

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



T. Huy

Huỳnh Quốc Huy

# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

**10** 2005  
Số 340

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 42

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272

Email: toanhocvt@yahoo.com



**TẬP THỂ CÁN BỘ GIÁO VIÊN TRƯỜNG THPT NGUYỄN TẤT THÀNH**



## TRƯỜNG THPT NGUYỄN TẤT THÀNH THUỘC TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

### KẾT QUẢ NĂM HỌC 2004-2005

- Trường tiên tiến xuất sắc của ngành Giáo dục Thủ đô.
- Trường tiên tiến xuất sắc về Thể dục Thể thao cấp Thành phố.
- Tập thể Lao động xuất sắc của Trường ĐHSP Hà Nội.
- 95% học sinh đạt học lực khá giỏi, trong đó có 43% học sinh giỏi.
- Đạt 101 giải thi học sinh giỏi các môn văn hóa cấp Thành phố.
- Có 29 học sinh đạt từ 29 điểm trở lên trong kì thi Tuyển sinh Đại học 2005.
- 100% học sinh lớp chất lượng cao đỗ vào các trường Đại học lớn.
- Trường đã đoạt được 4 Huy chương Vàng, 4 Huy chương Bạc, 3 Huy chương Đồng về Thể dục Thể thao cấp Thành phố.



Hiệu trưởng  
PGS.TS. Vương Dương Minh

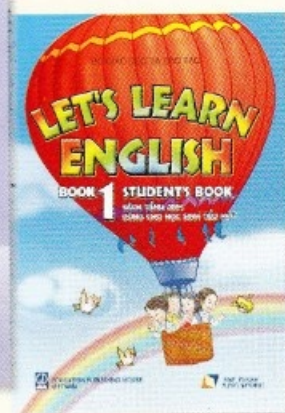
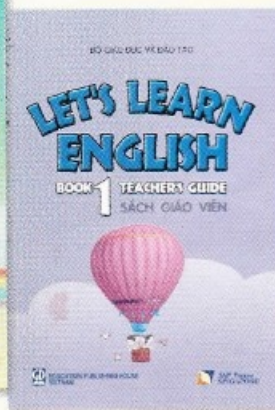
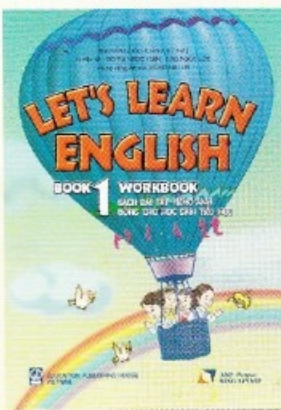
## Sách mới Tiếng Anh dành cho Tiểu học: LET'S LEARN ENGLISH

Hãy học tiếng Anh cùng với các bạn Nam và Mai trong sách

### Let's Learn English!

Đây là bộ sách tiếng Anh được biên soạn theo chương trình mới được ban hành của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Bộ sách được thiết kế theo phong cách hiện đại, kết hợp với tranh ảnh minh họa ngộ nghĩnh, tinh tế, rất hấp dẫn với các em học sinh tiểu học.



Nhà xuất bản Giáo dục hợp tác với Nhà xuất bản SNP Panpac Singapore xuất bản bộ sách này.  
Các Sở Giáo dục - Đào tạo, các Công ty Sách - Thiết bị có thể đặt mua tại:

**Hà Nội:** Phòng phát hành SGK, 187B-Giảng Võ

ĐT: (04) 8562011 Fax: (04) 8562493

**Đà Nẵng:** Phòng phát hành SGK, 15-Nguyễn Chí Thanh

ĐT: (0511) 894504 Fax: (0511) 827368

**TP Hồ Chí Minh:** Phòng phát hành SGK, 231-Nguyễn Văn Cừ, Q5

ĐT: (08) 8358423 Fax: (08) 8390727



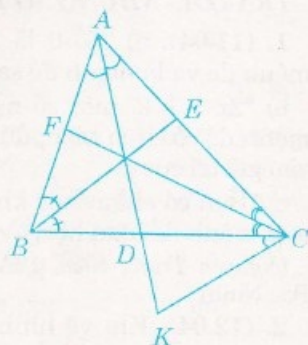
# SỬ DỤNG CÔNG THỨC ĐƯỜNG PHÂN GIÁC VÀO GIẢI TOÁN

HOÀNG VĂN ĐẮC

(GV THCS Vũ Hữu, Bình Giang, Hải Dương)

Sử dụng định lý Ta-let và tam giác đồng dạng ta có thể tính được độ dài đường phân giác trong của một tam giác theo các cạnh của nó. Các công thức về độ dài đường phân giác sẽ giúp ta giải nhiều bài tập lý thú.

Xét tam giác  $ABC$  với các cạnh  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ . Gọi ba đường phân giác trong của  $\triangle ABC$  là  $AD = d_a$ ,  $BE = d_b$ ,  $CF = d_c$ .



Hình 1

**Công thức đường phân giác trong của tam giác**

Để tính độ dài  $AD = d_a$  theo các cạnh  $a, b, c$ , trước hết tính  $BD, CD$ . Theo tính chất đường phân giác trong ta có

$$\frac{BD}{c} = \frac{CD}{b} = \frac{BD+CD}{b+c} = \frac{BC}{b+c} = \frac{a}{b+c}.$$

$$\text{Từ đó có } BD = \frac{ac}{b+c} \quad (1) \text{ và } CD = \frac{ab}{b+c} \quad (2).$$

Trong nửa mặt phẳng bờ  $BC$  không chứa  $A$  dựng tia  $CK$  sao cho  $\widehat{BCK} = \widehat{BAD}$ , tia  $CK$  cắt tia  $AD$  ở  $K$  (h. 1). Ta có  $\widehat{ADB} = \widehat{CDK}$  và  $\widehat{ABD} = \widehat{CKD}$ . Từ đó  $\triangle ABD \sim \triangle CKD$  (g, g),

$$\text{suy ra } \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{KD} \Leftrightarrow AD \cdot DK = BD \cdot CD.$$

$$\triangle ABD \sim \triangle AKC \text{ (g.g), suy ra } \frac{AB}{AD} = \frac{AK}{AC} \Leftrightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AK.$$

Từ hai đẳng thức trên có  $AD \cdot AK - AD \cdot DK = AB \cdot AC - BD \cdot CD$ . Chú ý rằng  $AK - DK = AD$  nên  $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$  hay

$$d_a^2 = bc - BD \cdot CD \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } d_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} \quad (4)$$

$$\text{hay } d_a^2 = bc \left( 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right) \quad (5)$$

$$\text{Để ý rằng } (b+c)^2 - a^2 = (b+c+a)(b+c-a) = 2p(2p-2a) = 4p(p-a), \text{ nên từ (5) có}$$

$$d_a^2 = \frac{4p(p-a)bc}{(b+c)^2} \text{ hay } d_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} \quad (6)$$

Từ (4), (5) và (6) với chú ý là  $(b+c)^2 \geq 4bc$  ta có các bất đẳng thức đối với độ dài đường phân giác trong của tam giác:

$$bc - \frac{a^2}{4} \leq d_a^2 < bc \quad (7) \quad \text{và } d_a^2 \leq p(p-a) \quad (8)$$

Đẳng thức ở (8) xảy ra khi và chỉ khi  $AB = AC$ . Đối với  $d_b, d_c$  có các công thức tương tự.

**Một số bài toán ứng dụng công thức đường phân giác**

**Bài toán 1.** Gọi  $d_a, d_b, d_c$  là độ dài ba đường phân giác của tam giác  $ABC$  với  $AB+BC+CA = 2p$ . Chứng minh rằng:

$$a) ab+bc+ca - \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) \leq d_a^2+d_b^2+d_c^2 \leq p^2;$$

$$b) d_a+d_b+d_c \leq p\sqrt{3}.$$

**Lời giải.** a) Từ công thức (8) có

$$d_a^2+d_b^2+d_c^2 \leq p(p-a)+p(p-b)+p(p-c) = 3p^2 - 2p^2 = p^2.$$

Áp dụng công thức (7) được

$$d_a^2+d_b^2+d_c^2 \geq (ab+bc+ca) - \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

b) Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki và a) ta có  $(d_a+d_b+d_c)^2 \leq 3(d_a^2+d_b^2+d_c^2) \leq 3p^2$ , suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra ở a) cũng như ở b) khi  $a = b = c$ , nghĩa là  $\triangle ABC$  đều.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng tam giác ABC cân với đáy BC nếu hai phân giác trong BE và CF bằng nhau.

**Lời giải.** Ta chứng minh trực tiếp khi sử dụng công thức (4). Theo giả thiết có

$$d_b = d_c \Rightarrow d_b^2 = d_c^2 \Rightarrow ac - \frac{b^2 ac}{(a+c)^2} = ab - \frac{c^2 ab}{(a+b)^2}$$

$$\Rightarrow c - b + bc \left( \frac{c}{(a+b)^2} - \frac{b}{(a+c)^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow c - b + bc \cdot \frac{c^3 - b^3 + a^2(c-b) + 2a(c^2 - b^2)}{(a+b)^2(a+c)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (c-b) \left( 1 + bc \cdot \frac{c^2 + cb + b^2 + a^2 + 2a(c+b)}{(a+b)^2(a+c)^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow c = b \text{ hay } AB = AC.$$

**Bài toán 3.** Giả sử các đường phân giác trong BE và CF của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng khi  $EM = FN$  thì  $\Delta ABC$  cân với đáy BC.

**Lời giải.** Sử dụng tính chất các góc nội tiếp (h. 2) ta có:

$$\Delta ABE \sim \Delta MCE$$

$$\text{nên } \frac{AE}{BE} = \frac{ME}{CE} \quad (9)$$

$$\Delta ACF \sim \Delta NBF$$

$$\text{nên } \frac{AF}{CF} = \frac{NF}{BF} \quad (10).$$

Từ (9), (10) và sử dụng các công thức (1), (2) và (6) ta được

$$EM = \frac{AE \cdot CE}{BE} = \frac{b^2 ca}{(a+c)\sqrt{ac(a+c+b)(a+c-b)}} \quad (11)$$

$$FN = \frac{AF \cdot BF}{CF} = \frac{c^2 ba}{(a+b)\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}} \quad (12)$$

Từ  $EM = FN$  suy ra

$$b(a+b)\sqrt{b(a+b-c)} = c(a+c)\sqrt{c(a+c-b)}$$

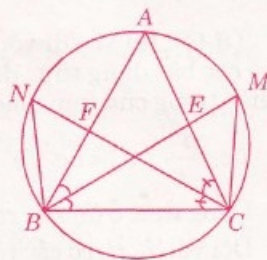
$$\Rightarrow b^3(a+b)^2(a+b-c) - c^3(a+c)^2(a+c-b) = 0$$

$$\Rightarrow (b-c)(a+b+c)[b^2(a+b)(a+b-c) + c^2(a+c)(a+c-b) + bc(a+b)(a+c)] = 0 \Rightarrow b = c \text{ hay } AB = AC.$$

Các bài toán 2 và 3 cũng có thể chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Các bạn hãy sử dụng công thức đường phân giác và công thức Hê-rông về diện tích  $S$  của  $\Delta ABC$  để làm các bài tập sau:

**Bài 1:** Chứng minh rằng  $d_a \cdot d_b \cdot d_c \leq p \cdot S$ .



Hình 2



### HỎI - SỐ NÀY

**1. (9.05).** Trong lịch sử, số âm ra đời trước hay phân số (số hữu tỉ) ra đời trước?

(Một bạn ở trường THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định).

### TRẢ LỜI - NHỮNG SỐ TRƯỚC

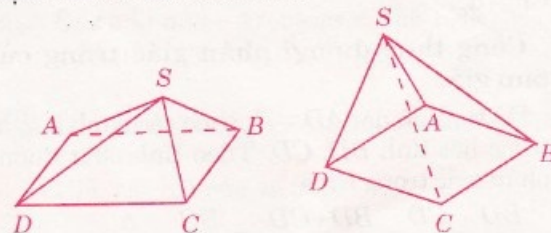
**1. (11.04).** a) "Số 0 là một số chẵn" là một mệnh đề và là mệnh đề sai.

b) " $2x + 3$  là một số nguyên dương" là một mệnh đề có chứa biến, đúng hay sai phụ thuộc vào giá trị của  $x$ .

c) "Bạn có chăm học không?" không phải là một mệnh đề toán học.

(Nguyễn Trung Kiên, 12A3, THPT Hàn Thuyên, Bắc Ninh)

**2. (12.04).** Khi vẽ hình chóp có đáy là hình bình hành thì có thể nhìn thấy cùng lúc ba mặt của hình đó như sau:



(Nguyễn Trung Kiên, 12A3, THPT Hàn Thuyên, Bắc Ninh; Nguyễn Văn Đình, 12I, THPT Giao Thủy A, Nam Định).

Còn ý kiến của các bạn về những vấn đề này như thế nào?

VŨ ĐOÀN QUÂN

**Bài 2:** Chứng minh rằng  $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \geq 3\sqrt{3} \cdot S$ .

**Bài 3:** Cho tam giác ABC. Gọi MN, PR, QS là hình chiếu vuông góc của các đoạn thẳng AB, BC, CA lên các đường phân giác ngoài ở các đỉnh C, A, B tương ứng. Chứng minh rằng:

$$MN + PR + QS \geq 6\sqrt{\frac{S^2}{p}}$$

Hi vọng rằng các bạn còn tìm thấy nhiều hệ thức khác liên quan đến độ dài đường phân giác của tam giác.

# ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 KHỐI THPT CHUYÊN

## TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH, NĂM 2005

### MÔN TOÁN

#### VÒNG I

(Dành cho mọi thí sinh. Thời gian làm bài : 150 phút)

**Câu 1. a)** Rút gọn biểu thức sau :

$$A = \sqrt{\frac{8+\sqrt{15}}{2}} + \sqrt{\frac{8-\sqrt{15}}{2}}$$

**b)** Giải phương trình :

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x} = 4.$$

**Câu 2.** Chứng minh rằng  $(n^3 + 17n) : 6$  với mọi số tự nhiên  $n$ .

**Câu 3.** Giả sử  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $\frac{x^2 - 4x}{1-x} = 3x + m$ , trong đó  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để biểu thức  $|x_1 - x_2|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 4.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Hai điểm  $I, J$  lần lượt thuộc hai cạnh  $BC$  và  $CD$  sao cho  $\widehat{IAJ} = 45^\circ$ . Đường chéo  $BD$  cắt  $AI$  và  $AJ$  tương ứng tại  $H$  và  $K$ . Tính tỉ số  $\frac{HK}{IJ}$ .

**Câu 5.** Cho hai đường tròn  $(O_1; R_1)$  và  $(O_2; R_2)$  có  $R_1 > R_2$ , tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A$ . Đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  cắt đường tròn  $(O_1; R_1)$  tại  $M$  và cắt đường tròn  $(O_2; R_2)$  tại  $N$  (các điểm  $M, N$  khác  $A$ ).

a) Xác định vị trí của đường thẳng  $d$  để độ dài đoạn thẳng  $MN$  lớn nhất.

b) Tìm tập hợp các trung điểm  $I$  của các đoạn thẳng  $MN$  khi đường thẳng  $d$  quay quanh điểm  $A$ .

#### VÒNG II

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán. Thời gian làm bài : 150 phút)

**Câu 6. a)** Tìm chữ số tận cùng của số  $19^{6^{2005}}$ .

**b)** Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  sao cho  $n^2 - 14n - 256$  là một số chính phương.

**Câu 7.** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + \frac{1}{\sqrt{y}} = 2 \\ y + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2. \end{cases}$$

**Câu 8.** Tìm các số nguyên  $a, b, c$  thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2 < ab + 3b + 2c.$$

**Câu 9.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$  ( $a > 0$ ) và một điểm  $M$  chuyển động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

a) Chứng minh rằng nếu  $M$  thuộc cung nhỏ  $AB$  thì  $MA + MB = MC$ .

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $MA + MB + MC$ .

**Câu 10.** Cho hình vuông  $ABCD$  có  $AB = 14$ cm. Trong hình vuông có đánh dấu 76 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính 2cm chứa trong nó ít nhất 4 điểm trong số các điểm trên.

#### SÁCH MỚI THUỘC TỦ SÁCH TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ (Quyển 1) là cuốn sách đầu tiên trong bộ tuyển chọn. Sách gồm 3 chuyên đề : *Phương pháp giải toán, Toán học và Đời sống, Lịch sử Toán học* vốn là những chuyên đề bạn đọc rất quan tâm. Sách có ích đối với thầy cô giáo dạy toán, các em học sinh và mọi người yêu toán. Các đơn vị mua với số lượng lớn có thể gửi phiếu báo về tòa soạn. Sách sẽ có mặt trên thị trường vào cuối năm 2005. Các bạn hãy đón đọc và thông tin cho nhiều người cùng biết. Cảm ơn các bạn.

THTT

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TRƯỜNG THPT LÊ HỒNG PHONG TP HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2005 - 2006

MÔN TOÁN

(Đề thi đã đăng trên THPT số 339, tháng 9.2005)

## VÒNG I

Câu 1. a) Ta có biệt thức

$$\Delta' = (3 - 2m)^2 - 4(m^2 - 3m + 2) = 1 > 0,$$

nên PT đã cho có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi giá trị của tham số  $m$ .

b) Theo công thức Vi-ét

$$x_1 x_2 = \frac{m^2 - 3m + 2}{4} = \frac{1}{4} \left( m - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $m = \frac{3}{2}$ . Vậy giá trị nhỏ nhất của  $x_1 x_2$  là  $\left( -\frac{1}{16} \right)$  đạt được khi  $m = \frac{3}{2}$ .

Câu 2. a) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 4xy+4 \\ x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x.y=8. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được hai nghiệm  $(x, y)$  là  $(4, 2)$ ;  $(2, 4)$ .

b) Điều kiện  $x \neq -5$ . Khi đó

$$x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$$

$$\Leftrightarrow \left( x - \frac{5x}{x+5} \right)^2 + 10 \left( \frac{x^2}{x+5} \right) = 11$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x^2}{x+5} \right)^2 + 10 \left( \frac{x^2}{x+5} \right) = 11.$$

Đặt  $y = \frac{x^2}{x+5}$  (1), PT trên trở thành

$$y^2 + 10y - 11 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = -11.$$

\*) Với  $y = -11$ , thay vào (1) ta thấy PT ẩn  $x$  vô nghiệm.

\*) Với  $y = 1$ , từ (1) có

$$x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Thử lại ta thấy  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$  là hai nghiệm của PT đã cho.

Câu 3. a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} = \sqrt{\frac{c}{b} \left( \frac{a-c}{a} \right)} + \sqrt{\frac{c}{a} \left( \frac{b-c}{b} \right)} \\ \leq \frac{1}{2} \left( \frac{c}{b} + \frac{a-c}{a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} + \frac{b-c}{b} \right) = 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = \frac{bc}{b-c}$ .

b) Áp dụng BDT Cô-si cho hai số dương

$$2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Rightarrow 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ  $a = b$ .

Câu 4. Gọi số chính phương có 4 chữ số cần tìm là  $\overline{abcd}$  ( $a \neq 0$ ).

Đặt  $n^2 = \overline{abcd}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Ta có  $n^2 < 10000$  nên  $n < 100$ .

Khi tăng mỗi chữ số của số  $\overline{abcd}$  lên một đơn vị thì được số  $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}$ . Từ giả thiết bài ra  $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ). Lập luận như trên có  $m < 100$ , dẫn đến  $2 \leq m+n < 200$ .

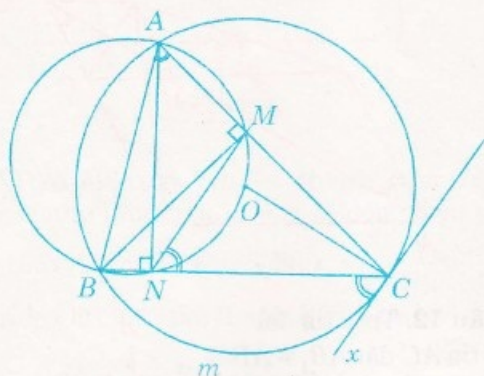
Xét hiệu

$$m^2 - n^2 = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} - \overline{abcd} = 1111$$

$$\text{hay } (m-n)(m+n) = 1111.$$

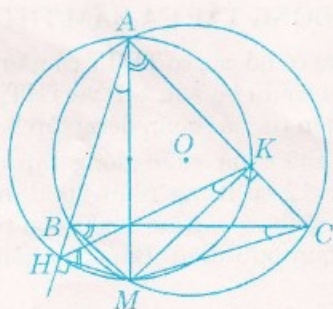
Vì  $1111 = 1 \times 1111 = 11 \cdot 101$ , nên chỉ xảy ra  $m-n = 11$  và  $m+n = 101$ , suy ra  $m = 55, n = 45$ . Vì vậy  $\overline{abcd} = 45^2 = 2025$ . Thử lại ta thấy số cần tìm là 2025.

**Câu 5.** a) Dựng tia tiếp tuyến  $Cx$  với đường tròn  $(O)$  (hình vẽ), khi đó  $\widehat{BAC} = \widehat{BCx}$  (cùng chắn  $\widehat{BmC}$ ). Mặt khác  $\widehat{BAC} = \widehat{MNC}$  (cùng bù với  $\widehat{MNB}$ ) suy ra  $\widehat{MNC} = \widehat{BCx}$ , từ đó  $MN \parallel Cx$ . Mặt khác  $Cx \perp OC$  nên  $MN \perp OC$ .



b) Ta thấy  $\triangle CMN \sim \triangle CBA$   
 $\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (vì  $\triangle ANC$  vuông cân tại  $N$ )  
 $\Rightarrow MN = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ .

**Câu 6.** a) Bốn điểm  $A, H, M, K$  cùng nằm trên đường tròn đường kính  $AM$ . Ta có các góc nội tiếp sau bằng nhau:  $\widehat{MBC} = \widehat{MAC} = \widehat{MHK}$ ,  $\widehat{MCB} = \widehat{MAB} = \widehat{MKH}$  nên hai tam giác  $MBC$  và  $MHK$  đồng dạng với nhau.



b) Theo trên  $\triangle MBC \sim \triangle MHK$ , suy ra  $\frac{BC}{HK} = \frac{MB}{MH}$ , mà  $MB \geq MH$  dẫn đến  $\frac{BC}{HK} \geq 1$  hay  $HK \leq BC$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $H \equiv B$ , lúc đó  $\widehat{ABM} = 90^\circ \Leftrightarrow AM$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ . Do đó khi  $M$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$  thì độ dài  $HK$  lớn nhất.

## VÒNG II

**Câu 7.** a) Giả sử  $x_0$  là nghiệm chung của hai PT. Ta có  $x_0^2 + x_0 + m = 0$  (1);  $x_0^2 + mx_0 + 1 = 0$ .

$$\text{Từ đó } (x_0^2 + x_0 + m) - (x_0^2 + mx_0 + 1) = 0 \\ \Rightarrow (1 - m)(x_0 - 1) = 0$$

Với  $m = 1$ , cả hai PT đều có dạng  $x^2 + x + 1 = 0$ , PT này vô nghiệm.

Với  $x_0 = 1$  thì từ (1) có  $m = -2$ , khi đó PT  $x^2 + x + m = 0$  có hai nghiệm là 1 và -2;

PT:  $x^2 + mx + 1 = 0$  có nghiệm kép là 1. Kết luận  $m = -2$ .

b) Ta có biệt thức  $\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - (2bc)^2 \\ = [(b+c)^2 - a^2][(b-c)^2 - a^2] = \\ = (b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a) < 0$  (do  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác)  $\Rightarrow$  đpcm.

**Câu 8.** a) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 3) = 0 \\ x + y = -1. \end{cases}$$

Hệ này tương đương với tuyển của hai hệ

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad \text{(I)} \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

- Hệ (I) có nghiệm  $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

- Xét hệ (II), từ  $x + y = -1$  có  $y = -1 - x$ . Thay vào PT đầu của hệ (II) được

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Từ đó ta thấy hệ (II) có hai nghiệm  $(1, -2)$ ;  $(-2, 1)$ .

**Kết luận:** Hệ đã cho có nghiệm  $(x, y)$  là  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ;  $(1, -2)$ ;  $(-2, 1)$ .

b) Nhận thấy  $x = 0$  không phải là nghiệm của PT. Viết PT lại dưới dạng

$$\frac{2}{3x^2 - 5x + 2} + \frac{13}{3x^2 + x + 2} = 6 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3x + \frac{2}{x} - 5} + \frac{13}{3x + \frac{2}{x} + 1} = 6. \\ \text{Đặt } 3x + \frac{2}{x} - 5 = y. \text{ PT đã cho trở thành}$$

$$\frac{2}{y} + \frac{13}{y+6} = 6 \Leftrightarrow 2y^2 + 7y - 4 = 0.$$

Giải PT này được  $y_1 = \frac{1}{2}$ ;  $y_2 = -4$ .

$$\text{Với } y_1 = \frac{1}{2} \text{ thì có } 3x + \frac{2}{x} - 5 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 11x + 4 = 0.$$

$$\text{PT này có nghiệm } x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Với } y_2 = -4, \text{ ta có } 3x + \frac{2}{x} - 5 = -4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - x + 2 = 0, \text{ PT này vô nghiệm. Tóm lại}$$

$$\text{PT đã cho có hai nghiệm } x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{1}{2}.$$

**Câu 9. a)** Ta có

$$2(a^4 + b^4) \geq ab^3 + a^3b + 2a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow 4(a^4 + b^4) \geq 2ab^3 + 2a^3b + 4a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow (b^4 - 2ab^3 + a^2b^2) + (a^4 - 2a^3b + a^2b^2) + (3a^4 + 3b^4 - 6a^2b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - ab)^2 + (a^2 - ab)^2 + 3(a^2 - b^2)^2 \geq 0.$$

BDT này đúng suy ra đpcm.

$$\text{b) Với } a > b > 0 \text{ thì } \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab - b^2) + 2\sqrt{(a^2 - b^2)(2ab - b^2)} > a^2$$

$$\Leftrightarrow 2b(a - b) + 2\sqrt{(a^2 - b^2)(2ab - b^2)} > 0,$$

Suy ra đpcm.

**Câu 10.** Gọi số cần tìm là  $\overline{ab}$  ( $a, b$  khác 0).

$$\text{Từ giả thiết có } \overline{ab} = m.ab \Rightarrow 10a + b = mab,$$

$$\text{hay } b = a(mb - 10), \text{ suy ra } b : a. \text{ Đặt } b = na$$

$$(n \leq 9). \text{ Từ } na = a(mna - 10) \text{ có } n = mna - 10$$

$$\Leftrightarrow n(ma - 1) = 10 \text{ nên } 10 : n \Rightarrow n \in \{1, 2, 5\}.$$

$$\text{– Với } n = 1 \text{ thì } ma - 1 = 10 \Leftrightarrow ma = 11, \text{ suy ra } a = b = 1.$$

$$\text{– Với } n = 2 \text{ thì } ma - 1 = 5 \Leftrightarrow m.a = 6 \Rightarrow a = 1, 2, 3, \text{ tương ứng có } b = 2, 4, 6.$$

$$\text{– Với } n = 5 \text{ thì } ma - 1 = 2 \Leftrightarrow ma = 3 \Rightarrow a = 1, \text{ tương ứng có } b = 5.$$

$$\text{Thử lại được các số cần tìm là : 11, 12, 15, 24, 36.}$$

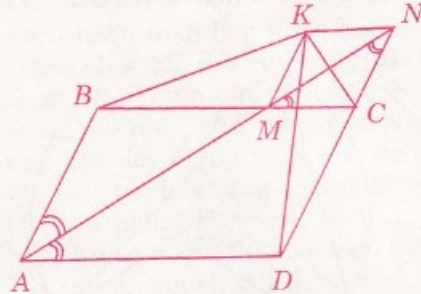
**Câu 11. a)** Ta có  $\widehat{BAN} = \widehat{DNA}$  (so le trong),

$$\text{mà } \widehat{BAN} = \widehat{DAN} \text{ (gt) suy ra } \widehat{DAN} = \widehat{DNA}$$

$$\text{hay } \Delta DAN \text{ cân tại } D \Rightarrow DN = AD = BC.$$

Nhận thấy  $\Delta CMN$  cân tại  $C$  nên  $CM = CN$ , kết hợp với  $KM = KN$  dẫn đến  $CK \perp MN$ .

b) Xét hai tam giác  $KBC$  và  $KDN$  có  $BC = DN, KC = KN, \widehat{KCB} = \widehat{KND} (= \widehat{KMC})$   
 $\Rightarrow \Delta KBC = \Delta KDN$ , suy ra  $\widehat{KBC} = \widehat{KDC}$  hay tứ giác  $BKCD$  là tứ giác nội tiếp (đpcm).



**Câu 12.** Trên tia đối của tia  $AC$  đặt  $AB_1 = AB$

$$\text{lúc đó } \widehat{BAC} = 2\widehat{BB_1C},$$

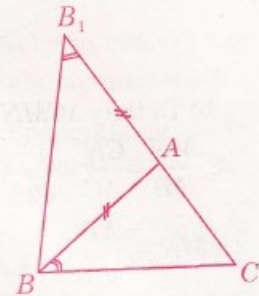
$$\text{mà } \widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BB_1C} = \widehat{ABC},$$

$$\text{suy ra } \Delta BB_1C \sim \Delta ABC.$$

$$\text{Từ đó } \frac{B_1C}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{hay } BC^2 = AC(AB + AC).$$



NGUYỄN ĐỨC TẤN  
(TP Hồ Chí Minh)

## SẼ PHÁT HÀNH

### QUYỀN ĐÓNG TẬP CẢ NĂM THPT 2005

Bạn chưa có đủ các số THPT cả năm 2005? Bạn muốn có đủ bộ sưu tập về THPT? Bạn muốn có liên tục các cuốn đóng tập?

Bạn có thể mua cuốn đóng tập cả năm THPT tức 12 số trong năm 2005, ngoài có bìa cứng. Sách có bán từ 1.2006 tại tòa soạn hoặc gửi qua bưu điện. Bạn hãy liên hệ với địa chỉ

**Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ**

**187B Giảng Võ, Hà Nội**

**ĐT: (04) 5144272.**

**Email: toanhocvt@yahoo.com**

Giá bán lẻ mỗi cuốn 52000 đồng. (Nếu ở xa bạn gửi kèm cước bưu điện. Muốn biết chi tiết xin liên hệ trực tiếp với tòa soạn).

Trân trọng cảm ơn.

THPT

# VỀ MỘT BÀI THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2005

ĐỖ VĂN ĐỨC

(GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Trong kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2005, đề thi toán khối D câu III (phần 1) có nội dung như sau :

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm  $C(2; 0)$  và elip  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

Tìm tọa độ các điểm  $A, B$  thuộc  $(E)$ , biết rằng hai điểm  $A, B$  đối xứng với nhau qua trục hoành và  $\triangle ABC$  đều.

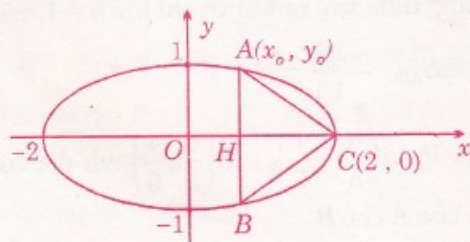
Trong bài trên điều kiện  $A, B$  đối xứng với nhau qua trục hoành có thể suy ra được từ điều kiện  $\triangle ABC$  đều, tuy nhiên cho điều đó thì viết được  $A(x_0, y_0), B(x_0, -y_0)$  và lời giải dễ hơn nhiều.

Sau đây ta giải bài toán trên mà không cần điều kiện  $A, B$  đối xứng với nhau qua trục hoành và đưa ra một số bài toán cực trị có liên quan đến đường elip đó.

**Bài toán :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm  $C(2; 0)$  và elip  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . Xác định vị trí các điểm  $A, B$  trên  $(E)$  thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- 1) Tam giác  $CAB$  đều.
- 2)  $CA = CB$  và tam giác  $CAB$  có diện tích lớn nhất.
- 3)  $CA = CB$  và góc  $ACB$  bằng  $90^\circ$ .
- 4)  $CA = CB$  và tam giác  $CAB$  có chu vi lớn nhất.
- 5) Tam giác  $CAB$  có góc  $ACB$  bằng  $90^\circ$  và có diện tích lớn nhất.

**Lời giải.** Trước hết ta chứng minh với  $A \neq B$  và  $CA = CB$  thì  $A, B$  đối xứng nhau qua trục Ox.



Thật vậy,  $A(x_0; y_0); B(x_1; y_1)$  là hai điểm phân biệt thuộc  $(E)$  và  $CA = CB$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1 \\ (x_0 - 2)^2 + y_0^2 = (x_1 - 2)^2 + y_1^2 \quad (*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^2 - x_1^2 = 4(y_1^2 - y_0^2) \\ (x_0 - 2)^2 - (x_1 - 2)^2 = y_1^2 - y_0^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0^2 - x_1^2 = 4[(x_0 - 2)^2 - (x_1 - 2)^2]$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - x_1)[3(x_0 + x_1) - 16] = 0 \quad (**)$$

Vì  $-2 < x_0, x_1 < 2$  nên  $(**) \Leftrightarrow x_0 = x_1$ . Khi đó từ  $(*)$  có  $y_0^2 = y_1^2$ , do  $A \neq B$  nên  $y_1 = -y_0$ . Suy ra  $B(x_0, -y_0)$ . Vậy  $A, B$  đối xứng với nhau qua trục hoành.

Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$  thì  $H(x_0, 0)$ .

$$1) \triangle CAB \text{ đều} \Leftrightarrow CH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2 - x_0 = \sqrt{3}|y_0|$$

$$\Leftrightarrow |y_0| = \frac{2 - x_0}{\sqrt{3}}. \text{ Vì } A, B \in (E) \text{ nên } \frac{x_0^2}{4} + \frac{(2 - x_0)^2}{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow 7x_0^2 - 16x_0 + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{7} \text{ (nghiệm } x_0 = 2 \text{ bị loại)}$$

$$\text{dẫn đến } |y_0| = \frac{4\sqrt{3}}{7}. \text{ Vậy } A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ và}$$

$$B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ và } B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right).$$

$$2) S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = (2 - x_0)|y_0| =$$

$$= (2 - x_0) \sqrt{\frac{4 - x_0^2}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{(2 - x_0)^3 (6 + 3x_0)}$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ \frac{3(2 - x_0) + 6 + 3x_0}{4} \right]^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$2 - x_0 = 6 + 3x_0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow |y_0| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Có 2 nghiệm :  $A\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); B\left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  và  $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}} (20+4\sqrt{13})$   
đổi tọa độ trên của A cho B.

3) Giả sử  $A(x_0, y_0)$ ,  $(-2 < x_0 < 2)$  lúc đó  $B(x_0, -y_0)$ . Ta có  $HA = HC \Leftrightarrow |y_0| = 2 - x_0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x_0^2} = 2(2-x_0)$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{6}{5} \text{ (nghiệm } x_0 = 2 \text{ bị loại)}$$

$\Rightarrow |y_0| = \frac{4}{5}$ . Từ đó  $A\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right); B\left(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}\right)$  và đổi tọa độ trên của A cho B.

4) Chu vi  $\Delta CAB$  là  $2p = 2CA + AB =$

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{(2-x_0)^2 + y_0^2} + 2|y_0| \\ &= 2\sqrt{(2-x_0)^2 + 1 - \frac{x_0^2}{4}} + 2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}} \\ &= \sqrt{2-x_0} (\sqrt{10-3x_0} + \sqrt{2+x_0}) \\ &= \sqrt{2-x_0} \left[ \sqrt{10-3x_0} + \frac{\sqrt{(4+\sqrt{13})(2+x_0)}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}} \right] \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki cho 2 bộ số

$$\left(1; \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{13}}}\right) \text{ và } \left(\sqrt{10-3x_0}; \sqrt{(4+\sqrt{13})(2+x_0)}\right)$$

ta được

$$\begin{aligned} 2p &\leq \sqrt{2-x_0} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4+\sqrt{13}}\right) [10-3x_0 + (4+\sqrt{13})(2+x_0)]} \\ &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{4+\sqrt{13}}} \sqrt{2-x_0} \sqrt{18+2\sqrt{13}+(1+\sqrt{13})x_0} \\ &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}} \cdot \sqrt{(2-x_0)(1+\sqrt{13})} \times \\ &\quad \times \sqrt{18+2\sqrt{13}+(1+\sqrt{13})x_0} \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  được

$$\begin{aligned} 2p &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}} \times \\ &\quad \times [(2-x_0)(1+\sqrt{13}) + 18 + 2\sqrt{13} + x_0(1+\sqrt{13})] \end{aligned}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{(5+\sqrt{13})^3}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{10-3x_0} = \sqrt{4+\sqrt{13}} \sqrt{(4+\sqrt{13})(2+x_0)} \\ (1+\sqrt{13})(2-x_0) = 18+2\sqrt{13}+(1+\sqrt{13})x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{-8}{1+\sqrt{13}} \Rightarrow |y_0| = \frac{\sqrt{2(\sqrt{13}-1)}}{1+\sqrt{13}}$$

5) Đường thẳng AC có PT  $y = k(x-2)$  (với  $x \neq 2$ ) nên tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = k(x-2) \\ \frac{x^2}{4} + k^2(x-2)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4k^2+1)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_A = \frac{8k^2-2}{4k^2+1} \text{ (nghiệm } x = 2 \text{ bị loại)}$$

$$\Rightarrow CA^2 = (x_A-2)^2 + y_A^2 = (x_A-2)^2(k^2+1)$$

$$= \frac{16(k^2+1)}{(4k^2+1)^2} \text{ (do } y_A = k(x_A-2)).$$

Đường thẳng CB có PT  $y = -\frac{1}{k}(x-2)$  vì

$CA \perp CB$ . Tương tự có

$$CB^2 = \frac{16(k^2+1)k^2}{(4+k^2)^2}$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{8k(k^2+1)}{(k^2+4)(4k^2+1)}$$

Để ý rằng

$$S_{ABC} - \frac{16}{25} = \frac{8(k-1)^2(-8k^2+9k-8)}{25(k^2+4)(4k^2+1)} \leq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $k = 1$ , nên

$$\text{Max } S_{ABC} = \frac{16}{15} \Leftrightarrow k = 1.$$

Từ đó  $A\left(\frac{6}{5}; -\frac{4}{5}\right); B\left(\frac{6}{5}; \frac{4}{5}\right)$  và đổi tọa độ trên của A cho B.



## CHỨNG MINH CÁC CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN CỤT

VŨ HỮU BÌNH  
(Hà Nội)

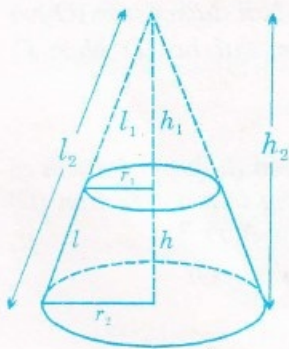
Trong chương *Hình trụ, hình nón, hình cầu* của SGK Toán 9 mới, các công thức tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cụt được công nhận:

$$S_{xq} = \pi l(r_1 + r_2), \quad V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

trong đó  $r_1, r_2$  là các bán kính đáy,  $l$  là độ dài đường sinh,  $h$  là chiều cao của hình nón cụt.

Các công thức trên được chứng minh dựa vào các công thức tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón. Dưới đây xin nêu chứng minh đó để các bạn tham khảo.

### 1. Chứng minh công thức tính diện tích xung quanh của hình nón cụt



Trên hình vẽ, ta thấy diện tích xung quanh của hình nón cụt là hiệu của diện tích xung quanh của hình nón lớn (bằng  $\pi r_2 l_2$ ) và diện tích xung quanh của hình nón nhỏ cắt ra từ hình nón lớn (bằng  $\pi r_1 l_1$ ). Do đó

$$\begin{aligned} S_{xq} &= \pi r_2 l_2 - \pi r_1 l_1 = \pi [r_2(l_2 + l_1) - r_1(l_2 - l)] \\ &= \pi(r_2 l + r_2 l_1 - r_1 l_2 + r_1 l) \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác ta có  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{l_1}{l_2}$  nên  $r_2 l_1 = r_1 l_2$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$$S_{xq} = \pi(r_2 l + r_1 l) = \pi l(r_1 + r_2).$$

### 2. Chứng minh công thức tính thể tích của hình nón cụt

Trên hình vẽ, ta thấy thể tích của hình nón cụt là hiệu thể tích của hình nón lớn (bằng  $\frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2$ ) và thể tích của hình nón nhỏ (bằng  $\frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1$ ) trong đó  $h_1$  là đường cao hình nón nhỏ,  $h_2$  là đường cao hình nón lớn. Do đó

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi(r_2^2 h_2 - r_1^2 h_1) \\ &= \frac{1}{3} \pi[r_2^2(h + h_1) - r_1^2(h_2 - h)] \\ &= \frac{1}{3} \pi(r_2^2 h + r_2^2 h_1 - r_1^2 h_2 + r_1^2 h) \end{aligned} \quad (3)$$

Mặt khác ta có  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2}$  nên  $r_2 h_1 = r_1 h_2$ , suy

ra  $r_2^2 h_1 = r_1 r_2 h_2$  và  $r_1 r_2 h_1 = r_1^2 h_2$  do đó

$$r_2^2 h_1 - r_1^2 h_2 = r_1 r_2 (h_2 - h_1) = r_1 r_2 h \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

### PROBLEMS IN THIS ISSUE (Tiếp trang 17)

**T11/340.** Let  $I$  be the incenter of a triangle  $ABC$  with  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Put  $IA = d_a$ ,  $IB = d_b$ ,  $IC = d_c$ . Prove that

$$\sqrt{a(bc - d_a^2)} + \sqrt{b(ca - d_b^2)} + \sqrt{c(ab - d_c^2)} \leq \sqrt{6abc}.$$

**T12/340.** Let  $P$  be a plane turning around the centroid of a regular tetrahedron  $A_1 A_2 A_3 A_4$

with side  $c$ . Let  $B_i$  be the projection of  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) on the plane  $P$ . Find the greatest value of the sum

$$T = A_1 B_1^4 + A_2 B_2^4 + A_3 B_3^4 + A_4 B_4^4$$

in term of  $c$  and determine the position of  $P$  when the sum attains its greatest value.

# LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2004 - 2005

## BẢNG A

VŨ ĐÌNH HÒA  
(ĐHSP Hà Nội)

### NGÀY THỨ NHẤT

**Bài 1:** Xét các số thực  $x, y$  thỏa mãn điều kiện:  $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$ .

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x + y$ .

**Lời giải.** Viết lại hệ thức điều kiện của đề bài dưới dạng:

$$x + y = 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2}).$$

Từ đó, kí hiệu  $G$  là tập giá trị của  $P$ , ta có:  $a \in G \Leftrightarrow a$  là số thực sao cho hệ phương trình sau (ẩn  $x, y$ ) có nghiệm

$$\begin{cases} 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2}) = a \\ x + y = a \end{cases} \quad (I)$$

Đặt  $u = \sqrt{x+1}$  và  $v = \sqrt{y+2}$ , từ hệ (I) ta có hệ sau (ẩn  $u, v$ ):

$$\begin{cases} 3(u+v) = a \\ u^2 + v^2 = a+3. \end{cases} \quad (II)$$

$$\text{Ta có (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \frac{a}{3} \\ uv = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{9} - a - 3\right). \end{cases}$$

Do đó hệ (I) có nghiệm  $\Leftrightarrow$  Hệ II có nghiệm  $(u, v)$  với  $u, v \geq 0$

$\Leftrightarrow$  Phương trình (ẩn  $t$ )

$$18t^2 - 6at + a^2 - 9a - 27 = 0$$

có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 18a + 54 \geq 0 \\ a \geq 0 \\ a^2 - 9a - 27 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9+3\sqrt{21}}{2} \leq a \leq 9+3\sqrt{15}.$$

$$\text{Vậy, ta có } G = \left[ \frac{9+3\sqrt{21}}{2}; 9+3\sqrt{15} \right].$$

Vì thế:

$$\min P = \frac{9+3\sqrt{21}}{2} \text{ và } \max P = 9+3\sqrt{15}.$$

• **Chú ý.** Bài toán còn có thể được giải bằng các phương pháp khác; chẳng hạn, bằng phương pháp hình học (phương pháp tọa độ), phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cổ điển (bất đẳng thức Cô-si, bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski...).

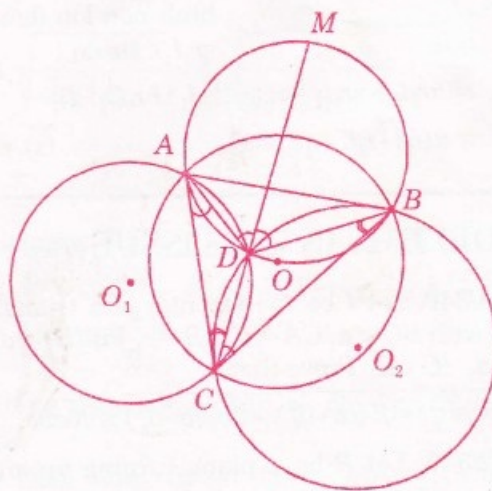
**Bài 2.** Trong mặt phẳng cho đường tròn  $(O)$  cố định, bán kính  $R$ . Cho  $A$  và  $B$  là hai điểm cố định nằm trên đường tròn  $(O)$  sao cho ba điểm  $A, B, O$  không thẳng hàng.

Xét một điểm  $C$  nằm trên đường tròn  $(O)$ ,  $C$  không trùng với  $A$  và  $B$ . Vẽ đường tròn  $(O_1)$  đi qua  $A$  và tiếp xúc với đường thẳng  $BC$  tại  $C$ ; vẽ đường tròn  $(O_2)$  đi qua  $B$  và tiếp xúc với đường thẳng  $AC$  tại  $C$ . Hai đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$  cắt nhau tại điểm thứ hai  $D$  khác  $C$ . Chứng minh rằng:

1)  $CD \leq R$ ;

2) Đường thẳng  $CD$  luôn đi qua một điểm cố định, khi điểm  $C$  di động trên đường tròn  $(O)$  sao cho  $C$  không trùng với  $A$  và  $B$ .

(( $O$ ) kí hiệu đường tròn tâm  $O$ ).



Hình 1

**Lời giải.**

1) Từ cách xác định các đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$  ta có :

$$\widehat{CAD} = \widehat{DCB} \text{ (cùng bằng } \frac{1}{2} \text{ số } \widehat{CD} \text{ của } (O_1)) \quad (1)$$

$$\widehat{ACD} = \widehat{CBD} \text{ (cùng bằng } \frac{1}{2} \text{ số } \widehat{CD} \text{ của } (O_2)) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \triangle DAC \sim \triangle DCB \Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{DC}{DB}$$

$$\Rightarrow CD^2 = DA \cdot DB \quad (3)$$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác  $ADB$  ta được

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos \widehat{ADB}$$

$$\Rightarrow AB^2 \geq 2AD \cdot DB \cdot (1 - \cos \widehat{ADB}) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$AB^2 \geq 2CD^2 \cdot (1 - \cos \widehat{ADB}) \quad (5)$$

Áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác  $ABC$ , ta được  $AB = 2R \cdot \sin \widehat{ACB}$ . Kết hợp với (5) suy ra

$$2R^2 \sin^2 \widehat{ACB} \geq CD^2 (1 - \cos \widehat{ADB}) \quad (6)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} \widehat{CAD} + \widehat{ACD} &= \widehat{DCB} + \widehat{CBD} \\ &= \widehat{CAD} + \widehat{CBD} = \widehat{ACD} + \widehat{DCB} = \widehat{ACB} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Do đó } \widehat{ADC} = \widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{ACB} \quad (8)$$

Hơn nữa, dễ thấy :

-  $C$  và  $D$  nằm cùng phía đối với đường thẳng  $AB \Leftrightarrow \widehat{CAD} + \widehat{CBD} < \widehat{CAB} + \widehat{CBA}$ .

-  $C$  và  $D$  nằm khác phía đối với đường thẳng  $AB \Leftrightarrow \widehat{CAD} + \widehat{CBD} > \widehat{CAB} + \widehat{CBA}$

Vì vậy, từ (7) suy ra :

- Nếu  $\widehat{ACB}$  nhọn thì các điểm  $C$  và  $D$  nằm cùng phía đối với đường thẳng  $AB$  ;

- Nếu  $\widehat{ACB}$  tù thì  $C$  và  $D$  nằm khác phía đối với đường thẳng  $AB$ .

Do đó, tùy thuộc vào  $\widehat{ACB}$  là góc nhọn hay tù mà từ (8) ta sẽ có

$$\widehat{ADB} = 360^\circ - (\widehat{ADC} + \widehat{DCB}) = 2 \cdot \widehat{ACB},$$

$$\text{hoặc sẽ có } \widehat{ADB} = \widehat{ADC} + \widehat{DCB} = 360^\circ - 2 \widehat{ACB}.$$

$$\text{Suy ra ta luôn có : } \cos(\widehat{ADB}) = \cos(2\widehat{ACB}).$$

Vì thế, từ (6), ta được :  $CD \leq R$  (đpcm).

2) Từ các kết quả đã chứng minh ở phần trên, ta dễ dàng suy ra :

$$- CD \text{ là đường phân giác của } \widehat{ADB} \quad (9)$$

$$- O \text{ và } D \text{ nằm cùng phía đối với đường thẳng } AB \quad (10)$$

$$- \widehat{ADB} = \widehat{AOB} \quad (11)$$

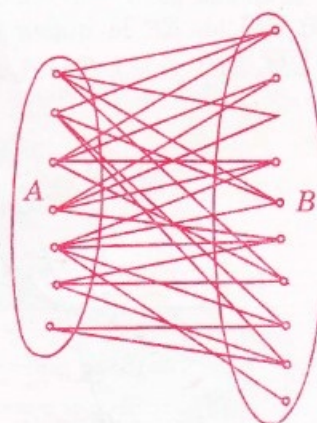
Từ (10) và (11) suy ra khi  $C$  di động thỏa mãn các yêu cầu của đề bài thì  $D$  di động trên cung  $AOB$  của đường tròn cố định  $(AOB)$ . Vì thế, từ (9) suy ra đường thẳng  $CD$  luôn đi qua một điểm cố định là trung điểm  $M$  của cung  $AB$  không chứa  $O$  của đường tròn  $(AOB)$ .

**Bài 3.** Trong mặt phẳng, cho bát giác lồi  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$  mà không có ba đường chéo nào của nó cắt nhau tại một điểm. Ta gọi mỗi giao điểm của hai đường chéo của một bát giác là một nút.

Xét các tứ giác lồi mà mỗi tứ giác đều có cả bốn đỉnh của bát giác đã cho. Ta gọi mỗi tứ giác như vậy là một tứ giác con.

Hãy tìm số nguyên dương  $n$  nhỏ nhất có tính chất : Có thể tô màu  $n$  nút sao cho với mọi  $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  và  $i \neq k$ , nếu kí hiệu  $s(i, k)$  là số tứ giác con nhận  $A_i, A_k$  làm đỉnh và đồng thời có giao điểm hai đường chéo là một nút đã được tô màu thì tất cả các giá trị  $s(i, k)$  đều bằng nhau.

**Lời giải.** Ta dựng một đồ thị lưỡng phân có hai tập đỉnh  $A$  và  $B$ , cạnh chỉ nối đỉnh của  $A$  với đỉnh của  $B$  mà thôi.  $A$  là tập hợp tất cả các tứ giác có 4 đỉnh thuộc  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  mà giao điểm các đường chéo của nó được tô màu và  $B$  là tập hợp tất cả các cặp đỉnh  $(i, k)$  với  $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  và  $i \neq k$ . Ta có thể giả thiết đầu bài là  $|A| = n$  và ...



Hình 2

(Xem tiếp trang 14)



# GÓC ĐỊNH HƯỚNG CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

NGUYỄN MINH HÀ - NGUYỄN VIỆT HẢI

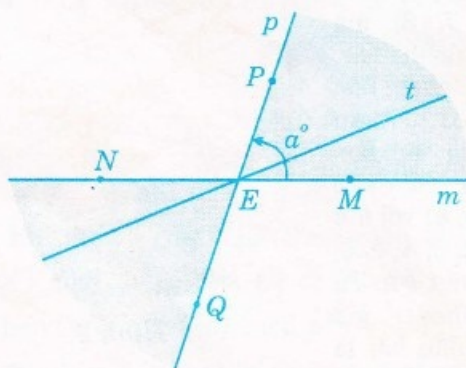
(Hà Nội)

Góc định hướng của hai vectơ (GDHVT) đã được xét trong phần trước (THTT số 339 tháng 9.2005), trong bài này sẽ trình bày về góc định hướng của hai đường thẳng (GDHDT), mối liên hệ giữa hai loại góc định hướng (GDH) đó và một số hệ thức về góc định hướng của hai đường thẳng.

## I. Khái niệm góc định hướng của hai đường thẳng

1. Trên mặt phẳng cho hai đường thẳng  $m$  và  $p$  cắt nhau tại điểm  $E$ . Lấy các điểm  $M, N$  thuộc đường thẳng  $m$  và các điểm  $P, Q$  thuộc đường thẳng  $p$  (các điểm  $M, P, E$  phân biệt nhau) (hình 1). Ta tưởng tượng khi cho đường thẳng  $t$  đi qua điểm  $E$  và quay quanh điểm  $E$  từ vị trí đường thẳng  $m$  đến trùng với đường thẳng  $p$  theo một hướng nhất định (dương hoặc âm) thì đường thẳng  $t$  quét nên một góc định hướng của hai đường thẳng  $m$  và  $p$ . Ta gọi  $m$  là đường thẳng đầu,  $p$  là đường thẳng cuối và kí hiệu góc định hướng đó là  $(m, p)$  hay  $(MN, PQ)$ .

2. Giả sử  $\widehat{MEP} = \alpha^\circ$  với  $0^\circ \leq \alpha^\circ < 180^\circ$ , hướng từ  $EM$  tới  $EP$  là hướng dương (nghĩa là  $\text{sđ}(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EP}) = \alpha^\circ$ ). Ta có công thức về số đo



Hình 1

GDHDT là  $\text{sđ}(MN, PQ) = \alpha^\circ + k.180^\circ$ , trong đó  $|k|$  là số lần quay nửa vòng từ đường thẳng  $EM$  đến đường thẳng  $EP$ ,  $k \geq 0$  nếu quay theo hướng dương,  $k < 0$  nếu quay theo hướng âm. Nếu dùng đơn vị đo radian ta có  $\text{sđ}(MN, PQ) = \alpha + k\pi$ . Như vậy mỗi GDH của hai đường thẳng giao nhau cùng với một số  $k$  thì có một số đo xác định.

3. Đối với hai đường thẳng  $m, n$  song song hoặc trùng nhau và một số  $k$  ta quy ước có một góc định hướng của hai đường thẳng này, kí hiệu là  $(m, n)$  với  $\text{sđ}(m, n) = k\pi$ .

4. Hai GDHDT  $(m, n)$  và  $(u, v)$  được gọi là bằng nhau khi  $\text{sđ}(m, n) = \text{sđ}(u, v)$ . Ta cũng kí hiệu sự bằng nhau đó là  $(m, n) = (u, v)$ .

Chú ý rằng hai GDHDT bằng nhau thì không nhất thiết hai đường thẳng đầu của chúng là cùng phương.

Quan hệ bằng nhau của các GDHDT có các tính chất: phản xạ, đối xứng, bắc cầu, nghĩa là các tính chất của quan hệ tương đương.

## II. Mối liên hệ giữa các số đo của GDHDT và GDHVT

Từ công thức  $\text{sđ}(m, n) = \alpha + k\pi$  suy ra  $\text{sđ}(m, n) \equiv \alpha \pmod{\pi}$  và cũng viết là  $(m, n) \equiv \alpha \pmod{\pi}$ .

Ta thấy nếu có đồng dư thức  $a \equiv b \pmod{2\pi}$  thì  $a = b + 2k\pi$  ( $k$  nguyên) suy ra  $a \equiv b \pmod{\pi}$ . Nói cách khác, một đồng dư thức đúng theo môđun  $2\pi$  thì cũng đúng theo môđun  $\pi$  (điều ngược lại không chắc xảy ra).

Giả sử  $M, E, N$  thuộc đường thẳng  $m$  và  $P, E, Q$  thuộc đường thẳng  $p$  với  $EN, EQ$  là tia đối của tia  $EM, EP$  theo thứ tự (hình 1), từ các hệ thức cơ bản của số đo GDHVT (trang 13 THTT số 339 tháng 9/2005) ta có:

Với  $(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EP}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$  thì:

$$(-\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EP}) \equiv (\overrightarrow{EN}, \overrightarrow{EP}) \equiv \pi + \alpha \pmod{2\pi},$$

$$(\overline{EM}, -\overline{EP}) = (\overline{EM}, \overline{EQ}) \equiv \pi + \alpha \pmod{2\pi},$$

$$(-\overline{EM}, -\overline{EP}) = (\overline{EM}, \overline{EP}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}.$$

Theo nhận xét trên khi xét theo môđun  $\pi$  thì:

$$(\overline{EM}, \overline{EP}) = (-\overline{EM}, \overline{EP}) = (\overline{EM}, -\overline{EP}) \equiv$$

$$(-\overline{EM}, -\overline{EP}) \equiv \alpha \pmod{\pi}.$$

Từ các điều trên ta có

$$(m, p) \equiv (\overline{EM}, \overline{EP}) \equiv (-\overline{EM}, \overline{EP}) \equiv (\overline{EM}, -\overline{EP})$$

$$\equiv (-\overline{EM}, -\overline{EP}) \pmod{\pi} \text{ hay}$$

$$(m, p) \equiv (\overline{MN}, \overline{PQ}) \equiv (\overline{NM}, \overline{PQ}) \equiv (\overline{MN}, \overline{QP})$$

$$\equiv (\overline{NM}, \overline{QP}) \pmod{\pi}.$$

Từ đó suy ra hệ thức:

$$(\overline{MN}, \overline{PQ}) \equiv (\overline{MN}, \overline{PQ}) \pmod{\pi} \quad (*)$$

Hệ thức này tương đương với hai hệ thức sau:

$$(\overline{MN}, \overline{PQ}) \equiv (\overline{MN}, \overline{PQ}) \pmod{2\pi} \quad (**)$$

$$(\overline{MN}, \overline{PQ}) \equiv (\overline{MN}, -\overline{PQ}) \pmod{2\pi}.$$

Các hệ thức (\*) và (\*\*) đặc trưng cho số đo GDH của hai đường thẳng  $MN, PQ$  và cũng chỉ ra mối liên hệ giữa số đo GDHĐT và số đo GDHVT.

### III. Một số hệ thức cơ bản của số đo GDHĐT

Từ các hệ thức cơ bản của số đo GDHVT trong phần trước và nhận xét ở mục trên ta có ngay các hệ thức từ (1) đến (4) về số đo của GDHĐT:

1) Hai đường thẳng  $m, n$  trùng nhau hoặc song song khi và chỉ khi  $(m, n) \equiv 0 \pmod{\pi}$ .

2) Hai GDHĐT ngược hướng:

$$(m, n) \equiv -(n, m) \pmod{\pi}.$$

3) Hệ thức Sa-lơ về GDHĐT:

$$(m, p) \equiv (m, n) + (n, p) \pmod{\pi}.$$

4) Hiệu của hai GDHĐT chung đường thẳng đầu:

$$(n, p) \equiv (m, p) - (m, n) \pmod{\pi}.$$

So sánh các hệ thức (3) và (4) có quy tắc:

Khi chuyển một (số đo) GDHĐT từ vế này sang vế kia của đồng dư thức theo môđun  $\pi$ , ta phải đổi dấu của nó.

### IV. Một số ứng dụng của GDHĐT

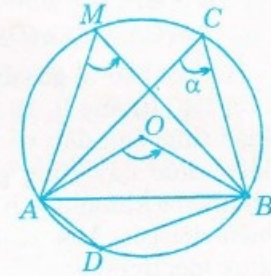
#### 1) Góc nội tiếp và góc ở tâm

Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Giữa góc định hướng nội tiếp và góc định hướng ở tâm của các đường thẳng có hệ thức:

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) \equiv 2(\overline{CA}, \overline{CB}) \pmod{\pi}.$$

Hệ thức này suy ra từ hệ thức (10) theo môđun  $2\pi$  của GDHVT, chú ý rằng hệ thức này đúng với điểm  $C$  bất kì (khác  $A, B$ ) nằm trên đường tròn tâm  $O$  (h. 2).

2) Bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn



Hình 2

**Định lý:** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $(MA, MB) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi}$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Chú ý rằng trong cách phát biểu trên khi điểm  $M$  trùng với  $A$  (hoặc  $B$ ) ta coi  $MA$  (hoặc  $MB$ ) là tiếp tuyến của đường tròn tâm  $O$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

*Hướng dẫn chứng minh:*

*Thuận:* Xét các điểm  $M$  thỏa mãn  $(MA, MB) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi}$ . Theo hệ thức (\*\*) thì

$$(\overline{MA}, \overline{MB}) \equiv (\overline{CA}, \overline{CB}) \pmod{2\pi} \quad (5)$$

$$(\overline{MA}, \overline{MB}) \equiv (\overline{CA}, -\overline{CB}) \pmod{2\pi} \quad (6)$$

Từ kết luận về bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn và cung chứa góc trong phần viết về GDHVT ta thấy: hệ thức (5) chứng tỏ điểm  $M$  nằm trên cung tròn tâm  $O$  chắn dây  $AB$  và đi qua  $C$ , hệ thức (6) chứng tỏ điểm  $M$  nằm trên cung tròn tâm  $O$  chắn dây  $AB$  và không đi qua  $C$ ; từ đó suy ra điểm  $M$  nằm trên cả đường tròn tâm  $O$ .

*Đảo:* Giả sử điểm  $M$  nằm trên đường tròn tâm  $O$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

Theo hệ thức của GDHVT về bốn điểm  $A, B, C, M$  cùng nằm trên một đường tròn khi  $C, M$  nằm cùng phía đối với đường thẳng  $AB$  thì  $(\overline{CA}, \overline{CB}) \equiv (\overline{MA}, \overline{MB}) \pmod{2\pi}$ , còn khi  $C, M$  nằm khác phía đối với đường thẳng  $AB$  thì  $(\overline{CA}, \overline{CB}) \equiv (\overline{MA}, -\overline{MB}) \pmod{2\pi}$ .

Khi xét theo môđun  $\pi$  thì

$$(\overline{MA}, \overline{MB}) = (\overline{MA}, -\overline{MB}) \pmod{\pi},$$

từ đó suy ra  $(MA, MB) \equiv (\overline{CA}, \overline{CB}) \pmod{\pi}$

hay  $(MA, MB) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi}$ .

**Hệ quả:** Điều kiện cần và đủ để các điểm  $A, B, C, D$  phân biệt không thẳng hàng cùng nằm trên một đường tròn là

$$(CA, CB) \equiv (DA, DB) \pmod{\pi}.$$

Hai bài báo về góc định hướng trên THPT số 339, 340 (tháng 9, 10 năm 2005) chỉ là những kiến thức ban đầu về GDH. Tuy nhiên những kiến thức này cũng giúp giải nhanh gọn và chính xác khá nhiều bài tập liên quan đến việc biến đổi góc. Một số bài tập loại này sẽ còn được giới thiệu tiếp.

### BÀI TẬP

1) Xét các đường thẳng  $m, n, u, v$ . Chứng minh rằng:

a) Nếu  $m \parallel u$  và  $n \parallel v$  thì  $(m, n) \equiv (u, v) \pmod{\pi}$ .

b) Nếu  $m \perp u$  và  $n \perp v$  thì  $(m, n) \equiv (u, v) \pmod{\pi}$ .

2) Cho hai điểm  $A, B$  nằm trên đường tròn tâm  $O$ . Chứng minh rằng: Điểm  $M$  thuộc đường tròn tâm  $O$  khi và chỉ khi

$$(MA, MB) \equiv \frac{1}{2}(\overline{OA}, \overline{OB}) \pmod{\pi}.$$

### BẠN CÓ BIẾT ?

(Tiếp trang 29)

...những điều chỉ dẫn về mặt thống kê của bài toán ban đầu: Dù sao, người ta cũng có thể ghi nhận rằng vấn đề ngược lại là cho một tỉ lệ tối đa số lượng những số nguyên tố sinh đôi, cũng khá hạn chế. Năm 2004, Jie Wu, ở Nancy, đã đạt được những ước lượng khá gần với điều người ta phỏng đoán, như một tỉ lệ thực sự.

**Hỏi:** Cái gì làm ngẽn sự phỏng đoán đó?

G.T. Khá rõ ràng là các lí thuyết hiện nay, một mình chúng không đủ để đi đến thắng lợi. Do vậy, hẳn là phải có những ý tưởng mới. Còn phải rất lâu nữa, có thể hàng thế kỉ, nhưng cũng có thể có khả năng rằng những ý tưởng mới phải sáng tạo ra một cách không khó đến như vậy.

Về lí thuyết số, ít khi bước đi cuối cùng lại khó nhất, mà thường là bước đầu mới khó.

NGUYỄN VĂN THIÊM

(Theo *La Recherche* tháng 9 - 2004)

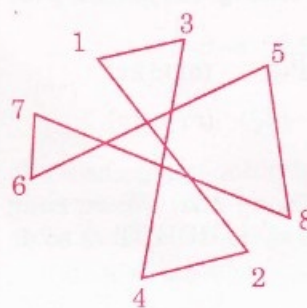
### LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN ...

(Tiếp trang 11)

$|B| = C_8^2 = 28$ . Một đỉnh của  $A$  được nối với một đỉnh  $(i, k)$  của  $B$  nếu như tứ giác tương ứng nhận  $i$  và  $k$  làm đỉnh. Như vậy từ mỗi đỉnh của  $A$  có đúng  $C_4^2 = 6$  cạnh xuất phát.

Theo giả thiết, số cạnh của đồ thị lưỡng phân này nếu tính theo tổng số cạnh xuất phát từ các đỉnh của  $A$  sẽ là  $s(i, k)$ . Ta có  $|B| = 28x$ , với  $x = s(i, k)$  là hằng số không đổi của bài toán. Nếu tính theo tổng số cạnh xuất phát từ các đỉnh của  $A$ , tổng số các cạnh sẽ là  $n.C_4^2 = 6n$ . Từ hai cách đếm khác nhau này, ta có được đẳng thức  $6n = 28x$  và suy ra  $n$  chia hết cho 14, nên phải có  $n \geq 14$ .

Bây giờ ta khẳng định là  $n = 14$  là đạt được. Thật vậy xét các đường chéo chính (nối các cặp đỉnh đối diện) của bát giác lồi đã cho, có 4



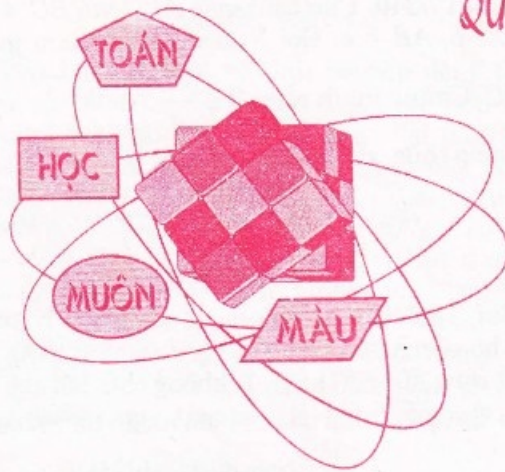
Hình 3

đường chéo như vậy, đánh số các đầu mút của chúng là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 và 8 như trong hình 3. Tô màu 6 giao điểm của các đường chéo này, và giao điểm các đường chéo được tạo dựng bởi các tứ giác sinh bởi 4 cặp cạnh không kề nhau (nét vẽ liền trong hình) với các đường chéo có cách đều các đỉnh của nó (ví dụ với cạnh (1, 3) thì xét thêm (7, 5) và (6, 8), có thêm 2 nút phải tô màu là giao điểm các đường chéo của tứ giác (1, 3, 5, 7) và (1, 3, 6, 8)). Dễ thấy theo đối xứng cách tô màu 14 nút này thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

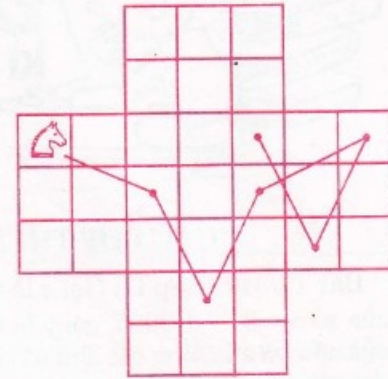
Cũng có thể viết tường minh các nút này là (1, 2, 3, 4), (1, 2, 5, 6), (1, 2, 7, 8), (1, 3, 5, 7), (1, 3, 6, 8), (1, 4, 5, 8), (1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8), (2, 3, 6, 7), (2, 4, 5, 7), (2, 4, 6, 8), (3, 4, 5, 6), (3, 4, 7, 8) và (5, 6, 7, 8). Một kiểm tra trực tiếp cho thấy chúng thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

**Chú ý.** Bạn đọc có thể đặt cho mình câu hỏi tương tự là kết quả thay đổi như thế nào nếu thay 8 bằng các con số khác nhỏ hơn để thấy rằng bài toán chỉ thật sự thú vị với con số 8. Đây là những kết quả nghiên cứu chưa từng công bố ở đâu cả. Nguồn gốc của bài toán là giả thuyết Turan cho đến nay vẫn là bài toán mở với câu hỏi tương tự là tần số lặp của các bộ bằng nhau.

(Kì sau đăng tiếp)



## QUÂN MÃ ĐI TRÊN BÀN CỜ HÌNH CHỮ THẬP



Hình 1

Trên bàn cờ hình chữ thập ở hình 1 tạo bởi các ô vuông bằng nhau (cạnh có độ dài 1), một quân mã đi từ tâm ô vuông này sang tâm ô vuông khác theo quy tắc đường chéo hình chữ nhật kích thước  $1 \times 2$  sao cho đi qua mỗi ô vuông không quá một lần và phải đi liên tiếp để đường đi tạo thành một đường gấp khúc (ô xuất phát được chọn tùy ý).

### Dành cho bạn đọc

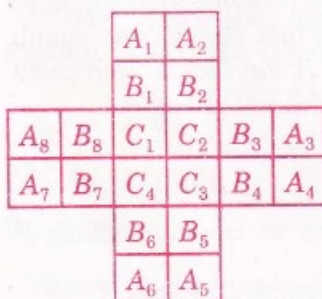
- 1) Chứng minh rằng quân mã không thể đi liên tiếp mà qua được tất cả các ô của hình chữ thập.
- 2) Bạn hãy chỉ ra cách đi liên tiếp của quân mã qua nhiều ô nhất của hình chữ thập.

### **Giải đáp : ĐẶT BI TRÊN BẢNG**

(Đề đăng trên THPT số 337, tháng 7/2005)

Gọi tâm các ô vuông trên bảng ở hình 2 là  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ),  $B_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ),  $C_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). Có tất cả 21 hình vuông với các đỉnh nêu trên, gồm có 9 hình vuông tạo bởi 4 ô vuông có một đỉnh chung và 12 hình vuông lớn hơn là :

- (1)  $A_1 A_3 A_5 A_7$  ;
- (2)  $A_2 A_4 A_6 A_8$  ;
- (3)  $B_1 B_3 B_5 B_7$  ;
- (4)  $B_2 B_4 B_6 B_8$  ;
- (5)  $A_1 A_8 B_6 B_3$  ;
- (6)  $A_2 B_8 B_5 A_3$  ;
- (7)  $B_1 A_7 A_6 B_4$  ;
- (8)  $B_2 B_7 A_5 A_4$  ;
- (9)  $B_1 B_8 C_4 C_2$  ;
- (10)  $B_2 C_1 C_3 B_3$  ;
- (11)  $C_1 B_7 B_6 C_3$  ;
- (12)  $C_2 C_4 B_5 B_4$  .



Hình 2

Từ yêu cầu của đề bài ta có hai điều khẳng định sau :

1) Không thể đặt ít hơn 6 viên bi.

Thực vậy, hình vuông  $C_1 C_2 C_3 C_4$  và 4

hình vuông (1), (2), (3), (4) có các đỉnh phân biệt nên phải đặt 5 viên bi vào đỉnh của 5 hình vuông đó. Xét các hình vuông có các đỉnh  $B_j$  và  $C_k$ . Theo trên có 1 viên bi đặt vào hình vuông  $C_1 C_2 C_3 C_4$  và 2 viên bi đặt vào hai hình vuông (3), (4), nhưng có đến 4 hình vuông có đỉnh  $B_j$ ,  $C_k$  là các hình (9), (10), (11), (12), do đó một trong bốn đỉnh hình vuông này chưa có viên bi nào.

2) Có cách đặt 6 viên bi thỏa mãn yêu cầu.

Có nhiều cách giải, chẳng hạn đặt 6 viên bi vào các điểm  $A_1, A_4, B_4, B_5, B_8, C_1$ . Các bạn tự kiểm tra cách đặt như thế thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Các bạn sau có lời giải tốt :

- Nguyễn Mạnh Nhất, Nguyễn Bá Dũng, 12A1, THPT Thuận Thành 1, Bắc Ninh ;
- Nguyễn Thị Lan, 12 chuyên Anh, THPT chuyên Bắc Ninh ;
- Trần Khắc Dũng, 11B, THPT Anh Sơn 1, Nghệ An ;
- Đỗ Thị Thu, 9A, THCS Hải Hậu, Nam Định ;
- Trịnh Văn Hoàng, 10C1, THPT Hoàng Hóa 2, Thanh Hóa .

PHI PHI



## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/340 (Lớp 6).** Gọi  $x$  là tổng các chữ số của số  $a = 3^{2004} + 2005$ , gọi  $y$  là tổng các chữ số của số  $x$  và  $z$  là tổng các chữ số của số  $y$ . Tìm  $z$ .

NGUYỄN ĐỨC TẤN  
(GV TP Hồ Chí Minh)

**Bài T2/340. (Lớp 7).** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = |7x-5y| + |2z-3x| + |xy+yz+zx-2000| + t^2 - t + 2005,$$

trong đó  $x, y, z, t$  là các số hữu tỉ.

NGUYỄN TẤN NGỌC  
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

**Bài T3/340.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = x^2 + y^2$  sao cho  $A$  chia hết cho 2004 với  $x, y$  là các số nguyên dương.

NGUYỄN ANH DŨNG  
(Hà Nội)

**Bài T4/340.** Giải phương trình

$$13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x.$$

LÊ HOÀI BẮC  
(SV 4B khoa Toán, ĐHSP Huế, Thừa Thiên - Huế)

**Bài T5/340.** Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{1+z} + \frac{y+z}{1+x} + \frac{z+x}{1+y}$$

trong đó  $x, y, z$  là các số thực thuộc đoạn  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

PHẠM HOÀNG HÀ  
(GV THPT chuyên ngữ, ĐH Ngoại ngữ Hà Nội)

**Bài T6/340.** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy điểm  $M$  nằm trong tam giác.  $AM$  cắt  $BC$  tại điểm  $E$ ,  $CM$  cắt  $AB$  tại điểm  $F$ . Gọi  $N$  là điểm đối xứng của  $B$  qua trung điểm của  $EF$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định khi điểm  $M$  di động bên trong  $\triangle ABC$ .

NGUYỄN QUỲNH  
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

**Bài T7/340.** Cho tam giác  $ABC$  với  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Gọi  $S$  là diện tích tam giác

$ABC$ . Chứng minh rằng  $S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{a^2 b^2 c^2}$ .

Đẳng thức xảy ra khi nào?

TRẦN TUẤN ANH  
(Khoa Toán Tin, ĐHKHTN TP Hồ Chí Minh)

## CÁC LỚP THPT

**Bài T8/340.** Cho  $f(x)$  là đa thức bậc ba với các hệ số nguyên và hệ số bậc cao nhất bằng 1. Biết rằng  $f(0) + f(1) + f(-1)$  không chia hết cho 3. Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(n)}$  khi số tự nhiên  $n$  dần tới vô hạn.

NGUYỄN SƠN HÀ  
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

**Bài T9/340.** Có tồn tại chẳng hàm số  $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  thỏa mãn điều kiện

$$f^2(x) \geq f(x+y)(f(x)+y)$$

với mọi số thực dương  $x, y$ ?

TRẦN MINH HIỂN  
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

**Bài T10/340.** Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{C_{k+i+j}^{k+2}} \geq 0$$

trong đó  $n, k$  là các số nguyên không âm,  $n > 1$ ,  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  là một bộ  $n$  số thực bất kì và

$$C_m^r = \frac{m!}{r!(m-r)!}.$$

HÀN NGỌC ĐỨC  
(SV K47 A2 Toán Tin, ĐHKHTN Hà Nội)

**T11/340.** Cho tam giác  $ABC$  với các cạnh  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Đặt  $IA = d_a$ ,  $IB = d_b$ ,  $IC = d_c$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a(bc-d_a^2)} + \sqrt{b(ca-d_b^2)} + \sqrt{c(ab-d_c^2)} \leq \sqrt{6abc}.$$

VŨ THÁI LUÂN  
(SV K51C Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

**Bài T12/340.** Cho tứ diện đều  $A_1 A_2 A_3 A_4$  có cạnh bằng  $c$ . Gọi  $P$  là mặt phẳng quay quanh tâm của tứ diện. Gọi  $B_i$  lần lượt là hình chiếu của  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) trên mặt phẳng  $P$ .

Tìm giá trị lớn nhất của tổng

$$T = A_1 B_1^4 + A_2 B_2^4 + A_3 B_3^4 + A_4 B_4^4$$

theo  $c$  và xác định vị trí của mặt phẳng  $P$  lúc đó.

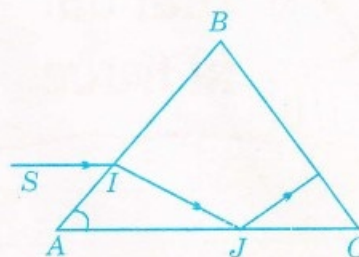
TRẦN VIỆT ANH  
(SV K51 CLC khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

## CÁC ĐỀ VẬT LÝ

**Bài L1/340.** Một vệ tinh chuyển động theo một quỹ đạo tròn ở độ cao cách mặt Trái Đất bằng bán kính  $R$  của Trái Đất. Tại một thời điểm nào đó, từ vệ tinh phóng ra một trạm thăm dò đi tới một hành tinh khác, sau đó phần còn lại của vệ tinh chuyển động theo một quỹ đạo elíp đi tới gần mặt Trái Đất ở điểm đối diện với điểm xuất phát của trạm. Hỏi khối lượng của trạm thăm dò có thể chiếm một phần cực đại bằng bao nhiêu khối lượng của vệ tinh? Cho biết thế năng của một vật khối lượng  $m$  trong trường hấp dẫn của một vật khối lượng  $M$  bằng  $W_t = -G \frac{Mm}{r}$ .

ĐẶNG THANH HẢI  
(NXB Giáo dục)

**Bài L2/340.** Một lăng kính có chiết suất  $n$  ( $n > 1$ ) đặt trong không khí, có tiết diện là một tam giác  $ABC$  với  $\hat{A} < 90^\circ$ . Một tia sáng đơn sắc  $SI$  chiếu song song với  $AC$ , tới mặt  $AB$  tại  $I$  và khúc xạ, tới  $AC$  tại  $J$  (xem hình vẽ). Chứng minh rằng tia  $IJ$  bị phản xạ toàn phần tại mặt  $AC$  với bất kì giá trị nào của góc  $A$  ( $\hat{A} < 90^\circ$ ) và  $n$  ( $n > 1$ ).



NGUYỄN QUANG HẬU  
(Hà Nội)

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/340 (for 6<sup>th</sup> grade).**

Let  $x$  be the sum of the digits of the number  $a = 3^{2004} + 2005$ , let  $y$  be the sum of the digits of the number  $x$  and let  $z$  be the sum of the digits of the number  $y$ . Find  $z$ .

**T2/340 (for 7<sup>th</sup> grade).**

Find the least value of the expression

$$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000| + t^2 - t + 2005,$$

where  $x, y, z, t$  are rational numbers.

**T3/340.** Find the least value of the expression  $A = x^2 + y^2$ , where  $x, y$  are positive integers and  $A$  is divisible by 2004.

**T4/340.** Solve the equation

$$13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x.$$

**T5/340.** Find the least value and the greatest value of the expression

$$P = \frac{x+y}{1+z} + \frac{y+z}{1+x} + \frac{z+x}{1+y}$$

where  $x, y, z$  are real numbers belonging to the segment  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

**T6/340.** Let  $ABC$  be a triangle. For a point  $M$  inside the triangle, let  $E$  be the point of

intersection of  $AM$  and  $BC$ , let  $F$  be the point of intersection of  $CM$  and  $AB$ . Let  $N$  be the reflection of  $B$  in the midpoint of  $EF$ . Prove that the line  $MN$  passes through a fixed point when  $M$  move inside triangle  $ABC$ .

**T7/340.** Let  $S$  be the area of triangle  $ABC$  with  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Prove that  $S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{a^2 b^2 c^2}$ . When does equality occur?

### FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T8/340.** Let  $f(x)$  be a polynomial of degree 3 with integral coefficients and leading coefficient 1. Suppose that  $f(0) + f(1) + f(-1)$  is not divisible by 3. Find  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{f(n)}$  when the integer  $n$  tends to infinity.

**T9/340.** Does there exist a function  $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  satisfying the condition  $f^2(x) \geq f(x+y)(f(x)+y)$  for all positive real numbers  $x, y$ ?

**T10/340.** Prove that  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{C_{k+i+j}^{k+2}} \geq 0$

where  $n, k$  are non negative integers,  $n > 1$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  are  $n$  arbitrary real numbers, and  $C_m^r = \frac{m!}{r!(m-r)!}$ .

(Xem tiếp trang 9)



**Bài T1/336. (Lớp 6).** Hãy so sánh các phân số sau (không làm phép chia trực tiếp):

$$\frac{222221}{222222}; \frac{444443}{444445}; \frac{666664}{666667}; \frac{888885}{888889}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} 1 - \frac{222221}{222222} &= \frac{1}{222222} = \frac{12}{2666664} \\ 1 - \frac{444443}{444445} &= \frac{2}{444445} = \frac{6.2}{2666670} \\ 1 - \frac{666664}{666667} &= \frac{3}{666667} = \frac{4.3}{2666668} \\ 1 - \frac{888885}{888889} &= \frac{4}{888889} = \frac{3.4}{2666667} \end{aligned}$$

Vì

$$\frac{12}{2666664} > \frac{12}{2666667} > \frac{12}{2666668} > \frac{12}{2666670}$$

nên dễ dàng suy ra

$$\frac{222221}{222222} < \frac{888885}{888889} < \frac{666664}{666667} < \frac{444443}{444445}$$

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này và hầu hết làm theo cách trên. Một số bạn có cách giải khác, tóm tắt như sau:

$$\begin{aligned} \text{Đặt } a &= \frac{222221}{222222}; & b &= \frac{444443}{444445}; \\ c &= \frac{666664}{666667}; & d &= \frac{888885}{888889}. \end{aligned}$$

Ta có thể tính được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-a} &= 222222; & \frac{1}{1-b} &= 222222 + \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{1-c} &= 222222 + \frac{1}{3}; & \frac{1}{1-d} &= 222222 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Từ đó dễ dàng suy ra  $a < d < c < b$ . Ta được kết quả như trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Nghệ An:** Phan Mạnh Hải, 6A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; Vũ Đình Long, 6A, Trường Thị Hồng Nhung, Nguyễn Bá Liên, Nguyễn Tất Ngọc, 6B, THCS

Lý Nhật Quang, Đô Lương; Trần Thị Mai Dung, 6C, THCS Thái Hòa II, Nghĩa Đàn; Hà Nội: Lê Quang Huy, Lê Minh Hoàng, 6H1, THCS Trưng Vương, Q Hoàn Kiếm, Nguyễn Thị Khánh Chi, 6A11, THCS Giảng Võ, Ba Đình; Hà Tây: Lê Thành Nhân, 6C, THCS Yên Nghĩa, Hà Đông; Đinh Ngọc Thiện, 6A, THCS Cổ Đông, TX Sơn Tây; Đắk Lắk: Phan Thị Ngọc Yến, 6A4, THCS Nguyễn Huệ, Krông Buk; Quảng Trị: Trương Nhã Uyên, 4/1, TH Hàm Nghi, Đông Hà; Quảng Bình: Nguyễn Phi Hùng, 5A, TH Trung Trạch, Bố Trạch; Quảng Ngãi: Võ Quang Viễn, Võ Quang Duyệt, Dương Trần Quỳnh Nam, 6A, THCS Hành Trung, Trương Thị Thu Hiền, 6D, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; Hải Dương: Trịnh Thị Hoàng Dung, 6A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà; Mạc Đức Huy, 6A, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn; Vinh Phúc: Lê Thị Minh Phương, 6A, THCS Vĩnh Tường, Nguyễn Minh Dũng, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; Nguyễn Văn Phương, Nguyễn Long Huy, Hoàng Thị Trang, Nguyễn Thị Giang B, Nguyễn Thị Ngọc, Nguyễn Thị Xuân, Lê Thị Tuyết Mai, Nguyễn Ngọc Quý, Nguyễn Thị Giang A, Bùi Thị Thu Hiền, Phùng Anh Quát, Nguyễn Diêm Linh, Nguyễn Thị Thu Trang, 6A1, Nguyễn Thị Kim Tuyền, 6C, THCS Yên Lạc, H Yên Lạc; Thanh Hóa: Nguyễn Xuân Giang, 6B, THCS Lê Hữu Lập, Hoàng Hoa Mai, 5A1, TH Tân Sơn, Trịnh Quỳnh Trang, 6H, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa; Hoàng Thị Thùy Trang, 6B, THCS Hoàng Trinh, Cao Thanh Tùng, 6, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa; Mai Thế Tân, 6A, THCS Cao Bá Quát, Bỉm Sơn; La Hồng Quân, 6B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; Mai Thùy Dung, 6C, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; Nguyễn Thị Thu Hà, 5A2, TH Thịnh Lộc, Hậu Lộc; Hải Phòng: Lê Anh Tú, Trần Đức Hùng, 6A9, THCS Chu Văn An, Q Ngô Quyền.

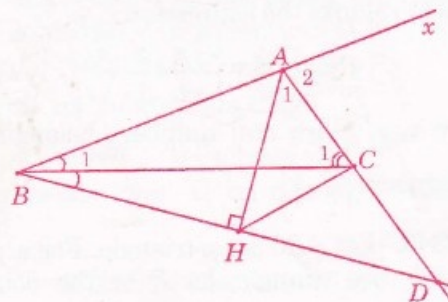
NGUYỄN ANH DŨNG

**Bài T2/336. (Lớp 7).** Cho tam giác ABC có góc  $\widehat{ACB} = 45^\circ$  và góc A tù. Kẻ tia BD cắt tia đối của tia CA ở D sao cho  $\widehat{CBD} = \widehat{ABC}$ . Kẻ  $AH \perp BD$  tại H. Tính góc CHD.

Lời giải. (Theo bạn Lê Trọng Cường, 7B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Thanh Hóa).

Gọi tia đối của tia AB là tia Ax. Xét  $\triangle ABH$ , theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có

$$\widehat{HAX} = \widehat{AHB} + \widehat{ABH} = 90^\circ + 2\widehat{B}_1$$



## GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Xét  $\triangle ABC$  ta có

$$\widehat{A_2} = \widehat{C_1} + \widehat{B_1} = 45^\circ + \widehat{B_1} = \frac{1}{2} \widehat{HAX}.$$

Suy ra  $AC$  là tia phân giác của góc  $\widehat{HAX}$ .

Kết hợp với giả thiết  $BC$  là tia phân giác của góc  $\widehat{ABH}$ , suy ra  $HC$  là tia phân giác của góc  $\widehat{AHD}$  (Với mỗi tam giác, tia phân giác của một góc trong và hai đường phân giác của các góc ngoài thuộc hai đỉnh còn lại đồng quy tại một điểm).

Vậy  $\widehat{CHD} = 45^\circ$ .

Nhận xét. 1) Bạn Lê Trọng Cường còn nêu bài toán mở rộng hơn:

"Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{ACB} = 45^\circ$ ,  $\widehat{A} > 45^\circ$  và  $\widehat{A} \neq 90^\circ$ . Kẻ tia  $By$  thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng  $BC$ , không chứa  $A$  sao cho  $\widehat{CBY} = \widehat{CBA}$ . Đường thẳng  $By$  cắt đường thẳng  $AC$  tại  $D$ . Kẻ  $AH \perp BD$  tại  $H$ . Tính góc  $\widehat{CHD}$ ".

Với bài toán này ta phải xét hai trường hợp:

TH1.  $\widehat{A} > 90^\circ$ , ta có kết quả như đã trình bày ở trên.

TH2.  $45^\circ < \widehat{A} < 90^\circ$  ta có kết quả  $\widehat{CHD} = 135^\circ$ . Các bạn tự xét thêm bài toán mở rộng của bạn Cường khi  $\widehat{A} < 45^\circ$ .

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả:

Hòa Bình: Bùi Minh Đức, 7A, THCS Chi Nê, Lạc Thủy; Vinh Phúc: Kim Đình Sơn, 7D, THCS Liên Bảo, TX. Vinh Yên; Nghệ An: Nguyễn Anh Tú, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Phạm Lê Nhật Hoàng, 7A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; Nguyễn Thị Thúy, 7B, THCS Hạnh Lâm; Quảng Ngãi: Lương Thị Yến Anh, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng; TP. Hồ Chí Minh: Lê Đức Thuận, 7A6, THCS Trần Đại Nghĩa, Q. Phú Nhuận; Hà Tĩnh: Nguyễn Trung Thành, 7D, THCS TT Kỳ Anh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

**Bài T3/336.** Nếu một tam giác vuông có số đo chiều dài các cạnh là các số nguyên thì số đo diện tích tam giác đó có thể là số chính phương không?

**Lời giải.** Giả sử tồn tại tam giác vuông có số đo chiều dài các cạnh  $a, b, c$  ( $a$  là cạnh huyền) là số nguyên mà số đo diện tích  $S$  là số chính phương, nghĩa là  $a^2 = b^2 + c^2$  và  $bc = 2S = 2k^2$  ( $k$  nguyên dương). Xét tam giác thỏa mãn điều kiện đó mà có cạnh huyền nhỏ nhất và  $a, b, c$  đôi một nguyên tố cùng nhau (vì nếu  $a, b, c$  có ước chung lớn hơn 1 thì chia chúng cho ước chung đó). Vậy có số nguyên dương  $m, n$  khác tính chẵn lẻ, nguyên tố cùng nhau mà  $a = m^2 + n^2, b = m^2 - n^2, c = 2mn$  (bạn đọc tự chứng minh hoặc xem bài Phương pháp lùi vô hạn trong THPT số 310 tháng 4.2003).

Từ  $S = bc : 2$  suy ra  $(m+n)(m-n)mn = k^2$ .

Vì  $(m, n) = 1$  và  $m, n$  khác tính chẵn lẻ nên  $(m+n, m) = (m+n, n) = (m-n, m) = (m-n, n) = 1$ . Gọi  $d = (m+n, m-n)$  thì  $d$  lẻ là ước của  $2m, 2n$  nên  $d = 1$ . Vậy  $m+n, m-n, m, n$  đôi một nguyên tố cùng nhau mà tích của chúng bằng  $k^2$  nên (theo sự phân tích ra thừa số nguyên tố) có bốn số nguyên dương  $x, y, z, t$  thỏa mãn:

$m+n = x^2, m-n = y^2, m = z^2, n = t^2$ . Suy ra

$$\begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2) = 4m = (2z)^2 \\ (x+y)(x-y) = 2 = (x^2 - y^2) : 2 = n = t^2 \\ 2z = 2\sqrt{m} < m^2 < m^2 + n^2 = a \text{ (vì } m \geq 2). \end{cases}$$

Vậy tam giác vuông cạnh  $2z, x+y, x-y$  có số đo diện tích là số chính phương mà cạnh huyền  $2z < a$ : vô lí.

Vậy diện tích tam giác vuông có số đo các cạnh là số nguyên không thể là số chính phương.

**Nhận xét.** 1) Có bạn đưa sai công thức nghiệm của phương trình Py-ta-go. Một số bạn lập luận dài hoặc thiếu chặt chẽ. Chẳng hạn:  $(m, n) = 1 \Rightarrow (m+n, m-n) = 1$ ; hoặc:  $(m+n, m-n, m, n) = 1 \Rightarrow$  bốn số  $m+n, m-n, m, n$  đều chính phương (!)

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Quảng Trị: Trương Xuân Nhã, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà; Đắk Lắk: Võ Văn Tuấn, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; Thanh Hóa: Hoàng Đức Ý, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa.

HOÀNG TRỌNG HẢO

**Bài T4/336.** Giải hệ phương trình sau, trong đó  $a, b, c$  là các số dương cho trước:

$$\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{b}{z} = c - zx \\ \frac{b}{y} - \frac{c}{x} = a - xy \\ \frac{c}{z} - \frac{a}{y} = b - yz \end{cases}$$

**Lời giải.** Nhân các phương trình của hệ với  $c, a, b$ , theo thứ tự ta được

$$\begin{cases} \frac{ac}{x} - \frac{bc}{z} = c^2 - czx \\ \frac{ba}{y} - \frac{ca}{x} = a^2 - axy \\ \frac{cb}{z} - \frac{ab}{y} = b^2 - byz \end{cases}$$

## GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Cộng theo từng vế ba phương trình này ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = axy + byz + czx \quad (1)$$

Mặt khác, quy đồng mẫu số các phương trình của hệ đã cho ta được:

$$\begin{cases} az - bx = cxz - x^2 z^2 \\ bx - cy = axy - x^2 y^2 \\ cy - ax = bzy - y^2 z^2 \end{cases}$$

Cộng theo từng vế ba phương trình này ta có:

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 = axy + byz + czx \quad (2)$$

Cộng theo từng vế (1) và (2) ta được:

$$(a - xy)^2 + (b - yz)^2 + (c - zx)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow xy = a, yz = b, zx = c \quad (I)$$

Do  $a, b, c$  là các số dương nên từ (I) suy ra  $x, y, z$  cùng dấu. Từ đó

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{ac}{b}} \\ y = \sqrt{\frac{ab}{c}} \\ z = \sqrt{\frac{bc}{a}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{ac}{b}} \\ y = -\sqrt{\frac{ab}{c}} \\ z = -\sqrt{\frac{bc}{a}} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm  $(x, y, z)$  là:

$$\left( \sqrt{\frac{ac}{b}}; \sqrt{\frac{ab}{c}}; \sqrt{\frac{bc}{a}} \right), \left( -\sqrt{\frac{ac}{b}}; -\sqrt{\frac{ab}{c}}; -\sqrt{\frac{bc}{a}} \right).$$

**Nhận xét.** Đây là bài toán dễ, hầu hết các bạn đều giải đúng. Các bạn có lời giải gọn gàng là:

**Hà Tây:** Nguyễn Thế Tâm, 8A1, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hải Phòng:** Phạm Văn Dương, Phạm Văn Phương, đội 7, xã Thủy Sơn, Thủy Nguyên; **Nam Định:** Phạm Thị Diệp, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên, Nguyễn Duy Khánh, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh; **Khánh Hòa:** Võ Thái Thông, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Kiên Giang:** Võ Đức Huy, 8/4, THCS Lê Quý Đôn, Rạch Giá.

TRẦN HỮU NAM

### Bài T5/336. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left( \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \geq 2\sqrt{2}$$

trong đó  $a, b$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $a^2 + b^2 = 1$ .

**Lời giải.** Gọi vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh là  $A$ , ta có

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left( \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 = \frac{1-a+b}{b} + \frac{1+a-b}{2}.$$

Vì  $a^2 + b^2 = 1$  và  $a, b$  là các số dương nên  $0 < a < 1, 0 < b < 1$ . Do đó  $1 - a + b > 0, 1 + a - b > 0$ .

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương  $\frac{1-a+b}{b}$  và  $\frac{1+a-b}{a}$ , ta có

$$A \geq 2\sqrt{\frac{(1-a+b)(1+a-b)}{ab}} = 2\sqrt{\frac{1-a^2-b^2+2ab}{ab}} = 2\sqrt{\frac{2ab}{ab}} = 2\sqrt{2}.$$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ \frac{1-a+b}{b} = \frac{1+a-b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Nhận xét.**

1) Bài toán trên có thể giải bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Thanh Hóa:** Hoàng Đức Ý, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa; Cao Thanh Bình, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Trịnh Quang Thanh, 8B, THCS Hàm Rồng, Nguyễn Văn Hữu, 9C, THCS Nông Cống, Nguyễn Trọng Hùng, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn; Nghệ An: Trần Văn Phúc, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nguyễn Thị Hồng, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Hà Tây: Nguyễn Trung Nghĩa, 8C, THCS Thạch Thất, Trần Thị Thùy Trang, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền; Vinh Phúc: Nguyễn Đức Tâm, 9E, TX Phúc Yên, Kim Đình Sơn, 8D, TX Vinh Yên, Hoàng Minh Toàn, TX Vinh Yên; Hà Giang: Phạm Hùng Sơn, 8A, THCS TTtr Vị Xuyên; Kiên Giang: Võ Đức Huy, 8/4, THCS Lê Quý Đôn, TX Rạch Giá; Phú Thọ: Đào Đức Trung, 9A3, THCS Giấy Phong Châu; Hưng Yên: Lương Xuân Huy, 8A, THCS Tiên Lữ; Nam Định: Cao Mạnh Hùng, 9A, THCS Yên Định, Hải Hậu; Quảng Bình: Phan Hồng Sơn, 8A, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

**Bài T6/336.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với H là trực tâm. Chứng minh rằng:

$$\frac{HA}{BC} + \frac{HB}{CA} + \frac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}.$$

Bất đẳng thức xảy ra khi nào?

## GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

**Lời giải.** Đặt  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ ,  $x = AH$ ,  $y = BH$ ,  $z = CH$ . Kí hiệu  $S$  là diện tích.

Ta có  $\triangle AFC \sim \triangle HEC$  nên  $\frac{HC}{AC} = \frac{CE}{CF}$ .

Từ đó  $\frac{HC \times HB}{AC \times AB} = \frac{CE \times HB}{CF \times AB} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự ta có :

$$\frac{HB \times HA}{AC \times BC} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$$

$$\frac{HA \times HC}{AB \times BC} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Nên } \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} =$$

$$= \frac{HA \times HB}{AC \times BC} + \frac{HB \times HC}{AC \times AB} + \frac{HC \times HA}{AB \times BC}$$

$$= \frac{S_{HBC} + S_{HAB} + S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{AH}{BC} = \frac{BH}{CA} = \frac{CH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Mặt khác } \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 \geq 3 \left( \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} \right) = 3$$

$$(\text{CM trên và do } \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 + \left( \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right)^2 + \left( \frac{z}{c} - \frac{x}{a} \right)^2 \geq 0).$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \geq \sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{AH}{BC} = \frac{BH}{CA} = \frac{CH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{HF}{CF} = \frac{HD}{AD} = \frac{HE}{BE} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow AD, BE, CF$  là trung tuyến. Khi đó tam giác  $ABC$  là đều.

**Nhận xét.** Giải tốt bài này có các bạn :

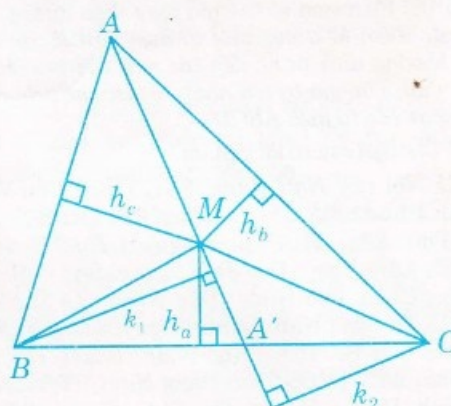
**Phú Thọ :** Nguyễn Tiến Thanh, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Văn Quang, 9C, THCS Tự Lập, Mê Linh ; **Hải Dương :** Nguyễn Huy Hoàng, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành ; **Hưng Yên :** Lương Xuân Huy, 8A, THCS Tiên Lữ ; **Lê Thị Nguyệt,** 8A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hà Nội :** Đỗ Như Milan, 8A1, THCS Chu Văn An ;

**Nam Định :** Phạm Phi Diệp, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên, Vũ Ngọc Trung, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Nguyễn Duy Khánh, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trục Ninh ; **Quảng Trị :** Nguyễn Thị Sách, 8A, THCS Gio Mai, Gio Linh ; **Khánh Hòa :** Võ Thái Thông, 9/4, trường Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

VŨ KIM THỦY

**Bài T7/336.** Trong tam giác  $ABC$  lấy điểm  $M$  bất kì. Đặt  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Gọi  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là các khoảng cách từ  $M$  đến các đường thẳng  $BC, CA, AB$ . Tìm vị trí của điểm  $M$  để tích  $h_a h_b h_c$  đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó theo  $a, b, c$ .

**Lời giải.** (Của nhiều bạn)



Kí hiệu  $S$  là diện tích,  $p$  là nửa chu vi tam giác  $ABC$ . Vì điểm  $M$  nằm trong tam giác  $ABC$  nên

$$ah_a + bh_b + ch_c = 2S \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương  $ah_a, bh_b, ch_c$  ta có :

$$(ah_a)(bh_b)(ch_c) \leq \left( \frac{ah_a + bh_b + ch_c}{3} \right)^3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } h_a h_b h_c \leq \frac{8S^3}{27abc} \quad (3)$$

Theo công thức Hê-rông từ (3) có

$$h_a h_b h_c \leq \frac{8 \left( \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \right)^3}{27abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $ah_a = bh_b = ch_c$ . Lúc đó nếu gọi  $A'$  là giao điểm của đường

# GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

thẳng  $AM$  với cạnh  $BC$ ;  $k_1, k_2$  lần lượt là khoảng cách từ  $B, C$  đến đường thẳng  $AA'$  thì  $\frac{A'B}{A'C} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{c.h_c}{b.h_b} = 1$ . Suy ra  $AA'$  là đường trung tuyến của  $\triangle ABC$ . Lập luận tương tự ta thấy  $M$  nằm trên các đường trung tuyến của  $\triangle ABC$ , và do đó  $M$  là trọng tâm của tam giác này.

Vậy giá trị lớn nhất của tích  $h_a.h_b.h_c$  bằng  $\frac{8(\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)})^3}{27abc}$  đạt được khi và chỉ khi  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ .

## Nhận xét.

1) Bài toán trên có thể mở rộng theo hướng: *Tìm vị trí của điểm  $M$  trong khối tứ diện  $ABCD$  sao cho tích các khoảng cách từ nó đến các mặt của tứ diện này là lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo thể tích, diện tích các mặt của tứ diện  $ABCD$ .*

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

**Hà Nội:** Đỗ Như Milan, 8A1, THCS Chu Văn An; **Vinh Phúc:** Ngô Thị Lệ Hằng, 9D, THCS Xuân Hòa, TX Phúc Yên; **Phú Thọ:** Nguyễn Thị Thu Hà, 8A1, THCS Lâm Thao, Đào Đức Trung, 9A3, THCS Giáy Phong Châu, Phù Ninh; **Bắc Ninh:** Lê Thế Tài, 9B, THCS Từ Sơn; **Nam Định:** Nguyễn Duy Khánh, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh, Phạm Thị Phương Thanh, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định; **Thanh Hóa:** Hoàng Thị Thủy Trang, 6B, THCS Hoàng Trinh, Hoàng Hóa, Hoàng Đức Ý, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa; **Nghệ An:** Phạm Anh Minh, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nguyễn Đức Công, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** Trương Xuân Nhã, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà; **Đà Nẵng:** Nguyễn Như Quốc Trung, Nguyễn Như Đức Trung, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt, Quận Hải Châu; **Khánh Hòa:** Võ Thái Thông, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

HỒ QUANG VINH

**Bài T8/336.** Cho  $p$  là số nguyên tố lẻ và đa thức  $Q(x) = (p-1)x^p - x - 1$ . Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương  $a$  sao cho  $Q(a)$  chia hết cho  $p^p$ .

**Lời giải.** • **Nhận xét:** Trong tập số  $\{1, 2, \dots, p^p\}$  gồm  $p^p$  số, giả sử có hai số  $u, v$  khác nhau thì  $Q(u) \not\equiv Q(v) \pmod{p^p}$ .

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng. Giả sử có  $Q(u) \equiv Q(v) \pmod{p^p}$

$$\Leftrightarrow (p-1)u^p - u - 1 \equiv (p-1)v^p - v - 1 \pmod{p^p}$$

$$\Leftrightarrow (p-1)(u^p - v^p) - (u - v) \equiv 0 \pmod{p^p} \quad (1)$$

Theo định lý nhỏ Phéc-ma thì  $u^p \equiv u \pmod{p}$  và  $v^p \equiv v \pmod{p}$  với  $p$  là số nguyên tố nên  $u^p - v^p \equiv u - v \pmod{p}$ . Từ đó và (1) suy ra  $(p-2)(u-v) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow u \equiv v \pmod{p} \quad (2)$

Cũng từ (1) có

$$(u-v)((p-1)(u^{p-1} + u^{p-2}v + \dots + uv^{p-2} + v^{p-1}) - 1) \equiv 0 \pmod{p^p}.$$

Từ đó và (2) suy ra

$(u-v)((p-1).p.u^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p^p}$  nên phải có  $u - v \equiv 0 \pmod{p^p}$  điều này mâu thuẫn với điều giả sử  $u \not\equiv v \pmod{p^p}$ . Vậy nhận xét được chứng minh.

• Từ nhận xét trên suy ra trong tập số  $\{1, 2, \dots, p^p\}$  gồm  $p^p$  số thì tồn tại duy nhất một số  $a$  sao cho  $Q(a) \equiv 0 \pmod{p^p}$  hay  $Q(a): p^p$ .

• Xét dãy số dạng  $a_k = a + k.p^p$  với  $k = 0, 1, 2, \dots$  dễ thấy rằng  $Q(a_k) \equiv Q(a) \equiv 0 \pmod{p^p}$  nghĩa là tồn tại vô hạn số  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) thỏa mãn  $Q(a_k)$  chia hết cho  $p^p$ .

**Nhận xét.** 1) Đa số các bạn cho lời giải đúng. Một số bạn chọn dãy số  $(a_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) như sau:

$$a_0 = \frac{p-1}{2} \text{ và } a_n = a_{n-1} + Q(a_{n-1}) \text{ với } n = 1, 2, \dots, \text{ rồi}$$

chứng minh bằng quy nạp rằng  $Q(a_n): p^n$ , từ đó cho  $n = p$  thì chứng minh được nhận xét đã nêu trong lời giải trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Phú Thọ:** Trần Huy Đức, 12 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vinh Phúc:** Vũ Văn Quang, 12A1, Lê Công Truyền, Nguyễn Văn Ngọc, Nguyễn Xuân Thọ, 11A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Hà Tây:** Nguyễn Xuân Việt, 10 Toán, THPT Nguyễn Huệ; **Hà Nội:** Đào Văn Thịnh, 10A1, PTCTT, ĐHSP Hà Nội, Nguyễn Trọng Nhật Quang, 11A1 Toán, Hà Minh Tuấn, 10A2 Toán, PTCTT, ĐHKHTN Hà Nội; **Hải Dương:** Vũ Xuân Dương, 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi, Hoàng Văn Hùng, 11A1, THPT Kinh Môn; **Nghệ An:** Hoàng Thị Thủy, 11A1, PTCTT, ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** Lê Nam Trường, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** Thái Thị Thu Trang, 10A, THPT Vinh Linh, Nguyễn Hải Thạch, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Trương Xuân Nhã, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Quốc Việt, 11T, Lương Bá Linh, 12T,

## GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** Nguyễn Tuấn Dũng, 10A, THPT Phan Chu Trinh, Xuân Lộc, Sông Cầu; **Khánh Hòa:** Nguyễn Thị Hoàng Oanh, 10 Toán, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **TP Hồ Chí Minh:** Nguyễn Tuấn Tú, 11CT, THPT Lê Hồng Phong, Nguyễn Gia Luyện, 9/8 THCS Nguyễn Du, Gò Vấp, Vương Tất Đạt, 10 Toán, THPT NK ĐHQG TP Hồ Chí Minh; **Cần Thơ:** Nguyễn Minh Cường, Lâm Bá Lê Trường, 10A1, Võ Quốc Bá Cẩn, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

VIỆT HẢI

### Bài T9/336. Giải phương trình

$$x^4 + 4ax^3 + 6b^2x^2 + 4c^3x + 1 = 0$$

trong đó  $a, b, c$  là các số thực dương,  $a \leq 1$ , biết rằng phương trình này có bốn nghiệm thực.

**Lời giải.** Do các hệ số của PT đều dương và theo giả thiết thì PT có bốn nghiệm  $x_1, x_2, x_3, x_4$  đều thực, nên cả bốn nghiệm này đều âm. Suy ra

$$-x_1 > 0, -x_2 > 0, -x_3 > 0, -x_4 > 0.$$

Theo định lý Vi-ét thì

$$\begin{cases} (-x_1) + (-x_2) + (-x_3) + (-x_4) = 4a \\ (-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4) = 1. \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si,

$$\begin{aligned} [(-x_1) + (-x_2) + (-x_3) + (-x_4)]^4 &\geq \\ &\geq 4^4 (-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4), \end{aligned} \quad (1)$$

ta thu được  $(4a)^4 \geq 4^4$ , hay  $a \geq 1$ . Kết hợp với giả thiết  $0 < a \leq 1$ , ta được  $a = 1$ .

Khi đó thì (1) xảy ra dấu đẳng thức, suy ra  $(-x_1) = (-x_2) = (-x_3) = (-x_4)$

$$\text{và } (-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4) = 1.$$

Vậy nên  $(-x_1) = (-x_2) = (-x_3) = (-x_4) = 1$  và ta thu được cả bốn nghiệm của phương trình đều bằng  $-1$ .

**Nhận xét.** Đây là một bài toán không khó và có thể giải chỉ bằng kiến thức toán trung học cơ sở nên có rất nhiều bạn học sinh THCS tham gia giải. Các bạn sau có lời giải tốt:

**Phí Quốc Tuấn**, 9D Toán, THCS Thạch Thất, Hà Tây; **Phan Hồng Sơn**, Phùng Phi Hùng, 9A, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch, **Phạm Tiến Đồng**, 10, THPT chuyên **Quảng Bình**; **Nguyễn Như Quốc Trung**, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt, **Đà Nẵng**; **Nguyễn Thị Ngọc**, 6A, THCS Yên Lạc, **Vinh Phúc**; **Phạm Thành Thái**, **Nguyễn Quốc Thắng**, **Vũ Xuân Dương**, 10T, THPT

**Nguyễn Trãi**, **Hải Dương**; **Trần Văn Huỳnh**, 10, THPT Ngô Gia Tự, **Lập Thạch**, **Trần Trung Dũng**, **Phùng Đình Phúc**, **Nguyễn Khắc Tùng**, 10A1, THPT chuyên **Vinh Phúc**; **Trần Khánh Hoàn**, 10A1, THPT Yên Mỹ, **Phạm Tiến Dũng**, 10 THPT chuyên **Hưng Yên**; **Dương Minh Hùng**, **Nguyễn Quang Phương**, **Nguyễn Xuân Việt**, 10T, THPT Nguyễn Huệ, **Hà Tây**; **Nguyễn Trí Hiếu**, 10T, THPT chuyên **Bắc Ninh**; **Hà Minh Tuấn**, 10A1, THPT chuyên, ĐHKHTN; **Đào Văn Thịnh**, 10A1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Đỗ Thanh Tùng**, 10T, THPT chuyên Nguyễn Du, **Đắk Lắk**; **Nguyễn Mạnh Hùng**, 10C10, THPT Phạm Ngũ Lão, **Hải Phòng**; **Đinh Văn Sơn**, 10, THPT chuyên **Hà Tĩnh**; **Lê Hữu Điền Khuê**, 10T, THPT Quốc học Huế, **Thừa Thiên - Huế**; **Hoàng Đức Trung**, 10, THPT chuyên **Bắc Giang**; **Lê Văn Chánh**, 10, THPT chuyên **Bến Tre**; **Trương Huy Tiếp**, 10, THPT chuyên **Đà Nẵng**; **Nguyễn Tiến Dũng**, 10, THPT chuyên **Phú Yên**; **Hoàng Trung Tính**, 10, THPT chuyên **Quảng Ngãi**; **Thái Thị Thu Trang**, 10, THPT Vinh Linh, **Quảng Trị**; **Hoàng Thị Hoàng Anh**, 10, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**; **Hoàng Vũ Hạnh**, 10, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.

NGUYỄN VĂN MẬU

### Bài T10/336. Tính tổng gồm $2n$ số hạng:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \dots + (-1)^k \frac{1}{k}C_{2n}^{k-1} + \dots \\ &+ (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}, \end{aligned}$$

trong đó  $C_n^k$  là các hệ số của sự khai triển nhị thức Newton.

**Lời giải.** Nhận xét: Với mọi  $k = 2, 3, \dots, 2n+1$  ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}C_{2n}^{k-1} &= \frac{1}{k} \cdot \frac{(2n)!}{(k-1)!(2n-k+1)!} = \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} = \frac{C_{2n+1}^k}{2n+1}. \text{ Do đó:} \\ S &= \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k \cdot \frac{C_{2n+1}^k}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot \left( \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k C_{2n+1}^k - C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} \left( (1-1)^{2n+1} - 1 + 2n+1 \right) = \frac{2n}{n+1}. \end{aligned}$$

**Nhận xét.** Đây là bài toán đơn giản, cơ bản. Nhiều bạn giải theo cách phức tạp hơn: dùng đạo hàm hoặc tích phân. Các bạn lớp 10 sau có lời giải tốt:

## GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

**Thái Nguyên :** Trần Tuấn Nghĩa, 10T, THPT chuyên ; **Hà Nội :** Hà Minh Tuấn, 10A2, PTCTT ĐHKHTN, Đào Văn Thịnh, 10A1, PTCTT ĐHSP ; **Hà Tây :** Trần Ngọc Thắng, 10T, THPT Nguyễn Huệ ; **Hải Dương :** Vũ Xuân Dương, Phạm Thành Thái, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Văn Huy, 10A1, THPT Xuân Hòa, TX. Phúc Yên ; Trần Văn Huỳnh, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch ; Ngô Tuấn Anh, 10A9, Trần Trung Dũng, Phùng Đình Đức, 10A1, THPT chuyên ; **Nam Định :** Đinh Quang Huy, 10T, THPT Lê Hồng Phong ; **Thanh Hóa :** La Tiến Nam, 10A1, THPT Thiệu Hóa ; **Quảng Bình :** Đặng Ngọc Thanh, 10T, THPT chuyên ; **TP Hồ Chí Minh :** Nguyễn Viết Huân, 10T, THPT Nguyễn Thượng Hiền, Lê Bùi Tiến Duy, 10T, THPT Lê Hồng Phong ; **Phú Yên :** Nguyễn Tuấn Dũng, 10A, THPT Phan Chu Trinh, Trần Hồ Thanh Phú, 10T, THPT Lương Văn Chánh ; **Đắk Lắk :** Nguyễn Hữu Hiếu, Đỗ Thanh Tùng, 10T, THPT Nguyễn Du ; **Khánh Hòa :** Nguyễn Thị Hoàng Oanh, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang.

NGUYỄN MINH ĐỨC

**Bài T11/336. Chứng minh rằng với tam giác ABC bất kì luôn có :**

$$a) \cos A + \cos B + \cos C + \cotg A + \cotg B + \cotg C \geq \frac{3}{2} + \sqrt{3} ; \quad (*)$$

$$b) \sqrt{3}(\cos A + \cos B + \cos C) + \cotg(A/2) + \cotg(B/2) + \cotg(C/2) \geq \frac{9\sqrt{3}}{2} \quad (**)$$

**Lời giải.** (Dựa theo Vũ Văn Quang, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**).

Trước hết, để được gọn gàng trong việc trình bày ta sử dụng các kí hiệu sau :

Kí hiệu

$$f_1 = \sum \cos A = \cos A + \cos B + \cos C ;$$

$$f_2 = \sum \cotg A = \cotg A + \cotg B + \cotg C ;$$

$$f_3 = \sum \cotg \frac{A}{2} = \cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} ;$$

$$\prod \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}, \dots$$

trong đó  $0 < A, B, C$  và  $A + B + C = \pi$ .

Thế thì các vế trái của các BĐT (\*) và (\*\*) theo thứ tự có dạng :

$$f = f(A, B, C) = f_1 + f_2 ;$$

$$g = g(A, B, C) = \sqrt{3}f_1 + f_3 .$$

Ta sử dụng các kết quả sau :

$$\sum \cos A = 1 + 4 \prod \sin \frac{A}{2} \quad (1)$$

$$\sum \cotg A = \frac{\sum \sin^2 A}{2 \prod \sin A} \quad (2)$$

$$\sum \cotg \frac{A}{2} = \frac{\sum \sin A}{4 \prod \sin \frac{A}{2}} \quad (3)$$

$$\prod \sin \frac{A}{2} \leq \frac{1}{8} \quad (4) \quad \prod \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (5)$$

$$\prod \cotg \frac{A}{2} \geq 3\sqrt{3} \quad (6).$$

Bây giờ áp dụng BĐT Cô-si cho bốn số dương

$$\frac{\sin A}{2 \sin B \sin C}, \frac{\sin B}{2 \sin C \sin A}, \frac{\sin C}{2 \sin A \sin B} \text{ và}$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ rồi đến bốn số dương :}$$

$$\frac{\sin A}{4 \prod \sin \frac{A}{2}}, \frac{\sin B}{4 \prod \sin \frac{A}{2}}, \frac{\sin C}{4 \prod \sin \frac{A}{2}}$$

$$\text{và } 8\sqrt{3} \cdot \prod \sin \frac{A}{2},$$

đồng thời sử dụng các BĐT (4), (5) và (6) ta lần lượt thu được các BĐT sau đây :

$$\begin{aligned} \sum \cotg A + \frac{8}{\sqrt{3}} \left( \prod \sin \frac{A}{2} \right) &\geq \\ &\geq 4 \sqrt[4]{\frac{\prod \sin A}{\sqrt{3} \prod \sin A}} = 4 \sqrt[4]{\frac{1}{8\sqrt{3} \prod \cos \frac{A}{2}}} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \cotg \frac{A}{2} + 8\sqrt{3} \left( \prod \sin \frac{A}{2} \right) &\geq 4 \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3} \prod \sin A}{8 \left( \prod \sin \frac{A}{2} \right)^2}} = 4 \sqrt[4]{\sqrt{3} \prod \cotg \frac{A}{2}} \geq 4\sqrt{3} \quad (ii) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\triangle ABC$  là đều.

• Cuối cùng, từ (1), (2), (i) và (4), ta được BĐT (\*) cần tìm. Thật vậy :

## GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$\begin{aligned} f &= \sum \cot g A + \sum \cos A \\ &= \left[ \sum \cot g A + \frac{8}{\sqrt{3}} \left( \prod \sin \frac{A}{2} \right) \right] + 1 - \left( \frac{8}{\sqrt{3}} - 4 \right) \prod \sin \frac{A}{2} \geq \\ &\geq \frac{4\sqrt{3}}{3} + 1 - \left( \frac{8}{\sqrt{3}} - 4 \right) \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

• Từ (1), (3), (ii) và (4), ta được BDT (\*\*) cần tìm. Thật vậy:

$$\begin{aligned} g &= \sum \cot g \frac{A}{2} + \sqrt{3} (\sum \cos A) \\ &= \sum \cot g \frac{A}{2} + 8\sqrt{3} \left( \prod \sin \frac{A}{2} \right) + \sqrt{3} \left( 1 + 4 \prod \sin \frac{A}{2} \right) - \\ &- 8\sqrt{3} \left( \prod \sin \frac{A}{2} \right) \\ &= \left[ \sum \cot g \frac{A}{2} + 8\sqrt{3} \left( \prod \sin \frac{A}{2} \right) \right] + \sqrt{3} - 4\sqrt{3} \left( \prod \sin \frac{A}{2} \right) \\ &\geq 4\sqrt{3} + \sqrt{3} - 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra ở (\*) và (\*\*) khi và chỉ khi  $\Delta ABC$  là đều. Bài toán đã được giải xong.

**Nhận xét.** 1) Nếu chúng ta để ý rằng những hàm lượng giác  $f_1 = f_1(A, B, C)$ ,  $f_2 = f_2(A, B, C)$ ,  $f_3 = f_3(A, B, C)$  của ba biến số dương  $A, B, C$  không độc lập mà ràng buộc với nhau bởi đẳng thức  $A+B+C = \pi$ , với  $\text{Max} f_1 = M_1 = \frac{3}{2}$ ,  $\text{min} f_2 = m_2 = \sqrt{3}$  và  $\text{min} f_3 = m_3 = 3\sqrt{3}$ , thì bài toán T11/336 trên đây cho ta biết rằng:

Các hàm lượng giác  $f(A, B, C) = f_1(A, B, C) + f_2(A, B, C)$  và  $g(A, B, C) = \sqrt{3} f_1(A, B, C) + f_3(A, B, C)$  của ba biến số dương  $A, B, C$  phụ thuộc điều kiện  $A+B+C = \pi$  và theo thứ tự có cực tiểu  $f_{\min} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$  và  $g_{\min} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{3} + 3\sqrt{3}.$$

Lại để ý rằng:

$$\text{min} f = \frac{3}{2} + \sqrt{3} = M_1 + m_2 \text{ và } \text{min} g = \frac{3}{2} \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \sqrt{3} M_1 + m_3,$$

trong đó  $M_1 = \frac{3}{2} < m_2 = \sqrt{3}$ , cũng như  $\sqrt{3} M_1 = \frac{3}{2} \sqrt{3} < m_3 = 3\sqrt{3}$ , đồng thời  $f(A, B, C)$  và  $g(A, B, C)$  đều đạt cực tiểu tại  $A = B = C = \left( -\frac{\pi}{3} \right)$  đồng thời với  $f_1(A, B, C)$  đạt cực đại và  $f_2(A, B, C)$  cũng như  $f_3(A, B, C)$  đạt cực tiểu với cùng giá trị  $A = B = C = \left( -\frac{\pi}{3} \right)$ .

Bạn Phan Tiến Dũng, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên đã phát biểu bài toán tổng quát hơn:

Giả sử  $r_1, r_2, r_3$  là những số thực dương và  $f, g, f_1, f_2, f_3$  là những hàm lượng giác của ba biến dương  $A, B, C$  ( $A + B + C = \pi$ ) được kí hiệu như trong lời giải ở trên. Thế thì:

a) Nếu  $f = r_1 f_1 + r_2 f_2$  và  $r_1 M_1 \leq r_2 m_2$  thì:

$$f \text{ đạt } f_{\min} = m' = r_1 M_1 + r_2 m_2.$$

b) Nếu  $g = r_1 f_1 + r_2 f_3$  và  $r_1 M_1 \leq r_2 m_3$  thì:

$$g \text{ đạt } g_{\min} = m'' = r_1 M_1 + r_2 m_3.$$

Các bạn có thể xét thêm trường hợp  $r_1 M_1 > r_2 m_2$  và  $r_1 M_1 > r_2 m_3$ . Khi đó  $f$  và  $g$  có đạt cực trị không? Phải chăng, khi đó  $f$  và  $g$  đạt cực đại?

2) Một số bạn sử dụng phương pháp giải tích (khảo sát hàm số) lời giải quá dài, phức tạp và không chặt chẽ.

3) Đáng tiếc có một số bạn đã phạm sai lầm cơ bản về suy luận logic. Chẳng hạn, xuất phát từ  $f \geq \frac{3}{2} + \sqrt{3}$

(cần chứng minh) suy ra  $f_2 \geq \sqrt{3}$  (đúng) đã khẳng định rằng (\*) được chứng minh (!).

4) Ngoài hai bạn Vũ Văn Quang và Phan Tiến Dũng, các bạn sau đây có lời giải tốt.

Vinh Phúc: Nguyễn Xuân Thọ, 11A1, THPT chuyên;

Hưng Yên: Nguyễn Văn Thọ, 11 Toán, THPT chuyên;

Thanh Hóa: La Tiến Nam, 10A1, THPT Thiệu Hóa, Trần Văn Duy, 12A1, THPT Hậu Lộc 1.

**Ghi chú:** Trong phần nhận xét về bài T12/335 trên THPT tháng 9/2005 do sơ xuất đã in thiếu tên hai bạn Phan Tiến Dũng, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên và Nguyễn Trọng Nhật Quang, 11A1 Toán ĐHKHTN Hà Nội. Hai bạn đó đã có lời giải tốt, ngoài ra có nhận xét thêm rằng phương pháp sử dụng ba đường tròn đồng quy tại một điểm thuộc miền tam giác  $ABC$  còn giúp phát hiện và giải được một số bài toán có liên quan.

NGUYỄN DĂNG PHÁT

**Bài T12/336.** Cho hình tứ diện  $ABCD$ . Lấy điểm  $M$  nào đó nằm trong tam giác  $ABC$  và các điểm  $A', B', C'$  lần lượt thuộc  $DA, DB, DC$  sao cho  $MA', MB', MC'$  theo thứ tự song song với các mặt phẳng  $(DBC), (DCA), (DAB)$ . Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $A'B'C'D$  luôn đi qua một điểm cố định khác điểm  $D$  khi  $M$  chạy trong miền tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.** Trước hết xin phát biểu và chứng minh hai bổ đề sau đây

**Bổ đề 1.** Cho điểm  $O$ , số  $k$ , và vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $\vec{OM} \cdot \vec{a} = k$  là một mặt phẳng.

## GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

**Chứng minh :**

Lấy điểm

$M_0$  xác định

mà  $\overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{a} = k$

(có rất nhiều điểm  $M_0$  như vậy). Ta thấy :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = k$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{a}$$

Hình 1

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}) \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{a} = 0.$$

$\Leftrightarrow M$  thuộc mặt phẳng qua  $M_0$ , vuông góc với  $\vec{a}$ .

**Bổ đề 2.** Cho góc tam diện  $Oxyz$  và ba số dương  $a, b, c$ . Các điểm  $A, B, C$  theo thứ tự thay đổi trên  $Ox, Oy, Oz$  sao cho :

$$a.OA + b.OB + c.OC = 1.$$

Khi đó, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $OABC$  luôn đi qua một điểm cố định khác  $O$ .

**Chứng minh :** Gọi  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  là các vectơ đơn vị theo thứ tự cùng hướng với các tia  $Ox, Oy, Oz$ . Gọi  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $OABC$ . Gọi  $H, K, L$  là hình chiếu của  $I$  trên  $Ox, Oy, Oz$  (h. 1). Đương nhiên,  $H, K, L$  là trung điểm của  $OA, OB, OC$  (1).

Từ (1), ta có :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z \\ &= a.\overrightarrow{OI} \cdot \vec{e}_x + b.\overrightarrow{OI} \cdot \vec{e}_y + c.\overrightarrow{OI} \cdot \vec{e}_z \\ &= a.OH + b.OK + c.OL \text{ (định lý hình chiếu)} \\ &= \frac{1}{2}(a.OA + b.OB + c.OC) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Từ đó, theo Bổ đề 1,  $I$  luôn thuộc mặt phẳng  $(P)$  cố định xác định bởi điểm  $O$  và vectơ hàng  $a.\vec{e}_x + b.\vec{e}_y + c.\vec{e}_z$  (2).

Gọi  $N$  là điểm đối xứng của  $O$  qua  $(P)$ . Theo (2),  $N$  cố định. Theo tính chất đối xứng của mặt cầu, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $OABC$  luôn đi qua điểm cố định  $N \neq O$ .

Trở lại việc giải bài toán (h. 2).

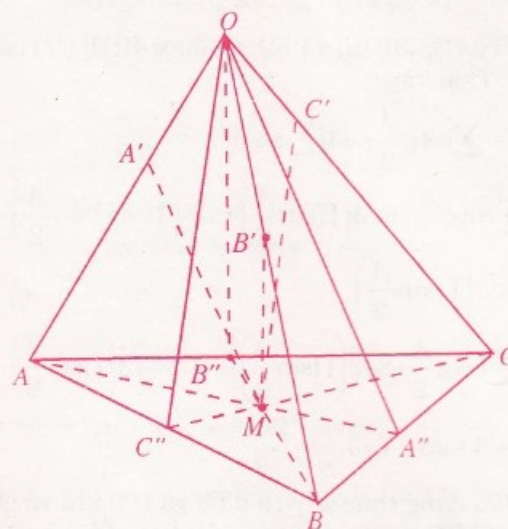
Gọi  $A'', B'', C''$  lần lượt là giao điểm của  $AM, BM, CM$  với  $BC, CA, AB$ . Vì  $MA', MB', MC'$  theo thứ tự song song với  $(OBC), (OCA),$

$(OAB)$  nên  $MA' \parallel OA'', MB' \parallel OB'', MC' \parallel OC''$ .

Từ đó, theo định lý Ta-lét, ta có :

$$\frac{OA'}{OA} + \frac{OB'}{OB} + \frac{OC'}{OC} = \frac{MA''}{AA''} + \frac{MB''}{BB''} + \frac{MC''}{CC''} = 1$$

(kết quả quen thuộc).



Hình 2

Áp dụng bổ đề 2 cho góc tam diện  $OABC$ , ba số dương  $\frac{1}{OA}, \frac{1}{OB}, \frac{1}{OC}$  và ba điểm  $A', B', C'$  ta có mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $OA'B'C'$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Nhận xét.** Đây là bài toán khó. Lời giải của các bạn đều khá dài và phức tạp. Các bạn sau có lời giải tốt.

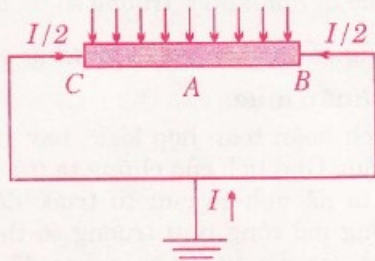
**Vĩnh Phúc :** Vũ Văn Quang, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; Trần Văn Huỳnh, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Khánh Hòa :** Nguyễn Thị Hoàng Oanh, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Nhà Trang; **Cần Thơ :** Võ Quốc Bá Cẩn, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN MINH HÀ

**Bài L1/336.** Một thanh dẫn điện đồng nhất, hai đầu thanh được nối đất như hình vẽ. Người ta chiếu một chùm electron lên bề mặt thanh dẫn. Số electron rơi vào bề mặt của thanh trên 1cm trong 1s là như nhau. Điện trở của thanh là  $R$ , cường độ dòng điện trên đoạn nối đất là  $I$ . Gọi  $A$  là trung điểm của thanh,  $B$  là điểm cuối thanh. Tìm hiệu điện thế  $U_{AB}$ .

**Lời giải.** Do tính đối xứng nên cường độ dòng điện tại  $B$  và  $C$  là  $I/2$  (chiều như hình

## GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC



vẽ). Vì số electron rơi lên thanh trên 1cm trong 1s như nhau nên cường độ dòng điện tại điểm cách A một khoảng  $x$  là:  $i_x = \frac{I}{2} \cdot \frac{x}{l/2} = \frac{I \cdot x}{l}$  (trong đó  $l$  là chiều dài thanh BC). Suy ra

$$dU = i_x dR = \frac{I \cdot x}{l} \cdot R \cdot \frac{dx}{l} = \frac{IR}{l^2} x dx$$

$$\text{Suy ra } U_{AB} = -\frac{IR}{l^2} \int_0^{l/2} x dx = -\frac{IR}{8} \text{ (có dấu trừ}$$

là do chiều dòng điện).

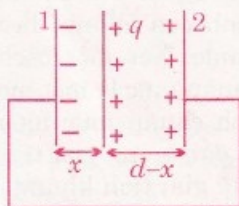
**Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng :

**Bắc Ninh :** Nguyễn Trọng Đạt, 12 Lí, THPT chuyên ; **Hà Nội :** Nguyễn Tuấn Tú, 10 Lí, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Tiền Giang :** Ngô Hải Đăng, 11 Lí, THPT chuyên ; **Hải Dương :** Lê Hoàng Dũng, 11 Lí, THPT Nguyễn Trãi ; **Nghệ An :** Hà Thủy Nguyên, A3, K32, THPT Phan Bội Châu ; **Vĩnh Phúc :** Vũ Quang Hòa, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

**Bài L2/336.** Một tụ điện phẳng chưa tích điện, điện môi là chân không, có điện dung  $C$ . Nối 2 bản tụ điện với nhau bằng một dây dẫn. Một bản kim loại mỏng, phẳng có kích thước bằng kích thước mỗi bản của tụ điện, được tích điện  $+q$ , đặt sát một trong hai bản tụ (hình vẽ). Tính công cần thiết để tịnh tiến bản kim loại đó theo phương vuông góc với các bản tụ đến vị trí cách đều các bản tụ.

Bỏ qua tác dụng của trọng lực với bản kim loại.



**Lời giải.** (Dựa theo Nguyễn Xuân Nam, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh). Kí hiệu 1, 2 là hai bản tụ điện ;  $d$  là khoảng cách giữa hai bản tụ điện và  $S$  là diện tích của mỗi

bản tụ điện và bản kim loại.

Xét bản kim loại cách bản 1 một khoảng  $x$ , cách bản 2 một khoảng  $(d - x)$ .

Cường độ điện trường do bản kim loại tích điện gây ra tại một điểm bất kì xung quanh nó

$$\text{là } E_o = \frac{q}{2\epsilon_0 S}.$$

Cường độ điện trường do mỗi bản tụ điện gây ra tại mỗi điểm có cùng cường độ  $E$ . Từ  $U_{12} = 0$ , ta có :

$$(-E - E - E_o)x + (-E - E + E_o)(d - x) = 0$$

$$\text{Suy ra : } 2E = E_o \left(1 - \frac{2x}{d}\right).$$

Như vậy, bản kim loại tích điện đặt trong điện trường gây bởi hai bản tụ điện có cường độ  $2E$ . Điện trường này tác dụng lên bản kim loại tích điện một lực :

$$F = 2Eq = qE_o \left(1 - \frac{2x}{d}\right).$$

Công của lực điện trường khi làm dịch chuyển bản kim loại một đoạn nhỏ  $dx$  là :

$$dA = Fdx = qE_o \left(1 - \frac{2x}{d}\right) dx \quad (1)$$

Công cần thiết để tịnh tiến bản kim loại đến vị trí cách đều hai bản tụ điện bằng công của lực điện trường, được tính bằng cách lấy tích phân phương trình (1) :

$$A = \int_0^{d/2} qE_o \left(1 - \frac{2x}{d}\right) dx = \frac{qE_o d}{4} = \frac{q^2 d}{8\epsilon_0 S}$$

$$\text{Vì } C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \text{ nên } A = \frac{q^2}{8C}.$$

**Nhận xét.** 1) Một số bạn dùng phương pháp năng lượng để giải bài toán này cũng cho kết quả đúng.

2) Ngoài bạn Nguyễn Xuân Nam, các bạn sau đây có lời giải tốt :

**Hải Phòng :** Phạm Tuấn Hiệp, 11 Lí, THPT năng khiếu Trần Phú ; **Tiền Giang :** Ngô Hải Đăng, 11 Lí, THPT Chuyên ; **Vĩnh Phúc :** Trần Ngọc Linh, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Phú Thọ :** Nguyễn Quang Huy, 12A1, THPT chuyên Phú Thọ ; **Thanh Hoá :** Nguyễn Tuấn Dương, 12T, THPT Lam Sơn.

ANH HOÀNG

Mời các bạn xem Kết quả Cuộc thi giải Toán và Vật lý trên THPT năm học 2004-2005 trên số báo 341 tháng 11 năm 2005.

## GIỚI THIỆU TOÁN CAO CẤP

# GIẢI TÍCH KHÔNG CHUẨN MỰC

DU ĐỨC THẮNG  
(GV. ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Thế kỉ XX vừa qua là thế kỉ của những cuộc cách mạng mang tính toàn cầu. Đó là cách mạng trong khoa học công nghệ, cách mạng trong kinh tế toàn thế giới, cách mạng trong nhận thức, trong tư tưởng, văn hóa, ... Toán học của thế kỉ XX cũng không phải là một ngoại lệ. Trong thế kỉ này, hàng loạt tư tưởng mới mang tính đột phá đã xuất hiện, tạo nên những thay đổi trong việc nghiên cứu Toán học hiện đại, đưa nó lên một tầm cao mới. Hòa vào cuộc cách mạng đó là sự ra đời của *Giải tích không chuẩn mực* (Non Standard Analysis - NSA).

Vào năm 1960, Abraham Robinson, giáo sư Toán thuộc trường đại học Princeton, đã sử dụng lý thuyết mô hình (model theory) để xuất một cách nhìn nhận các **đại lượng vô cùng bé, vô cùng lớn**, những cơ sở của khái niệm giới hạn, nền tảng của mọi khái niệm trong giải tích, như là các **số lí tưởng**, tức là các phần tử không phải là các số mà ta đã quen thuộc từ trước đến nay, nhưng tính chất của chúng là có thể lớn hơn hay bé hơn vô hạn so với mọi số thực (thông thường). Đây là sự cụ thể hóa ý tưởng về các phần tử lí tưởng của G.W.Leibniz. Các số lí tưởng vô cùng lớn và vô cùng bé so với mọi số thực thông thường được kí hiệu tương ứng là  $i$  - lớn và  $i$  - nhỏ, với  $i$  là viết tắt của ideally (lí tưởng). Với cách nhìn như vậy trường số thực  $\mathbb{R}$  có thể mở rộng thành trường số  ${}^*\mathbb{R}$  mà ở đó tính acsimet không thỏa mãn, tức là tồn tại những số "thực"  $a$   $i$  - lớn sao cho  $a > nb$ , với mọi  $b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Các số thực đã quen biết với chúng ta ( $x \in \mathbb{R}$ ) được gọi là số thực chuẩn mực. Nói cách khác các số thực đã được định nghĩa từ trước đến nay đều là chuẩn mực, ví dụ số 0 là chuẩn mực, số  $\pi$  là chuẩn mực, .... Ngược lại, các số thuộc  ${}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$  được gọi là các số (thực) không chuẩn mực, ví dụ như số  $\omega$   $i$  - lớn, số

$r + \varepsilon$  với  $r$  là số chuẩn mực và  $\varepsilon$  là  $i$  - nhỏ dương, tức là nhỏ hơn mọi số thực dương khác 0 ... Lúc đó ta nhận được trường số  ${}^*\mathbb{R}$  mở rộng của trường số thực  $\mathbb{R}$ , gọi là **trường số thực không chuẩn mực**.

Một cách hoàn toàn hợp logic, bây giờ ta có thể mở rộng Giải tích của chúng ta (tức là Giải tích mà ta đã nghiên cứu từ trước đến nay) theo hướng mở rộng như trường số thực : Ta gọi tất cả các đối tượng toán học đã biết từ trước đến nay, tức là những đối tượng toán học đã được định nghĩa theo một cách duy nhất nào đó là **chuẩn mực**, thêm vào đó ta đưa ra các đối tượng không chuẩn mực, ví dụ các số không chuẩn mực, các khoảng không chuẩn mực. Ví dụ :

- Hàm số  $\ln x$  là một hàm chuẩn mực với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , tức là một đối tượng chuẩn mực trên  $\mathbb{R}$ .

- Khoảng  $(\varepsilon, a)$  là một khoảng không chuẩn mực, với  $\varepsilon$  là một số  $i$  - nhỏ, ngoại trừ số 0 (là số  $i$  - nhỏ chuẩn mực duy nhất).

Lúc đó mở rộng của Giải tích Toán học được gọi là *Giải tích không chuẩn mực* (NSA). Các số lí tưởng là không chuẩn mực trong NSA và ta chỉ được ra rằng luôn tồn tại các phần tử không chuẩn mực trong một tập hợp chứa vô hạn phần tử. Trong giải tích không chuẩn mực, ta xây dựng hệ thống các phép toán, hệ thống tiên đề (mở rộng hệ tiên đề của lý thuyết tập hợp cổ điển) và các nguyên lí, từ đó phát biểu các khái niệm không chuẩn mực : khái niệm nội giới và ngoại giới (internal, external), khái niệm bóng (shadow) của một đối tượng toán học, hào quang (halo) và thiên hà (galaxy), .... Ta có thể hiểu một cách đơn giản rằng Giải tích không chuẩn mực được xây dựng dựa vào việc không sử dụng khái niệm giới hạn để định nghĩa các khái niệm mà thay vào đó là các khái niệm không chuẩn mực -  $i$ -nhỏ,  $i$ -lớn,  $i$ -gần, cùng hệ tiên đề mở rộng của nó.

Từ hệ thống những khái niệm, người ta có thể phát biểu những định nghĩa, tính chất của giải tích thông thường (gọi là giải tích chuẩn mực) và những chứng minh của chúng theo ngôn ngữ không chuẩn mực. Xét một cách tổng thể, giải tích không chuẩn mực là một mở rộng bảo toàn của giải tích chuẩn mực hiểu theo nghĩa những gì đúng đắn trong giải tích chuẩn mực vẫn đúng trong giải tích không

**BẠN CÓ BIẾT ?**

## ĐI TÌM MỘT Ý TƯỞNG MỚI VỀ PHÒNG ĐOÁN NHỮNG SỐ NGUYÊN TỔ SINH ĐÔI

Lần thứ hai trong một năm, một thông báo chứng minh một kết quả về sự phân bố những số nguyên tố bị tuyên bố vô hiệu lực. Sự phỏng đoán những số nguyên tố sinh đôi, nói rằng tồn tại vô số những cặp số nguyên tố dạng  $(p, p+2)$ , dường như còn có những triển vọng tốt sau này. Dưới đây, Gérald Tenenbaum, giáo sư trường đại học Henri-Poincaré (Nancy I, Pháp), trả lời phỏng vấn của tạp chí La Recherche về vấn đề trên.

**Hỏi:** Tháng 5.2004, sự thông báo một chứng minh về phỏng đoán những số nguyên tố sinh đôi phải chăng bị chôn vùi thật sự ?

G. Tenenbaum (G.T.). Sai lầm nói trong thông báo dường như khó chữa. Điều đó càng đáng tiếc khi ý tưởng xuất phát là hay. Nếu sự chứng minh đưa ra là đúng thì kỉ công tăng gấp đôi. Không chỉ có việc phỏng đoán đã được chứng minh mà sự chứng minh đó còn sử dụng những phương pháp "cổ điển", tức là chỉ với những công cụ mà lí thuyết ngày nay đã có.

**Hỏi :** Năm ngoái, Cem Yildirim và Dan Goldston đã thông báo rằng một kết quả về

phỏng đoán các số nguyên tố sinh đôi cũng đã bị tuyên bố vô hiệu lực. Phải chăng có một quan hệ gần gũi giữa hai sự kiện đó ?

G.T. Đây là một sự tiến bộ về sự ước lượng khoảng cách trung bình giữa hai cặp nguyên tố liên tiếp. Thực ra, Granville và Soundararajan đã nhận xét rằng nếu sự chứng minh đúng thì sẽ có thể suy ra một kết quả so sánh được với sự phỏng đoán những số nguyên tố sinh đôi, như tồn tại vô số những cặp số nguyên tố dạng  $(p, p+12)$ . Cả về những công trình này, cũng có một sự tiếp cận "cổ điển", do đó hơi đáng ngờ, mặc dù kết quả thông báo còn chưa nhiều thành tựu.

**Hỏi:** Như vậy, việc phỏng đoán những số nguyên tố sinh đôi hiện nay như thế nào ?

G.T. Người ta chờ mong những kết quả. Năm 1989, Antal Balog, ở Budapest, đã có những kết quả về sự phỏng đoán "khá quát", nghĩa là về những dãy số nguyên tố loại  $(p, p+2, p+6)$  hay những loại khác. Nhưng, mặc dù gây ấn tượng, những kết quả đó có một sự trình bày "lông lẻo" và chỉ cung cấp

(Xem tiếp trang 14)

chuẩn mực, đồng thời giải tích không chuẩn mực không đưa ra bất kì một tính chất hoàn toàn chưa có trong giải tích chuẩn mực. Mọi sự mở rộng đều nhằm mục đích cho ta thấy được sự khác nhau giữa những hiện tượng toán học mà ta không thể thấy được với cách nhìn của giải tích chuẩn mực, cũng như việc xem TV đen trắng (giải tích chuẩn mực) và TV màu (giải tích không chuẩn mực) đối với cùng một hình ảnh như nhau. Một ví dụ cụ thể là trường số thực, khi nhìn dưới góc độ chuẩn mực thì mọi số đều bình đẳng, nhưng khi xem xét dưới con mắt không chuẩn mực thì trường số thực  $\mathbb{R}$  được chia thành ba lớp khác nhau : các số  $i$  - nhỏ, các số thực khác 0 thông thường (gọi là các số đánh giá được) và các số  $i$  - lớn.

Kể từ khi được phát minh đến nay, Giải tích không chuẩn mực đã được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực toán học hiện đại, như : giải tích phức, lí thuyết phương trình vi phân thường và phương trình vi phân đạo hàm

riêng, lí thuyết tích phân và độ đo, lí thuyết xác suất và quá trình ngẫu nhiên,... Trong mỗi lĩnh vực, giải tích không chuẩn mực đã đạt được những thành tựu đáng kể. Mặc dù ta đều biết rằng Giải tích Toán học không cần phải chờ đến sự xuất hiện của Giải tích không chuẩn mực mới phát triển được, nhưng với ngôn ngữ không chuẩn mực các nhà toán học có một công cụ mới làm cho công việc xây dựng các tính chất và chứng minh chúng bớt đi tính nhàm chán. Bên cạnh việc đơn giản hóa các phép chứng minh (chỉ cần một vài dòng sử dụng hệ tiên đề không chuẩn mực là ta có thể thay thế cho phép chứng minh có thể tới hàng trang giấy), giải tích không chuẩn mực còn giúp ta tiếp cận vấn đề theo một hướng mới (gọi là phương pháp tiếp cận vô cùng nhỏ - *infinitesimals approach*), qua đó đạt được những kết quả đẹp đẽ, thú vị, mang đến cho Toán học những màu sắc mới, đa dạng phong phú, xứng đáng là đòn bẩy cho các ngành khoa học khác.



## SINH VIÊN VỚI SỐ $\pi$

( $\pi \approx 3,1415926535897932384$ )

Ba ơi con rất nhớ nhà  
Một mình con nhớ tới bà tới ông  
Bốn tháng xa cách dòng sông  
Một thời để nhớ trong lòng của con  
Năm nào con chạy lon ton  
Chín thơm quả ngọt, quả ngon bà dành  
Hai mùa lá đỏ rồi xanh  
Sáu năm đi mãi đã thành nhớ nhung  
Năm nay chín nhớ mười mong  
Ba ơi con sẽ về cùng quê xa  
Năm nay con sẽ về nhà  
Tám ngày sum họp nhà ta vui vầy  
Chín rồi trái ngọt vườn cây  
Bảy năm chăm sóc giờ đây đã vàng  
Chín giờ theo chuyến đò ngang  
Ba đưa xuống bến để sang thăm bà  
Hai dòng sông đỏ quê ta  
Ba chợt nhớ lại ngày xa mái trường  
Tám năm chinh chiến mù sương  
Bốn phương khói lửa vẫn thường đọc thơ.

\*

\* \*

Hồn con ước những ước mơ  
Đêm đêm con nhớ vần thơ thuở nào  
Số  $\pi$  hấp dẫn biết bao  
Con đưa từng số đi vào thơ ca  
Hồn thơ ý toán giao hòa  
Sinh viên khoa Toán cũng là thi nhân.

TRẦN VĂN PHONG

(Toán 3B-K25, ĐH Quy Nhơn, Bình Định)

Bài thơ trên đây cho bạn cách nhớ 19 chữ số thập phân sau dấu phẩy của số  $\pi$  qua 19 chữ đầu dòng.



**Giải đáp bài :**

## CÁCH GIẢI ĐƠN GIẢN NHẤT

(Đề đăng trên THPT số 338 tháng 8.2005)

Cách giải đơn giản nhất như sau :

Để chọn được 1 đội vô địch trong  $n$  đội bóng tham gia thi đấu thì phải có  $n - 1$  đội bị loại. Theo thể thức đấu loại trực tiếp (cứ mỗi trận đấu thì 1 đội bị loại) thì phải tổ chức  $n - 1$  trận đấu để loại bỏ  $n - 1$  đội.

Với  $n = 150$  đội thi đấu thì cần tổ chức 149 trận đấu để chọn được 1 đội vô địch.

**Nhận xét:** Nhiều bạn tìm cách tính lần lượt số trận đấu hoặc chứng minh bằng quy nạp mà không chú ý đến sự tương ứng giữa số trận đấu và số đội bị loại. Khá nhiều bạn có lời giải đơn giản nhưng 5 bạn sau gửi bài sớm (tính theo dấu bưu điện) được nhận tặng phẩm :

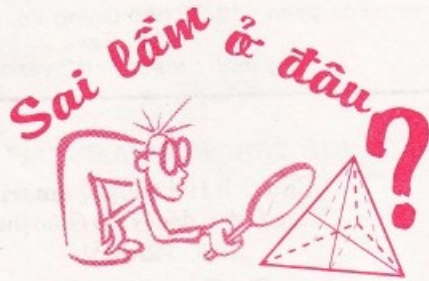
- Nguyễn Xuân Hồng, 6A1, THCS Trần Quốc Toàn, TX Uông Bí, Quảng Ninh;
- Ngô Văn Tuấn Anh, 23 Nguyễn Hữu Nghiêm, Tiên An, TX Bắc Ninh;
- Nguyễn Thành Chinh, 10A1, THPT An Nhơn 1, TTr. Bình Định, An Nhơn, Bình Định;
- Nguyễn Thành Phụng, 77 Nguyễn Du, TP Đà Nẵng;
- Hoàng Hà Hưng, 10 Lý, THPT Hoàng Văn Thụ, TX Hòa Bình.

VÂN KHANH

## CHIA HÌNH VUÔNG THÀNH 10 HÌNH VUÔNG NHỎ BẰNG NHAU

Bạn hãy cắt một miếng bìa hình vuông đã cho ra làm nhiều mảnh để có thể ghép được thành 10 hình vuông nhỏ có kích thước bằng nhau sao cho số mảnh bị cắt ra là ít nhất.

TRẦN CUNG  
(Hà Nội)



**Giải đáp bài:**

### BÀI GIẢI QUÁ GỌN!

(THTT số 337, tháng 7 năm 2005)

- Theo cách đánh giá các bất đẳng thức:

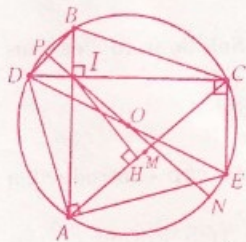
$$IH \leq IM = \frac{AC}{2} \leq R \text{ và } S_{IAC} = \frac{1}{2} IH \cdot AC$$

$$\leq \frac{1}{2} R \cdot 2R = R^2. \text{ Chúng ta thấy } S_{IAC} = R^2 \text{ khi}$$

$IH = IM = R$  và  $AC = 2R$ . Khi đó  $AC$  là đường kính của đường tròn  $(O)$  và  $I$  nằm trên đường tròn  $(O)$ . Điều này trái với giả thiết  $I$  nằm trong đường tròn đó. Vậy không thể xảy ra giá trị lớn nhất của  $S_{IAC}$  bằng  $R^2$ .

Một cách giải đúng cho bài toán này (theo bạn Dương Minh Tiến, 11TL, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long):

- Dựng đường kính  $DE$  của đường tròn  $(O)$ , thì tứ giác  $ABCE$  là hình thang cân, dẫn đến



$BC = AE$ . Ta có

$$IA^2 + ID^2 = AD^2;$$

$$IB^2 + IC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$$

$$= AD^2 + BC^2$$

$$= AD^2 + AE^2 = 4R^2 \quad (1)$$

Giả sử đường thẳng

$IO$  cắt đường tròn  $(O)$

tại  $P, N$ . Khi đó  $IA \cdot IB = IC \cdot ID = IP \cdot IN =$

$$(R + OI)(R - OI) = R^2 - OI^2 > 0, \text{ suy ra}$$

$$IB = \frac{R^2 - OI^2}{IA}, ID = \frac{R^2 - OI^2}{IC}.$$

Thay vào (1) ta được

$$(IA^2 + IC^2) \cdot \left[ 1 + \frac{(R^2 - OI^2)^2}{IA^2 \cdot IC^2} \right] = 4R^2.$$

Do  $IA^2 + IC^2 \geq 2IA \cdot IC$  nên có:

$$2 \cdot IA \cdot IC \left[ 1 + \frac{(R^2 - OI^2)^2}{IA^2 \cdot IC^2} \right] \leq 4R^2 \quad (2)$$

Đặt  $S$  là diện tích tam giác  $IAC$  thì  $2S = IA \cdot IC$ . Từ (2) ta có  $4S^2 - 4R^2 \cdot S + (R^2 - OI^2)^2 \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{R^2 - OI\sqrt{2R^2 - OI^2}}{2} \leq S \leq \frac{R^2 + OI\sqrt{2R^2 - OI^2}}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác

$$IAC \text{ là } \frac{R^2 + OI\sqrt{2R^2 - OI^2}}{2} \text{ đạt được khi và}$$

$$\text{chỉ khi } IA = IC = \sqrt{R^2 + OI\sqrt{2R^2 - OI^2}}.$$

• Ngoài bạn Tiến, các bạn sau cũng có đáp án đúng: Vũ Hồng Toàn, K18A, THPT chuyên lý, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; Lê Tiến Thành, 10A1, THPT Quế Võ I, Ngô Văn Tuấn Anh, 23 - Nguyễn Hữu Nghiêm, Tiến An, Tx. Bắc Ninh, Bắc Ninh; Đặng Văn Thanh, 12A, THPT Khúc Thừa Dụ, Ninh Giang, Hải Dương; Nguyễn Phương Hoàng, 11B1, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, Thanh Hóa.

NGỌC HIỀN

### CHẤM BÀI KIỂM TRA

Trong giờ kiểm tra 15 phút, một giáo viên cho bài toán về PT vô tỉ với nội dung:

Xác định các giá trị của tham số  $m$  để PT sau có nghiệm:  $\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(7-x)(2+x)} = m$ .

Một học sinh giải như sau:

Điều kiện  $-2 \leq x \leq 7$ .

Đặt  $\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} = t$  (1) với  $t \geq 0$ .

Theo BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki  $\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} \leq 3\sqrt{2}$  nên  $0 \leq t \leq 3\sqrt{2}$ . Bình phương hai vế của

$$(1) \text{ được } \sqrt{(7-x)(2+x)} = \frac{t^2 - 9}{2}.$$

$$\text{PT đã cho trở thành } -\frac{t^2}{2} + t + \frac{9}{2} = m \quad (2)$$

PT ban đầu có nghiệm khi PT (2) có nghiệm với  $0 \leq t \leq 3\sqrt{2}$ . Đặt  $y = -\frac{t^2}{2} + t + \frac{9}{2}$  ta tính được  $y' = -t + 1, y' = 0 \Leftrightarrow t = 1$ .

Lập bảng biến thiên của hàm  $y$  trên  $[0; 3\sqrt{2}]$

| $t$  | $-\infty$ | 0             | 1 | $3\sqrt{2}$             | $+\infty$ |
|------|-----------|---------------|---|-------------------------|-----------|
| $y'$ |           | +             | 0 | -                       |           |
| $y$  |           | $\frac{9}{2}$ | 5 | $\frac{6\sqrt{2}-9}{2}$ |           |

Từ bảng biến thiên và  $\frac{6\sqrt{2}-9}{2} < \frac{9}{2}$  suy ra PT

đã cho có nghiệm khi  $\frac{6\sqrt{2}-9}{2} \leq m \leq 5$ .

Các bạn hãy cùng tôi chấm bài kiểm tra này nhé.

CAO XUÂN NAM  
(GV THPT chuyên Hà Giang)

# Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 340 (10-2005)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocct@yahoo.com

## BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

## CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị  
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc  
Tổng biên tập NXB Giáo dục  
NGUYỄN QUÝ THAO

## HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC,  
TS. NGUYỄN MINH HẢI, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM HÙNG,  
PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN  
HỮU NAM, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG,  
ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI,  
ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

## TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**  
*Hoàng Văn Đắc* – Sử dụng công thức đường phân giác vào giải toán.

2 **X hỏi ? Y, Z trả lời**

3 **Đề thi tuyển sinh lớp 10 khối THPT chuyên Đại học Vinh năm 2005.**

4 **Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh lớp chuyên trường THPT Lê Hồng Phong TP Hồ Chí Minh năm học 2005-2006.**

7 **Đỗ Văn Đức** – Về một bài thi tuyển sinh đại học năm 2005.

9 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**  
*Vũ Hữu Bình* - Chứng minh các công thức tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cụt.

10 **Vũ Đình Hòa** – Lời giải các bài toán thi học sinh giỏi quốc gia THPT năm 2004-2005.

12 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**  
*Nguyễn Minh Hà – Nguyễn Việt Hải* – Góc định hướng của hai đường thẳng.

15 **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**  
*Quân mã đi trên bàn cờ hình chữ thập*

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**  
T1/340, ..., T12/340. L1, L2/340.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**  
Giải các bài của số 336.

28 **Giới thiệu Toán học cao cấp - Introduction of Higher Mathematics**  
*Dư Đức Thắng* - Giải tích không chuẩn mực.

29 **Bạn có biết ? - Do You Know ?**  
*Nguyễn Văn Thiêm* – Đi tìm một ý tưởng mới về phỏng đoán những nguyên tố sinh đôi.

30 **Giải trí toán học – Math Recreation**

30 **Câu lạc bộ – Math Club**

31 **Sai lầm ở đâu – Where's the Mistake ?**

Tổng biên tập: PHAN ĐOÀN THOẠI. Phó ban Phụ trách : PHẠM THỊ BẠCH NGỌC. Thư kí Tòa soạn: VŨ KIM THỦY.

Biên tập : HỒ QUANG VINH. Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049.

**CASIO**

Khi mua máy tính **CASIO**  
bạn sẽ được tặng **NGAY!**

Chương trình

**Quà Tặng**

Mùa khai trường

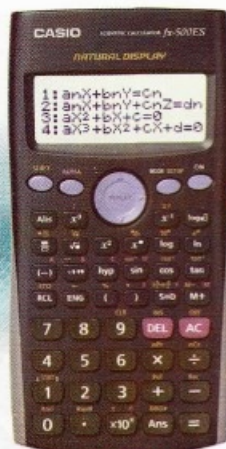


Tặng 02 bút bi cao cấp  
Made in Thai Lan  
Khi mua 01 máy tính



Tặng sách hướng dẫn sử dụng  
khi mua máy tính khoa học  
CASIO

Máy tính khoa học duy nhất hiện thị như sách giáo khoa.



fx 500ES



fx 570ES

Cách nhập các bài toán vào máy và hiện thị kết quả giống như giáo viên viết trên bảng

**Chú ý!**

MÁY TÍNH CASIO  
THẬT PHẢI CÓ:



Tem bảo hành  
của chính hãng



Dạ quang chữ  
VKHHS-BCA  
khí chiếu tia cực tím



Phiếu bảo hành 02 năm ( Khi mua đề nghị người tiêu dùng nên yêu cầu người bán hàng phải ghi đầy đủ tên, địa chỉ đại lý bán hàng. Đại lý bán hàng phải có trách nhiệm nhận lại máy hư và gửi về cho công ty để bảo hành )



CÔNG TY CỔ PHẦN XNK BÌNH TÂY (BITEX)

Email: bitex@bitex.com.vn

Website : <http://www.bitexvn.com>

Chương trình quà tặng bắt đầu từ 24/08 đến hết 30/11  
(Không áp dụng cho Model HL 122L)  
Xem chi tiết tại Nhà sách, cửa hàng bán máy tính

## TRƯỜNG THCS THỦY DƯƠNG, HƯƠNG THỦY, THỪA THIÊN - HUẾ



**Hiệu trưởng  
Trần Hào**

- Được sự quan tâm của cấp trên nên cơ sở vật chất của trường phát triển khang trang, thiết bị dạy học hiện đại. Từ đó trường được tham gia chương trình *Intel teach to the future* để nâng cao chất lượng dạy và học.

- Trong phong trào thi đua dạy tốt cấp Huyện, cấp Tỉnh, trường luôn đạt giải cao: giải nhất cấp Tỉnh môn Toán, giải nhất Thư viện giỏi cấp Tỉnh.

- Phong trào Xây dựng môi trường Xanh - Sạch - Đẹp được xếp loại xuất sắc. Các hoạt động thể dục thể thao, xây dựng phòng bộ môn, thư viện đều được Sở Giáo dục khen thưởng.

- Trường đã phát huy sức mạnh của các lực lượng tham gia giáo dục, phong trào khuyến học được nâng cao. Từ chính quyền, Hội phụ huynh, Hội cựu học sinh, các họ tộc trong địa phương đều có phong trào khuyến học sôi nổi.

Với sự giúp đỡ của cấp trên và sự nỗ lực phấn đấu của đơn vị, trường đang phấn đấu đề nghị được công nhận trường THCS đạt chuẩn quốc gia.

Năm học 2004-2005, trường THCS Thủy Dương có 939 học sinh với 25 lớp và 50 cán bộ giáo viên, trong đó hầu hết có trình độ đại học. Từ năm 1983 đến nay (trên 22 năm) trường luôn đạt danh hiệu tiên tiến và tiên tiến xuất sắc cấp Tỉnh.

- Công đoàn cơ sở được Công đoàn Giáo dục Việt Nam tặng Bằng khen.
- Năm 1998: Được UBND Tỉnh tặng cờ thi đua xuất sắc.
- Được Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng Bằng khen về phong trào thi đua yêu nước trong 5 năm (2001-2005).
- Năm 2003: Được Bộ Giáo dục tặng Bằng khen.
- Năm 2003: Trường được công nhận là đơn vị đạt chuẩn văn hóa và được công nhận lại năm 2004.

Tập thể giáo viên đoàn kết, có ý chí phấn đấu vươn lên và xây dựng thành công nhiều phong trào như:

- Hằng năm có nhiều em đạt học sinh giỏi cấp Huyện và có học sinh đạt giải cấp Tỉnh. Trường đã cùng địa phương xây dựng đề án bồi dưỡng, hỗ trợ học sinh giỏi trị giá 20 triệu đồng / năm.

- Tất cả giáo viên tiếp cận được với ứng dụng công nghệ thông tin và mọi người đều có khả năng soạn được giáo án trên máy tính. Tất cả học sinh từ lớp 6 đến lớp 9 đều được học môn Tin học.



**Tập thể cán bộ giáo viên trường THCS Thủy Dương**

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT42M5

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT do Bộ VHTT cấp ngày 15.6.2004

In 30700 bản tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2005

Giá : 4000 đồng

Bốn nghìn đồng