoàn thành nhiệm vụ của mình là Day tốt.

Nhà trường đã tuyển chọn được đội ngũ các thầy giáo, cô giáo có sức khỏe, trình độ chuyên môn vững vàng, nhiệt tình với công việc, "Tất cả vì học sinh thân yêu", cần đối về mặt số lượng đáp ứng được yêu cầu giảng dạy và công tác của nhà trường. Nhà trường luôn luôn quan tâm đến đời sống, thực hiện đúng chế độ chính sách đối với người lao động nên đã làm cho các thầy, các cô thêm nhiệt tình, yên tâm công tác. Các thầy cô giáo giàu kinh nghiệm được phân công hướng dẫn tập sự cho các giáo viên mới. Chỉ sau một năm học đội ngũ các thầy giáo, cô giáo đã có sự tiến bộ rõ rệt.

Trong phong trào thi đua Hai tốt, nhà trường luôn luôn chú ý tới việc đổi mới phương pháp giảng dạy, lấy học sinh làm trung tâm, giúp học sinh thường xuyên có ý thức chủ động, sáng tạo trong học tập.

Ngay từ khi mới thành lập, BGH rất chú ý đến việc giáo dục đạo đức, ý thức tổ chức kỉ luật. Trong việc giáo dục đạo đức học sinh, nhà trường luôn luôn kết hợp chặt chẽ với gia đình, xã hội và Hội cha mẹ học sinh nên bước đầu gây được uy tín và sự tin tưởng của nhân dân trong huyện.



Tập thể cán bộ giáo viên
Trường THPT Bán Công Bình Giang, Hải Dương

Trong hai năm học vừa qua đội tuyển học sinh giỏi của trường đi dự học sinh giỏi cấp tỉnh đều có học sinh đoạt giải.

Trước mắt, tuy còn nhiều khó khăn nhưng tập thể cán bộ, giáo viên của trường quyết tâm xây dựng trường THPT Bán công Bình Giang trở thành trường tiên tiến.

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT44M5

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT do Bộ VHTT cấp ngày 15.6.2004

In 33500 bản tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2005

Giá : 4000 đồng

Bốn nghìn đồng