

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

9 2005
Số 339

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 42

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272

Email: toanhocvt@yahoo.com

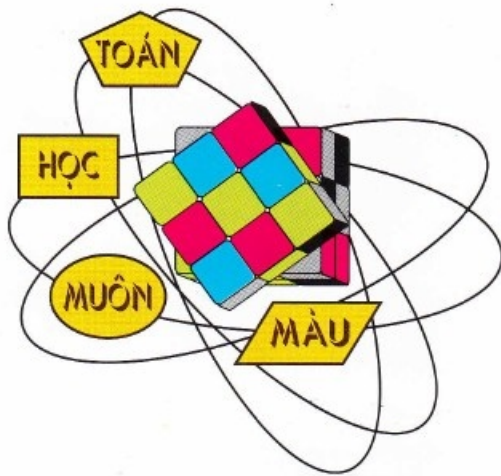
CHÀO MỪNG NĂM HỌC MỚI 2005 - 2006

Các học sinh
trường chuyên Vĩnh Phúc
được giải kì thi
Olympic Toán
Singapore 2005



5 học sinh trường
THCS Trưng Vương đoạt
Huy chương Vàng trong
kì thi Olympic Toán
Singapore 2005





PHÂN CHIA ĐA GIÁC THÀNH CÁC HÌNH TỰ ĐỒNG DẠNG

Một tấm bìa hình bình hành (hoặc hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông), có thể cắt ra thành 4 mảnh bằng nhau và đồng dạng với hình bình hành ban đầu như ở hình 1.

Nói cách khác, có thể ghép 4 mảnh bìa hình bình hành bằng nhau thành một hình bình

hành đồng dạng với hình ban đầu.

Hiển nhiên nếu tiếp tục cắt n lần như trên ta được 4^n hình bằng nhau và đều đồng dạng với hình ban đầu nên chỉ cần xét với số mũ $n = 1$.



Hình 1

Dành cho bạn đọc

- 1) Các tấm bìa hình đa giác đều nào có tính chất như trên ?
- 2) Các tấm bìa hình đa giác (lồi, lõm) không đều nào có tính chất như trên ?

(Xem tiếp trang 31)

Sách mới Tiếng Anh dành cho Tiểu học: LET'S LEARN ENGLISH

* Hãy học tiếng Anh cùng với các bạn Nam và Mai trong sách

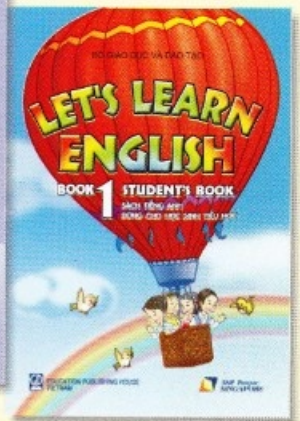
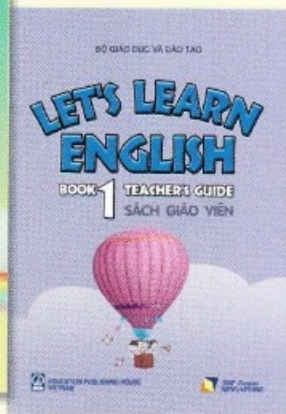
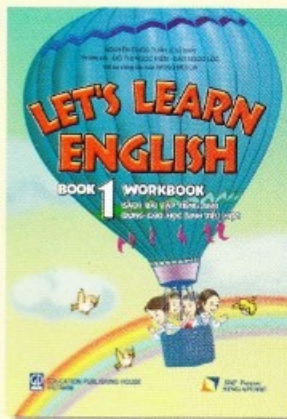
Let's Learn English!

Đây là bộ sách tiếng Anh được biên soạn theo chương trình mới được ban hành của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Bộ sách được thiết kế theo phong cách hiện đại, kết hợp với tranh ảnh minh họa ngộ nghĩnh, tinh tế, rất hấp dẫn với các em học sinh tiểu học.

Nhà xuất bản Giáo dục hợp tác với

Nhà xuất bản SNP Panpac Singapore xuất bản bộ sách này.



Các Sở Giáo dục - Đào tạo, các Công ty Sách - Thiết bị có thể đặt mua tại:

Hà Nội: Phòng phát hành SGK, 187B-Giảng Võ

ĐT: (04) 8562011 Fax: (04) 8562493

Đà Nẵng: Phòng phát hành SGK, 15-Nguyễn Chí Thanh

ĐT: (0511) 894504 Fax: (0511) 827368

TP Hồ Chí Minh: Phòng phát hành SGK, 231-Nguyễn Văn Cừ, Q5

ĐT: (08) 8358423 Fax: (08) 8390727



SỬ DỤNG TÍNH CHẨN LẺ TRONG GIẢI TOÁN SỐ HỌC

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

Trong nhiều bài toán về số nguyên hoặc số hữu tỉ, đôi khi chỉ cần xét tính chẵn lẻ của giá trị một biểu thức, coi như một điều kiện cần, có thể dẫn đến việc giải quyết bài toán đó. Dưới đây xin nêu ra một số tính chất của các phép toán và biểu thức có số chẵn và số lẻ để sử dụng khi lập luận, sau đó trình bày một số dạng toán mà sử dụng tính chẵn lẻ sẽ rất thuận lợi.

Ta gọi các số nguyên chia hết cho 2 là số chẵn, còn số nguyên không chia hết cho 2 là số lẻ.

TÍNH CHẤT :

1. Tổng (hoặc hiệu) của một số chẵn và một số lẻ là một số lẻ.
2. Tổng (hoặc hiệu) hai số chẵn, hoặc hai số lẻ, là một số chẵn.
3. Tích các số lẻ là một số lẻ
4. Tích các số, trong đó có ít nhất một số chẵn, là một số chẵn.
5. Trong hai số nguyên liên tiếp thì có một số lẻ và một số chẵn.

TÍNH CHẨN LẺ TRONG CÁC BÀI TOÁN VỀ CHIA HẾT

Thí dụ 1. Cho bảy số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_7$. Viết các số nguyên đó theo một thứ tự khác được $b_1, b_2, \dots, b_7$. Chứng minh rằng tích số $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_7 - b_7)$ chia hết cho 2.

Hướng dẫn giải. Đặt $c_i = a_i - b_i$ với $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Có :

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \dots + c_7 &= \\ &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_7 - b_7) \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_7) - (b_1 + b_2 + \dots + b_7) = 0 \end{aligned}$$

Theo các tính chất 1, 2 thì trong các số $c_1, c_2, \dots, c_7$ phải có ít nhất một số chẵn, lại theo tính chất 4 thì tích $c_1 c_2 \dots c_7$ phải là một số chẵn.

Thí dụ 2. Số $3^n + 2003$, trong đó n là số nguyên dương, có chia hết cho 184 không?

Hướng dẫn giải. Ta thấy $184 = 8.23$ và $3^{2m} - 1$ chia hết cho $3^2 - 1 = 8$.

• Nếu $n = 2m$ chẵn, thì $3^{2m} + 2003 = 3^{2m} - 1 + 250.8 + 4$ không chia hết cho 8.

• Nếu $n = 2m + 1$ lẻ, thì $3^{2m+1} + 2003 = 3(3^{2m} - 1) + 250.8 + 6$ không chia hết cho 8.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì số $3^n + 2003$ đều không chia hết cho 184.

Các bài luyện tập

Bài 1. Cho $n > 3, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng nếu $2^n = 10.a + b$ với $0 < b < 9$ thì $a.b$ chia hết cho 6.

Bài 2. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2z^2$. Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 48.

Bài 3. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$. Chứng minh rằng xyz chia hết cho 60.

Bài 4. Biết a là một số nguyên dương.

a) Nếu $a+1$ và $2a+1$ là các số chính phương thì số a có chia hết cho 24 không?

b) Nếu $2a+1$ và $3a+1$ là các số chính phương thì số a có chia hết cho 40 không?

TÍNH CHẨN LẺ VỚI CÁC PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Thí dụ 3. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $x^2 - 2y^2 = 5$.

Hướng dẫn giải. Từ phương trình (PT) suy ra x^2 lẻ nên $x = 2n+1$ lẻ, thay vào PT được $2n^2 + 2n - y^2 = 2(*)$, suy ra y chẵn. Đặt $y = 2m$ thay vào (*) được $n(n+1) - 2m^2 = 1$. Vế trái chẵn mà vế phải lẻ, mâu thuẫn. Vậy PT đã cho vô nghiệm.

Thí dụ 4. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + y - x! = 1 & (1) \\ yz + z - y! = 1 & (2) \\ x^2 - 2y^2 + 2x - 4y = 2 & (3) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải. Từ PT (3) suy ra x phải chẵn, thay vào (1) thì y phải lẻ. Vì $z(y+1)$ chẵn nên từ (2) suy ra $y!$ lẻ, do đó chỉ có thể $y = 1$. Thay vào các PT trên có một nghiệm (x, y, z) bằng $(2, 1, 1)$.

Các bài luyện tập

Bài 5. Chứng minh rằng không có các số nguyên x, y, z nào thỏa mãn :

$$19^x + 5^y + 1980z = 1975^{430} + 1993$$

Bài 6. Tìm nghiệm nguyên dương của mỗi phương trình sau :

a) $2^x + 2^y + 2^z = 2336$ với $x < y < z$.

b) $2^x + 2^y + 2^z = 2^t$.

c) $x^3 + 2y^3 = 4z^3$

d) $3^x = 4y + 1$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2$.

TÍNH CHẴN LẺ TRONG CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC KHÁC

Thí dụ 5. Chứng minh rằng một phương trình bậc hai với các hệ số đều là số nguyên lẻ thì không thể có nghiệm hữu tỉ.

Lời giải. Giả sử PT $ax^2 + bx + c = 0$ với a, b, c là các số nguyên lẻ có nghiệm hữu tỉ $x = \frac{p}{q}$ với

$(p, q) = 1$. Thay giá trị của x vào PT và biến đổi được $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$ (*). Từ q là ước của ap^2 mà $(p, q) = 1$ suy ra q là ước của số lẻ a nên q là số lẻ. Lập luận tương tự thì p cũng là số lẻ, lúc đó vế trái của (*) là số lẻ (theo các tính chất 1, 2, 3) mà vế phải của (*) là số chẵn, mâu thuẫn. Vậy PT bậc hai trên không thể có nghiệm hữu tỉ.

Với cùng cách giải trên có thể chứng minh bài toán tổng quát như sau :

Chứng minh rằng một phương trình bậc n chẵn với các hệ số đều là số nguyên lẻ thì không thể có nghiệm hữu tỉ.

Thí dụ 6. Tìm số nguyên dương n để $\frac{n-37}{n+43}$ là bình phương của một số hữu tỉ dương.

Hướng dẫn giải. Giả sử $\frac{n-37}{n+43} = \left(\frac{q}{p}\right)^2$ với các số nguyên dương p, q mà $(p, q) = 1$. Ta có $n-37 = kq^2$ và $n+43 = kp^2$ với số nguyên dương k . Từ đó $k(p-q)(p+q) = 80$ (1) với $80 = 2^4 \cdot 5 \cdot 1$.

Xét hai trường hợp :

1) Trong hai số p, q có một số lẻ và một số chẵn. Lúc đó $p+q$ và $p-q$ đều là lẻ, nên từ (1) suy ra $p+q = 5, p-q = 1, k = 16 \Rightarrow p = 3, q = 2, n = 101$.

2) Cả hai số p, q đều lẻ. Đặt $p = 2a - 1, q = 2b - 1$ với a, b là các số nguyên dương. Lúc đó (1) trở thành $k(a-b)(a+b-1) = 20$, với $20 = 2^2 \cdot 5 \cdot 1$.

Chú ý rằng $a+b-1 > a-b, a+b-1$ và $a-b$ khác tính chẵn lẻ. Cho cặp số $(a-b, a+b-1)$ lần lượt bằng $(1, 2), (1, 4), (1, 20), (5, 20), (2, 5), (4, 5)$ rồi tính a, b, p, q, k ta được các nghiệm n bằng 38, 47, 55, 82, 199, 398. Bài toán có 7 nghiệm như trên.

Thí dụ 7. Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn $a^b + b^a = c$.

Hướng dẫn giải. Chú ý $c > 2$ và lẻ thì a, b phải khác tính chẵn lẻ. Vì vai trò a, b như nhau, giả sử a lẻ, b chẵn thì $b = 2$ nên có $a^2 + 2^a = c$. Nếu $a = 3$ thì có $3^2 + 2^3 = 17$ thỏa mãn. Nếu $a \neq 3$ thì $a^2 = 3n + 1$ với n nguyên dương, $2^a = (3-1)^a = 3t - 1$ vì a lẻ. Từ đó $c = a^2 + 2^a = 3n + 1 + 3t - 1 = 3(n+t)$ là hợp số.

Vậy bài toán có nghiệm (a, b, c) bằng $(3, 2, 17)$ và $(2, 3, 17)$.

Thí dụ 8. Kí hiệu $s(a)$ là số các chữ số của số nguyên dương a . Hỏi n lấy giá trị nguyên dương nào thì $s(5^n) - s(2^n)$ là số chẵn ?

Hướng dẫn giải. Giả sử 2^n có a chữ số và 5^n có b chữ số, lúc đó $10^{a-1} < 2^n < 10^a$ và $10^{b-1} < 5^n < 10^b$. Suy ra $10^{a+b-2} < 10^n < 10^{a+b}$ nên $a+b-2 < n < a+b \Rightarrow n = a+b-1$. Mặt khác $s(5^n) - s(2^n)$ và $s(5^n) + s(2^n) = b+a$ có cùng tính chẵn lẻ, vì vậy để $s(5^n) - s(2^n)$ là số chẵn thì $a+b$ là số chẵn, nghĩa là $n+1$ phải là số lẻ.

Các bài luyện tập

Bài 7. Biết các số $p = a+b^c, q = b+c^a, r = c+a^b$ đều là số nguyên tố, trong đó a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng trong ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Bài 8. Cho các số $a = 2^n + 3^n$ và $b = 2^{n+2} + 3^{n+2}$ với n là số nguyên dương. Tìm ước chung lớn nhất của a và b .

Bài 9. Chứng minh rằng $3^n + 4$ không thể là số chính phương với n là số nguyên dương bất kì.

Bài 10. Tìm các số nguyên dương m, n lớn hơn 1 sao cho $2^m + 3^n$ là số chính phương.

Bài 11. Tìm các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 2002$ là số chính phương.

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên ĐHKHTN, HN 2002)

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TRƯỜNG THPT LÊ HỒNG PHONG TP HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2005-2006 MÔN TOÁN

VÒNG I

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1: (2 điểm).

Cho phương trình (có ẩn số là x)

$$4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0$$

a) Chứng tỏ rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

b) Tìm m để có tích của hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2: (2 điểm).

Giải các phương trình và hệ phương trình :

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$$

b)
$$x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11.$$

Câu 3: (2 điểm).

a) Cho $a > c, b > c, c > 0$. Chứng minh :

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

b) Cho $a > 0, b > 0$. Chứng minh :

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt{\sqrt{ab}}.$$

Câu 4: (1 điểm).

Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng khi tăng thêm mỗi chữ số một đơn vị thì số mới được tạo thành cũng là một số chính phương.

Câu 5: (1,5 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$, góc C bằng 45° . Đường tròn đường kính AB cắt các cạnh AC và BC lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh MN vuông góc với OC .

b) Chứng minh $MN = \frac{AB}{\sqrt{2}}.$

Câu 6: (1,5 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Điểm M lưu động trên cung nhỏ BC . Từ M kẻ các đường thẳng MH, MK lần lượt vuông góc với AB, AC .

(H thuộc đường thẳng AB, K thuộc đường thẳng AC).

a) Chứng minh hai tam giác MBC và MHK đồng dạng với nhau.

b) Tìm vị trí của M để độ dài đoạn HK lớn nhất.

VÒNG II

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 7: (4 điểm).

a) Định m để hai phương trình

$x^2 + x + m = 0$ và $x^2 + mx + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm chung.

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình :

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Câu 8: (4 điểm).

Giải phương trình và hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases}$$

b)
$$\frac{2x}{3x^2 - 5x + 2} + \frac{13x}{3x^2 + x + 2} = 6.$$

Câu 9: (4 điểm).

a) Chứng minh $2(a^4 + b^4) \geq ab^3 + a^3b + 2a^2b^2$, với mọi a, b .

b) Chứng minh $\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a$, với $a > b > 0$.

Câu 10: (2 điểm).

Tìm các số nguyên dương có 2 chữ số, biết số đó là bội của tích 2 chữ số của chính số đó.

Câu 11: (4 điểm).

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A nhọn, $AB < AD$. Tia phân giác của góc BAD cắt BC tại M và cắt DC tại N . Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCN .

a) Chứng minh rằng : $DN = BC$ và $CK \perp MN$.

b) Chứng minh rằng $BKCD$ là một tứ giác nội tiếp.

Câu 12: (2 điểm).

Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 2\hat{B}$. Chứng minh rằng :

$$BC^2 = AC^2 + AB.AC.$$



Bất đẳng thức (BDT) Cô-si có nhiều ứng dụng để giải quyết các dạng bài toán khác nhau như : Chứng minh BDT ; Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số ; Giải và biện luận phương trình, bất phương trình ;...

Sau đây xin nhắc lại BDT Cô-si và ứng dụng nó để giải một số bài toán trong đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng năm 2005.

BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2005

ĐẶNG THANH HẢI
(Hà Tây)

Bất đẳng thức Cô-si

Cho n số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ thì ta luôn có

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Bài toán 1. (Câu V, khối A)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

Lời giải. (Xem THPT số 337, tháng 7 năm 2005)

Với kĩ thuật "tách số" có thể tổng quát hóa bài toán này theo hướng sau :

Bài toán 2. Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, thỏa mãn $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = k$ ($k > 0$ cho trước).

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n} + \frac{1}{m_2 a_1 + \dots + m_n a_{n-1} + m_1 a_n} + \dots + \frac{1}{m_n a_1 + m_1 a_2 + \dots + m_{n-1} a_n}$$

$$\leq \frac{k}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

trong đó $m_1, m_2, \dots, m_n$ là các số nguyên dương tùy ý.

(Bài toán 1 là trường hợp riêng của bài toán 2 khi $k = 4, n = 3, m_1 = 2, m_2 = m_3 = 1$).

Hướng dẫn: Áp dụng BDT (*) cho

$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ số, trong đó m_1 số a_1 , m_2 số a_2 , ..., m_n số a_n được

$$(a_1 + \dots + a_1) + (a_2 + \dots + a_2) + \dots + (a_n + \dots + a_n) \geq m \sqrt[m]{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_n^{m_n}} \quad (3)$$

Lại áp dụng BDT Cô-si cho m số, trong đó m_1 số $\frac{1}{a_1}$, ..., m_n số $\frac{1}{a_n}$ được

$$\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_1} \right) + \left(\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_n} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq \frac{m}{\sqrt[m]{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_n^{m_n}}} \quad (4)$$

Từ (3), (4) có :

$$\left(\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \dots + \frac{m_n}{a_n} \right) (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n) \geq m^2 \Rightarrow \frac{1}{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n}$$

$$\leq \frac{1}{m^2} \left(\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \dots + \frac{m_n}{a_n} \right).$$

Đánh giá tương tự cho các phân thức còn lại, dẫn đến điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{n}{k}$.

Bài toán 3. (Câu V, khối B)

Chứng minh rằng với mọi $x \in R$, ta có :

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Lời giải. Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số :

$$\begin{cases} \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12.15}{5.4}\right)^x} = 2.3^x \\ \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{15.20}{4.3}\right)^x} = 2.5^x \\ \left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{20.12}{3.5}\right)^x} = 2.4^x \end{cases}$$

Cộng theo từng vế của ba BĐT cùng chiều trên với nhau ta được

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x, (\forall x \in R).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x = \left(\frac{15}{4}\right)^x = \left(\frac{20}{3}\right)^x \Leftrightarrow x = 0.$$

Đặt $a = 3, b = 4, c = 5$, ta đi đến bài toán tổng quát sau.

Bài toán 4. Cho a, b, c là các số dương tùy ý. Chứng minh rằng với mọi $x \in R$, ta có :

$$\left(\frac{ab}{c}\right)^x + \left(\frac{bc}{a}\right)^x + \left(\frac{ca}{b}\right)^x \geq a^x + b^x + c^x.$$

Hướng dẫn. Chứng minh tương tự Bài toán 3.

Bài toán 5. (Câu V, khối D).

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Lời giải. Đặt

$$S = \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương, ta có

$$\begin{cases} 1+x^3+y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3} = 3xy \\ 1+y^3+z^3 \geq 3yz \\ 1+z^3+x^3 \geq 3zx \end{cases}$$

Từ đó ta có :

$$\begin{aligned} S &\geq \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{xy}}{xy} + \frac{\sqrt{yz}}{yz} + \frac{\sqrt{zx}}{zx} \right) \\ \Rightarrow S &\geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right). \end{aligned}$$

Lại áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương $\frac{1}{\sqrt{xy}}, \frac{1}{\sqrt{yz}}, \frac{1}{\sqrt{zx}}$ ta được

$$S \geq 3\sqrt{3} \frac{1}{\sqrt[6]{x^2y^2z^2}} = 3\sqrt{3} \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Một cách tự nhiên, ta đi đến bài toán tổng quát sau :

Bài toán 6. Cho các số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng :

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt[m]{1+a_1^p+\dots+a_{n-1}^p}}{(a_1 a_2 \dots a_{n-2})^q} + \frac{\sqrt[m]{1+a_2^p+\dots+a_n^p}}{(a_2 a_3 \dots a_n)^q} + \dots \\ &+ \frac{\sqrt[m]{1+a_n^p+a_1^p+\dots+a_{n-2}^p}}{(a_n a_1 \dots a_{n-2})^q} \geq n \sqrt[n]{n} \end{aligned}$$

trong đó $m \geq 2$ là số nguyên dương, p, q là các số thực tùy ý.

Hướng dẫn. Áp dụng BĐT (*) cho n số :

$$1+a_1^p+\dots+a_{n-1}^p \geq n \sqrt[n]{(a_1 a_2 \dots a_{n-1})}.$$

TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG 2005

NGUYỄN VĂN MÂU
(ĐH KHTN Hà Nội)

Trong các ngày từ 24 đến 26 tháng 7 năm 2005, dưới sự bảo trợ khoa học của Hội Toán học Việt Nam, Hội Toán học Hà Nội và Trường Đại học Khoa học Tự nhiên HN, Trại Hè Hùng Vương lần thứ nhất đã được tổ chức tại Trường THPT Chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ.

Trại hè Hùng Vương là đợt sinh hoạt chuyên môn của các Trường THPT Chuyên các tỉnh khu vực miền núi phía Bắc. Tham gia Trại hè Hùng Vương lần này có 10 Trường THPT Chuyên thuộc các tỉnh Vĩnh Phúc, Phú Thọ, Yên Bái, Hoà Bình, Tuyên Quang, Hà Giang, Cao Bằng, Quảng Ninh, Sơn La, Lạng Sơn. Ngoài các sinh hoạt học thuật như hội thảo khoa học, bồi dưỡng kiến thức chuyên sâu cho

các đội dự tuyển của các tỉnh và giao lưu ngoại khoá, Trại hè còn tổ chức thi Olympic Toán học cho các học sinh lớp 10 tham dự trại hè nhằm giúp các trường rút ra kinh nghiệm định hướng tốt cho việc trang bị kiến thức tiếp theo của đội dự tuyển. Có thể nói, đây là đợt sinh hoạt chuyên môn rất bổ ích, có ý nghĩa học thuật giúp cho các tỉnh khu vực miền núi phía Bắc có điều kiện hoạt động ngoại khoá và giao lưu, học hỏi kinh nghiệm. Hy vọng những năm tới sẽ tiếp tục có những hoạt động chuyên môn, nhất là khi chúng ta đang cố gắng hết sức mình cho các địa phương chủ động hội nhập khu vực và quốc tế.

Sau đây là đề thi Olympic Toán học Trại hè Hùng Vương 2005 (dành cho lớp 10).

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN HỌC TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG 2005

(Thời gian làm bài : 210 phút)

Câu 1. (7 điểm).

Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số cộng tăng.

Hỏi lập được bao nhiêu cấp số cộng thoả mãn điều kiện $a_1 > 50, a_5 < 100$?

Câu 2. (7 điểm).

Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số nhân tăng. Hỏi lập được bao nhiêu cấp số nhân thoả mãn điều kiện $a_5 < 100$?

Câu 3. (7 điểm).

Các số dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thoả mãn các điều kiện

(i) $2a_1, 2a_2, 2a_3, 2a_4, 2a_5$ là các số nguyên dương

(ii) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 99$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của tích $P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$.

Câu 4. (7 điểm).

Giả sử tam thức bậc hai $f(x)$ luôn luôn dương với mọi x . Chứng minh rằng $f(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai nhị thức bậc nhất.

Câu 5. (7 điểm).

Giả sử hàm trùng phương $g(x) = x^4 + bx^2 + c$ luôn luôn dương với mọi x . Chứng minh rằng $g(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai tam thức bậc hai.

Câu 6. (7 điểm).

Cho hình vuông $ABCD$. Tìm quỹ tích các điểm M thuộc hình vuông (phần bên trong và biên của hình vuông) sao cho diện tích các tam giác MAB và MAC bằng nhau.

Câu 7. (7 điểm).

Cho hình vuông $ABCD$. Giả sử E là trung điểm cạnh CD và F là một điểm ở bên trong hình vuông. Xác định vị trí điểm Q thuộc cạnh AB sao cho $\widehat{AQE} = \widehat{BQF}$.

✉ **Nhắn tin :** Các bạn được giải cuộc thi Giải toán bằng máy tính bỏ túi trên tạp chí THPT năm ngoài học lớp 9 và 12 : Hoàng Thị Cẩm Tú, Nguyễn Thu Hà, Quách Tú Anh, Nguyễn Thị Thu Phương, Nguyễn Thị Thơ báo địa chỉ mới về để tòa soạn gửi quà tặng và bằng chứng nhận giải thưởng. Ngoài các bạn trên Tòa soạn đã gửi quà tặng và sẽ gửi bằng chứng nhận giải thưởng theo địa chỉ của bạn đã in trên THPT. Thân mến.

THTT



Ta đã biết Lực hấp dẫn của một vật tác động lên vật khác tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa hai vật đó. Định luật này do Niu-tơn nêu ra, không ngờ lại có một gợi ý trong việc mô hình hóa sự lan truyền của bệnh dịch.

Khi một bệnh dịch xảy ra tại một nơi mà dân cư phân bố gần như đồng nhất, ví dụ như một thành phố, người ta có thể nghiên cứu cách mà bệnh đó lan truyền bằng cách giả thiết rằng những cá thể khác nhau cùng có một khả năng tiếp xúc như nhau. Ngược lại, giả thiết đó không có hiệu lực để xét đến vấn đề lan truyền bệnh dịch nếu sự phân bố cộng đồng dân cư không đồng nhất trên lãnh thổ của họ : ví dụ một xứ gồm nhiều cộng đồng có dân số khác nhau quá xa (thành phố, thị trấn, xã, làng, xóm...). Nếu một bệnh xuất hiện trong một thành phố nhất định, ước lượng như thế nào nguy cơ bệnh đó lan truyền đến thành phố khác của đất nước ? Một cách cổ điển để xử lý là giả thiết rằng nguy cơ đó tỉ lệ nghịch với khoảng cách giữa hai thành phố. Ý tưởng chủ đạo là : hai thành phố càng cách xa nhau, thì tác động qua lại giữa chúng càng yếu, do đó nguy cơ giảm đi.

Nhưng vấn đề không phải đơn giản như vậy. Điều trên không đúng với hai thành phố lớn ngày nay có số hành khách qua lại lớn bằng máy bay. Thực vậy, từ những công trình của Andrew Cliff, nhà địa lí kinh tế ở Đại học Cambridge, người ta thấy rằng những biến động về dân số quan trọng hơn rất nhiều khi xét đến những thành phố lớn.

Điều ghi nhận đó đã gợi ý cho Andrew Cliff vào năm 1973 xác lập một mô hình hấp dẫn của những tác động qua lại giữa những tập hợp dân cư : bằng cách xem dân số của một thành phố là "khối lượng", xem tác động qua

TOÁN HỌC và sự lan truyền bệnh dịch

PHAN THANH QUANG - NGUYỄN VĂN THIÊM

lại giữa các thành phố là tỉ lệ với khối lượng (hoặc là với lũy thừa của mỗi khối lượng), và tỉ lệ nghịch, với một lũy thừa nào đó, của khoảng cách (không nhất thiết là lũy thừa bậc 2 như trong trường hợp của lực hấp dẫn).

Vấn đề còn lại là liên kết hai yếu tố : bệnh dịch với địa lí, sự lan truyền của một bệnh dịch với mô hình hấp dẫn của những sự trao đổi dân cư giữa hai thành phố. Đó là điều mà Yingcun Xia và các cộng tác viên của ông ở Đại học Quốc gia Singapore đã thực hiện. Trên cơ sở những số liệu đã thu được về bệnh sởi vùng Royaume-Uni ở Anh giữa năm 1950 và 1966 (những số liệu chính xác vừa được lấy trong thời kì trước khi tiêm chủng), họ đã chứng tỏ rằng có thể xác định được những thông số của một mô hình hấp dẫn như vậy để có sự ăn khớp giữa số liệu dự kiến và số liệu thực tế. Trước hết, trên cơ sở của những số liệu lấy được từ 60 thành phố, ông thấy rằng sự lan truyền bệnh dịch minh họa một cách khá rõ "luật hấp dẫn", trong đó lực hấp dẫn tỉ lệ với khối lượng của thành phố xuất phát, tỉ lệ theo lũy thừa 1,5 của khối lượng thành phố đến, và tỉ lệ nghịch với khoảng cách hai thành phố. Phân tích gần 900 thành phố khác, ông thấy rằng điều khẳng định đó phù hợp với định luật đề ra.

Phải chăng đó là một công cụ toán hữu hiệu để một ngày nào đó, phục vụ yêu cầu chống những bệnh dịch ?

Các tác giả còn có ý định vận dụng mô hình này nghiên cứu sự lan truyền của bệnh cúm, một bệnh mà năm nào ngành y tế cũng phải đối phó.

(Theo Benoit Rittaud trong *La Recherche* số 379 tháng 10 năm 2004)



TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA BÀI TOÁN CỰC TRỊ

NGUYỄN NGỌC KHOA
(GV THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Xây dựng chương trình giải là một bước rất quan trọng trong lược đồ giải toán bốn bước của G. Pôlia. Để có chương trình giải tối ưu, trước hết ta phải nghiên cứu thật kỹ cấu trúc của bài toán, xem xét dưới nhiều góc độ, tìm bản chất của bài toán, xây dựng thêm các giả thiết, từ đó định ra hướng giải phù hợp. Bài viết này khai thác tính đối xứng của các biểu thức để giải bài toán cực trị. Trong bài, kí hiệu giá trị nhỏ nhất (GTNN) của một biểu thức P là $\text{Min}P$, giá trị lớn nhất (GTLN) của P là $\text{Max}P$.

Thí dụ 1. Giả sử A, B, C, D là các góc của tứ giác lồi bất kì. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = -\sin \frac{1}{3}A + \sin B + \sin C + \sin D$.

Nhận xét. Sử dụng BDT

$$\sin B + \sin C + \sin D \leq 3 \sin \frac{B+C+D}{3}$$

(Bạn đọc tự chứng minh). Dựa vào tính đối xứng của B, C, D ta quy về tìm GTLN của biểu thức một biến t như sau:

$$\text{Đặt } t = \frac{B+C+D}{3}, \text{ ta có } A = 2\pi - 3t;$$

$$\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P &\leq -\sin \left[\frac{1}{3}(2\pi - 3t) \right] + 3 \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t + \frac{5}{2} \sin t \\ &\leq \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{5}{2} \right)^2} = \sqrt{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}, \sin t = \frac{5}{\sqrt{28}}$$

(2) (thỏa mãn (1)).

Vậy $\text{Max}P = \sqrt{7}$ đạt được tại $B = C = D = t$, $A = 2\pi - 3t$ với t xác định bởi (1) và (2) (dễ thấy tứ giác này tồn tại).

Thí dụ 2. Cho các số thực x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2+2} + \sqrt{x_3+3}$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $x_1 + x_2 + x_3$.

Nhận xét. Sai lầm của học sinh là bình phương hai vế để làm mất căn, nên đã biến

bài toán đơn giản về bài toán phức tạp hơn rất nhiều. Lời giải sau dựa vào tính đối xứng của ba biểu thức x_1+1, x_2+2 và x_3+3 .

$$(x_1+1) + (x_2+2) + (x_3+3) =$$

$$= \sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2+2} + \sqrt{x_3+3} + 6$$

$$\text{Đặt } X_1 = \sqrt{x_1+1} \geq 0, X_2 = \sqrt{x_2+2} \geq 0,$$

$$X_3 = \sqrt{x_3+3} \geq 0.$$

Bài toán quy về tìm GTNN, GTLN của biểu thức $S = x_1 + x_2 + x_3 = X_1 + X_2 + X_3$

$$\text{với } X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = X_1 + X_2 + X_3 + 6 \quad (3)$$

Từ (3) và BDT

$$3(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \geq (X_1 + X_2 + X_3)^2$$

$$\text{ta có } S^2 - 3S - 18 \leq 0 \Rightarrow S \leq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi $X_1 = X_2 = X_3 = 2$. Vậy $\text{Max}[X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 6] = \text{Max}S = 6$ do đó $\text{Max}(x_1 + x_2 + x_3) = 6$.

• Dự đoán GTNN đạt tại các "điểm biên", ta biến đổi như sau:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 6 = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow S^2 - S - 6 =$$

$$2(X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3) \geq 0 \Rightarrow S \geq 3 \text{ (Do } S > 0).$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $X_1 = X_2 = 0$; $X_3 = 3$. Vậy $\text{Min}S = 3$ do đó $\text{Min}(x_1 + x_2 + x_3) = 3$.

Bạn đọc có thể giải bài toán trên bằng phương pháp hình học.

Thí dụ 3. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá

$$\text{trị lớn nhất của biểu thức } P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3}.$$

Nhận xét. $P(ax; ay; az) = P(x; y; z)$ với mọi $a > 0$. Tính thuần nhất của P cho phép ta "thêm giả thiết" $x+y+z = 1$ mà không mất tính tổng quát. Bài toán quy về tìm GTNN, GTLN của $Q = x^3 + y^3 + 16z^3$ với điều kiện $x+y+z = 1$.

• **Tìm GTNN của Q :** Tính đối xứng của x, y định hướng cho ta ước lượng qua BĐT trung gian

$$x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4} = \frac{1}{4}(1-z)^3$$

$$\text{Từ đó } Q \geq \frac{1}{4}(1-z)^3 + 16z^3 =$$

$$= \frac{1}{4}[(1-z)^3 + 64z^3] = \frac{1}{4}f(z), \quad 0 \leq z \leq 1.$$

$$f'(z) = 3[64z^2 - (1-z)^2];$$

$$f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{9} \text{ (chú ý } 0 \leq z \leq 1).$$

Lập bảng biến thiên của hàm $f(z)$ trên $[0; 1]$ ta thấy $f(z) \geq \frac{64}{81} \Rightarrow Q \geq \frac{1}{4}f(z) \geq \frac{16}{81}$.

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } x = y = \frac{4}{9}, z = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{16}{81}.$$

• **Tìm GTLN của Q :** Dự đoán GTLN đạt tại "điểm biên" $(0; 0; 1)$. Ta ước lượng như sau:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 16z^3 &= x^3 + y^3 + z^3 + 15z^3 \\ &\leq (x+y+z)^3 + 15z^3 \leq 16. \end{aligned}$$

Vậy $\max P = 16$ đạt được, chẳng hạn, tại $x = y = 0, z = 1$.

Thí dụ 4. Cho các số thực không âm x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $P = x^4 + y^4 + z^4$ trong các trường hợp

$$a) x + y + z = 3.$$

$$b) x + y + z = 3 \text{ và } xy + xz + yz = 1.$$

Giải. a) • Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki được

$$27(x^4 + y^4 + z^4) \geq 9(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq (x+y+z)^4$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq 3$$

$$\Rightarrow \min P = 3 \text{ đạt được tại } x = y = z = 1.$$

• Dự đoán GTLN đạt tại các "điểm biên" ta biểu diễn P theo các đa thức đối xứng sơ cấp $s_1 = x+y+z, s_2 = xy+xz+yz, s_3 = xyz$ để đánh giá (Chú ý rằng mọi đa thức đối xứng đều biểu diễn được qua các đa thức đối xứng sơ cấp).

$$\begin{aligned} P &= s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 2s_2^2 + 4s_1s_3 = \\ &= 81 - 36(xy+xz+yz) + 2(xy+xz+yz)^2 + 12xyz. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } xy+xz+yz \leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{xy+xz+yz}{3} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{xy+xz+yz}{3} \right)^2 \leq \frac{xy+xz+yz}{3}$$

$$\text{hay } 2(xy+xz+yz)^2 - 6(xy+xz+yz) \leq 0. \quad (1)$$

Theo BĐT Cô-si: $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, do đó $0 \leq xyz \leq 1$, dẫn đến

$$xy+xz+yz \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \geq 3xyz. \quad (2)$$

Từ (1), (2) có

$$\begin{aligned} P &= 81 + 2(xy+xz+yz)^2 - 6(xy+xz+yz) - \\ &- 4(xy+xz+yz-3xyz) - 26(xy+xz+yz) \leq 81. \end{aligned}$$

Vậy $\max P = 81$ đạt được, chẳng hạn, tại $x = 3, y = z = 0$.

b) **Nhận xét.** Điều kiện $x = y = z$ không xảy ra, và x, y (hoặc x, z hoặc y, z) không thể đồng thời bằng không, vì vậy ta không thể sử dụng phương pháp như ở câu (a). Tính đối xứng của đa thức P và giả thiết của bài toán định hướng cho ta tính P theo các đa thức đối xứng sơ cấp:

$$P = s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 2s_2^2 + 4s_1s_3 = 47 + 12s_3.$$

Bài toán quy về tìm GTNN, GTLN của s_3 .

• Rõ ràng $s_3 \geq 0$ nên $\min P = 47$ đạt được chẳng hạn tại $x = 0$; còn y, z là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y+z=3 \\ yz=1 \end{cases} \Rightarrow (y, z) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \text{ hoặc}$$

$$(y, z) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right).$$

• **Tìm GTLN của**

$$\begin{aligned} s_3 &= xyz = x[1 - x(y+z)] = x[1 - x(3-x)] \\ &= x^3 - 3x^2 + x. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } y+z = 3-x; \quad yz = x^2-3x+1.$$

$$\text{Theo BĐT Cô-si ta có } (y+z)^2 \geq 4yz$$

$$\Rightarrow (3-x)^2 \geq 4(x^2-3x+1) \Leftrightarrow 3x^2-6x-5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{3+\sqrt{24}}{3} \text{ (do } x \geq 0).$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $s_3 = x^3 - 3x^2 + x$ trên đoạn $\left[0; \frac{3+\sqrt{24}}{3}\right]$ ta có $s_3 \leq \frac{4\sqrt{6}-9}{9}$ nên

$$\text{Max}P = 47 + 12 \left(\frac{4\sqrt{6}-9}{9} \right) = \frac{105+16\sqrt{6}}{3}, \text{ đạt}$$

được, chẳng hạn, tại $x = \frac{3+\sqrt{24}}{3}, y = z = \frac{6-\sqrt{24}}{6}$.

BÀI TẬP

1) Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c = 1$. Chứng minh:

$$2 + 9abc \geq 7(ab+bc+ca)$$

(Thi Vô địch Anh - 1999)

2) Cho tam giác ABC . Tìm GTLN của mỗi biểu thức sau :

a) $\cos A + \cos B + 2004 \cos C$;

b) $\sin^p A + \sin^p B + \sin^p C$ với $0 \leq p \leq 2$.

3) Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$x_1 + x_2 + \dots + x_n$, trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là những số thực tùy ý thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sqrt{x_1 + 1} + \sqrt{x_2 + 2} + \dots + \sqrt{x_n + n}.$$

4) Tìm GTNN của biểu thức

$$\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{12}z^4 + \frac{1}{7 \cdot 3^7}t^7,$$

trong đó x, y, z, t là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z+t = 3$.

5) Tìm GTNN, GTLN của $P = x^3 + y^3 + z^3$ trong mỗi trường hợp sau, trong đó x, y, z là các số thực không âm :

a) $x + y + z = 6$.

b) $x + y + z = 8$ và $xyz = 16$.

6) Tìm GTNN, GTLN của $P = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{(x+y+z)^4}$

trong mỗi trường hợp sau :

a) x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z > 0$.

b) x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7(xy+xz+yz).$$

c) x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$(x+y+z)^3 = 32xyz$ (Bài 5, thi HSG Quốc gia THPT bảng A năm 2004).

KẾT QUẢ CUỘC THI OLYMPIC TOÁN SINGAPORE 2005 CỦA HỌC SINH VIỆT NAM

VŨ KIM THỦY

Ngày 26.04.2005 Hội Toán học Singapore đã mời Hội Toán học Hà Nội Việt Nam tham dự cuộc thi Olympic Singapore. Hàng nghìn học sinh của các nước thuộc Đông Nam Á tham gia cuộc thi. Năm ngoái lần đầu tiên học sinh Hà Nội đã tham gia và có kết quả tốt.

Ngày 06.05.2005 Hội Toán học Hà Nội, Sở Giáo dục - Đào tạo Hà Nội, Sở Giáo dục - Đào tạo Vĩnh Phúc đã thống nhất cử học sinh giỏi của một số trường thuộc Hà Nội, Vĩnh Phúc và mời Hưng Yên tham gia. Sở Giáo dục Vĩnh Phúc đã lập đội tuyển dự thi và tổ chức ôn luyện chu đáo. Trưởng ban tổ chức cuộc thi là GS. TSKH. Lê Hùng Sơn, Phó Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, Phó ban thường trực tổ chức cuộc thi là ThS. Vũ Kim Thủy, Ủy viên Ban Chấp hành Hội Toán học Hà Nội. Có 19 học sinh sinh sau ngày 01.01.1989 của các trường Chuyên Hà Nội - Amsterdam, THPT Chu Văn An, THPT chuyên ban Hưng Yên, THPT chuyên Vĩnh Phúc, THPT Xuân Hòa, Vĩnh Phúc, THCS Ngô Sĩ Liên, Hà Nội thi bậc Senior Section. Có 20 học sinh sinh sau ngày 01.01.1991 của các trường THCS Trưng Vương, THPT Hà Nội - Amsterdam, THCS Ngô Sĩ Liên, Dân lập Nguyễn Siêu, Hà Nội, THCS Vĩnh Yên, THCS Yên Lạc, THCS Hai Bà Trưng, THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc thi bậc Junior Section. Ngày 31.05.2005 tại Hội trường Lê Văn Thiêm, 19 Lê Thánh Tông, Hà Nội cuộc thi đã diễn ra từ 9h30 đến 12h (giờ Hà Nội) đồng thời với các nước khác. Đề thi gồm 35 bài toán bằng tiếng Anh và học sinh cũng phải viết lời giải bằng tiếng Anh. Mười câu đầu là trắc nghiệm và 25 câu sau viết lời giải vắn tắt. (Đề thi Senior Section đã in trên THPT số 337 tháng 7.2005). Theo quy chế cuộc thi, bài thi được niêm phong và gửi sang Singapore chấm và tháng 9 Hội Toán học Singapore công bố kết quả. Thành tích của học sinh Việt Nam năm nay cao hơn năm ngoái. 38/39 học sinh đã đoạt giải trong đó có 26 giải Vàng (xin xem bảng trang bên).

Junior Section (sinh sau 01.01.1991)

<i>TT</i>	<i>Họ và tên</i>	<i>Trường</i>	<i>Số điểm</i>	<i>Giải</i>
1	Hồ Đức	THCS Trưng Vương, Hà Nội	25	Vàng
2	Nguyễn Trọng Đức	THCS Trưng Vương, Hà Nội	25	Vàng
3	Nguyễn Thị Thu Hương	THCS Vinh Yên, Vĩnh Phúc	25	Vàng
4	Nguyễn Thị Hà	THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc	24	Vàng
5	Văn Mạnh Tuấn	THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc	24	Vàng
6	Tạ Thế Anh	THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc	23	Vàng
7	Phạm Hoàng Linh	THCS Trưng Vương, Hà Nội	22	Vàng
8	Trần Minh Hằng	THCS Hai Bà Trưng, Vĩnh Phúc	22	Vàng
9	Khổng Hoàng Thao	THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc	21	Vàng
10	Mai Tuấn Anh	THPT Hà Nội - Amsterdam	21	Vàng
11	Nguyễn Thế Hùng	THCS Hai Bà Trưng, Vĩnh Phúc	21	Vàng
12	Trần Quang Sự	THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc	21	Vàng
13	Đặng Hồng Phúc	THCS Trưng Vương, Hà Nội	19	Vàng
14	Lê Minh Hằng	THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc	19	Vàng
15	Nguyễn Minh Trang	THPT Hà Nội - Amsterdam	18	Vàng
16	Mạc Thế Trường	THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc	17	Vàng
17	Dương Thùy Linh	THCS Trưng Vương, Hà Nội	16	Vàng
18	Lê Lan Chi	THCS Ngô Sĩ Liên, Hà Nội	13	Bạc
19	Phạm Hùng Anh	THCS Trưng Vương, Hà Nội	12	Đồng

Senior Section (sinh sau 01.01.1989)

<i>TT</i>	<i>Họ và tên</i>	<i>Trường</i>	<i>Số điểm</i>	<i>Giải</i>
1	Nguyễn Hoài Nam	THPT chuyên Vĩnh Phúc	27	Vàng
2	Đỗ Văn Cường	THPT chuyên Vĩnh Phúc	25	Vàng
3	Nguyễn Xuân Chương	THPT chuyên Vĩnh Phúc	24	Vàng
4	Nguyễn Văn Ngọc	THPT chuyên Vĩnh Phúc	24	Vàng
5	Nguyễn Thị Hà	THPT chuyên Vĩnh Phúc	23	Vàng
6	Nguyễn Xuân Thọ	THPT chuyên Vĩnh Phúc	23	Vàng
7	Nguyễn Hùng Tiến	THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam	22	Vàng
8	Trần Trung Dũng	THPT chuyên Vĩnh Phúc	21	Vàng
9	Lê Tiến Đức	THPT chuyên Vĩnh Phúc	21	Vàng
10	Nguyễn Kim Thuật	THPT chuyên Vĩnh Phúc	19	Bạc
11	Nguyễn Hải Ly	THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam	16	Bạc
12	Đỗ Phương An	THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam	16	Bạc
13	Nguyễn Bảo Linh	THPT Xuân Hòa, Vĩnh Phúc	15	Bạc
14	Lê Ngọc Hải	THCS Ngô Sĩ Liên, Hà Nội	15	Bạc
15	Lê Thanh	THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam	13	Đồng
16	Phạm Xuân Thắng	THPT chuyên ban Hưng Yên	9	K.Khích
17	Nguyễn Đình Tuấn	THPT Chu Văn An, Hà Nội	9	K.Khích
18	Đinh Sĩ Quý	THPT Chu Văn An, Hà Nội	9	K.Khích
19	Trần Ngọc Trà Mi	THPT Chu Văn An, Hà Nội	9	K.Khích

Đáng chú ý có các học sinh Lê Ngọc Hải, Lê Thanh, Nguyễn Hải Ly tham dự thi Senior Section nhưng mới học lớp 9. Lê Ngọc Hải là học sinh năm ngoái đạt Huy chương Bạc trong Kỳ thi Olympic Khoa học Quốc tế lần đầu tiên, tổ chức tại Indônêxia.



GÓC ĐỊNH HƯỚNG

NGUYỄN MINH HÀ – NGUYỄN VIỆT HẢI
(Hà Nội)

I. Khái niệm góc định hướng

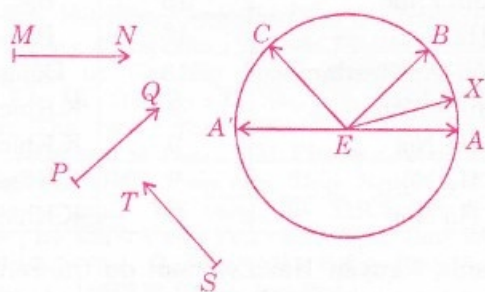
a) Góc định hướng của hai vectơ chung gốc

1. Cho hai vectơ chung gốc $\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}$ (đều khác vectơ-không). Trong mặt phẳng (EAB) cho tia Ex quay quanh điểm E theo một hướng nhất định từ tia EA đến tia EB , ta nói tia Ex quét một *góc định hướng*, kí hiệu là $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})$, với $\overrightarrow{EA}$ là *vectơ đầu* (hoặc vectơ gốc), $\overrightarrow{EB}$ là *vectơ cuối* (hoặc vectơ ngọn).

Như vậy góc định hướng của vectơ $\overrightarrow{EA}$ và vectơ $\overrightarrow{EB}$ chính là *góc lượng giác* của tia EA và tia EB (xem SGK Đại số và Giải tích 11).

2. Thông thường, người ta quy ước hướng quay của tia Ex nói trên quanh điểm E là *dương* nếu hướng quay này ngược với hướng quay của kim đồng hồ, và là *âm* nếu hướng quay này theo hướng kim đồng hồ.

3. Khi xác định GDH ở trên ta không quan tâm đến độ dài vectơ nên để thuận tiện ta có thể xét các vectơ $\overrightarrow{EA}$ và $\overrightarrow{EB}$ có độ dài bằng nhau: $|\overrightarrow{EA}| = |\overrightarrow{EB}| = r$ (h.1).



Hình 1

Góc định hướng trên mặt phẳng là một khái niệm tương đối phức tạp và tinh tế mà trong SGK toán chưa đề cập đầy đủ. Tương tự như khi xét đoạn thẳng với hai yếu tố là độ dài và hướng ta có vectơ, khi xét góc với hai yếu tố là độ lớn và hướng ta có góc định hướng (GDH). Trong bài này, trình bày khái niệm góc định hướng và một số hệ thức cơ bản về góc định hướng, những hệ thức này giúp ta giải nhiều bài tập liên quan đến góc một cách gọn gàng hơn.

Khi cho điểm X chuyển động trên đường tròn tâm E , bán kính $r = EA = EB$ từ điểm A đến điểm B và quay $|k|$ vòng theo một hướng xác định thì điểm X vẽ nên một *cung định hướng*, kí hiệu là $\widehat{AB}$, trong đó $k \geq 0$ nếu quay theo hướng dương và $k < 0$ nếu quay theo hướng âm.

Ta có công thức về số đo cung định hướng (SGK nói trên):

$$sd\widehat{AB} = \alpha^\circ + k.360^\circ$$

với k là số nguyên và $\widehat{AEB} = \alpha^\circ$.

Nếu sử dụng số đo radian với $\alpha.180^\circ = \alpha.\pi$ thì có công thức

$$sd\widehat{AB} = \alpha + k.2\pi$$

4. Ta gọi số đo GDH $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})$ là

$$sd(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = \alpha^\circ + k.360^\circ$$

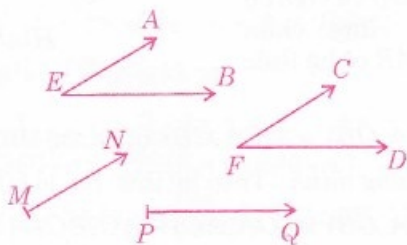
trong đó $\alpha^\circ = \widehat{AEB}$ ($0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$), $(\widehat{AEB}$ là số đo góc không định hướng, tương ứng với số đo cung không định hướng $\widehat{AB}$), $|k|$ là số vòng quay của tia Ax từ tia đầu EA đến tia cuối EB , $k \geq 0$ nếu quay theo hướng dương, $k < 0$ nếu quay theo hướng âm. Nếu dùng đơn vị đo radian ta có công thức

$$sd(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = \alpha + k.2\pi.$$

Như vậy mỗi GDH $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})$ được xác định bởi vectơ đầu $\overrightarrow{EA}$, vectơ cuối $\overrightarrow{EB}$ (do đó $\alpha^\circ = \widehat{AEB}$ xác định) và một số nguyên k . Mỗi GDH có một số đo xác định, tuy có thể viết theo nhiều cách, chẳng hạn $sd(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = 30^\circ + 2.360^\circ = 750^\circ = -330^\circ + 3.360^\circ = 1110^\circ - 1.360^\circ$ (ở đây $k = 2$).

b) Góc định hướng của hai vectơ không chung gốc

1. Cho hai vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ (đều khác vectơ – không) nằm trên cùng một mặt phẳng. Từ một điểm (gọi là *điểm gốc*) E nào đó trên mặt phẳng ấy dựng các vectơ $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{PQ}$ (h.2). Với mỗi vectơ đầu $\overrightarrow{MN}$, vectơ cuối $\overrightarrow{PQ}$ và số nguyên k , ta xác định một góc định hướng, kí hiệu là $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$, với $\text{sd}(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) = \text{sd}(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = \alpha^\circ + k \cdot 360^\circ$, trong đó $\alpha^\circ = \widehat{AEB}$ và $|k|$ là số vòng quay từ tia EA đến tia EB , $k \geq 0$ nếu quay theo hướng dương, $k < 0$ nếu quay theo hướng âm.



Hình 2

2. Cách xác định GDH $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$ như trên không phụ thuộc vào vị trí điểm gốc E . Thực vậy, giả sử với hai điểm gốc E và F ta dựng các vectơ $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{FC}$ và $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{FD}$ (h.2) thì $\widehat{AEB} = \widehat{CFD}$ (hai góc có cạnh tương ứng song song cùng hướng), đồng thời số vòng quay k là như nhau nên $\text{sd}(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = \text{sd}(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FD})$. Hai góc định hướng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ và $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$ gọi là *bằng nhau* khi $\text{sd}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \text{sd}(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$. Kí hiệu sự bằng nhau của hai GDH trên là $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$. Chú ý rằng hai GDH bằng nhau không nhất thiết có hai vectơ gốc của chúng cùng hướng.

Quan hệ bằng nhau của các GDH có tính chất: phản xạ, đối xứng, bắc cầu, nghĩa là các tính chất của quan hệ tương đương.

II. Các hệ thức cơ bản về số đo góc định hướng

Sự xác định GDH như trên không phụ thuộc vào độ dài và điểm gốc các vectơ nên để thuận

tiện, ta chỉ cần xét các vectơ có độ dài bằng nhau và có chung điểm gốc, nghĩa là các bán kính vectơ của một đường tròn với điểm gốc chung là tâm đường tròn.

Từ các hệ thức về số đo cung định hướng trên cùng một đường tròn (SGK Đại số và Giải tích 11) có tâm E , bán kính $EA = EB = r$ ta suy ra được các hệ thức của số đo các góc định hướng chung gốc E , từ đó suy ra hệ thức của các góc định hướng không chung gốc. Người ta thường xét số đo GDH theo môđun 2π để không phải quan tâm đến số k , cuối cùng khi chỉ xét những GDH có số đo từ 0 đến 2π thì số đo góc đó xác định duy nhất. Xét các hệ thức về số đo góc theo môđun 2π (hoặc π) ta sẽ nhận được nhiều đồng dư thức đẹp và trong thực tế sử dụng những đồng dư thức này sẽ rất thuận lợi khi giải toán.

Dưới đây là một số **hệ thức cơ bản** đối với các GDH chung gốc và các GDH không chung gốc, trong đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EB}$ và $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{EC}$ (h.1). Chú ý rằng $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$.

1) Góc không: $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EA}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$

2) Góc bẹt: $(\overrightarrow{EA}, -\overrightarrow{EA}) \equiv \pi \pmod{2\pi}$

3) Hai góc ngược hướng:

$$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv -(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) \pmod{2\pi}$$

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \equiv -(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{MN}) \pmod{2\pi}$$

4) Hệ thức Sa-lơ:

$$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) + (\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}) \pmod{2\pi}$$

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \equiv (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ST}) + (\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{PQ}) \pmod{2\pi}$$

5) Hai góc ngược hướng bù nhau hoặc hai GDH có cạnh tương ứng song song bù nhau:

$$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv \pi + (-\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \pmod{2\pi}$$

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \equiv \pi + (-\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \pmod{2\pi}$$

$$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{EA}, -\overrightarrow{EB}) \pmod{2\pi}$$

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \equiv \pi + (\overrightarrow{MN}, -\overrightarrow{PQ}) \pmod{2\pi}$$

6) Hai GDH đối đỉnh:

$$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv (-\overrightarrow{EA}, -\overrightarrow{EB}) \pmod{2\pi}$$

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \equiv (-\overrightarrow{MN}, -\overrightarrow{PQ}) \pmod{2\pi}$$

7) Hiệu hai GDH chung tia đầu:

$$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv (\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}) - (\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA}) \pmod{2\pi}$$

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \equiv (\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{PQ}) - (\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{MN}) \pmod{2\pi}$$

Hệ thức Sa-lơ (4) là sự mở rộng của hệ thức về tia nằm giữa hai tia. Hệ thức Sa-lơ (4) được suy ra ngay từ hệ thức Sa-lơ của cung định hướng (xem SGK đã dẫn). Từ các hệ thức (4) và (2) suy ra hệ thức (5). Từ (5) suy ra (6). Ta chứng minh hệ thức (7) dựa vào các hệ thức (6) và (3) như sau :

$$\begin{aligned}(\overline{MN}, \overline{PQ}) &= (\overline{MN}, \overline{ST}) + (\overline{ST}, \overline{PQ}) \\ &= -(\overline{ST}, \overline{MN}) + (\overline{ST}, \overline{PQ}) \pmod{2\pi}\end{aligned}$$

So sánh các hệ thức (6) và (7) có quy tắc :

Khi chuyển một (số đo) góc định hướng từ về này sang về kia của đồng dư thức theo môđun 2π , ta phải đổi dấu của nó.

III. Một số ứng dụng của góc định hướng

Ta hãy làm quen với việc sử dụng các hệ thức cơ bản nêu trên khi biến đổi GDH để chứng minh một số tính chất hình học có liên quan đến góc và giải một số bài toán. Đồng thời sự trình bày một số tính chất các hình có GDH so với trường hợp góc không định hướng cần phải chú ý đến hướng nên có khác chút ít.

1. Tổng các góc trong một tam giác

Từ $(\overline{AB}, \overline{AB}) = 0 \pmod{2\pi}$, sử dụng hai lần hệ thức Sa-lơ (4) được

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) + (\overline{AC}, \overline{CB}) + (\overline{CB}, \overline{AB}) = 0 \pmod{2\pi}$$

Sử dụng các hệ thức (3) và (6) được :

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) + \pi + (-\overline{AC}, \overline{CB}) + (-\overline{CB}, -\overline{AB}) = 0 \pmod{2\pi}$$

hay

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) + (\overline{BC}, \overline{BA}) + (\overline{CA}, \overline{CB}) = \pi \pmod{2\pi} \quad (8)$$

Hệ thức (8) được phát biểu như sau :

Tổng ba góc cùng hướng trong một tam giác bằng π (theo môđun 2π).

Nếu xét các góc dương nhỏ hơn π ta có : Tổng ba góc cùng hướng trong một tam giác bằng π .

2. Góc ngoài của một tam giác

Từ hệ thức (8), chuyển về và sử dụng các hệ thức (3), (6) và (5) được

$$\begin{aligned}(\overline{AB}, \overline{AC}) + (\overline{BC}, \overline{BA}) &= \pi - (\overline{CA}, \overline{CB}) \\ &= \pi + (-\overline{CB}, -\overline{CA}) \pmod{2\pi}\end{aligned}$$

hay

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) + (\overline{BC}, \overline{BA}) = (\overline{CB}, -\overline{CA}) \pmod{2\pi} \quad (9)$$

Xét các góc ở đỉnh C của $\triangle ABC$ có :

$$(\overline{CA}, \overline{CB}) + (\overline{CB}, -\overline{CA}) = (\overline{CA}, -\overline{CA}) = \pi \pmod{2\pi}$$

nên ta gọi GDH $(\overline{CB}, -\overline{CA}) = (-\overline{CB}, \overline{CA})$ là góc ngoài của góc trong định hướng $(\overline{CA}, \overline{CB})$ của $\triangle ABC$. Từ đó hệ thức (9) được phát biểu là :

Tổng hai góc trong cùng hướng của một tam giác bằng góc ngoài cùng hướng ở đỉnh thứ ba (theo môđun 2π)

3. Góc nội tiếp và góc ở tâm

Giả sử tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O (h.3). Giữa GDH nội tiếp và GDH ở tâm cùng chắn dây AB có hệ thức sau :

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) = 2(\overline{CA}, \overline{CB}) \pmod{2\pi} \quad (10)$$

Chứng minh : Theo hệ thức Sa-lơ (4) có

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) = (\overline{OA}, \overline{AC}) + (\overline{AC}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{OB})$$

$$= \pi + (\overline{AO}, \overline{AC}) + (-\overline{AC}, -\overline{BC}) + \pi + (\overline{BC}, \overline{BO})$$

(theo (5) và (6))

$$= (\overline{CA}, \overline{CB}) + (\overline{CA}, \overline{CO}) + (\overline{CO}, \overline{CB})$$

(do $\triangle OAC$ và $\triangle OBC$ đều cân ở đỉnh O , xem Bài tập 2).

$$= (\overline{CA}, \overline{CB}) + (\overline{CA}, \overline{CB}) = 2(\overline{CA}, \overline{CB}) \pmod{2\pi}$$

(theo hệ thức (4)).

Sử dụng các hệ thức (6), (5) thì hệ thức (10) có thể viết dưới các dạng khác như sau :

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) = 2(\overline{CA}, \overline{CB}) = 2(-\overline{CA}, -\overline{CB}) \pmod{2\pi}$$

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) = 2(\overline{CA}, \overline{CB}) = 2(\pi + (-\overline{CA}, \overline{CB}))$$

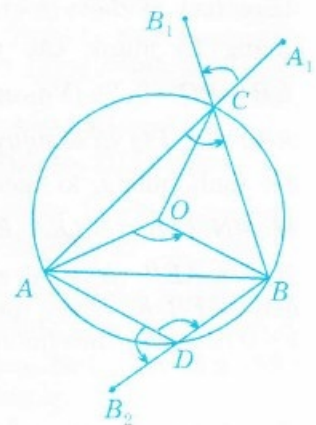
$$= 2(-\overline{CA}, \overline{CB}) \pmod{2\pi} \quad (11)$$

hoặc tương tự $(\overline{OA}, \overline{OB}) = 2(\overline{DA}, \overline{DB})$

$$= 2(\pi + (\overline{DA}, -\overline{DB})) = 2(\overline{DA}, -\overline{DB}) \pmod{2\pi} \quad (12)$$

Các bạn hãy viết hệ thức (10) (11) (12) khi thay các vectơ $-\overline{CA}, -\overline{CB}, -\overline{DB}$ bởi $\overline{CA}_1, \overline{CB}_1, \overline{DB}_2$ theo thứ tự (h.3).

Chú ý rằng hệ thức (10) xảy ra đối với điểm C bất kì (khác A, B) nằm trên đường tròn đi qua A và B , nhưng với góc không định hướng thì ta có $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$ khi C, O nằm cùng



Hình 3

phía đối với đường thẳng AB , còn $\widehat{AOB} = 2(\pi - \widehat{ADB})$ khi D, O nằm khác phía đối với đường thẳng AB .

4. Bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn

Giả sử bốn điểm phân biệt A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn tâm O (h. 3).

a) Khi C và D nằm cùng phía đối với đường thẳng AB thì $(\overline{CA}, \overline{CB}) = (\overline{DA}, \overline{DB}) \pmod{2\pi}$

b) Khi C và D nằm khác phía đối với đường thẳng AB thì $(\overline{CA}, \overline{CB}) = (\overline{DA}, -\overline{DB}) \pmod{2\pi}$

Chứng minh. Theo hệ thức (10) có :

$$2(\overline{CA}, \overline{CB}) = (\overline{OA}, \overline{OB}) = 2(\overline{DA}, \overline{DB}) \pmod{2\pi}$$

$$\text{hay } 2((\overline{CA}, \overline{CB}) - (\overline{DA}, \overline{DB})) = 0 \pmod{2\pi}$$

Xảy ra hai trường hợp :

$$\text{a) } (\overline{CA}, \overline{CB}) = (\overline{DA}, \overline{DB}) \pmod{2\pi}$$

$$\text{b) } (\overline{CA}, \overline{CB}) - (\overline{DA}, \overline{DB}) = \pi \pmod{2\pi}$$

$$\text{mà } \pi + (\overline{DA}, \overline{DB}) = (\overline{DA}, -\overline{DB}) \pmod{2\pi}$$

$$\text{nên } (\overline{CA}, \overline{CB}) = (\overline{DA}, -\overline{DB}) \pmod{2\pi}$$

Xét hai GDH $(\overline{CA}, \overline{CB})$ và $(\overline{DA}, \overline{DB})$ có số đo nằm trong khoảng $(-\pi, \pi)$, nếu C và D nằm cùng phía đối với đường thẳng AB thì $(\overline{CA}, \overline{CB})$ và $(\overline{DA}, \overline{DB})$ cùng hướng nên xảy ra (a), còn khi C và D nằm khác phía đối với AB thì chúng ngược hướng nên xảy ra (b).

5. Cung chứa góc

Cho tam giác ABC . Từ các hệ thức về bốn điểm nằm trên đường tròn suy ra : *Tập hợp điểm M sao cho $(\overline{MA}, \overline{MB}) = (\overline{CA}, \overline{CB}) \pmod{2\pi}$ là cung tròn đi qua điểm C và chắn dây AB .*

Trên hình 3 tập hợp điểm M thỏa mãn $(\overline{MA}, \overline{MB}) = (\overline{CA}, \overline{CB}) = \alpha \pmod{2\pi}$ là cung tròn $\widehat{ACB}$, còn tập hợp điểm N thỏa mãn $(\overline{NA}, \overline{NB}) = (\overline{DA}, \overline{DB}) = -\pi + \alpha \pmod{2\pi}$ là cung tròn $\widehat{ADB}$.

Các bạn hãy sử dụng các hệ thức về GDH để làm các bài tập sau :

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh các hệ thức sau của GDH:

$$\text{a) } (\overline{EA}, -\overline{EB}) = (-\overline{EA}, \overline{EB}) \pmod{2\pi};$$

$$(\overline{MN}, -\overline{PQ}) = (-\overline{MN}, \overline{PQ}) \pmod{2\pi}.$$

$$\text{b) } (-\overline{EA}, \overline{EB}) = \pi - (\overline{EB}, \overline{EA}) \pmod{2\pi};$$

$$(-\overline{MN}, \overline{PQ}) = \pi - (\overline{PQ}, \overline{MN}) \pmod{2\pi}.$$

$$\text{c) } (\overline{EA}, \overline{EB}) = \pi - (-\overline{EB}, \overline{EA}) \pmod{2\pi};$$

$$(\overline{MN}, \overline{PQ}) = \pi - (-\overline{PQ}, \overline{MN}) \pmod{2\pi}.$$

Bài 2. Trong $\triangle ABC$ cân ở A có hệ thức

$$(\overline{BC}, \overline{BA}) = (\overline{CA}, \overline{CB}) \pmod{2\pi}.$$

Bài 3. Cho bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn tâm O . Chứng minh rằng:

$$\text{a) } (\overline{CA}, \overline{CB}) + (\overline{DA}, \overline{DB}) = (\overline{OA}, \overline{OB}).$$

$$\text{b) } (\overline{AB}, \overline{CD}) + (\overline{DC}, \overline{DA}) = (\overline{AB}, \overline{AD}).$$

Bài 4. Chứng minh rằng tổng các góc trong cùng hướng của một đa giác lồi n đỉnh đồng dư với π nếu n lẻ, hoặc đồng dư với 0 nếu n chẵn theo môđun 2π .

HD: Dựa vào (9) hoặc bài tập 3).

Bài 5. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được khi và chỉ khi

$$(\overline{AB}, \overline{AD}) = (\overline{CB}, -\overline{CD}) \pmod{2\pi}.$$

(Kì sau đăng tiếp)

SÁCH MỚI

THUỘC TỦ SÁCH TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ (Quyển 1) là cuốn sách đầu tiên trong bộ tuyển chọn. Sách gồm 3 chuyên đề : *Phương pháp giải toán, Toán học và Đời sống, Lịch sử Toán học* vốn là những chuyên đề bạn đọc rất quan tâm. Sách có ích đối với thầy cô giáo dạy toán, các em học sinh và mọi người yêu toán. Các đơn vị mua với số lượng lớn có thể gửi phiếu báo về tòa soạn. Sách sẽ có mặt trên thị trường vào cuối năm 2005. Các bạn hãy đón đọc và thông tin cho nhiều người cùng biết. Cảm ơn các bạn.

THTT



CÁC LỚP THCS

Bài T1/339 (Lớp 6). Số 5^{50} viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số?

BÙI VĂN KHẮC

(GV THCS Cẩm Hưng, Cẩm Giàng, Hải Dương)

Bài T2/339 (Lớp 7). Tìm giá trị nhỏ nhất của các phân số có dạng $\frac{ab}{ac+bd}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện

$$a + b = c + d = 2006.$$

NGUYỄN ANH THUẤN

(GV THCS Trần Văn Ôn, Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/339. Phương trình

$$x^{2005} + y^{2005} = 2007^{2005}$$

có nghiệm nguyên dương không?

TRẦN NHƯ NGỌC

(GV TT GDTX EaSup-Đắk Lắk)

Bài T4/339. Giải phương trình

$$2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{27}{2}x + 6}.$$

VÔ HỮU HÀ

(GV THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

Bài T5/339. Cho các số thực dương x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 thỏa mãn điều kiện

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 2005$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2x_3} + \frac{1}{1+x_3x_4} + \frac{1}{1+x_4x_5} + \frac{1}{1+x_5x_1}.$$

NGÔ VĂN KHƯƠNG

(GV THCS Tr. Thắng, Hiệp Hòa, Bắc Giang)

Bài T6/339. Cho hình chữ nhật ABCD. Đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt các đường thẳng AB, AD lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng

$$BE \cdot \sqrt{CF} + DF \cdot \sqrt{CE} = AC \cdot \sqrt{EF}.$$

LÊ CHU BIÊN

(GV THCS Xuân Phú, Xuân Trường, Nam Định)

Bài T7/339. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng

$$\frac{IA^2}{m_a^2} + \frac{IB^2}{m_b^2} + \frac{IC^2}{m_c^2} \leq \frac{4}{3}.$$

TRẦN HỒNG SƠN

(GV THCS BC Thái Thụy, Thái Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/339. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx = 1$. Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + uy^2 + vz^2$ bằng $2t$, trong đó t là nghiệm của phương trình

$$2x^3 + (u+v+1)x^2 - uv = 0$$

trong khoảng $(0; \sqrt{uv})$.

Tìm các số nguyên tố u, v để $2t$ là số hữu tỉ.

QUÁCH VĂN GIANG

(GV THPT Chu Văn An, Hà Nội)

Bài T9/339. Xét dãy số (x_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi $x_n = a_n^{a_n}$, trong đó

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn khi n dẫn tới vô hạn và tìm giới hạn đó.

NGUYỄN TRƯỜNG PHONG

(SV Tin 1, CNTT, K45, ĐHBK Hà Nội)

Bài T10/339. Cho số thực a thuộc $(0; 1)$. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ và thỏa mãn điều kiện sau với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) = x^2.$$

HUỖNH TẤN CHÂU

(GV THPT Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T11/339. Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính r . Lấy điểm P cố định nằm bên trong đường tròn với $OP = d > 0$. Hai dây cung AB và CD đi qua điểm P tạo thành một góc α không đổi ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$). Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng $AB + CD$ khi hai dây AB, CD thay đổi và xác định vị trí của các dây AB, CD đó.

NGUYỄN XUÂN HÙNG

(GV THPT Lam Sơn, TP Thanh Hóa)

Bài T12/339. Cho tứ diện $PABC$ trong đó PA, PB, PC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $S = S_{ABC}, S_1 = S_{PAB}, S_2 = S_{PBC}, S_3 = S_{PAC}$.

Chứng minh rằng $\frac{S_1^2}{S^2 + S_1^2} + \frac{S_2^2}{S^2 + S_2^2} + \frac{S_3^2}{S^2 + S_3^2} \leq \frac{3}{4}$.

VUONG DINH TÂN

(GV THPT Võ Thị Sáu, Long Đất, Vũng Tàu)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/339. Một con lắc lò xo, gồm lò xo có độ cứng $k = 50$ (N/m) và vật nặng $M = 500$ (g), dao động điều hòa với biên độ A_0 dọc theo trục Ox trên mặt phẳng nằm ngang. Hệ đang dao động thì một vật $m = \frac{500}{3}$ (g) bắn vào M theo

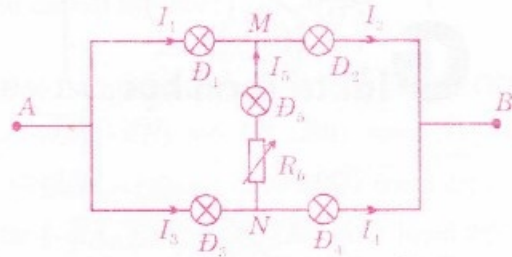
phương nằm ngang với vận tốc $v_0 = 1$ (m/s). Giả thiết va chạm là hoàn toàn đàn hồi và xảy ra vào thời điểm lò xo có chiều dài nhỏ nhất. Sau khi va chạm vật M dao động điều hòa làm cho lò xo có chiều dài cực đại và cực tiểu lần lượt là $l_{\max} = 100$ (cm) và $l_{\min} = 80$ (cm). Cho $g = 10$ (m/s²).

- 1) Tìm vận tốc của các vật ngay sau va chạm.
- 2) Xác định biên độ dao động trước va chạm.

CHU VĂN BIÊN

(ĐH Hồng Đức, Thanh Hóa)

Bài L2/339. Cho mạch điện như hình vẽ $U_{AB} = 12$ (V). Công suất tiêu thụ của các đèn $D_1; D_2; D_3; D_4; D_5$ lần lượt là $P_1 = 4$ W; $P_2 = 16$ W; $P_3 = 4$ W; $P_4 = 10$ W; $P_5 = 1$ W. Công suất tiêu thụ trên biến trở R_b là 1 W. Dòng điện có chiều như hình vẽ.



a) Xác định điện trở của các đèn và điện trở phần biến trở tham gia vào mạch điện.

b) Khi điện trở phần biến trở tham gia vào mạch điện thay đổi thì độ sáng của các đèn thay đổi thế nào? Giả sử rằng khi đó, các đèn và biến trở không bị hỏng.

NGUYỄN MẠNH THẮNG

(GV THCS Khánh Dương, Yên Mô, Ninh Bình)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/339 (for 6th grade).

How many digits has the number 5^{50} (written in decimal system)?

T2/339 (for 7th grade).

Find the least value of the fractions of the form $\frac{ab}{ac+bd}$, where a, b, c, d are positive integers satisfying the condition $a+b=c+d=2006$.

T3/339. Has the equation

$$x^{2005} + y^{2005} = 2007^{2005}$$

integral solutions?

T4/339. Solve the equation

$$2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{27}{2}x + 6}.$$

T5/339. Find the least value of the expression

$$P = \frac{1}{1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2x_3} + \frac{1}{1+x_3x_4} + \frac{1}{1+x_4x_5} + \frac{1}{1+x_5x_1}.$$

where x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 are positive real numbers satisfying the condition

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 2005$$

T6/339. Let be given a square $ABCD$. The line perpendicular to AC at C cuts the lines AB, AD respectively at E, F . Prove that

$$BE \cdot \sqrt{CF} + DF \cdot \sqrt{CE} = AC \cdot \sqrt{EF}$$

T7/339. Let I be the incenter of triangle ABC and let m_a, m_b, m_c be the measures of the medians of ABC issued respectively from A, B, C . Prove that

$$\frac{IA^2}{m_a^2} + \frac{IB^2}{m_b^2} + \frac{IC^2}{m_c^2} \leq \frac{4}{3}.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/339. Let be given two positive real numbers u, v . Consider the expression $P = x^2 + uy^2 + vz^2$, where x, y, z are arbitrary real positive numbers satisfying the condition $xy + yz + zx = 1$. Prove that the least value of P equals $2t$, where t is the root lying in the interval $(0; \sqrt{uv})$ of the equation

$$2x^3 + (u+v+1)x^2 - uv = 0$$

Find prime numbers u, v so that $2t$ is a rational number.

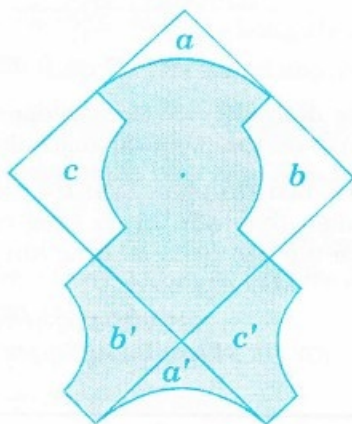


Kết quả :

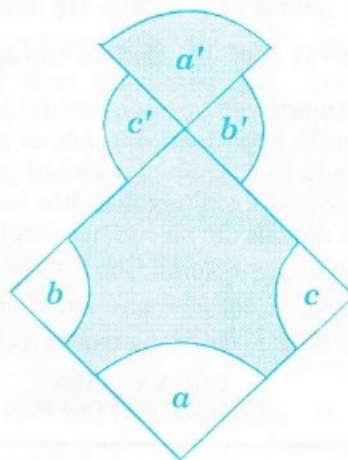
TẠO HÌNH CHÚ GẤU

Bài *Tạo hình chú gấu* được nhiều bạn hưởng ứng. Một số bạn đã trình bày đến ba, bốn cách cắt miếng bìa hình vuông ra 3 mảnh để ghép được chú gấu đáng yêu đó ! Dưới đây Tòa soạn giới thiệu 2 cách cắt ghép của bạn *Trần Văn Ngọc Hưng*, 7/1, THCS Phan Thúc Duyện, Điện Thọ, Điện Bàn, **Quảng Nam**

Trong hình 1, hình 2 mô tả cách cắt các miếng bìa a, b, c rồi chuyển đến vị trí a', b', c' theo thứ tự để được hình chú gấu.



Hình 1



Hình 2

Những bạn sau cũng có cách cắt ghép, tạo hình chú gấu đẹp mắt : *Đặng Tuyết Nhung*, 11CT, THPT chuyên Thái Nguyên, **Thái Nguyên**; *Đào Trần Mỹ Hạnh*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Trần Thanh Tuấn Tráng*,

10I, THPT Nghĩa Đàn, Nghĩa Đàn, *Nguyễn Xuân Long*, 11A6, THPT chuyên Phan Bội Châu, Tp Vinh, **Nghệ An**.

HỒNG QUANG

(Xem tiếp trang 31)

T9/339. Consider the sequence of numbers (x_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) defined by $x_n = a_n^{a_n}$, where
$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} \text{ for every } n = 1, 2, 3, \dots$$

Prove that the sequence (x_n) has a limit when n tends to infinity and find this limit.

T10/339. Let a be a real number belonging to the interval $(0 ; 1)$. Find all functions $f : R \rightarrow R$, continuous at $x = 0$, satisfying the condition

$$f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) = x^2$$

fore every $x \in R$.

T11/339. In plane, let be given a circle with $OP = d > 0$. Two arbitrary chords AB, CD passing through P , form an angle with constant measure α ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$). Find the greatest value and the least value of the sum $AB + CD$, when the chords AB, CD vary and determine the positions of AB, CD in these cases.

T12/339. Let $PABC$ be a tetrahedron such that PA, PB, PC are perpendicular each to the others. Let $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{PAB}$, $S_2 = S_{PBC}$, $S_3 = S_{PAC}$. Prove that

$$\frac{S_1^2}{S^2 + S_1^2} + \frac{S_2^2}{S^2 + S_2^2} + \frac{S_3^2}{S^2 + S_3^2} \leq \frac{3}{4}.$$



Bài T1/335 (Lớp 6). Tìm tỉ số của A và B, biết rằng

$$A = \frac{1}{1.1981} + \frac{1}{2.1982} + \dots + \frac{1}{n(1980+n)} + \dots + \frac{1}{25.2005}$$

$$B = \frac{1}{1.26} + \frac{1}{2.27} + \dots + \frac{1}{m(25+m)} + \dots + \frac{1}{1980.2005}$$

trong đó A có 25 số hạng và B có 1980 số hạng.

Lời giải. Dễ thấy rằng

$$\frac{1}{n.(1980+n)} = \frac{1}{1980} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1980+n} \right).$$

Áp dụng khai triển trên cho mỗi số hạng trong A, ta được:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1.1981} + \frac{1}{2.1982} + \dots + \frac{1}{25.2005} \\ &= \frac{1}{1980} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1981} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{2005} \right) \\ A &= \frac{1}{1980} \left[\left(\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \quad (1). \end{aligned}$$

Cũng tương tự, ta có

$$\frac{1}{m(25+m)} = \frac{1}{25} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{25+m} \right).$$

Áp dụng khai triển trên cho mỗi số hạng trong B, ta được:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1.26} + \frac{1}{2.27} + \dots + \frac{1}{1980.2005} \\ &= \frac{1}{25} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{26} + \frac{1}{2} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{1980} - \frac{1}{2005} \right) \\ B &= \frac{1}{25} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1980} \right) - \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nhận thấy hai biểu thức trong hai dấu ngoặc bên vế phải của B có phần chung là

$$\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{1980}.$$

Do đó sau khi rút gọn, ta được

$$B = \frac{1}{25} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$A : B = \frac{1}{1980} : \frac{1}{25}.$$

$$\text{Vậy } \frac{A}{B} = \frac{25}{1980} = \frac{5}{396}.$$

Nhận xét. Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này và đều theo cách trên. Sau đây là một phần trong số các bạn có lời giải tốt:

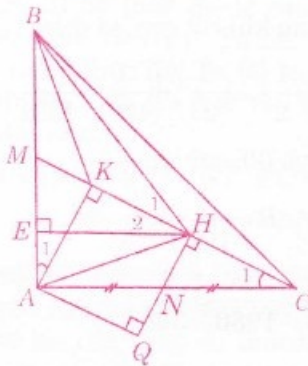
Thanh Hóa: Lê Thành Đức, 4Đ, TH Lý Tự Trọng, Đông Sơn; Lê Ngọc Tư, Phạm Thanh Tùng, Trịnh Hồng Nhung, 6A, Mai Anh Bằng, 6B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; Trịnh Quỳnh Trang, 6H, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** Phan Mạnh Hải, 6A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; Phan Thế Hoàng, Nguyễn Tất Sơn, Nguyễn Thị Thùy Dung, Vũ Đình Long, 6A, Nguyễn Thị Hạnh, Võ Thị Thuong, Trường Thị Hồng Nhung, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hải Phòng:** Nguyễn Trà Giang, 6A5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền; **Hà Nội:** Lê Quang Huy, Vũ Bích Ngọc, 6H1, THCS Trưng Vương, Q Hoàn Kiếm; **Hải Dương:** Đào Thành Thái, 6A3, THCS Lê Thanh Nghị; Mạc Đức Huy, 6A, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn; **Bình Định:** Bùi Huỳnh Tuấn, Huỳnh Quang Toàn, 6A8, Vũ Thị Tuấn Hưng, 6A4, THCS Ngô Mây, Phù Cát; **Quảng Trị:** Nguyễn Thúc Vũ Hoàng, 6M, THCS Nguyễn Huệ, Trương Nhã Uyên, 4/1, TH Hàm Nghi, TX Đông Hà; **Quảng Ngãi:** Cao Thị Nhật Linh, 6D, Đào Thị Thùy Dung, 6B, Phan Quốc Bảo, 6C, THCS Hành Phước, Nguyễn Trí Nam, 6A, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyên, 6⁷, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Nam Định:** Nguyễn Ngọc Linh, 6C, Đào Sư Tích, TT Cổ Lễ, Trực Ninh; **Vĩnh Phúc:** Phan Thế Tuấn, 6A, THCS Vĩnh Tường; Nguyễn Thị Giang A, Nguyễn Thị Huyền, Nguyễn Thị Lợi, Lê Thị Tuyết Mai, Nguyễn Thị Giang B, Nguyễn Văn Vĩ, Nguyễn Thị Xuân, Hoàng Thị Trang, Kim Anh Tùng, Bùi Thị Thu Hiền, Nguyễn Văn Phương, Nguyễn Ngọc Quý, Nguyễn Thị Ngọc, Tạ Thị Anh, Nguyễn Thị Thu Hiền, Nguyễn Ngọc Quý, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/335 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông cân với đáy BC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Kẻ $NH \perp CM$ tại H. Kẻ $HE \perp AB$ tại E. Chứng minh rằng tam giác ABH cân và HM là phân giác của góc BHE.

Lời giải. (của bạn Phạm Duy Long, 7H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, Hà Nội).

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC



a) Từ A kẻ $AK \perp MC$ tại K và $AQ \perp HN$ tại Q. Hai tam giác vuông MAK và NCH có $MA = NC \left(= \frac{1}{2} AB \right)$, $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với góc AMC) $\Rightarrow \Delta MAK = \Delta NCH$. Suy ra $AK = HC$. (1)

Để thấy $\Delta BAK = \Delta ACH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BKA} = \widehat{AHC}$. Hai tam giác vuông AQN và CHN có $AN = NC$, $\widehat{ANQ} = \widehat{CNH} \Rightarrow \Delta AQN = \Delta CHN \Rightarrow AQ = CH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AK = AQ \Rightarrow HA$ là tia phân giác của góc KHQ $\Rightarrow \widehat{AHQ} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AHC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{BKA} = 135^\circ$.

Từ $\widehat{BKA} + \widehat{BKH} + \widehat{AKH} = 360^\circ$ suy ra $\widehat{BKH} = 135^\circ$. ΔAKH có $\widehat{KHA} = 45^\circ$ nên nó vuông cân tại K $\Rightarrow KA = KH$. Xét hai tam giác BKA và BKH có BK chung, $\widehat{BKA} = \widehat{BKH} = 135^\circ$, $KA = KH \Rightarrow \Delta BKA = \Delta BKH$ (c.g.c) $\Rightarrow BA = BH$ hay tam giác ABH cân tại B.

b) Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{H_1}$ theo (1), mà $HE \parallel CA \Rightarrow \widehat{H_2} = \widehat{C_1}$ (đồng vị). Vì $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ nên $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ hay HM là tia phân giác của góc BHE.

Nhận xét. 1. Bài toán này khá hay và khó đối với các bạn lớp 7. Các bạn tham gia gửi bài đều có lời giải đúng nhưng phải dùng đến tính chất đường trung bình của tam giác. Một số bạn dựng thêm hình vuông ABDC rồi chứng minh $BH = BD$, cùng đi đến kết luận đúng.

2. Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn hơn cả: **Vinh Phúc**: Nguyễn Đăng Thanh, 7B, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nam Định**: Trần Thu Thủy, Lưu Thu Hân, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh, Tp Nam Định; **Thanh Hóa**: Lê Thị Thương, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ,

Hoàng Hóa, Lê Trọng Cường, 7B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An**: Trần Trường Giang, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Đào Trần Mỹ Hạnh**, Hoàng Trung Đức, Hoàng Thị Lệ Quyên, Nguyễn Thị Kim Chi, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: Nguyễn Trung Thành, 7B, THCS TT Kỳ Anh, Kỳ Anh; **Khánh Hòa**: Trần Thị Ánh Nguyễn, 6/7, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/335. Giải phương trình nghiệm nguyên: $2(x^2 - y^2)^2 = x^2 + y^2 + 2z^2$ (1)

Lời giải. Chú ý rằng nếu số $x = 2t$ chẵn thì $x^2 = 4t^2$, còn $x = 2t+1$ lẻ thì $x^2 = 4t(t+1) + 1 = 8k+1$ (các số t, k nguyên). Từ (1) suy ra x và y phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

a) Giả sử x, y cùng lẻ. Lúc đó ở vế trái của (1) thì $x^2 - y^2$ chia hết cho 8, nên vế phải của (1) $x^2 + y^2 + 2z^2 = 8t + 2(1 + z^2)$ phải chia hết cho 8, suy ra z lẻ, $2(1 + z^2) = 2(8k + 2) = 8s + 4$, dẫn đến mâu thuẫn.

b) Giả sử x, y cùng chẵn. Vì vế trái của (1) và $x^2 + y^2$ đều chia hết cho 4 nên ở vế phải của (1) số z phải chẵn. Đặt $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$, thay vào (1) được $8(x_1^2 - y_1^2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2$ (2), lập luận tương tự như trên thì x_1, y_1, z_1 phải chẵn. Tiếp tục như thế ta có $x = 2^n \cdot x_n, y = 2^n \cdot y_n, z = 2^n \cdot z_n$ với số n nguyên dương lớn tùy ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$. Vậy phương trình (1) có nghiệm nguyên là $x = y = z = 0$.

Nhận xét. Các bạn gửi bài giải đều làm đúng nhưng một số bạn lập luận dài dòng hoặc có chỗ chưa chặt chẽ. Các bạn có lời giải tốt là:

Phú Thọ: Nguyễn Tiến Thanh, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Đào Đức Trung**, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Hà Nội**: Nguyễn Ngọc Hiếu, 9A, THCS Nguyễn Công Trứ, Ba Đình; **Hà Tây**: Khuất Văn Phiến, 9D, THCS Thạch Thất, **Đỗ Tiến Trung**, 9A, THCS Kiều Phú, Quốc Oai, **Trần Thị Thủy Trang**, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Bắc Ninh**: Nguyễn Mạnh Hưng, 9B, THCS Từ Sơn; **Nam Định**: Nguyễn Quốc Đại, Vũ Ngọc Trung, **Trần Quang Anh**, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, **Vũ Duy Thành**, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trục Ninh; **Trần Thị Hồng Vân**, 8D, **Đỗ Thủy An**, 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực; **Hải Dương**: Nguyễn Quang Trường, 9A, THCS Bình Minh, TP. Hải Dương; **Thanh Hóa**: Hoàng Đức Ý, 9E, **Trần Công Phan Vinh**, 9B, THCS Trần Mai Ninh, **Trần Anh Ngọc**, 9A, THCS Lê Hữu

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Lập, Hậu Lộc, Lê Thành Trung, Nguyễn Cao Tuấn, 8B, Nguyễn Duy Hiến, 9A, Lê Thị Thương, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An**: Tăng Văn Bình, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Đinh Thị Quỳnh Anh, 8A, THCS Thái Hòa 2, Nghĩa Dân; **Thừa Thiên - Huế**: Nguyễn Vũ Thanh Long, 9/1, THCS Chu Văn An, Huế; **Đắk Lắk**: Võ Văn Tuấn, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Quảng Ngãi**: Lê Tiến Hào, 8B, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Tp. Hồ Chí Minh**: Nguyễn Gia Luyện, 9/8, THCS Nguyễn Du, Q. Gò Vấp.

VIỆT HẢI

Bài T4/335. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+y} + 1 \end{cases} \quad (2)$$

trong đó x, y, z là các số dương.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+y} + 1 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow \frac{x(y+z)(x+y)}{y} + \frac{y(y+z)(x+y)}{z} + \\ &+ \frac{z(y+z)(x+y)}{x} \geq (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+y)(y+z) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2z}{y} + x^2 + xy + xz + \frac{y^2(x+y)}{z} + y^2 + xy + z^2 + yz \\ &+ \frac{yz(y+z)}{x} \geq x^2 + xz + z^2 + 3y^2 + 3xy + 3yz \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2z}{y} + \frac{y^2(x+y)}{z} + \frac{yz(y+z)}{x} \\ &\geq xy + 2yz + 2y^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Áp dụng BĐT Cô-si vào vế trái của (4) được

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{x^2z}{y} + \frac{y^3}{z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2z}{y} + \frac{z^2y}{x} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{z} + \frac{z^2y}{x} \right) + y^2 \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \\ &\geq xy + \left(\sqrt{xz^3} + \sqrt{\frac{y^4z}{x}} \right) + 2y^2 \geq xy + 2yz + 2y^2. \end{aligned}$$

Vậy BĐT (4) đúng nên BĐT (3) được chứng minh. Đẳng thức ở (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Kết hợp với các PT (1), (2) ta được $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$.

Nhận xét. 1) Một số bạn đã mắc sai lầm khi giải như sau: Để chứng minh rằng: $VT(2) \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. $VP(2) \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. Kết hợp với (1) suy ra nghiệm của hệ là $x = y = z = \frac{1}{3}$. Lập luận này không đúng ở chỗ: $x = y = z$ chỉ để

$VT(2) = VP(2) = 3$. Có thể tồn tại các số x, y, z mà (2) vẫn đúng tức là $VT(2) = VP(2) = \alpha > 3$. Vì vậy đối với bài toán này, trước khi kết luận nghiệm, phải chỉ ra đẳng thức ở (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

2) Có 24 bạn tham gia giải bài này, nhưng có tới 11 bạn giải không đúng. Các bạn có lời giải tốt là: **Hải Dương**: Đào Thành Thái, 6A3, THCS Lê Thanh Nghi, Gia Lộc; **Hưng Yên**: Nguyễn Thị Như Lê, 8A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ; **Hà Nội**: Đỗ Như Milan, 8A1, THCS Chu Văn An; **Thanh Hóa**: Trịnh Quang Thanh, 8B, THCS Hàm Rồng, TP Thanh Hóa; **Nghệ An**: Lê Tuấn Hiệp, 9C, THCS Thái Sơn, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: Lê Văn Anh, 8/1, THCS Nguyễn Du, Hương Sơn; **Khánh Hòa**: Võ Thái Thông, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Tp Hồ Chí Minh**: Phạm Hoàng Long, 9/2, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/335. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(3 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(3 + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$$

trong đó các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a + b + c \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải. (Của nhiều bạn)

$$\text{Đặt } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = x; \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = y; \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = z$$

(với x, y, z là các số dương), ta có

$$\begin{aligned} P &= (3+x)(3+y)(3+z) \\ &= 27 + 9(x+y+z) + 3(xy+yz+zx) + xyz. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba hoặc hai số dương, ta có

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}; \quad xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{((xyz)^2)}$$

$$\begin{aligned} xyz &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \geq \\ &\geq \frac{2}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{2}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{2}{\sqrt{ca}} = \frac{8}{abc} \end{aligned} \quad (1)$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$\frac{3}{2} \geq a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $xyz \geq 64$.

Từ đó ta có

$$P \geq 27 + 27\sqrt[3]{xyz} + 9\sqrt[3]{(xyz)^2} + xyz = (3 + \sqrt[3]{xyz})^3$$

$$\geq (3 + \sqrt[3]{64})^3 = 343.$$

$\min P = 343$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a=b=c \\ abc = \frac{1}{8} \\ a+b+c = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c = \frac{1}{2}$$

Nhận xét. 1) Bài này tương đối dễ nên đa số các bạn tham gia đều giải đúng. Lời giải của nhiều bạn phức tạp hơn do áp dụng BDT Cô-si cho 7 số dương, BDT Bu-nhi-a-cốp-xki, BDT Trê-bư-sép... Một số bạn đã mạnh dạn nêu và chứng minh được một số bài toán tổng quát hơn. Chẳng hạn như:

"Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left[m + \left(S - \frac{1}{a_1} \right) \right] \left[m + \left(S - \frac{1}{a_2} \right) \right] \dots \left[m + \left(S - \frac{1}{a_n} \right) \right]$$

trong đó m là hằng số dương và $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 3$) thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n < b$ (b là hằng số dương), $S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ và đã tìm được $\min P =$

$$\left(m + \frac{n(n-1)}{b} \right)^n \text{ khi và chỉ khi } a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{b}{n}.$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thanh Hóa: Nguyễn Trọng Hùng, 9E, THCS Bắc Sơn, Tx Bắc Sơn, Lê Thị Thảo, Nguyễn Thị Hồng Nhung, Đinh Thế Tiến, Nguyễn Cao Tuấn, 8B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa; **Nam Định:** Vũ Duy Thành, 9C, THCS Đào Sư Tích, Cao Mạnh Hùng, 9A, THCS Yên Định, Hải Hậu, Phạm Thị Diệp, 6A, THCS Yên Thế, Ý Yên; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Như Lê, 8A, THCS Tiên Lữ, Chu Thị Hương, 9A, THCS Đồng Than, Yên Mi; **Hà Tây:** Tạ Văn Tiến, thôn Đôn Dư, xã Kim Thư, huyện Thanh Oai, Nguyễn Thế Tâm, 8A1, THCS Ngô Sĩ Liên; **Hải Phòng:** Phạm Văn Phương, 9C, THCS Thủy Sơn, Thủy Nguyên; **Hải Dương:** Nguyễn Thị Dung, 9B, THCS TT Tr Kim Thanh; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Đinh Ngọc Thái, 9A8, THCS Vũng Tàu; **Quảng Ngãi:** Vương Đình Tuấn Nguyên, 7C, THCS Phổ Ninh, Đức Phổ.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/335. Cho hình bình hành ABCD có góc BAD tù. Trong miền góc BAD, dựng tam giác ADE vuông cân với đáy AE, tam giác ABF vuông cân với đáy AF. Gọi M là trung điểm của EF. Đoạn MB cắt CF tại K, đoạn MD cắt CE tại H. Chứng minh rằng HK song song với BD.

Lời giải. Từ

$$\widehat{ADC} = \widehat{ABC} \text{ suy}$$

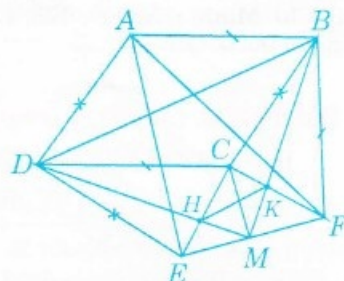
$$\text{ra } \widehat{CDE} = \widehat{FBC}.$$

$$\text{Mà } DC = AB = BF; DE = AD = BC \text{ suy ra}$$

$$\triangle CDE = \triangle FBC.$$

$$\text{Nên } CE = CF$$

$$\text{và } \widehat{DEC} = \widehat{BCF}.$$



$$\text{Ta có } \widehat{ECF} = 360^\circ - \widehat{BCD} - \widehat{DCE} - \widehat{BCF}$$

$$= 360^\circ - \widehat{BCD} - (180^\circ - \widehat{CDE})$$

$$= 360^\circ - \widehat{BCD} - \widehat{ADC} - 90^\circ = 90^\circ \text{ tức } \triangle CEF$$

vuông cân tại C. Suy ra $CM = ME = MF$,

$$\widehat{MEC} = \widehat{MCF} = \widehat{MFC}, CM \perp EF. \text{ Từ đó}$$

$$\widehat{DEM} = \widehat{BCM}. \text{ Do đó } \triangle DEM = \triangle BCM. \text{ Rút ra}$$

$$DM = BM \text{ (1), } \widehat{HME} = \widehat{CMK}. \text{ Nên } \triangle HME =$$

$$\triangle KMC. \text{ Suy ra } HM = KM \text{ (2)}$$

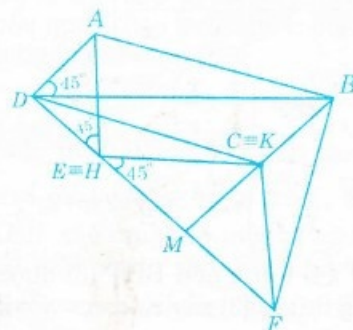
Từ (1) và (2) ta được $HK \parallel BD$ (đpcm).

Khi $\widehat{DEC} = \widehat{BCF} = 135^\circ$ thì $H \equiv E, K \equiv C$

ta có D, E, F thẳng hàng. Khi đó $\triangle MCE$,

$\triangle MBD$ là các tam giác vuông cân nên

$$\widehat{MEC} = \widehat{MDB} = 45^\circ. \text{ Vậy } HK \parallel BD.$$



GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Nhận xét. 1. Bạn *Nguyễn Thị Dung* nêu nhận xét chỉ cần $\triangle ADE$ và $\triangle ABF$ cân có góc $\widehat{ADE} = \widehat{ABF} > \widehat{ABC}$, bài toán vẫn đúng.

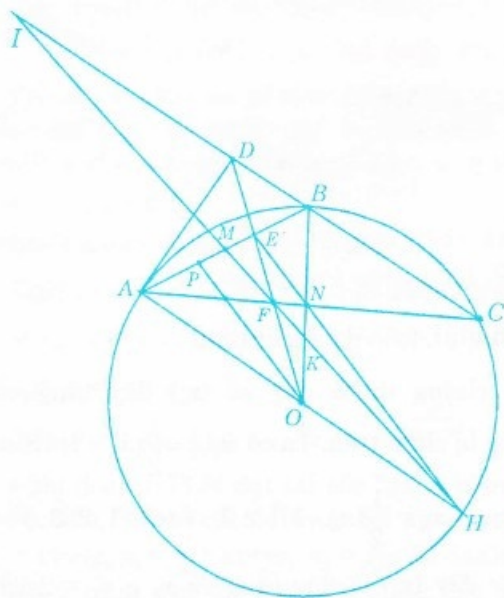
2. Giải tốt bài này có các bạn : **Hải Dương :** *Nguyễn Thị Dung*, 9B, THCS TT Tr Kim Thành ; **Hà Nội :** *Đỗ Như Milan*, 8A1, THCS Chu Văn An ; **Hà Nam :** *Nguyễn Thị Thùy Dung*, Chợ Lương, Yên Bắc, Duy Tiên ; **Nam Định :** *Mai Thanh Huyền*, lớp 9C, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, *Đinh Thị Thanh Ngọc*, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trục Ninh ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Cao Tuấn*, 8B, THCS Như Bá Sỹ, Hoàng Hóa, *Lê Thị Tì*, 7B, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn ; **Đắk Lắk :** *Võ Văn Tuấn*, 8A5, THCS Nguyễn Du Krông Buk.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/335. Cho tam giác cân ABC với $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Gọi D là giao điểm của đường thẳng BC với tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đường thẳng qua D và qua tâm O của đường tròn lần lượt cắt AB và AC tại E và F . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC . Chứng minh rằng các đường thẳng AO, MF, NE đồng quy.

Lời giải. Rõ ràng tam giác ABC cân tại B . Do $\triangle AOB$ đều và $OB \perp AC$ nên N là trung điểm của OB . Xét $\triangle ADB$ có $\widehat{ABD} = 60^\circ$, $\widehat{DAB} = 30^\circ$ nên $DB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC$; và $BC \parallel OA$

dẫn đến $\frac{EB}{EA} = \frac{DB}{OA} = \frac{DB}{BC} = \frac{1}{2}$ (1)



Giả sử H là giao điểm của AO với đường tròn (O); P là trung điểm của AE , khi đó $EH \parallel OP$. Mặt khác từ (1) ta thấy E là trung điểm của BP , suy ra $EN \parallel OP$. Do đó ba điểm H, N, E thẳng hàng.

Tiếp theo, gọi I, K lần lượt là các giao điểm của đường thẳng HF với BC và BO , ta có

$$\frac{FD}{FO} = \frac{CD}{OA} = \frac{DC}{BC} = \frac{3}{2} \quad (2)$$

Lại do $\frac{OH}{DI} = \frac{FO}{FD}$ nên thay vào (2) được

$$\frac{OH}{DI} = \frac{BC}{DC} = \frac{2}{3}, \text{ hay } DI = DC = \frac{3}{2}BC. \text{ Từ đó}$$

$OH = \frac{1}{2}IB$, vậy $\frac{KO}{KB} = \frac{OH}{IB} = \frac{1}{2} \Rightarrow K$ là trọng tâm $\triangle ABH$, nói cách khác HK đi qua trung điểm M của đoạn AB .

Tóm lại, ba đường thẳng AO, MF, NE đồng quy tại điểm H (đpcm).

Nhận xét. 1) Bài toán trên cũng có thể giải bằng cách áp dụng Định lý Mê-nê-la-uyt cho $\triangle AEO$ với cát tuyến (HMF) hoặc Định lý Xê-va cho $\triangle AEH$ (H là giao điểm của NE và AO) để suy ra ba đường thẳng NA, EO, MH đồng quy tại điểm F .

2) Có thể làm mạnh kết quả bài toán T7/335 bằng cách thay tam giác cân ABC ($\widehat{B} = 120^\circ$) bởi tam giác ABC bất kì. Bạn đọc tự chứng minh kết quả này.

3) Các bạn có lời giải gọn, hình vẽ chính xác là :

Hà Nội : *Đỗ Như Milan*, 8A1, THCS Chu Văn An ; **Hà Tây :** *Trần Ngọc Thủy*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Bắc Ninh :** *Hoàng Thị Vân*, 7C, THCS TT Gia Bình, Gia Bình ; **Hải Dương :** *Phan Tiến Thành*, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành ; **Nam Định :** *Đỗ Thủy An*, 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trục, *Vũ Duy Thành*, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trục Ninh ; **Thanh Hóa :** *Lê Thanh Tùng*, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân, *Hoàng Đức Ý*, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa ; **Nghệ An :** *Tăng Thị Hà*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Quảng Trị :** *Trương Xuân Nhã*, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Như Quốc Trung*, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt, quận Hải Châu ; **Quảng Nam :** *Phan Thị Thu Trang*, 9/4, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Điện Thắng, Điện Bàn ; **Quảng Ngãi :** *Vương Đình Tuấn Nguyễn*, 7C, THCS Phổ Ninh, Đức Phổ ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Đắk Lắk :** *Võ Văn Tuấn*, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk ; **Thừa Thiên - Huế :** *Nguyễn An Hoàng*, 9A4, THCS Kim Long, TP

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Huế; TP Hồ Chí Minh : *Phạm Hoàng Long*, 9², THCS Nguyễn Du, quận Gò Vấp; *Hưng Yên* : *Nguyễn Thị Như Lê*, 8A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ; *Hà Tĩnh* : *Nguyễn Thị Cẩm Hằng*, 9C, THCS Trung Lộc, Can Lộc.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/335. Xét đa thức

$$T(x) = x^3 + 17x^2 - 1239x + 2001.$$

Đặt $T_1(x) = T(x)$ và $T_{n+1}(x) = T(T_n(x))$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên $n > 1$ sao cho $T_n(x) - x$ chia hết cho 2003 với mọi số nguyên x .

Lời giải. Kí hiệu $x \equiv y$ thay cho $x \equiv y \pmod{2003}$.

Bổ đề 1. $x^3 \equiv y^3 \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{2003}$.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh $x^3 \equiv y^3 \Rightarrow x \equiv y$.

Nếu $x \equiv 0$ thì $y \equiv 0$ (vì 2003 là số nguyên tố) $\Rightarrow x \equiv y$. Nếu x không chia hết cho 2003 thì y không chia hết cho 2003. Theo định lý Phéc-ma nhỏ : $x^{2002} \equiv y^{2002} \equiv 1$. Vì $x^3 \equiv y^3$ nên $x^{2001} \equiv y^{2001} \Rightarrow x^{2001} \cdot y \equiv y^{2002} \Rightarrow x^{2001} \cdot y \equiv x^{2002} \Rightarrow y \equiv x$.

Bổ đề 2. $T(x) \equiv T(y) \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{2003}$

Chứng minh. $T(x) = (x - 662)^3 + 2003(x^2 - 657x) + 2001 + 662^3$.

Do đó : $T(x) \equiv T(y) \Leftrightarrow (x - 662)^3 \equiv (y - 662)^3$.

$\Leftrightarrow x - 662 \equiv y - 662 \pmod{2003} \Leftrightarrow x \equiv y$.

Ta trở lại bài toán. Đặt $A = \{0; 1; 2; \dots; 2002\}$. Với mỗi $x \in A$, xét dãy $T_1(x), T_2(x), \dots, T_{2004}(x)$. Theo nguyên lý Đê-rích-lê tồn tại các số a, b thỏa mãn $1 \leq a < b \leq 2004$ mà $T_a(x) \equiv T_b(x) \Rightarrow T_a(x) \equiv T_a(T_{b-a}(x)) \Rightarrow T_{b-a}(x) \equiv x$ (theo bổ đề 2). Vậy với mỗi $x \in A$, tồn tại $n_x \in \mathbb{N}^*$ mà $T_{n_x}(x) \equiv x$. Lấy một bội chung $n > 1$ của $n_a, n_1, \dots, n_{2002}$. Ta chứng minh n thỏa mãn điều kiện bài toán.

Thật vậy :

• Với mỗi $x \in A$, $T_{n_x}(x) \equiv x \Rightarrow T_{2n_x}(x) \equiv T_{n_x}(x) \equiv x$. Cứ như vậy có $T_{kn_x}(x) \equiv x$ ($\forall k \in \mathbb{N}^*$), mà n chia hết cho n_x nên $T_n(x) \equiv x$.

• Với mỗi x không thuộc A tồn tại y thuộc A mà $x \equiv y \Rightarrow T_n(x) \equiv T_n(y) \equiv y \equiv x$. Vậy tồn tại $n > 1$ mà $(T_n(x) - x) : 2003, (\forall x \in \mathbb{Z})$.

Nhận xét. 1) Bằng cách tương tự ta chứng minh được bài toán tổng quát : Cho đa thức $T(x)$ với hệ số nguyên và số nguyên $m \neq 0$. Biết rằng với mọi x, y nguyên thì $(T(x) - T(y)) : m \Leftrightarrow x - y : m$. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn $(T_n(x) - x) : m, (\forall x \in \mathbb{Z})$.

2) Trong số các lời giải gửi về tòa soạn, hầu hết các bạn chọn n là bội chung nhỏ nhất của $n_a, n_1, \dots, n_{2002}$ mà không chỉ rõ $n > 1$. Bạn *Lê Trường Sơn*, lớp 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc giải đúng và có chú ý đến điều này.

3) Bạn *Vũ Văn Quang*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc đã chứng minh bổ đề 2 bằng cách viết

$$27T(x) = (3x+17)^3 - 2003.18x + (2001.27 - 17^3)$$

4) Các bạn sau cũng có lời giải tốt : *Bắc Giang* : *Thân Ngọc Thuê*, 10A, THPT chuyên Bắc Giang; *Nguyễn Tường Huân*, 11/1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; *Nghệ An* : *Nguyễn Viết Khôi*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; *Thanh Hóa* : *Hoàng Vũ Hạnh* và *Trịnh Văn Vương*, 10T, *Bùi Khắc Kiên*, 11T, *Nguyễn Tuấn Dương*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; *Vĩnh Phúc* : *Nguyễn Kim Thuật*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

HOÀNG TRỌNG HẢO

Bài T9/335. Xét dãy số (x_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$)

được xác định bởi : $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$

với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Đặt } S_n = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n}$$

Tính phần nguyên của S_{2005} và tính giới hạn của S_n khi n tăng lên vô hạn.

Lời giải. (của đa số các bạn)

Ta chứng minh dãy số (x_n) dãy tăng và không bị chặn trên. Ta có $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$. Suy

$$\text{ra } x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n - 1)^2 \geq 0, (\forall n = 1, 2, 3, \dots)$$

Vậy dãy (x_n) là dãy tăng và $x_n \geq x_1 = 2$ với mọi $n > 1$. Mặt khác, nếu dãy (x_n) bị chặn thì dãy

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

sẽ có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $a \geq 2$, thì từ giả thiết (chuyển qua giới hạn), ta thu được $a = \frac{1}{2}(a^2 + 1)$ hay $a = 1$, điều này không thể xảy ra do $a \geq 2$. Vậy dãy số (x_n) là dãy tăng và không bị chặn trên, tức là $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Tiếp theo, ta viết lại giả thiết $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$

$$\text{dưới dạng } \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đây suy ra } S_n &= \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \\ &= \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{x_{n+1} - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Do } 0 < \frac{1}{x_{n+1} - 1} < 1 \text{ nên } [S_n] = 0, (\forall n = 1, 2, 3, \dots).$$

Suy ra $[S_{2005}] = 0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$.

Nhận xét. Đây là một bài toán thuộc loại dễ và có rất nhiều bạn tham gia giải. Tất cả đều giải theo cách đã trình bày ở trên. Xin nêu tên một số bạn lớp 10 có lời giải đúng:

Trần Trọng Quốc Trọng, 10A Toán, THPT Long Xuyên, An Giang; Lê Trần Tiểu My, Trần Lâm Ân, Đặng Xuân Huy, Trần Minh Hiếu, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Bình Định; Thân Ngọc Đức, 10A, THPT chuyên Bắc Giang; Nguyễn Chí Hiếu, Ngô Ngọc Hà, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh; Lê Văn Chánh, 10T, THPT Bến Tre; Đỗ Thanh Tùng, 10CT, THPT chuyên Đắk Lắk; Trần Đức Việt, 10C3, THPT Hùng Vương, Gia Lai; Lê Trọng Thạch, 10A3, THPT Phúc Thành, Trường Ngọc Sơn, Vũ Đình Quyên, Đỗ Đình Thọ, 10T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương; Đinh Văn Sơn, 10T, THPT chuyên Hà Nam; Nguyễn Quang Phương, Lê Vinh Hòa, 10T, THPT Nguyễn Huệ, Hoàng Thế Duy, 10A1, THPT Ngọc Tảo, Hà Tây; Phạm Bá Sơn, Lê Hữu Điền Khuê, 10T, THPT Quốc học Huế, Nguyễn Thị Hoàng Quân, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa; Phạm Tiến Dũng, 10T, THPT chuyên Hưng Yên; Bùi Nguyên Công, Lương Thế Kỳ, Trần Đức Nhân, Lê Ngọc Thạch, Trịnh Văn Nam, 10A1, THPT Phan Bội Châu, Nghệ An; Nguyễn Cao Cường, 10T, THPT chuyên Tiền Giang, Nguyễn Hải Thạch, Thái Thu Trang, 10A, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị, Phạm Duy Hiệp, Đinh Quang Huy, 10T, THPT Lê Hồng Phong, Nam Định; Nguyễn Việt Thăng, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, Nguyễn Đức Phú, 10A, THPT Phan Chu Trinh, Xuân Lộc, Phú Yên, Lê Tiến Nam, 10A1, THPT Thiệu Hóa, Lê Trung Thành, Trịnh Hà Linh, Trịnh Văn Vượng,

10T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa, Trần Văn Huỳnh, 10A1, THPT Lập Thạch, Lê Tiến Đức, Phạm Minh Huệ, Đỗ Mạnh Cường, Nguyễn Hoài Nam, 10A1, THPT chuyên Vinh Phúc; Đặng Ngọc Thanh, 10T, THPT Quảng Bình, Lê Bùi Tiến Duy, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/335. Xét dãy số (a_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi: $a_1 = \frac{1}{2}$ và

$$a_{n+1} = \left(\frac{1 - (1 - a_n^2)^{1/2}}{2} \right)^{1/2} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \dots + a_{2005} < 1,03$

Lời giải. (Của nhiều bạn).

Chú ý: Nếu $x = \sin \varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ thì

$$(1 - x^2)^{1/2} = \cos \varphi, \text{ suy ra}$$

$$\left(\frac{1 - (1 - x^2)^{1/2}}{2} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 - \cos \varphi}{2} \right)^{1/2} = \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Ta có $a_1 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$. Do đó, chứng minh

bằng quy nạp theo n được $a_n = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

Bởi vậy, sử dụng bất đẳng thức quen thuộc:

$\sin x < x$ với mọi $x > 0$, ta có

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{2005} &= \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2} + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^2} + \dots + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{2005}} \\ &< \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3 \cdot 2^2} + \dots + \frac{\pi}{3 \cdot 2^{2005}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2004}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{1}{2^{2004}} \right) \\ &< \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} < \frac{1}{2} + \frac{3,18}{6} = 1,03 \text{ (dpcm)}. \end{aligned}$$

Nhận xét. Đây là bài toán đại số giải bằng phương pháp lượng giác. Tòa soạn nhận được lời giải của hơn 100 bạn, hầu hết đều giải như trên. Các bạn sau có lời giải tốt: Vinh Phúc: Trần Văn Huỳnh, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; Hải Dương: Lê Trọng Thạch, 10A3, THPT Phúc Thành, Kinh Môn; Vũ Đình

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Quý. 10A, THPT Nam Sách ; **Thanh Hóa** : Nguyễn Bá Tuấn Anh, 10C3, THPT Bim Sơn, Nguyễn Hải, 10A1, THPT Đông Sơn I, La Tiến Nam, 10A1, THPT Thiệu Hóa, Phạm Khắc Thanh, 10B1, THPT Triệu Sơn I ; **Quảng Trị** : Thái Thị Thu Trang, 10A, THPT Vinh Linh ; **Khánh Hòa** : Nguyễn Thị Hoàng Oanh, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Bình Định** : Lê Trần Tiểu My, 10T, THPT Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn ; **An Giang** : Trần Ánh Dương, 10T, THPT Long Xuyên, v.v...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/335. Chứng minh rằng đối với tam giác ABC bất kì ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{1}{6} \left(\cos^2 \frac{A-B}{2} + \cos^2 \frac{B-C}{2} + \cos^2 \frac{C-A}{2} \right)$$

Lời giải. (Của bạn Trần Văn Linh, lớp 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu).

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \left(\cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \right)^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow \cos^2 \frac{A-B}{2} + 4 \sin^2 \frac{C}{2} &\geq 4 \cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \Rightarrow \cos^2 \frac{A-B}{2} + 2(1 - \cos C) &\geq 4 \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \\ \Rightarrow \cos^2 \frac{A-B}{2} + 2 &\geq 2(\cos A + \cos B + \cos C) \end{aligned}$$

Tương tự, ta có :

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{B-C}{2} + 2 &\geq 2(\cos A + \cos B + \cos C) \\ \cos^2 \frac{C-A}{2} + 2 &\geq 2(\cos A + \cos B + \cos C) \end{aligned}$$

Suy ra :

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{A-B}{2} + \cos^2 \frac{B-C}{2} + \cos^2 \frac{C-A}{2} + 6 &\geq \\ &\geq 6(\cos A + \cos B + \cos C) \\ \Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C &\leq \end{aligned}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{6} \left(\cos^2 \frac{A-B}{2} + \cos^2 \frac{B-C}{2} + \cos^2 \frac{C-A}{2} \right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, rất nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên vẫn còn một số bạn giải dài.

2) Ngoài lời giải trên, nhiều bạn còn cho một lời giải khác, khá ngắn gọn, thông qua bất đẳng thức quen thuộc sau :

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

3) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

TP Hồ Chí Minh : Nguyễn Tuấn Tú, 11CT, THPT Lê Hồng Phong ; **Quảng Trị** : Nguyễn Tiến Lâm, 10T, THPT Lê Quý Đôn, TX Đông Hà ; **Hà Nội** : Đào Duy Anh, 10A18, THPT Quang Trung ; **Hưng Yên** : Phan Tiến Dũng, 10T, THPT chuyên Hưng Yên ; **Bến Tre** : Nguyễn Lâm Anh, 22T, THPT Bến Tre ; **Cần Thơ** : Nguyễn Minh Cường, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng ; **Bình Định** : Đặng Xuân Huy, 10T, THPT Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn ; **Phú Yên** : Đặng Lê Trần Vũ, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh ; **Thanh Hóa** : Hoàng Văn Tiến, 10A1, THPT Hậu Lộc 2, Hậu Lộc, Nguyễn Hải, 10A1, THPT Đông Sơn 1, Đông Sơn.

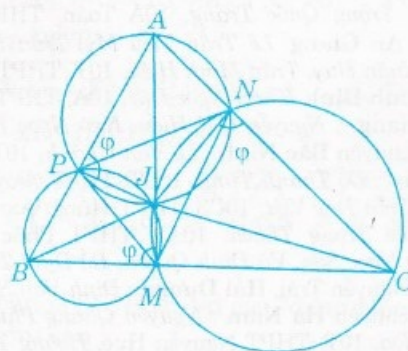
NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/335. Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và diện tích bằng S . Giả sử các điểm M, N, P theo thứ tự nằm trên các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng

$$ab.MN^2 + bc.NP^2 + ca.PM^2 \geq 4S^2 \quad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Trước hết, sử dụng điều kiện cần và đủ để bốn điểm đồng viên (cùng thuộc một đường tròn) ta dễ dàng chứng minh được rằng: Ba đường tròn (ANP) , (BPM) và (CMN) đồng quy ở một điểm J nào đó (nội dung mệnh đề này được gọi là *Bổ đề Miken* (Miquel) và J được gọi là *điểm Mi-ken*).



Trong trường hợp bài toán của ta, vì M thuộc BC , N thuộc CA và P thuộc AB nên J thuộc miền ΔABC . Sau nữa, dễ ý rằng $bc \sin A = ca \sin B = ab \sin C = 2S$, trong đó $S = s(\Delta ABC)$ là diện tích ΔABC . Vì thế gọi vế trái của $(*)$ là u thì $u = 2Sv$, trong đó :

$$v = \frac{NP^2}{\sin A} + \frac{PM^2}{\sin B} + \frac{MN^2}{\sin C} \quad (1)$$

Từ đó suy ra : $u \geq 4S^2 \Leftrightarrow v \geq 2S$

Bài toán đưa về chứng minh BDT sau đây :

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$\frac{NP^2}{\sin A} + \frac{PM^2}{\sin B} + \frac{MN^2}{\sin C} \geq 2S \quad (**)$$

Dưới đây là một số cách chứng minh (**).

Lời giải 1. Từ ba đường tròn (ANP), (BPM) và (CMN) đồng quy ở J , ta được: $\widehat{JMB} = \widehat{JNC} = \widehat{JPA} = \varphi$. Áp dụng định lý hàm số sin vào các cặp tam giác nội tiếp ba đường tròn nói trên, ta được các hệ thức sau:

$$\frac{NP}{JA \sin A} = \frac{PM}{JB \sin B} = \frac{MN}{JC \sin C} = \frac{1}{\sin \varphi} = k \quad (k \geq 1) \quad (2)$$

Thế thì, từ (1) và (2) ta được:

$$v = k(JA \cdot NP + JB \cdot PM + JC \cdot MN) \quad (3)$$

Gọi S_1, S_2 và S_3 lần lượt là diện tích các tứ giác $JNAP, JPB M$ và $JMCN$. Thế thì:

$$S_1 + S_2 + S_3 = S \text{ và } 2S_1 = JA \cdot NP \sin \theta_1,$$

$2S_2 = JB \cdot PM \sin \theta_2, 2S_3 = JC \cdot MN \sin \theta_3$, trong đó θ_1, θ_2 và θ_3 theo thứ tự là độ lớn các góc của các cặp đường chéo JA và NP, JB và PM, JC và MN của các tứ giác nội tiếp nói trên. Từ đó ta được:

$$v = 2k \left(\frac{S_1}{\sin \theta_1} + \frac{S_2}{\sin \theta_2} + \frac{S_3}{\sin \theta_3} \right) \quad (4)$$

Vì $\sin \theta_i \leq 1$ ($i = 1, 2, 3$) và $\sin \varphi \leq 1$ nên $k = \frac{1}{\sin \varphi} \geq 1$ và do đó ta thu được BDT (**) (đpcm)

Đẳng thức ở (**) xảy ra khi và chỉ khi đồng thời ta có: $\sin \varphi = \sin \theta_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$), và do đó: $v_{\min} = 2S \Leftrightarrow \varphi = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^\circ$, tức là $JM \perp BC, JN \perp CA, JP \perp AB$ đồng thời $JA \perp NP, JB \perp PM, JC \perp MN$ và vì vậy $JM = JN = JP$, nghĩa là J trùng với tâm I đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ và M, N, P lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA và AB .

Lời giải 2. Cũng như lời giải 1, trước hết thiết lập các hệ thức (2) như trên rồi áp dụng định lý hàm số sin vào tam giác ABC , ta được biểu thức sau đây của v :

$$v = \frac{k^2}{2R} (a \cdot JA^2 + b \cdot JB^2 + c \cdot JC^2) = \frac{1}{2R \sin^2 \varphi} q \quad (5)$$

$$\text{với } q = a \cdot JA^2 + b \cdot JB^2 + c \cdot JC^2 \quad (6)$$

Từ đó suy ra v nhỏ nhất khi và chỉ khi q nhỏ nhất và $\sin \varphi = 1$, tức là $\varphi = 90^\circ$. Bây giờ để xác định được $q_{\min}$, ta xuất phát từ BDT sau:

$$(a \overline{JA} + b \overline{JB} + c \overline{JC})^2 \geq 0 \quad (7)$$

Bằng cách khai triển vế trái của (7), sau khi rút gọn ta được BDT: $(a+b+c)(q-abc) \geq 0$, từ đó suy ra: $q = a \cdot JA^2 + b \cdot JB^2 + c \cdot JC^2 \geq abc$ (8)

Đẳng thức ở (8) xảy ra khi và chỉ khi $a \cdot \overline{JA} + b \cdot \overline{JB} + c \cdot \overline{JC} = 0$, nghĩa là J trùng với tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $q_{\min} = abc$.

$$\text{Từ (5) và (6) suy ra } v \geq \frac{q}{2R} \geq \frac{abc}{2R} = 2S \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. 1) Các lời giải 1 và 2 là những lời giải có sắc thái hình học thuần túy, riêng lời giải 2 có sử dụng đến khái niệm tâm tỉ cự của một hệ điểm. Một số bạn giải ngắn gọn hơn nhờ sử dụng tổng hợp các kiến thức hình học lượng giác và đại số (BDT đại số giữa trung bình cộng và trung bình nhân của hai số dương). Ta có nhận xét thêm rằng khi đẳng thức ở (*) xảy ra ta có bài toán T9/297 (THTT số tháng 3/2002).

2) Ngoài các lời giải trên đây, bạn **Vũ Văn Quang**, 12A1, THPT chuyên Vinh Phúc, **Vinh Phúc** còn đưa ra một lời giải độc đáo và ngắn gọn như sau. Gọi I là điểm sao cho: $a \overline{IM} + b \overline{IN} + c \overline{IP} = 0$, nghĩa là I là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{M(a), N(b), P(c)\}$. Điểm I được xác định và duy nhất khi cho biết M, N và P và I thuộc miền $\triangle MNP$ và do đó I thuộc miền $\triangle ABC$ (kể cả khi $\triangle MNP$ suy biến thành đoạn thẳng). Sau khi thay $MN^2 = \overline{MN}^2 = (\overline{IN} - \overline{IM})^2, NP^2 = (\overline{IP} - \overline{IN})^2,$

$PM^2 = (\overline{IM} - \overline{IP})^2$ rồi rút gọn, bạn Quang thu được đẳng thức sau:

$$u = ab \cdot MN^2 + bc \cdot NP^2 + ca \cdot PM^2 = (a \cdot IM + b \cdot IN + c \cdot IP)^2 + ab(\overline{IM} - \overline{IN})^2 + bc(\overline{IN} - \overline{IP})^2 + ca(\overline{IP} - \overline{IM})^2 \quad (11)$$

$$\text{Mặt khác } a \overline{IM} + b \overline{IN} + c \overline{IP} \geq 2[s(\overline{IBC}) + s(\overline{ICA}) + s(\overline{IAB})] = 2S \quad (12)$$

Từ (11) và (12) suy ra BDT (*): $u \geq 4S^2$ (đpcm) và đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi $IM = IN = IP$ đồng thời $IM \perp BC, IN \perp CA, IP \perp AB$. Điều đó xác nhận lại các kết quả đã chỉ ra trong các lời giải ở trên.

Ngoài ra, bạn **Đỗ Đình Thọ**, 10T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương còn phát biểu và giải đúng bài toán tổng quát hơn:

Cho đa giác lồi $A_1 A_2 \dots A_n$ ngoại tiếp được một đường tròn có diện tích S và độ dài cạnh $A_i A_{i+1} = a_i$ (trong đó xem $A_{n+1} = A_1$). Các điểm B_i thuộc cạnh

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$A_i A_{i+1}$. Đặt $u = \sum_{i>j=1}^n a_j a_j B_j^2$. Chứng minh BĐT :
 $u \geq 4S^2$.

4) Ngoài các bạn trên, các bạn sau đây có lời giải tốt và tương đối gọn gàng :

Hà Nội : Phạm Hồng Sơn, 11A1, Nguyễn Đức Giang, 10A2, PTCTT-ĐHSP Hà Nội ; **Hải Dương :** Vũ Đình Quân, Trương Ngọc Sơn, 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi, Nguyễn Phồn Hai, 11A1, THPT Kinh Môn ; **Phú Thọ :** Nguyễn Quang Huy, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Thanh Hóa :** Hoàng Vũ Hạnh, 10T, Nguyễn Tuấn Dương, Bùi Khắc Kiên, 11T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** Bùi Nguyên Công, 10A1, Lê Ngọc Thạch, Trịnh Văn Nam, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Hoàng Thị Thủy, 11A1, khối PTCTT ĐH Vinh ; **Hà Tĩnh :** Trần Đình Cường, Phan Quốc Tuấn, 10 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Thừa Thiên - Huế :** Trần Quốc Toàn, 11 PTCT ĐHKH Huế, TP Huế ; **Quảng Ngãi :** Thời Thanh Tân, 11A9, THPT Đức Phổ I ; **Khánh Hòa :** Nguyễn Thị Hoàng Oanh, THPT Lê Quý Đôn, TP Nha Trang ; **TP Hồ Chí Minh :** Nguyễn Tuấn Tú, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/235. Một cái bục bắt đầu chuyển động trên mặt phẳng ngang bởi một lực kéo $\vec{F}$ có phương nằm ngang và có độ lớn không đổi. Nhờ một cái phễu cố định, cát chảy vào bục theo phương thẳng đứng với tốc độ không đổi $\mu(\text{kg/s})$. Xác định vận tốc và gia tốc của bục theo thời gian t . Biết rằng ở thời điểm đầu $t = 0$ khối lượng của bục là m_0 và vận tốc của bục là $v_0 = 0$. Bỏ qua mọi ma sát.

Lời giải. Độ biến thiên động lượng của hệ trong thời gian dt là $d(m_0 + \mu t)v = Fdt$. Tích phân hai vế : $Ft = (m_0 + \mu t)v + C$. Lúc đầu $t = 0$ thì $v = 0$. Suy ra $C = 0$ và ta có $Ft = (m_0 + \mu t)v$.

Từ đó $v = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}$ và $a = v' = \frac{Fm_0}{(m_0 + \mu t)^2}$.

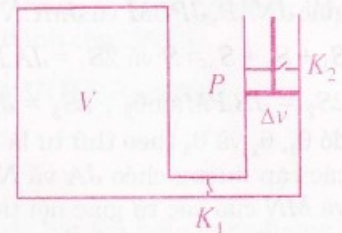
Nhận xét. Các bạn có lời giải và đáp số đúng : **Vinh Phúc :** Nguyễn Đức Trọng, 10A3, Đoàn Anh Quốc, Nguyễn Duy Hội, Nguyễn Ngọc Hưng, 11A3, Vũ Ngọc Quang, 12A3, THPT chuyên Vinh Phúc ; **Quảng Ngãi :** Đặng Đình Nhất, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, Phạm Nhân Thọ, 12C1, THPT Trần Quốc Tuấn ; **Hà Tĩnh :** Hoàng Thanh Hà, Lí K3, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Bắc Ninh :** Trần Thái Hà, Nguyễn Xuân Nam, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Nghệ An :** Hồ Văn Trực, 11G, THPT Nghĩa Đàn ; **Phú Thọ :** Tô Minh Tiến, 10 Lí, THPT chuyên Hùng Vương ; **Yên Bái :** Trần Quang Khải, 12 Lí, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Thanh Hóa :** Lê Bá Ngọc, Hà Việt Anh, Lưu

Tiến Mạnh, 10F, THPT Lam Sơn ; **Hải Dương :** Lê Hoàng Dũng, 11 Lí, THPT Nguyễn Trãi ; **Bắc Giang :** Nguyễn Đức Toàn, 10C Lí, THPT chuyên Bắc Giang ; **Hà Nội :** Nguyễn Tiến Hùng, 11B Lí, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội ; **Tiền Giang :** Nguyễn Vinh Phúc, 12A18, THPT Chợ Gạo ; **Thái Nguyên :** Ngô Thu Hà, Lí 11, THPT chuyên Thái Nguyên.

MAI ANH

Bài L2/335. Một bơm không khí có pittông P được dùng để hút không khí trong một bình thể tích V với hai van K_1 và K_2 (hình vẽ). Cứ sau một nhát bơm (một lần kéo P lên và đẩy P xuống) sẽ hút được một thể tích là Δv (thể tích của ống bơm). Hỏi sau bao nhiêu nhát bơm thì áp suất khí trong bình giảm đi n lần. Coi quá trình là đẳng nhiệt, khí là khí lí tưởng.

Lời giải. Gọi p_0 là áp suất khí lúc đầu ; $p_1, p_2, \dots, p_m$ là áp suất khí sau nhát bơm 1, 2, ... m. Do quá trình là đẳng nhiệt, khí là khí lí tưởng, áp dụng định luật Boyle-Mariotte, ta có :



$$p_0 V = p_1 (V + \Delta V) \Rightarrow p_1 = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right) \quad (1)$$

$$p_1 V = p_2 (V + \Delta V) \Rightarrow p_2 = p_1 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right) \quad (2)$$

.....

$$p_{m-1} V = p_m (V + \Delta V) \Rightarrow p_m = p_{m-1} \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right) \quad (m)$$

Từ (1), (2), ..., (m), suy ra :

$$p_m = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^m \quad (m+1)$$

Giả sử sau m nhát bơm áp suất khí trong bình giảm đi n lần, nghĩa là : $p_m = p_0/n$. Phương trình (m+1) trở thành :

$$\frac{1}{n} = \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^m \Rightarrow n = \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^m$$

Để dàng tìm được :

$$m = \log_{\left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)} n \text{ hay } m = \frac{\log n}{\log \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)}$$

Nhận xét. Hầu hết các lời giải gửi về Toà soạn đều đúng. Sau đây là các bạn có lời giải tốt :

Vinh Phúc : Cù Quốc Cường, Ngô Việt Cường, Đoàn Anh Quân, 11A3, THPT chuyên Vinh Phúc ;
Hà Nội : Nguyễn Thành Trung, 10A chuyên Lí, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội ; **Thanh Hoá :** Lê Thị Vân, 10A1, THPT Đông Sơn I, Vũ Thế Mạnh, 10H, THPT Ba Đình, Nga Sơn, Bùi Văn Trung, 12F Nguyễn Tuấn Dương, 12T, THPT Lam Sơn, Phạm Khắc Thanh, 10B1, THPT Triệu Sơn I ; **Quảng Ngãi :** Lê Hà Kiệt, 12A2, THPT Đức Phổ I ; **Khánh Hoà :** Nguyễn Ngọc Kì Nam, 11 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Yên Bái :** Trần Quang Khải, 12lí, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Đắk Lắk :** Trịnh Thị Ngọc Tú, 10 Lí, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột ; **Hưng Yên :** Trần Khánh Hoàn, 10A1, THPT Yên Mi ; **Nam Định :** Dương Quảng Điền, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Bắc Ninh :** Trần Thái Hà, Nguyễn Công Đường, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Hà Tĩnh :** Hoàng Thanh Hà, Lí K9, THPT chuyên Hà Tĩnh.

ANH HOÀNG

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

• Trong đề bài T8/338 THPT số 338 (8.2005) đã in nhầm là $P(0) = 1$, xin sửa lại là $P(0) = 0$.

• Trong bài Một số tính chất thú vị của hình vuông THPT số 338 (8.2005) có một mệnh đề chưa chuẩn xác. Xin đọc lại như sau : Cho hình vuông $ABCD$ và các điểm M, N, P, Q nằm trên các cạnh AB, CD, AD và BC theo thứ tự sao cho $\widehat{AMN}$ và $\widehat{DPQ}$ cùng nhọn (hoặc cùng tù, hoặc cùng vuông). Khi đó $MN = PQ$ khi và chỉ khi $MN \perp PQ$.

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

HỘI NGHỊ KHOA HỌC VỀ CÁC PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU TOÁN HỌC TRONG HỆ THPT CHUYÊN

Nhân kỉ niệm 40 năm thành lập hệ THPT chuyên toán trường ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội, ngày 16.08.2005 tại trường ĐHKHTN Hà Nội đã tổ chức Hội nghị khoa học. Các báo cáo tập trung vào hai chủ đề là Kinh nghiệm giảng dạy, bồi dưỡng học sinh có năng khiếu toán và Một số phương pháp giải toán trong chương trình toán PT dành cho học sinh chuyên toán. Nhiều nhà toán học và các giảng viên của các trường đại học, nhiều giáo viên toán các trường THPT chuyên ở các miền đất nước đã tới dự.

P.V.

HỘI NGHỊ TRIỂN KHAI NHIỆM VỤ NĂM HỌC 2005 - 2006 CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Trong hai ngày 24 và 25.8.2005 tại Đồ Sơn, TP Hải Phòng đã diễn ra Hội nghị đánh giá kết quả năm học 2004-2005 và hướng dẫn nhiệm vụ năm học 2005-2006 của các Vụ Giáo dục Trung học, Vụ Giáo dục thường xuyên và Thanh tra giáo dục. Hội nghị cũng tổ chức tổng kết công tác giáo dục ngoại khóa thực hành giải toán trên máy tính CASIO trong 5 năm (1999-2005). Bộ GD&ĐT đã tặng Bằng khen cho các đơn vị và cá nhân có thành tích xuất sắc trong công tác ngoại khóa thực hành giải toán trên máy tính CASIO với sự tài trợ giải thưởng của Công ty xuất nhập khẩu Bình Tây BITEK.

V.H.

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 340 (10.2005)

- Kết quả Cuộc thi giải Toán và Vật lí trên THPT năm học 2004-2005
- Góc định hướng (tiếp theo)
- Lời giải đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT Lê Hồng Phong TP Hồ Chí Minh 2005.
- Lời giải các bài thi chọn HS giỏi toán quốc gia THPT 2004-2005
- Về một bài Hình học trong Kỳ thi tuyển sinh Đại học 2005.

Mời các bạn đặt mua tạp chí THPT tại Bưu điện.

THTT



Đáp án

Ô SỐ KỈ NIỆM 60 NĂM QUỐC KHÁNH

Dòng 1.

Số tỉnh, thành có biển: 28.

Số tỉnh, thành có đường biên giới trên đất liền: 25.

Dân số Việt Nam: 82 triệu người.

Tuổi của Hà Nội tính từ Kinh đô Cổ Loa: 2200 năm.

Tỉnh có mật độ dân số cao nhất là Thái Bình: 1213 người/km².

Dòng 2.

Tỉnh có ít dân nhất là Kon Tum: 265000 người.

Số thị xã: 59.

Tỉnh có mật độ dân số thấp nhất là Kon Tum 27 người/km².

Tỉnh có diện tích hẹp nhất là Bắc Ninh: 799km².

Tuổi của Hà Nội tính từ Thăng Long: 995 năm.

Dòng 3.

Số thị trấn: 580 (làm tròn).

Diện tích một trong ba tỉnh hẹp nhất là Hà Nam: 823km².

Dòng 4.

Số tỉnh, thành phố thuộc trung ương: 64.

Mật độ dân số nội thành Hà Nội: 14400 người/km².

Số thành phố: 31 (tính đến 6.2005).

Dòng 5.

Thị xã ít dân nhất là Mường Lay (tức là TX. Lai Châu trước đây): 13000 người.

Thành phố có mật độ dân số nội thành cao nhất là Nam Định: 30000 người/km².

Tỉnh có số dân đông nhất là Thanh Hóa: 3500000 người.

Cột 1. Diện tích một trong 3 tỉnh hẹp nhất là Hưng Yên: 895km².

Cột 2. Mật độ dân số cao nhất của TP thuộc trung ương là Hà Nội: 2463 người/km².

Cột 3. Số đô thị nước ta: 656.

Cột 4. Số thành phố thuộc trung ương: 5.

Cột 8. Năm kỉ niệm: 2005.

Cột 9. Tuổi của đô thị cổ thứ hai sau Hà Nội là Thiên Trường, sau là Vỹ Hoàng, nay là Nam Định: 740 năm.

Cột 10. Diện tích tỉnh rộng nhất là Đắk Lắk (tỉnh cũ): 19800km².

Cột 13. Chiều dài bờ biển nước ta: 3300km.

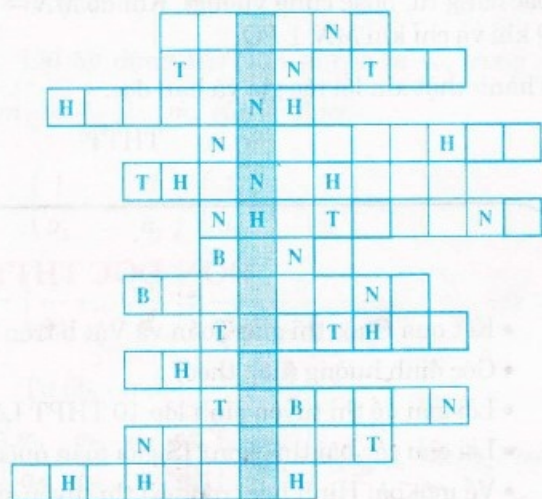
Nhận xét. 1. Rất vui vì nhiều bạn đọc yêu toán đã có hiểu biết khá rõ ràng về đất nước mình.

2. Các số liệu trên là lấy ở nhiều tư liệu và không cùng thời điểm nhưng là cập nhật. Đến tháng 9.2005 này số liệu đã khác. Ví dụ có thêm TP Rạch Giá từ 7.2005. Có chỗ là "bấy" các bạn như số tỉnh, thành, trước là 61 nay là 64.

3. Hai độc giả *Phạm Đức Chấn*, thôn An Hiệp, xã Liên Hiệp, Đức Trọng, Lâm Đồng; *Dương Minh Tiến*, lớp 11TL, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long có các đáp án tốt hơn cả. Ngoài ra, các bạn *Trần Văn Ngọc Tân*, 11/1, THPT Hoàng Diệu, Điện Bàn, Quảng Nam, *Nguyễn Thị Trâm*, lớp 12A1, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu, Nghệ An; *Lê Xuân Quân*, thôn 9, Xuân Du, Như Thanh, Thanh Hóa; *Trần Ngọc Toàn*, xóm Thành Công, xã Chấn Hưng, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc; *Trần Thái Hà*, 12 Lý, THPT chuyên Bắc Ninh; *Hoàng Văn Hùng*, 12A1, THPT Kinh Môn, Hải Dương cũng có đáp án tương đối tốt.

VŨ THANH THÀNH

Ô CHỮ NGÀY KHAI GIẢNG



Bạn hãy điền nốt các chữ cái (không kể dấu) vào ô chữ để biết ý nghĩa cột tô màu, theo các gợi ý dưới đây được viết theo thứ tự các dòng:

TOÁN HỌC MUÔN MÀU (Tiếp bìa 2)

Giải đáp :

CẮT CÁC HÌNH VUÔNG GHÉP THÀNH ĐA GIÁC ĐỀU

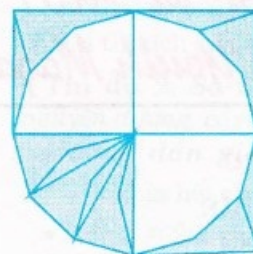
(Đề đăng trên THPT số 336
tháng 6.2005)

1) Xét đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . Đa giác này gồm n tam giác cân và bằng nhau có đỉnh là O , cạnh bên là R và góc ở đỉnh là $\frac{360^\circ}{n}$, do đó diện tích đa giác đều n cạnh là $S_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$. Từ đó $S_n = k \cdot R^2$ với k là số nguyên $\Leftrightarrow k = \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$ là số nguyên.

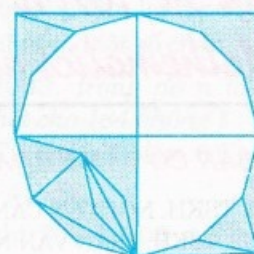
Để thấy với $n = 4$ thì $S_4 = 2R^2$, với $n = 12$ thì $S_{12} = 6R^2 \sin 30^\circ = 3R^2$.

Việc chứng minh $S_n = kR^2$ với k nguyên dẫn đến giải phương trình bậc n hệ số nguyên nghiệm hữu tỉ, phương trình này có nghiệm là $k = 4$ và $k = 12$.

2) Dưới đây trình bày 3 cách cắt ba hình vuông thành 9 mảnh rồi ghép lại thành hình đa giác đều 12 cạnh. Ta xếp 3 hình vuông sát nhau sao cho có 1 đỉnh chung cho cả 3 hình vuông. Các mảnh bị cắt rời ra ở



Hình 2



Hình 3

ba hình vuông rồi xếp vào góc vuông còn lại được in đậm hơn trên các hình 2, 3, 4.

Các bạn sau có lời giải tốt, được nhận tặng phẩm :

1. Nguyễn Văn Ngọc, 11 Lý, THPT chuyên Bắc Ninh
2. Nguyễn Thị Thanh Thủy, tổ 39, khu 3, P. Vĩnh Niệm, Q. Lê Chân, TP. Hải Phòng.
3. Trần Khắc Dũng, 11B, THPT Anh Sơn 1, Anh Sơn, Nghệ An
4. Tô Phương Nhung, 12A2, THPT Mai Sơn, Mai Sơn, Sơn La.
5. Lê Như Mạnh, khu 3, TTr. Thọ Xuân, Thanh Hóa.

PHI PHI

- Đến trường để ... kiến thức.
- Phương pháp giảng dạy mới : lấy học sinh làm ...
- Lực lượng chính trong mỗi nhà trường.
- Giờ học thú vị
- Phòng rất cần cho dạy và học.
- Nơi có các hoạt động dạy - học.
- Công cụ cần thiết để dạy học.
- Nơi gần bó với người thầy.
- Đơn vị đo thời gian ở trường.
- Đơn vị lao động của các giảng viên.
- Đơn vị lao động nhỏ của các thầy, cô giáo.
- Hai hoạt động chính trong lao động của người thầy.
- Cầu nối giữa thầy và trò.

Đáp án và tên các bạn giải tốt ô chữ sẽ đăng vào tháng 11.2005 trên số 341. Chúc các bạn may mắn.

VŨ ĐO QUAN

GIẢI TRÍ TOÁN HỌC (Tiếp trang 18)

PHÉP TOÁN TOÀN CHỮ SỐ 9

Nhân dịp mừng ngày khai giảng 5/9 và gặp bạn bè trong năm học mới. Sơn đã đưa ra một bài toán để đố bạn bè của mình. Bài toán như sau :

"Hãy dùng bốn chữ số 9 và các kí hiệu toán học để lập phép toán cho kết quả là 999".

Bạn cùng giải bài toán này để những ngày khai giảng của chúng ta thêm ý nghĩa nhé !

NGUYỄN THỊ THU SƯƠNG
(GV THPT An Phước, Ninh Phước,
Ninh Thuận)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 339 (9-2005)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc

Tổng biên tập NXB Giáo dục

VŨ DƯƠNG THỤY

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Đức Trường – Sử dụng tính chẵn lẻ trong giải toán.
- 3 **Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên trường THPT Lê Hồng Phong TP Hồ Chí Minh năm học 2005-2006 môn Toán.**
- 4 **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**
Đặng Thanh Hải – Bất đẳng thức Cô-si trong đề thi tuyển sinh đại học năm 2005.
- 6 ***Nguyễn Văn Mậu* – Trại hè Hùng Vương 2005.**
- 7 **Toán học và đời sống – Mathematics and Life**
Phan Thanh Quang - Nguyễn Văn Thiêm
Toán học và sự lan truyền bệnh dịch.
- 8 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Nguyễn Ngọc Khoa – Tính đối xứng của bài toán cực trị.
- 10 ***Vũ Kim Thủy* – Kết quả Cuộc thi Olympic Toán Singapore 2005 của học sinh Việt Nam.**
- 14 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Nguyễn Minh Hà – Nguyễn Việt Hải – Góc định hướng.
- 16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/339, ..., T12/339, L1, L2/339.
- 18 **Giải trí toán học – Math Recreation**
- 19 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 335.
- 30 **Câu lạc bộ – Where's the Mistake?**

Bìa 2 : Toán học muôn màu

Tổng biên tập: PHAN ĐOÀN THOẠI Trưởng ban biên tập: NGUYỄN VIỆT HẢI. Thư kí Tòa soạn: VŨ KIM THỦY.
Biên tập: HỒ QUANG VINH. Trị sự, Chế bản: VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam: TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT: 08.8309049.



Hiệu trưởng
TẠ VƯỢNG

TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN VINH PHÚC

Trường THPT chuyên Vinh Phúc được thành lập tháng 5 năm 1997. Hai năm học đầu, trường chưa có cơ sở riêng nên học sinh của trường vẫn học tại trường THPT Trần Phú và Tiểu học Liên Bảo.

Ngày đầu thành lập trường có 10 lớp chuyên với 350 học sinh và 31 cán bộ giáo viên, nhân viên. Hiện nay trường có 30 lớp với 930 học sinh và 82 cán bộ, giáo viên, nhân viên. Đến nay cơ ngơi của trường được xây dựng khá khang trang trên diện tích 37.000m².

Sau 8 năm xây dựng và phát triển, Trường THPT chuyên Vinh Phúc là trường tiên tiến xuất sắc dẫn đầu chất lượng giáo dục của tỉnh Vinh Phúc; trường nhiều lần được Bộ Giáo dục và Đào tạo, UBND tỉnh Vinh Phúc, Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen. Năm 2003 Trường được Nhà nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba. Từ khi thành lập đến nay tỉ lệ đỗ tốt nghiệp luôn là 100%, tỉ lệ đỗ Đại học - Cao đẳng trên 90%. Tính đến nay trường đã có 3403 học sinh giỏi cấp tỉnh, 387 học sinh giỏi cấp Quốc gia và đã đoạt được 2 Huy chương Vàng Quốc tế môn Toán và Lý, 2 Huy chương Đồng Quốc tế

môn Toán và Sinh, 2 Bằng khen Quốc tế môn Sinh, 1 Huy chương Vàng môn Toán Châu Á - Thái Bình Dương, 2 Huy chương Đồng môn Lý Châu Á, 1 Bằng khen môn Lý Châu Á, 8 giải Vàng, 1 giải Bạc thi Học sinh giỏi Singapore. Còn nhiều học sinh đã đoạt giải cao hàng năm trên báo Toán học và Tuổi trẻ, báo Vật lý và Tuổi trẻ; có học sinh đã đạt thành tích cao trong cuộc thi Đường lên đỉnh Olympia của VTV.

Đội ngũ giáo viên của trường cũng phát triển và trưởng thành: 28 GV đã có trình độ thạc sĩ. Những gương mặt tiêu biểu là các thầy cô: Lê Anh Tuấn, Nguyễn Duy Liên (Môn Toán), Nguyễn Đức Phi (Môn Lý), Nguyễn Phong Nhã, Nguyễn Thị Lê Chung (Môn Sinh) có nhiều học sinh giỏi cấp Quốc gia, Quốc tế, Ngô Văn Triệu (Môn Hoá), Nguyễn Thị Thu (Môn Sử), Sái Ngọc Chí (Môn Địa), Vũ Mạnh Hà (Môn Tin), Tạ Thị Bình (Môn tiếng Anh) có nhiều học sinh giỏi cấp Quốc gia.



Các thầy cô giáo tổ Toán-Tin của trường

Tám năm, khoảng thời gian rất ngắn so với sự nghiệp trồng người nhưng cũng đủ để cho ngôi trường trẻ tuổi khẳng định mình. Với sự vươn lên của sức trẻ, Trường THPT chuyên Vinh Phúc rất tin tưởng vào tương lai phát triển của mình.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT41M5

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT do Bộ VHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2005

Giá : 4000 đồng
Bốn nghìn đồng

CASIO

Khi mua máy tính **CASIO**
bạn sẽ được tặng **NGAY!**

Chương trình

Quà Tặng

Mùa khai trường

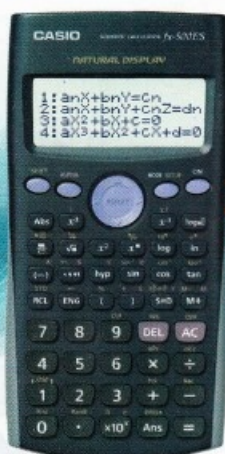


Tặng 02 bút bi cao cấp
Made in Thai Lan
Khi mua 01 máy tính

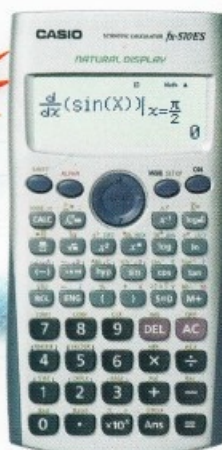


Tặng sách hướng dẫn sử dụng
khi mua máy tính khoa học
CASIO

Máy tính khoa học duy nhất hiện thị như sách giáo khoa.



fx 500ES



fx 570ES

Cách nhập các bài toán vào máy và hiển thị kết quả giống như giáo viên viết trên bảng

Chú ý!

MÁY TÍNH CASIO
THẬT PHẢI CỎ:



Tem bảo hành
của chính hãng



Dạ quang chữ
VKHHS-BCA
khí chiếu tia cực tím



Phiếu bảo hành 02 năm (khi mua đề nghị người
tiêu dùng nên yêu cầu người bán hàng phải ghi đầy
đủ tên, địa chỉ đại lý bán hàng. Đại lý bán hàng
phải có trách nhiệm nhận lại máy hư và gửi về cho
công ty để bảo hành)



CÔNG TY CỔ PHẦN XNK BÌNH TÂY (BITEX)

Email: bitex@bitex.com.vn

Website : http://www.bitexvn.com

Chương trình quà tặng bắt đầu từ 24/08 đến hết 30/11
(Không áp dụng cho Model HL 122L)
Xem chi tiết tại Nhà sách, cửa hàng bán máy tính